

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TÜM GERİLME ORANLARI SABİT TUTULARAK YAPILAN BİRİM
HÜCRE HESAPLAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Berkay Koçan

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cihan Tekoğlu

Aralık 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TÜM GERİLME ORANLARI SABİT TUTULARAK YAPILAN BİRİM HÜCRE HESAPLAMALARI

Berkay Koçhan

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cihan Tekoğlu

Tarih: Aralık 2021

Metallerde ve metal alaşımlarında sünek kırılma, ikinci faz parçacıklarda çekirdeklenen mikroskopik ölçekli boşlukların büyümesi ve birleşmesi yoluyla meydana gelmektedir. Sünek kırılma aşamalarının, özellikle boşluk çekirdeklenmesi ve birleşmesi aşamalarının ayrıntılı olarak deneysel yöntemler ile araştırılması oldukça zordur ve nümerik yöntemlerin kılavuzluğunu gerektirmektedir. Literatürde yapılan çalışmalar ile periyodik olarak dağılmış boşluklar içeren ideal malzemeler üzerinde yapılan boşluklu birim hücre sonlu elemanlar hesaplamaları, sünek kırılmanın nümerik simülasyonları için uygun bir araç haline gelmiştir. Geçen yüzyılda, gerilme üçeksenliliğinin sünek kırılma üzerindeki etkisi iyi bilinmemekte, ancak kesme yükleri göz ardı edilmekteydi. Bu nedenle, boşluklu birim hücre hesaplamaları, yalnızca normal gerilmelerin oranları, yani $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$ ve $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$ kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bununla birlikte, son on yılda yapılan deneysel çalışmalar, Lode parametresi aracılığıyla sünek kırılma simülasyonlarına dahil edilen, düşük gerilme üçeksenliliğinde kesme yüklerinin sünek kırılma üzerindeki belirgin etkisini ortaya çıkarmıştır. Kayma yüklerinin boşluk büyümesi ve birleşme üzerindeki etkisini hesaba katmak için Tekoğlu (2014), merkezinde küresel bir boşluk içeren kübik birim hücre üzerindeki gerilme durumunun üç adet boyutsuz gerilme oranı, yani $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$ ve $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$ ile temsil edildiği bir sonlu elemanlar çerçevesi geliştirmiştir. Bu

çalışmada, Tekoğlu (2014) çalışması genişletilerek, birim hücre üzerindeki gerilme durumunun tamamının beş adet boyutsuz gerilme oranı, yani $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$, $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$, $\rho_{13} = \Sigma_{13}/\Sigma_{22}$ ve $\rho_{23} = \Sigma_{23}/\Sigma_{22}$ ile temsil edilebildiği bir sonlu elemanlar çatısı geliştirilmiştir. Geliştirilen hesaplama çatısı, sayısal olarak verimli olmasının yanı sıra, gerilme oranlarını hesaplama boyunca düşük yüzdelerdeki (%1'in altında) hatalar ile sabit tutabilmektedir. Ayrıca, boşluklar veya parçacıklar içeren herhangi bir birim hücreye uygulanabilir olan genel bir hesaplama çatısı olma özelliğini taşımaktadır. Bu çatıya ek olarak, sadece asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen birim hücre hesaplamaları için modelleme ve hesaplama maaliyeti daha düşük olan alternatif bir yöntem önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Birim hücre hesaplaması, Sonlu elemanlar yöntemi, Gerilme üçeksenliliği, Lode parametresi, Sünek kırılma.

ABSTRACT

Master of Science

UNIT CELL CALCULATIONS KEEPING ALL STRESS RATIOS CONSTANT

Berkay Koçhan

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Doç. Dr. Cihan Tekoğlu

Date: December 2021

Ductile fracture in metals and metal alloys occurs through nucleation, growth, and coalescence of micron-scale voids nucleated at second phase particles. A detailed experimental investigation of the stages of ductile fracture, especially that of void nucleation and coalescence, is rather challenging and requires guidance from numerical simulations. With the studies in the literature, finite element voided unit cell calculations performed on ideal materials containing periodically distributed voids have become a convenient tool for numerical simulations of ductile fracture. In the last century, the effect of stress triaxiality on ductile fracture was well known, but shear loads were disregarded. Therefore, voided unit cell calculations were performed by prescribing only the ratios of normal stresses, i.e. $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$ and $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$. Experimental studies in the last decades, however, revealed a pronounced effect of shear loads on ductile fracture at low stress triaxiality, incorporated into ductile fracture simulations through the Lode parameter. In order to account for the effect of shear loads on void growth and coalescence, Tekoğlu (2014) developed a finite element framework where the stress state on a cubic unit cell containing a spheroidal void at its center is represented by three non-dimensional stress ratios, i.e. $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$, and $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$. The present study attempts to extend the work of Tekoğlu (2014) by allowing a complete definition of the stress state on a unit cell with five

non-dimensional stress ratios, i.e. $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$, $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$, $\rho_{13} = \Sigma_{13}/\Sigma_{22}$, and $\rho_{23} = \Sigma_{23}/\Sigma_{22}$. Aside from being numerically efficient, the developed framework allows keeping the errors in the prescribed stress ratios below a few percent. The developed framework is generic and can be applied to any unit cells containing voids or particles. In addition to this framework, an alternative method that lowers modeling and computation costs is proposed for unit cell calculations performed only under principal stress state.

Keywords: Unit cell calculation, Finite element method, Stress triaxiality, Lode parameter, Ductile fracture.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Doç. Dr. Cihan Tekoğlu'na, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme, çalışma arkadaşlarıma ve Ayőe Usta Yayla'ya çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | iii |
| TEŞEKKÜR | v |
| İÇİNDEKİLER | vi |
| ŞEKİL LİSTESİ | vii |
| ÇİZELGE LİSTESİ | xi |
| KISALTMALAR | xii |
| SEMBOL LİSTESİ | xiii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Literatür Araştırması | 2 |
| 2. TEORİK ARKA PLAN | 13 |
| 2.1 Gerilme Durumu | 13 |
| 2.2 Birim Hücrenin Gerilme Durumunu Kontrol Etmek İçin Gerekli Kinematik Kısıtlar | 16 |
| 2.2.1 Asal Gerilme Durumu İçin Kinematik Kısıtlar | 22 |
| 2.2.2 Normal Gerilmelere Ek Bir Kesme Gerilmesi Bulunan Durum İçin Kinematik Kısıtlar | 24 |
| 2.2.3 En Genel Yükleme Durumu İçin Kinematik Kısıtlar | 26 |
| 3. NÜMERİK YÖNTEMLER | 29 |
| 3.1 Asal Gerilme Durumu İçin Birim Hücre | 29 |
| 3.2 Normal Gerilmeye Ek Bir Kesme Gerilmesi Bulunan Durum İçin Birim Hücre | 35 |
| 3.3 En Genel Yükleme Durumu İçin Birim Hücre | 40 |
| 4. BİRİM HÜCRE HESAPLAMALARININ SONUÇLARI | 47 |
| 4.1 Asal Gerilme Durumu Altındaki Birim Hücre Hesaplamalarının Sonuçları | 49 |
| 4.2 Genel Gerilme Durumu Altındaki Birim Hücre Hesaplamalarının Sonuçları | 60 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER | 73 |
| KAYNAKLAR | 75 |
| EKLER | 79 |

ŞEKİL LİSTESİ

| | |
|---|----|
| Şekil 1.1: Bakır çekme numunesi üzerindeki kalıntılarda çekirdeklenen boşlukların optik mikroskop altındaki görüntüsü. Oklar, ikinci faz parçacıklarındaki çatlakları göstermektedir (Puttick, 1959). | 3 |
| Şekil 1.2: Sünek kırılma fenomeninin üç dominant gerçekleşme biçimi (a) Mikroskopik çatlak ilerlemesi sebebiyle gerçekleşen kırılma (b) Kesme şeridinde çekirdeklenen boşlukların büyüyüp birleşmesi ile gerçekleşen kırılma (c) Çekirdeklenen boşlukların oluşturduğu ve yumuşamaya sebebiyet veren şerit üzerinden gerçekleşen kırılma (Pineau v.d., 2016). | 4 |
| Şekil 1.3: (a) Genel gerilme durumunu oluşturan gerilme bileşenlerinin ve (b) asal gerilme durumunun şematik gösterimi. | 6 |
| Şekil 1.4: Mohr çemberi üzerinde gerilme durumu gösterimi. | 7 |
| Şekil 1.5: Farklı asal gerilme durumlarının T ve L parametreleri kullanılarak ifadesine örnekler. (a) Düzlem gerinim çekme, (b) saf kesme, (c) tek eksenli çekme, (d) tek eksenli basma. | 8 |
| Şekil 1.6: Tip I birim hücre modeli şematik gösterimi (Dæhli v.d., 2022). | 8 |
| Şekil 1.7: Tip II birim hücre modeli şematik gösterimi (Dæhli v.d., 2022). | 9 |
| Şekil 1.8: Tip III birim hücre modeli şematik gösterimi (Dæhli v.d., 2022). | 10 |
| Şekil 2.1: Boşluk merkezinde orijini bulunan Kartezyen koordinat sistemine göre, birim hücreye etki eden makroskobik gerilmelerin şematik gösterimi. | 14 |
| Şekil 2.2: (a) Genel yüklemeye altındaki üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal malzeme. (b) Üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal malzemenin kesit görüntüleri. (c) Genel yüklemeye altındaki birim hücre. | 17 |
| Şekil 2.3: Birim hücrenin ve yüzeylerine uygulanan yer değiştirmelerin şematik gösterimi ile yüzey isimlendirmeleri. | 19 |
| Şekil 2.4: Birim hücreye etkiyen kuvvetleri oluşturan deplasmanların (U_1 , U_2 , U_3 ve U_4) şematik gösterimi. | 24 |
| Şekil 3.1: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemeler (P_1 , P_2 ve P_3) altında yapılan hesaplamalarda kullanılan boşluklu BH'nin 1/8'lik kısmına ait SE çözüm ağı ile yüzeylere ait isimlendirme ve yay sisteminin gösterimi. Burada yer alan koordinat eksenleri görünürlük için BH'nin önünde gösterilmektedir. Aslında, koordinat ekseninin orijini arka, orta ve alt yüzeylerin kesiştiği noktada yer almaktadır. | 30 |

| | |
|--|----|
| Şekil 3.2: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yükleme altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi. | 31 |
| Şekil 3.3: M_1 ve N_1 düğüm noktaları arasında oluşturulan ve x_1 doğrultusundaki normal yüklemenin uygulanmasında kullanılan yay bağlantısının şematik gösterimi. | 32 |
| Şekil 3.4: Normal yönlü yüzey traksiyonları tanımlanmış örnek bir temsili hacim elemanı SE modeli. | 35 |
| Şekil 3.5: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemelere (P_1 , P_2 ve P_3) ek olarak bir kesme yüklemesinin (P_4) de bulunduğu durum altında yapılan hesaplamalarda kullanılan boşluklu BH'nin 1/4'lük kısmına ait SE çözüm ağı ile yüzeylere ait isimlendirme ve yay sisteminin gösterimi. Burada yer alan koordinat eksenini görünürlük için BH'nin önünde gösterilmektedir. Aslında, koordinat ekseninin orjini arka, orta ve alt yüzeylerin kesiştiği noktada yer almaktadır. | 36 |
| Şekil 3.6: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemeye ek bir kesme yüklemesinin de bulunduğu durum altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi. | 38 |
| Şekil 3.7: Tüm gerilme oranları sabit tutulabilen birim hücre SE modellenmesi, çözümü ve analiz sonucu işleme süreçleri. | 41 |
| Şekil 3.8: (a) Örnek bir birim hücrenin 1/2'lik çözüm ağı. (b) En genel yükleme durumu altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi. | 42 |
| Şekil 4.1: Hesaplamalarda kullanılan (a) $f_0 = 0.01$ küresel boşluk oylum oranına, (b) $f_0 = 0.05$ küresel boşluk oylum oranına ve (c) $f_{0p} = 0.05$ küresel parçacık oylum oranına sahip birim hücrelere ait çözüm ağının 1/4'lük kısmının görünümü. | 48 |
| Şekil 4.2: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.01$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 1 (c) analiz 5 (d) analiz 7. | 51 |
| Şekil 4.3: Analiz 1-8'e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri. | 52 |
| Şekil 4.4: Tek eksenli gerinimin gözlemlendiği örnek bir BH hesaplamasının (a) başlangıç (b) boşluk birleşmesi ve (c) x_2 doğrultusundaki tek eksenli gerinimin abartılı şekilde görülebildiği çözüm adımı sonu görünümleri. | 53 |
| Şekil 4.5: Analiz 1-8'e ait yükleme boyunca elde edilen E_{11} değerlerine karşılık E_{22} değerlerinin gösterimi. | 54 |
| Şekil 4.6: Analiz 1-8'e ait yükleme boyunca elde edilen E_{33} değerlerine karşılık E_{22} değerlerinin gösterimi. | 54 |

| | |
|--|----|
| Şekil 4.7: Analiz 1-8'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 55 |
| Şekil 4.8: Analiz 1-8'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 55 |
| Şekil 4.9: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.05$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 9 (c) analiz 11 (d) analiz 13. | 57 |
| Şekil 4.10: Analiz 9-14'e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri. | 58 |
| Şekil 4.11: Analiz 9-14'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 59 |
| Şekil 4.12: Analiz 9-14'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 59 |
| Şekil 4.13: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.01$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 16 (c) analiz 17 (d) analiz 18. | 62 |
| Şekil 4.14: Analiz 15-19'a ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri. | 63 |
| Şekil 4.15: Analiz 15-19'a ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 63 |
| Şekil 4.16: Analiz 15-19'a ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 64 |
| Şekil 4.17: Analiz 15-19'a ait ρ_{12} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 64 |
| Şekil 4.18: Analiz 15-19'a ait ρ_{23} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 65 |
| Şekil 4.19: Analiz 15-19'a ait ρ_{13} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 65 |
| Şekil 4.20: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_{0p} = 0.05$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 20 (c) analiz 21. | 67 |
| Şekil 4.21: Analiz 20 ve 21'e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri. | 68 |
| Şekil 4.22: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 69 |
| Şekil 4.23: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 69 |
| Şekil 4.24: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{12} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 70 |
| Şekil 4.25: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{23} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 70 |
| Şekil 4.26: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{13} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri. | 71 |

| | |
|---|----|
| Şekil 5.1: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 2 (b) analiz 3 (c) analiz 4 (d) analiz 6 (e) analiz 8. | 80 |
| Şekil 5.2: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 10 (b) analiz 12 (c) analiz 14. | 81 |
| Şekil 5.3: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 15 (b) analiz 19. | 82 |



ÇİZELGE LİSTESİ

| | |
|--|----|
| Çizelge 4.1: Riks yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda kullanılan çözüm adımı parametreleri. | 49 |
| Çizelge 4.2: ÇNK yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda kullanılan çözüm adımı parametreleri ile yay direngenliği. | 50 |
| Çizelge 4.3: Asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.01$ olan BH hesaplamalarına ait analiz isimlendirmesi, eğri gösterimi, çözüm yöntemi ve boyutsuz parametre bilgisi. | 50 |
| Çizelge 4.4: Analiz 1-8'e ait birim hücre hesaplamalarında harcanan toplam çekirdek süresi. | 56 |
| Çizelge 4.5: Asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.05$ olan BH hesaplamalarına ait analiz isimlendirmesi, eğri gösterimi, çözüm yöntemi ve boyutsuz parametre bilgisi. | 56 |
| Çizelge 4.6: Analiz 9-14'e ait birim hücre hesaplamalarında harcanan toplam çekirdek süresi. | 60 |
| Çizelge 4.7: Genel gerilme durumu altında gerçekleştirilen, BH ($f_0 = 0.01$) hesaplamalarına ait isimlendirme, gösterim ve gerilme oranı bilgileri. | 60 |
| Çizelge 4.8: Analiz 15-19'a ait L , T , S_{12} , S_{13} ve S_{23} değerleri. | 61 |
| Çizelge 4.9: Genel gerilme durumu altında gerçekleştirilen, BH ($f_{0p} = 0.05$) hesaplamalarına ait isimlendirme, gösterim ve gerilme oranı bilgileri. | 66 |
| Çizelge 4.10: Analiz 20 ve 21'e ait L , T , S_{12} , S_{23} ve S_{13} değerleri. | 66 |

KISALTMALAR

| | |
|-------------|---|
| BH | : Birim hücre |
| THE | : Temsili hacim elemanı |
| SE | : Sonlu elemanlar |
| İS | : İlk eğri uzunluğu artım büyüklüğü |
| TTE | : Tahmini toplam eğri uzunluğu |
| EKS | : İzin verilen en küçük eğri uzunluğu artım büyüklüğü |
| EBS | : İzin verilen en büyük eğri uzunluğu artım büyüklüğü |
| İAB | : İlk artım büyüklüğü |
| TAB | : Toplam adım büyüklüğü |
| EKAB | : İzin verilen en küçük artım büyüklüğü |
| EBAB | : İzin verilen en büyük artım büyüklüğü |

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler Açıklama

| | |
|----------------------|---|
| T | Gerilme üçeksenliliği |
| L | Lode parametresi |
| S | Kesme oranı parametresi |
| ρ | Gerilme oranı parametresi |
| ε | Elastik gerinim |
| ε_{eq}^p | Eşdeğer plastik gerinim |
| σ | Gerçek gerilme |
| σ_0 | Akma gerilmesi |
| E | Young modülü |
| ν | Poisson oranı |
| n | Pekleşme katsayısı |
| f | Boşluk oylum oranı |
| f_p | Parçacık oylum oranı |
| f_0 | Yükleme öncesi (başlangıçtaki) boşluk oylum oranı |
| f_{0p} | Yükleme öncesi (başlangıçtaki) parçacık oylum oranı |

1. GİRİŞ

Metal ve metal alaşımlarında sünek kırılma, kalıntı ve ikinci faz parçacıklarda peydahlanan boşlukların büyümesi ve birleşmesi aşamaları ile meydana gelmektedir. Sünek kırılma aşamalarının ayrıntılarının deney yolu ile incelenmesi oldukça zor olmakla birlikte, nümerik benzetimlerin kılavuzluğunu da gerektirmektedir (örn. Pineau, A.A. Benzerga v.d., 2016).

Literatür incelendiğinde, periyodik olarak dağılmış boşluk içeren ideal malzemeler üzerinde, sonlu elemanlar (SE) yöntemi kullanılarak, birim hücre (BH) hesaplaması çalışmalarının gerçekleştirildiği görülmektedir (örn. Needleman, 1972; Lin v.d., 2006; Barsoum v.d., 2007b; Barsoum v.d., 2011; A. Benzerga v.d., 2012; Tekoğlu, 2014). Bu çalışmaların başarısı ile, SE yöntemi kullanılarak yapılan BH hesaplamalarının, sünek kırılmanın nümerik benzetiminde uygun bir araç olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

Geçtiğimiz yüzyıldaki literatür çalışmaları, gerilme üçeksenliliğinin (T) sünek kırılma üzerine etkilerini ortaya koyarken, kesme yüklemelerinin etkilerini göz ardı etmişlerdir. Sadece normal gerilmeler göz önüne alınarak sürdürülen bu çalışmalarda Lode parametresinin $L = \mp 1$ olduğu durumları kapsamaktadır. Bununla birlikte, son on yılda yapılan deneysel çalışmaların sonucunda, düşük gerilme üçeksenliliği değerlerinde malzeme sünekliliğine kesme yüklerinin de belirgin olarak etki ettiği ortaya çıkmıştır (örn. Leblond v.d., 2008; Nielsen v.d., 2011; Scheyvaerts v.d., 2011; Tekoğlu v.d., 2012).

Kesme yüklerinin boşluk büyümesi ve birleşmesi üzerine etkilerini de hesaba katmak amacı ile yaptığı çalışmada Tekoğlu (2014), kesme yüklemesinin de gerilme durumuna dahil edilebildiği ve gerilme durumunun 3 tane boyutsuz gerilme oranı ile temsil edildiği, örn. $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$ ve $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$, SE çatısı kurmuştur. Kurulan bu çatı altında, merkezinde küresel bir boşluk içeren kübik birim hücreler üzerinde hesaplamalar yapmıştır.

Bu tez kapsamında yapılan çalışmalar ile Tekoğlu (2014) çalışması genişletilerek, gerilme durumunun 5 tane boyutsuz gerilme oranı ile tümüyle temsil edildiği, örn. $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$, $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$, $\rho_{13} = \Sigma_{13}/\Sigma_{22}$ ve $\rho_{23} = \Sigma_{23}/\Sigma_{22}$, nümerik açıdan verimli ve herhangi bir birim hücreye (boşluk ya da parçacık içeren) uygulanabilir olan bir SE çatısı inşa edilmesi amaçlanmıştır.

1.1 Literatür Araştırması

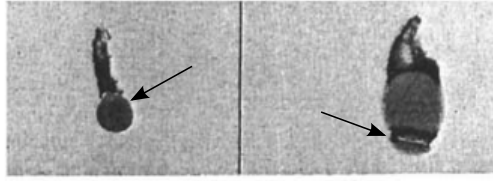
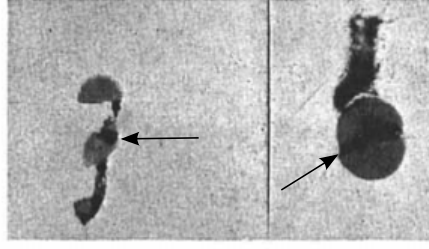
Sünek kırılma, malzeme içerisinde halihazırda var olan ya da malzemenin deforme olması ile birlikte ortaya çıkan (çekirdeklenen) boşlukların büyüyerek birbirleri ile birleşmesi ve iş görmezliğe (İng. *failure*) sebep olmasıdır (örn. Garrison v.d., 1987).

Metal ve metal alaşımların mekanik davranışının incelenmesi, bahsi geçen mühendislik malzemelerinin kullanımının yaygınlığı sebebi ile önemli bir konudur ve bu sebeple, geçmişten günümüze güncelliğini koruyan araştırma konularından biri olmuştur. Yapılan araştırmalar sayesinde, malzeme biliminde ve malzeme üretim süreçlerinde gelişmeler yaşanmaktadır. Bu gelişmeler ile birlikte, gevrek malzemelerin kullanım alanı daralırken, iş göremezliği daha tahmin edilebilir olan sünek malzemelerin kullanım alanı yaygınlaşmaktadır (Council, 1984).

Metal ve metal alaşımlarda sünekliğin incelenmesi üzerine yapılan öncü çalışmalarda deneysel yöntemler tercih edilmiştir. Bu çalışmalarda, deneysel gözlemlere dayanarak sünek kırılma davranışının mikromekanik temelleri atılmaya başlanmıştır. Bu kapsamda yaptığı deneysel çalışmalarda, Puttick (1959), demir ve bakır çekme numunelerini optik mikroskop altında incelemiş ve boşluk çekirdeklenmesinin malzeme matrisi içerisinde bulunan metal dışı kalıntılarda meydana geldiğini göstermiştir. Bakır çekme numunesi üzerindeki kalıntıların sebep olduğu boşluk çekirdeklenmesinin optik mikroskop altındaki görüntüleri Şekil 1.1'de gösterilmektedir.

Devam eden süreçte yapılan deneysel çalışmalar ile boşluk çekirdeklenmesinin ikinci faz parçacıklarda da meydana geldiği gözlemlenmiştir (örn. Garrison v.d., 1987). Boşluk çekirdeklenmesi fenomeni metal ve metal alaşımlı malzemelerin yapılarında buldukları kalıntı ya da ikinci faz parçacıkların ana malzeme ile aralarındaki yüzeylerden ayrılması ya da bu parçacıkların kırılması ile açıklanmaktadır (örn. Garrison v.d., 1987; Luo v.d., 2018).

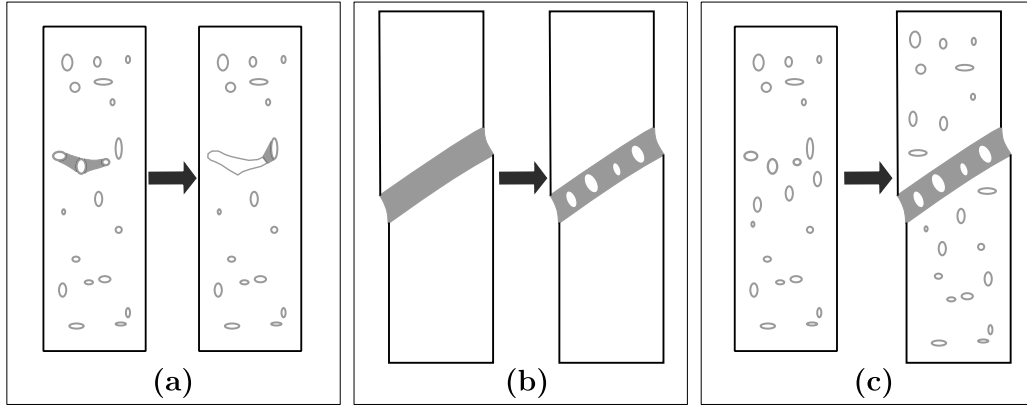
Kalıntı ya da ikinci faz parçacıklarda çekirdeklenen boşlukların plastik deformasyon sayesinde büyümesi sonrasında, plastik deformasyonun yoğunlaştığı, boşluklar arası bölgeler oluşmaktadır. Plastik deformasyonun yoğunlaştığı bu bölgelerde, komşu boşluklar büyüyerek birleşmektedir (örn. Pineau v.d., 2016). Boşluk birleşmesi ile birlikte iş göremezliğe sebep olan sünek kırılma fenomeni üç baskın mekanizma ile gerçekleşmektedir. İlk mekanizmada, çekirdeklenen boşlukların bir kısmı birleşerek mikroskobik çatlaklar oluşturmaktadır. Yüklemin devam etmesi ile yeni boşluklarla birleşen bu çatlaklar büyüyerek ilerlemektedir. Büyüyen çatlaklar sebebi ile kırılma gerçekleşmektedir. İkinci sünek kırılma mekanizmasında ise plastik deformasyonun yoğunlaştığı bir kesme şeridi söz konusudur.



Şekil 1.1: Bakır çekme numunesi üzerindeki kalıntılarda çekirdeklenen boşlukların optik mikroskop altındaki görüntüsü. Oklar, ikinci faz parçacıklarındaki çatlakları göstermektedir (Puttick, 1959).

Kesme şeridi üzerinde plastik deformasyonun yoğunlaşmasıyla birlikte boşluk çekirdeklenmesi meydana gelmektedir. Kesme şeridinde çekirdeklenen boşluklar, yüklemenin devam etmesi ile büyüyüp birleşerek sünek kırılmaya sebep olmaktadır. Bu durumda, kesme şeridi ve bu şeritte yoğunlaşan plastik deformasyon, boşluk çekirdeklenmesini tetiklemektedir. Fakat, malzeme içerisinde çekirdeklenen boşlukların, dizilimi ve yoğunluğu sebebi ile bir şeritte yumuşamaya sebep olması da mümkündür. Böyle durumlarda, boşluk çekirdeklenmesi sonrasında plastik deformasyonun yoğunlaştığı bir kesme şeridi oluşmakta ve bu şerit içerisindeki boşlukların büyüyüp birleşmesi ile sünek kırılma gerçekleşmektedir (örn. Pineau v.d., 2016; Tekoğlu v.d., 2015). Bu durum ise sünek kırılma fenomeninde görülen son baskın mekanizmadır. Bahsi geçen üç sünek kırılma mekanizması Şekil 1.2’de gösterilmektedir.

Literatür çalışmaları, yukarıda bahsedilen sünek kırılma fenomeninin gerçekleşme biçimini incelemek üzerine yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalarda deneysel gözlem ile birlikte nümerik modellemeler yapılmıştır. Yapılan deneysel çalışmalarda boşluk birleşmesi sonucu oluşan mikroskobik çatlak ilerlemesi davranışını yerinde görüntüleme (İng. *in situ imaging*) teknikleri ile gözlemlenmesine Babout v.d., (2004) ve Maire v.d., (2011) çalışmaları, sonlu elemanlar analizleri ile bu davranışın açıklanmasına ise Vishwakarma v.d., (2019) çalışması örnek gösterilebilmektedir. İkinci gerçekleşme biçimi olan ve kesme şeridinde plastik gerinim yoğun-



Şekil 1.2: Sünek kırılma fenomeninin üç dominant gerçekleşme biçimi (a) Mikroskobik çatlak ilerlemesi sebebiyle gerçekleşen kırılma (b) Kesme şeridinde çekirdeklenen boşlukların büyüüp birleşmesi ile gerçekleşen kırılma (c) Çekirdeklenen boşlukların oluşturduğu ve yumuşamaya sebebiyet veren şerit üzerinden gerçekleşen kırılma (Pineau v.d., 2016).

laşması ile büyüyerek birleşen boşlukların oluşturduğu davranış, literatürde yer alan deneysel ve nümerik simülasyonları içeren çalışmalarda incelenmiştir (örn. Morgenev vd., 2014; 2016; 2021).

Literatür çalışmaları göz önüne alındığında, sünek kırılma fenomeninin nümerik olarak yüksek doğrulukta temsil edildiği modellerin, malzemelerin iş göremezlik durumunun tahmininde kullanıldığı gözlemlenmektedir. Son 50 yılı aşkın süredir devam eden deneysel çalışmaların sonuçlarının rehberliğinde iş göremezlik davranışını doğru bir şekilde yansıtmayı amaçlayan malzeme modelleri geliştirilmektedir. Geliştirilen malzeme modellerinin kullanıldığı SE analizleri ile malzemelere ait deney sonuçları uyumlu hale getirilmeye çalışılmaktadır. Böylece, büyük yapısal sistemlerin analizlerinde yüksek doğrulukta malzeme modelleri kullanılarak doğru sonuçlar alınabilmektedir. Ayrıca, mekanik özelliklerin tahmininde nümerik analizlerin rehberliğinden yararlanılmaktadır (örn. Tekoğlu, Hutchinson v.d., 2015; Vishwakarma v.d., 2019).

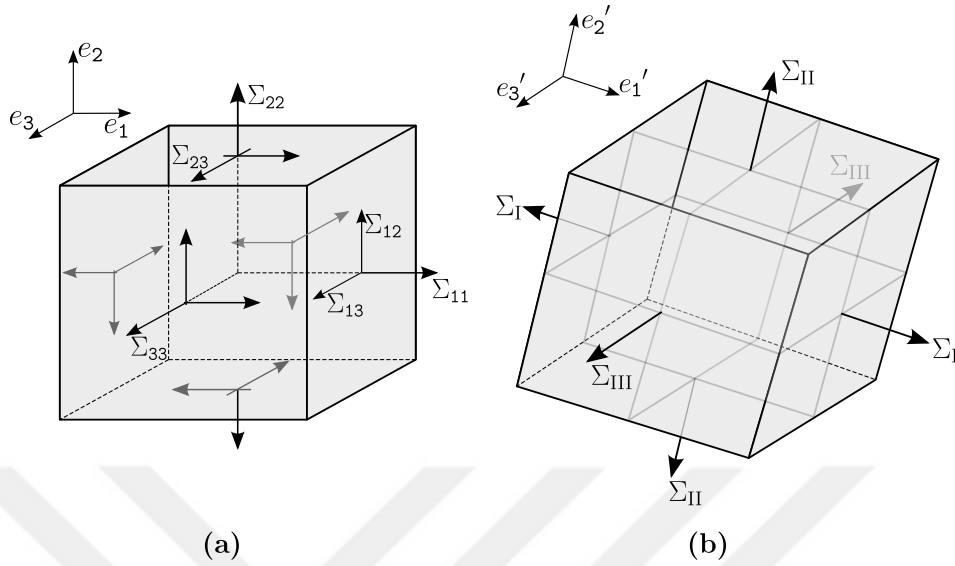
Metal ve metal alaşımlarda sünek kırılma fenomeninin altında yatan mekanizmaların nümerik yöntemler kullanılarak incelenmesi, Needleman (1972)'nin yaptığı sonlu eleman analizlerinde temellendirilmiştir. Needleman (1972), ikili periyodik olarak dağılmış boşluk içeren yapıdan izole ettiği birim hücre üzerinde SE analizleri yapmıştır. Bu çalışmada ele aldığı birim hücrenin komşuları ile olan ilişkisini uyguladığı periyodik sınır koşulları ile sağlayarak, kendisinden sonraki çalışmalara örnek olmuştur.

Needleman (1972)'nin ufuk açıcı çalışması sonrasında, birim hücre hesaplamalarının sünek kırılma analizlerinde kullanımının yaygınlığı artmıştır. Yapılan nümerik çalışmalar ile birim hücre hesaplamaları, mekanik fenomenlerin incelenmesinde ve iş göremezlik tahmininde önemli bir araç haline gelmiştir. Birim hücre, periyodik yapıya sahip malzemelerde, periyodikliği temsil edecek büyüklükteki malzeme parçasının etrafından izole edilmesi ile elde edilmektedir. Burada bahsedilen periyodiklik, malzeme içerisinde bulunan boşluk, kalıntı ve parçacık gibi düzensizlikler sebebi ile oluşabilmektedir. Birim hücrenin, izole edildiği malzemenin mikroyapısını temsil etmesi periyodik sınır koşullarının sağlanması ile gerçekleşmektedir. Böylelikle, gerçekleştirilen birim hücre hesaplamaları sonucunda elde edilen mikro ölçekteki malzeme özelliklerinden makro ölçekteki malzeme özelliklerini elde etmek homojenizasyon yöntemlerinin kullanımı ile mümkün olmaktadır.

Birim hücre hesaplamalarının literatürde zaman zaman temsili hacim elemanı (THE) hesaplamaları konsepti yerine kullanıldığı görülmektedir. Bu durumu netleştirmek adına, bu iki konsepti açıklamak yerinde olacaktır. Birim hücre de temsili hacim elemanı da malzeme karakterizasyonu için malzemenin küçük ölçekli (mezoskopik ya da mikroskopik) temsiline kullanılan kavramlardır. Bu iki kavram arasındaki önemli fark, birim hücrenin içerdiği düzensizliğin aynı zamanda periyodikliği sağladığı, temsili hacim elemanında ise bu gerekliliğin bulunmadığıdır. Temsili hacim elemanı için gerekli şart, malzemenin temsiline yapılabileceği kısmı içermesidir. Bu kısım periyodik ya da rasgele dağılmış düzensizlikler içerebilmektedir. Kısaca, BH konsepti THE konseptinin özelleşmiş bir alt kümesidir (Li v.d., 2019).

Yapılan deneysel ve nümerik çalışmalarda gerilme durumunun malzeme sünekliği üzerinde büyük bir etkiye sahip olduğu, malzeme içerisinde yer alan düzensizliklerin farklı gerilme durumları altında, örneğin çekme gerilmesi baskın veya kesme gerilmesi baskın gibi, farklı davranışlar sergilediği gözlemlenmiştir (örn. Hancock v.d., 1983; Thomson v.d., 1984; Bao v.d., 2004). Ortaya konan bu sonuç, nümerik çalışmalarda uygulanan yükleme boyunca gerilme durumunun kontrol edilebilir olmasının önemli bir ihtiyaç haline geldiğini göstermektedir.

Klasik sürekli ortamlar mekaniğinde bir malzeme noktasındaki en genel gerilme durumu Şekil 1.3a'da gösterilen 6 gerilme bileşeni (Σ_{11} , Σ_{22} , Σ_{33} , Σ_{12} , Σ_{23} ve Σ_{13}) ile ifade edilir. Genel gerilme durumu, kesme gerilmesi bileşenlerinin olmadığı asal düzlemlere etki eden normal gerilmeler ile de ifade edilebilmektedir. Bu ifade, asal gerilme durumu olarak isimlendirilmektedir (bkz. Şekil 1.3b). Asal gerilme durumunu oluşturan asal gerilmeler Σ_I , Σ_{II} ve Σ_{III} ile sembolize edilirken, aralarında $\Sigma_I \geq \Sigma_{II} \geq \Sigma_{III}$ büyüklük ilişkisi bulunmaktadır. Malzeme sünek-



Şekil 1.3: (a) Genel gerilme durumunu oluşturan gerilme bileşenlerinin ve (b) asal gerilme durumunun şematik gösterimi.

liği üzerine yapılan literatür çalışmaları, asal gerilme durumu üzerinden malzeme iş görememezliğini incelemeye yoğunlaşmaktadır (örn. Tvergaard, 1989; Pineau ve Pardoën, 2007; A.A. Benzerga v.d., 2010; Barsoum v.d., 2007a; J. Gao X. K., 2006; Lin v.d., 2006).

Asal gerilme durumunda üç adet gerilme bileşeni vardır. Yani, asal gerilme durumunu 2 adet boyutsuz parametre (örnek olarak Σ_{22} 'ye göre boyutsuzlaştırılmış $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$) kullanarak ifade etmek mümkündür. Asal gerilme durumunun, boyutsuz parametreler olan gerilme üçeksenliliği, T , ve Lode parametresi, L , kullanılarak da ifade edilmesi mümkündür. Burada bahsedilen T , hidrostatik gerilmenin deviatorik gerilmeye oranıdır. T 'nin asal gerilmeler cinsinden hesaplanması Denklem (1.1)'de gösterilmektedir:

$$T = \frac{\sqrt{2}(\Sigma_I + \Sigma_{II} + \Sigma_{III})}{3\sqrt{(\Sigma_I - \Sigma_{II})^2 + (\Sigma_I - \Sigma_{III})^2 + (\Sigma_{II} - \Sigma_{III})^2}}. \quad (1.1)$$

Asal gerilme durumunun boyutsuz parametreler ile ifadesinde kullanılan L , Denklem (1.2)'de gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

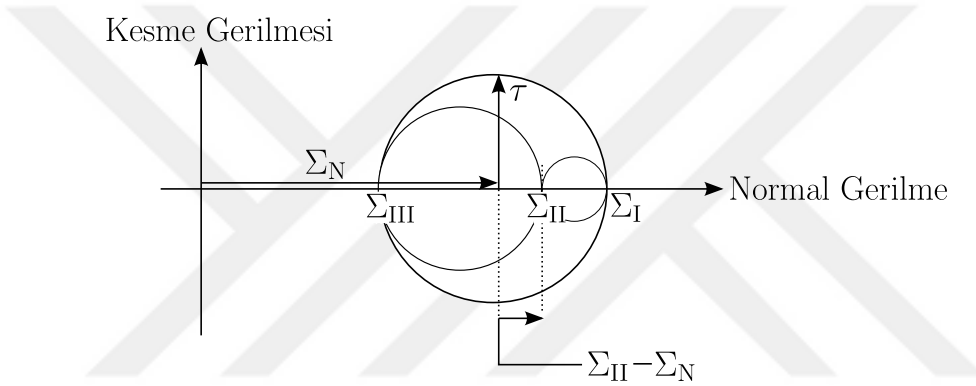
$$L = \frac{\Sigma_{II} - \Sigma_N}{\tau} = \frac{2\Sigma_{II} - \Sigma_I - \Sigma_{III}}{\Sigma_I - \Sigma_{III}}. \quad (1.2)$$

Denklem (1.2)'de yer alan Σ_N maksimum kesme gerilmesi düzlemindeki normal gerilmeyi, τ ise maksimum kesme gerilmesini ifade etmektedir.

$$\Sigma_N = \frac{\Sigma_I + \Sigma_{III}}{2}. \quad (1.3)$$

$$\tau = \frac{\Sigma_I - \Sigma_{III}}{2}. \quad (1.4)$$

Denklem (1.3) ve Denklem (1.4)'te yer alan gerilmeler, Şekil 1.4'te sunulan Mohr çemberi üzerinde gösterilmektedir.

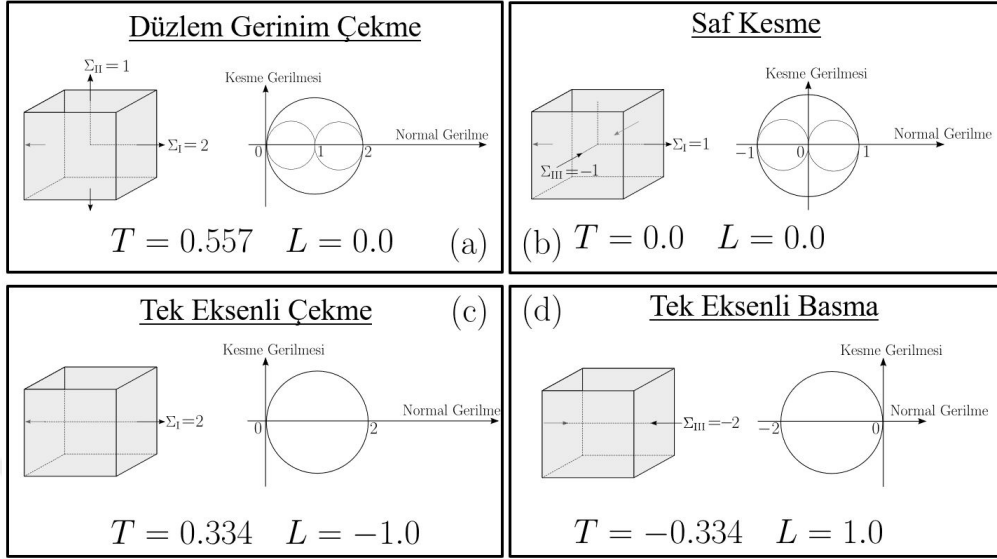


Şekil 1.4: Mohr çemberi üzerinde gerilme durumu gösterimi.

Farklı asal gerilme durumlarının T ve L parametreleri ile ifadesine örnekler Şekil 1.5'te gösterilmektedir.

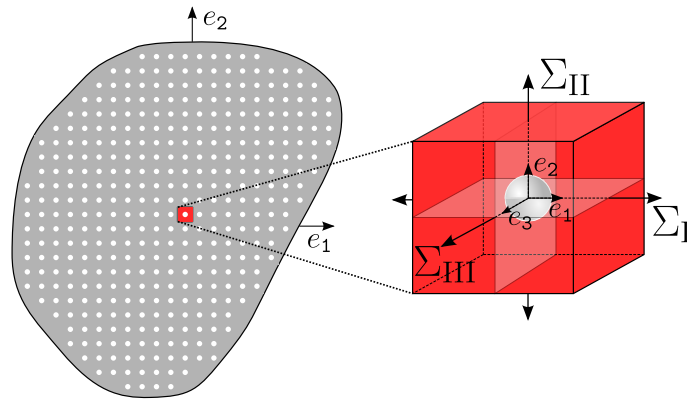
Literatür çalışmalarında, genel gerilme durumunun ifadesi için gerilme oranlarının (ρ_{ij}) kullanıldığı görülmektedir (örn. Tekoğlu, 2014). Gerilme oranları, gerilmelerin birbirlerine göre normalize edilmesi ile hesaplanan boyutsuz parametrelerdir. Örnek olarak genel gerilme durumunun ifadesi, Σ_{22} 'ye göre normalize edilmiş $\rho_{11} = \Sigma_{11}/\Sigma_{22}$, $\rho_{33} = \Sigma_{33}/\Sigma_{22}$, $\rho_{12} = \Sigma_{12}/\Sigma_{22}$, $\rho_{23} = \Sigma_{23}/\Sigma_{22}$, $\rho_{13} = \Sigma_{13}/\Sigma_{22}$ beş adet boyutsuz gerilme oranı ile mümkün olmaktadır.

Literatür çalışmaları, boşluklu yapıya sahip sünek malzemelerin kırılma tahmininde, üç farklı tipteki (Tip I, Tip II, Tip III) mikromekanik tabanlı birim hücre hesaplamalarında yoğunlaşmaktadır. Sünek malzemelerin kırılma tahmini çalışmalarında kullanılan Tip I birim hücre modeli Şekil 1.6'da gösterilmektedir. Bu modelde, normal yüklere maruz kalan boşluklu bir BH söz konusudur. Tip I birim hücre modeli, yalnızca normal yükleme bileşenlerini dikkate alması sebebiyle, en büyük asal yükleme bileşeninin doğrultusuna dik olan düzlemlerde meydana



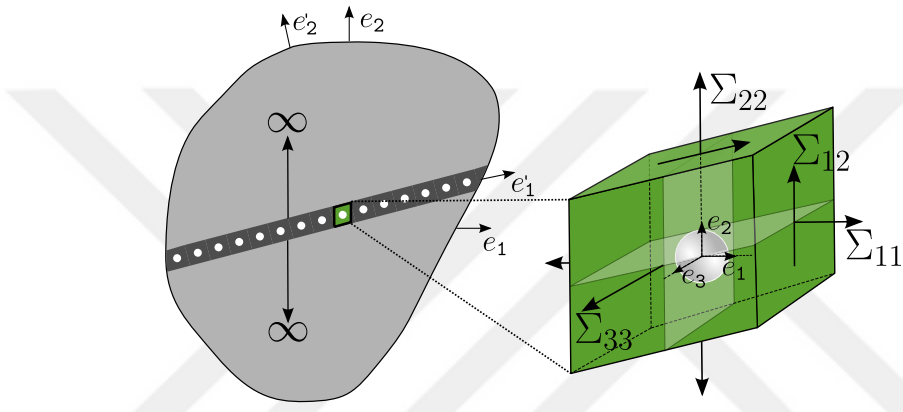
Şekil 1.5: Farklı asal gerilme durumlarının T ve L parametreleri kullanılarak ifadesine örnekler. (a) Düzlem gerinim çekme, (b) saf kesme, (c) tek eksenli çekme, (d) tek eksenli basma.

gelen boşluk birleşmesinin incelenmesinde kullanılır. Bu modelde yer alan BH, üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal bir malzemeyi temsil etmektedir (Dæhli v.d., 2022). Tip I birim hücrenin kullanıldığı literatür çalışmalarına örnek olarak Koplik v.d., (1988), Zhang v.d., (2001), Kim v.d., (2004), J. Gao X. K. (2006), Gao v.d., (2010), Lin v.d., (2006), Steglich v.d., (2008), Steglich, Wafai v.d., (2010), Keralavarma v.d., (2011), Benzerga v.d., (2012), Tekoğlu (2014), Morin v.d., (2019) sayılabilmektedir.



Şekil 1.6: Tip I birim hücre modeli şematik gösterimi (Dæhli v.d., 2022).

kusur şeridi analizlerinin SE yöntemi uygulamasıdır. Bu modelde, boşluk içermeyen malzeme ve normal yüklemeler altında gerinim lokalizasyonunun oluşmasına sebep olan düzlemsel kusur şeridi söz konusudur. Yani, malzemenin kusur şeridi dışında homojen olduğu varsayılmaktadır. Diğer tipteki birim hücre modellerine benzer şekilde, Tip III birim hücre modeli de merkezinde boşluk içermektedir. Kusur şeridinin tek bir düzlemde devam etmesi sebebiyle malzeme ikili periyodik boşluk dağılımına sahiptir. Tip III BH modelleri ile ilgili detaylı açıklamalara Tekoğlu, Hutchinson v.d., (2015), Tvergaard (2015), Tvergaard ve Legarth (2020) ve Reboul v.d., (2020) çalışmalarından ulaşılabilmektedir.



Şekil 1.8: Tip III birim hücre modeli şematik gösterimi (Dæhli v.d., 2022).

Literatürdeki çalışmalarda, boşluklu yapıdaki sünek malzemeler için yukarıda bahsedilen üç tipteki mikromekanik tabanlı birim hücrelerin kullanıldığı SE analizleri farklı gerilme durumları altındaki malzeme davranışlarını incelemek amacıyla yürütülmüştür (örn. Keralavarma v.d., 2011; Barsoum v.d., 2011; Scheyvaerts v.d., 2011; Benzerga v.d., 2012; Tekoğlu, 2014; Tekoğlu, Hutchinson v.d., 2015; Tvergaard, 2015; Wong v.d., 2015; Dæhli v.d., 2017; Luo v.d., 2018; Morin v.d., 2019). Yapılan çalışmalarda, T ve L 'nin değişen değerleri üzerinden malzeme sünekliği hakkında değerlendirmede bulunmaktadır. Bu değerlendirmeler, boşluk büyüme hızının, T 'nin artan değeri ile üstel orantılı olduğunu, kırılma geriniminin ise artan T değeri ile azaldığı göstermektedir. Malzeme sünekliğinin gerilme üçeşenliliğinin yanında Lode parametresine de bağlı olduğunu ortaya koyan deneysel çalışmalar yapılarak T 'nin düşük değerlerinde L 'nin malzeme sünekliğine önemli etkisi olduğu gözlemlenmiştir (örn. Bao v.d., 2004; Barsoum v.d., 2007a).

Bu aşamaya kadar yapılan çalışmalar göz önüne alındığında, normal doğrultulu yüklemelere ek olarak kesme yüklemelerinin de dahil edilebildiği ve yükleme süreci boyunca gerilme oranlarının ve dolayısıyla T ve L parametrelerinin sabit tutulabildiği verimli bir birim hücre hesaplaması metodunun ihtiyacı ortaya çık-

maktadır (Tekoğlu, 2014). Daha önce bahsedildiği üzere, literatürde yer alan birim hücre hesaplamaları, gerilme durumunu üç adet normal gerilme ve bir adet kesme gerilmesinin oluşturduğu üç adet gerilme oranı ile ifade edebilmektedir. Tekoğlu (2014) yaptığı çalışmasında, üç adet gerilme oranının yükleme süreci boyunca sabit tutulabildiğini göstermiştir. Fakat, daha genel yüklemeleri modelleyebilmek için, beş adet gerilme oranını yükleme süreci boyunca sabit tutan SE çatısına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez kapsamında yapılan çalışmalar sonucunda sunulan SE çatısı ile birim hücre hesaplamalarında normal ve kesme doğrultularındaki tüm yükleme bileşenlerinin uygulanabilmesi ve yükleme süreci boyunca belirlenen beş gerilme oranının sabit tutulması amaçlanmıştır. Tez kapsamında yapılan çalışmalar sonucunda sunulan SE çatısının, birim hücre hesaplamalarında yer alan ihtiyacı karşılaması beklenmektedir.



2. TEORİK ARKA PLAN

2.1 Gerilme Durumu

Bu bölümde yapılan tanımlamalar ile tez çalışmasında önemli bir yere sahip olan gerilme durumunun anlaşılabilir hale getirilmesi amaçlanmaktadır. Gerilme durumunu oluşturan mezoskopik Cauchy gerilmeleri Σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), Şekil 2.1'de yer alan birim hücre üzerinde gösterilmektedir. Homojenizasyon teorisinin belirttiği, birim hücre hesaplamalarında elde edilen mikroskopik Cauchy gerilmeleri, σ_{ij} , ile mezoskopik Cauchy gerilmeleri arasındaki ilişki aşağıda yer almaktadır (Böhm, 1998):

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV. \quad (2.1)$$

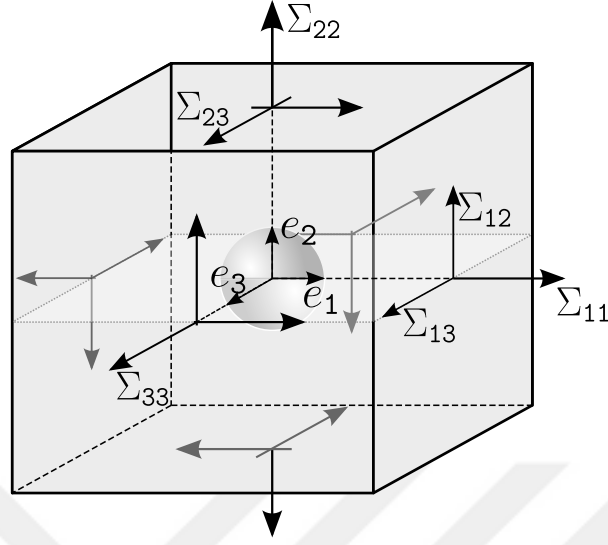
Burada V , birim hücrenin deforme olmuş hacmini ifade etmektedir. Aşağıda, mezoskopik gerilme tensörünün en genel hali gösterilmektedir:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Bölüm 1.1'de bahsedildiği üzere, genel gerilme durumunu boyutsuz beş tane gerilme oranı kullanarak ifade etmek de mümkündür. Gerilme oranı, genel gerilme durumunu oluşturan gerilmelerin seçilen bir gerilmeye göre normalize edilmesi ile elde edilmektedir. Bu tez kapsamında yapılan formül türetmelerinde ve birim hücre hesaplaması çalışmalarında Σ_{22} 'ye göre boyutsuzlaştırılmış gerilme oranları kullanılmıştır. Aşağıda, tez kapsamında kullanılan gerilme oranları gösterilmektedir:

$$\rho_{11} = \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}}, \quad \rho_{33} = \frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{22}}, \quad \rho_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{22}}, \quad \rho_{23} = \frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{22}}, \quad \rho_{13} = \frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{22}}.$$

Malzeme içerisindeki herhangi bir noktanın gerilme durumu, birbirine dik üç düzlem üzerine etkiyen gerilmeler ile ifade edilebilmektedir. Birbirine dik bu düzlemler üzerinde kesme gerilmesi bileşenlerinin olmadığı durum, asal gerilme durumu olarak isimlendirilmektedir. Asal gerilme durumunun olduğu düzlemler, asal düzlemler olarak isimlendirilirken asal düzlemlere etki eden normal gerilmelere asal gerilmeler denilmektedir.



Şekil 2.1: Boşluk merkezinde orijini bulunan Kartezyen koordinat sistemine göre, birim hücreye etki eden makroskobik gerilmelerin şematik gösterimi.

Mezoskopik asal gerilmeler Σ_I , Σ_{II} ve Σ_{III} ile sembolize edilirken, aralarında $\Sigma_I \geq \Sigma_{II} \geq \Sigma_{III}$ büyüklük ilişkisi bulunmaktadır. Asal gerilmeler aşağıda yer alan özdeğer probleminin çözülmesi ile hesaplanabilmektedir.

$$\vec{n}(\mathbf{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.3)$$

Burada, \vec{n} asal eksenler doğrultusundaki birim vektörleri (özdeğer vektörler), λ asal gerilmeleri (özdeğerler), \mathbf{I} ise ikinci dereceden birim tensörü belirtmektedir. Yukarıda gösterilen Denklem (2.3)'te yer alan lineer homojen sistemin aşikar olmayan çözümünü $\det(\mathbf{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ durumunda sağlanmaktadır. Bahsedilen determinantın çözümü için aşağıdaki karakteristik denklemin hesaplanması gerekmektedir.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0. \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'te alan I_1 , I_2 ve I_3 , gerilme tensörünün, $\mathbf{\Sigma}$, değişmezleridir. Gerilme tensörünün değişmezlerinin hesaplanması Denklem (2.5-2.7)'de gösterilmektedir:

$$I_1 = \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}, \quad (2.5)$$

$$I_2 = \Sigma_{11}\Sigma_{22} + \Sigma_{22}\Sigma_{33} + \Sigma_{11}\Sigma_{33} - \Sigma_{12}^2 - \Sigma_{23}^2 - \Sigma_{13}^2, \quad (2.6)$$

$$I_3 = \Sigma_{11}\Sigma_{22}\Sigma_{33} + 2\Sigma_{12}\Sigma_{23}\Sigma_{31} - \Sigma_{12}^2\Sigma_{33} - \Sigma_{23}^2\Sigma_{11} - \Sigma_{13}^2\Sigma_{22}. \quad (2.7)$$

Asal gerilmeler, Denklem (2.4)'te gösterilen karakteristik denklemin köklerinin hesaplanması ile elde edilmektedir.

Herhangi bir gerilme tensörü, hidrostatik ve deviatorik gerilmeler cinsinden tanımlanabilmektedir. Gerilme tensörünün hidrostatik kısmı hacim değişikliği ile ilişkilirken, deviatorik kısmı ise şekil değişikliği ile ilişkilidir. Hidrostatik gerilme, Σ_h , gerilme tensöründe yer alan normal gerilmelerin ortalamasıdır.

$$\Sigma_h = \frac{I_1}{3} = \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}}{3}. \quad (2.8)$$

Hidrostatik gerilme durumunu ifade eden hidrostatik gerilme tensörü, Σ_h , aşağıda gösterilmektedir:

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} \Sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_h \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Hidrostatik gerilme tensörü ile birlikte genel gerilme tensörünü oluşturan deviatorik gerilme tensörü, Σ' , genel gerilme tensöründen hidrostatik gerilme tensörünün çıkarılması ile elde edilmektedir.

$$\Sigma' = \Sigma - \Sigma_h. \quad (2.10)$$

Deviatorik gerilme tensörü, Σ' , aşağıda gösterilmektedir:

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_h & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} - \Sigma_h & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} - \Sigma_h \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Metal ve metal alaşımlı sünek mühendislik malzemelerinin kompleks gerilmeler altında akma durumunun incelenmesinde yaygın olarak kullanılan von Mises gerilmesi ya da eşdeğer gerilme, Σ_{eq} , skaler bir gerilme büyüklüğü ifade etmektedir. von Mises gerilmesi, Σ_{eq} , aşağıdaki formül ile hesaplanmaktadır:

$$\Sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (\Sigma_{11} - \Sigma_{33})^2 + (\Sigma_{22} - \Sigma_{33})^2 + 6(\Sigma_{12}^2 + \Sigma_{23}^2 + \Sigma_{13}^2)}. \quad (2.12)$$

von Mises gerilmesi sıklıkla hasar durumu değerlendirme kriteri olarak da kullanılmaktadır. von Mises hasar kriteri ya da maksimum çarpılma kriteri olarak isimlendirilen yaklaşımda, tek eksenli çekme testindeki malzemenin akma gerilmesi değeri ile von Mises gerilmesi değeri karşılaştırılarak, malzemenin akma sınırını geçip geçmediği değerlendirilmektedir.

Asal gerilme durumunun dışındaki durumlarda, yani normal doğrultudaki gerilmelere ek olarak kesme doğrultusundaki gerilmelerin de bulunduğu gerilme durumlarının ifadesinin mümkün olabilmesi adına, boyutsuz kesme oranı parametrelerine (S_{12}, S_{23}, S_{13}) ihtiyaç duyulmaktadır. Kesme oranı parametreleri, kesme gerilmesinin von Mises gerilmesine oranı olarak tanımlanmaktadır. Gerilme durumundaki kesme gerilmesi bileşenlerinin baskınlığının boyutsuz olarak ifade edilmesini sağlamaktadır. Kesme oranı parametrelerinin ifadeleri aşağıda gösterilmektedir (Tekoğlu, 2014):

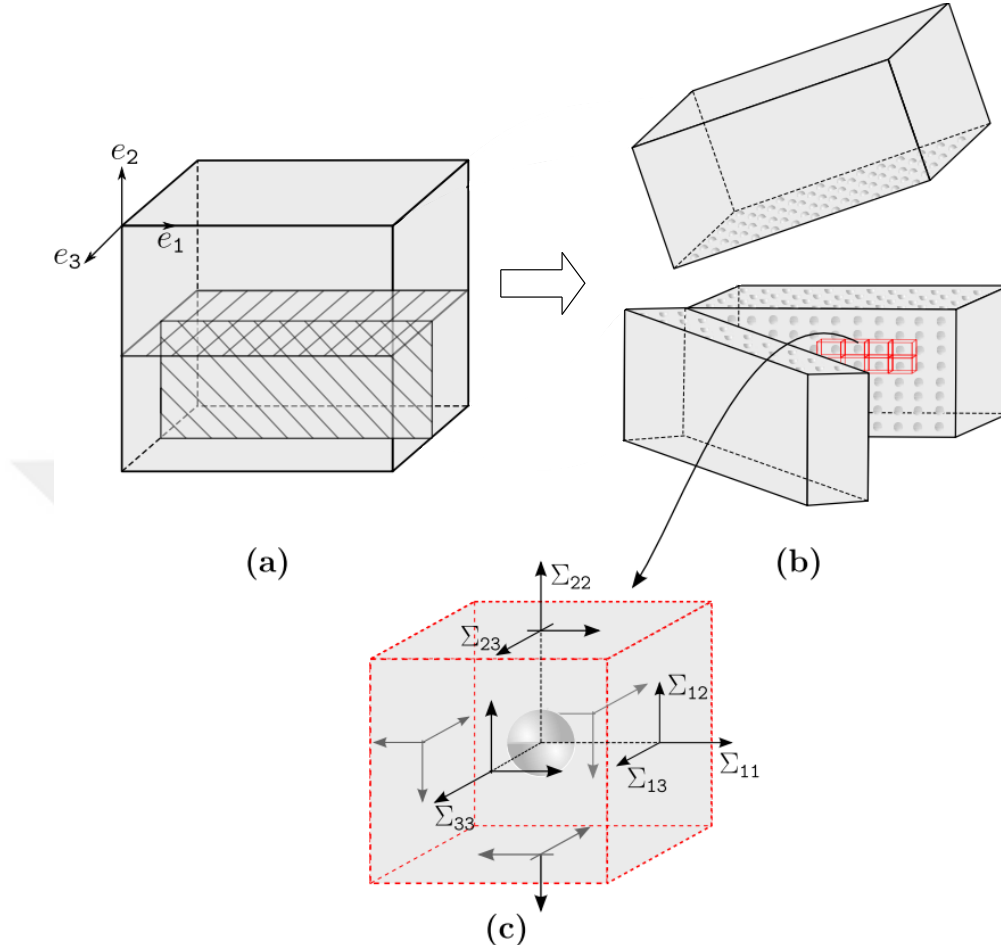
$$S_{12} = \frac{\sqrt{3} |\Sigma_{12}|}{\Sigma_{eq}}, \quad S_{23} = \frac{\sqrt{3} |\Sigma_{23}|}{\Sigma_{eq}}, \quad S_{13} = \frac{\sqrt{3} |\Sigma_{13}|}{\Sigma_{eq}}. \quad (2.13)$$

2.2 Birim Hücrenin Gerilme Durumunu Kontrol Etmek İçin Gerekli Kinetik Kısıtlar

Bu bölümde yapılan tanımlamalar ve türetmeler ile birlikte, tez çalışması kapsamında kurulmuş olan sonlu elemanlar çatisına dahil olan birim hücre modelinin anlaşılabilir hale getirilmesi amaçlanmaktadır. Tez çalışması kapsamında modellenen BH, üçlü periyodik boşluk veya parçacık dağılımına sahip ideal bir malzeme temsil etmektedir.

Şekil 2.2a'da üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal bir malzemenin genel yükleme (normal ve kesme kuvvetleri) altındaki gerilme durumu gösterilmektedir. Malzemenin içerdiği boşluklar, Şekil 2.2a'da yer alan Kartezyen koordinat sisteminin eksenleri doğrultusunda her yönde sürekli olarak devam etmektedir. Şekil 2.2b'de kesit görüntüsü gösterilen malzemenin sahip olduğu boşluklardan birinin çevresinden izole edilmesi ile elde edilen birim hücre Şekil 2.2c'de gösterilmektedir.

Birim hücrenin, içinde bulunduğu makroskobik boyuttaki malzemenin mekanik özelliklerini temsil etmesi amaçlanmaktadır. Bu nedenle, içerisinde bulunduğu malzemenin sahip olduğu periyodikliği yansıtabilecek özellikleri taşıması önem arz etmektedir. Periyodik malzeme davranışını sağlamak adına, birim hücrenin sınırlarını oluşturan yüzeylerin komşuları ile uyum içerisinde hareket etmesi gerekmektedir. Bu uyum, sınır yüzeylerinde ve bu yüzeylere ait kenarlarda tanımlanan



Şekil 2.2: (a) Genel yükleme altındaki üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal malzeme. (b) Üçlü periyodik boşluk dağılımına sahip ideal malzemenin kesit görüntüleri. (c) Genel yükleme altındaki birim hücre.

periyodik deplasman sınır koşulları ile sağlanmaktadır.

Burada sunulan metodoloji sonlu deformasyon için geçerlidir. Bununla birlikte, sonsuz küçük deformasyon için birim hücrenin periyodik yer değiştirme alanının türetimini açıklamak daha sezgiseldir. Aslında, deformasyon alanının formu küçük ya da büyük deformasyon için aynı olmaktadır. Sonsuz küçük deformasyona maruz kalan birim hücredeki bir malzeme noktası \mathbf{X} için yer değiştirme alanı, \mathbf{u} , şu şekildedir:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}). \quad (2.14)$$

Burada, \mathbf{E} ve $\mathbf{\Omega}$ sırası ile mezoskopik gerinim ve rotasyon tensörleri iken, $\tilde{\mathbf{u}}$, peri-

yodik yer değiştirme dalgalanmasıdır (Torki v.d., 2017). Birim hücrenin zıt sınırlarında bulunan herhangi bir çift malzeme noktası için periyodik ilişkiyi sağlayan yer değiştirme farkı,

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) \cdot \Delta \mathbf{X}, \quad (2.15)$$

olmaktadır. Burada $\Delta \mathbf{X}$, iki malzeme noktasının vektör bağlantısıdır. Genel gerilme durumu göz önüne alındığında mezoskopik gerinim tensörünün matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

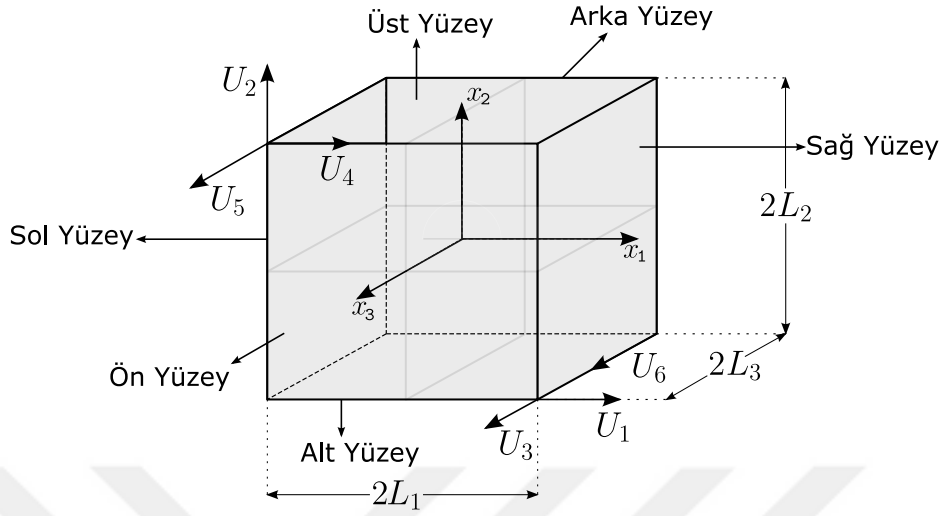
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Burada,

$$\begin{aligned} E_{11} &= \ln\left(\frac{l_1}{L_1}\right) \cong \frac{U_1}{L_1}, \\ E_{22} &= \ln\left(\frac{l_2}{L_2}\right) \cong \frac{U_2}{L_2}, \\ E_{33} &= \ln\left(\frac{l_3}{L_3}\right) \cong \frac{U_3}{L_3}, \\ E_{12} &= \frac{U_4}{2L_2}, \quad E_{23} = \frac{U_6}{2L_2}, \quad E_{13} = \frac{U_5}{2L_1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

olmaktadır. Denklem (2.17)'de yer alan $\{\mathbf{U}\}$ sütun vektörünün bileşenleri, birim hücrenin yüzeylerine uygulanan yer değiştirmeleri ifade etmektedir. U_1 , x_1 eksenini doğrultusunda sağ yüzeye uygulanan normal yer değiştirme iken, U_5 ise x_3 eksenini doğrultusunda sağ yüzeye uygulanan teğetsel yer değiştirmedir. Üst yüzeye uygulanan U_2 , x_2 eksenini doğrultusundaki normal yer değiştirmeyi ifade ederken, U_4 ve U_6 yer değiştirmeleri sırasıyla x_1 ve x_2 eksenleri doğrultularındaki teğetsel yer değiştirmelerdir. Son olarak, ön yüzeye uygulanan U_3 , x_3 eksenini doğrultusundaki normal yer değiştirmedir. Burada belirtilen yüzeylerin karşıt yüzeylerindeki yer değiştirmeler, Denklem (2.15)'teki periyodik bağıntıları sağlamaktadır.

Denklem (2.17)'de yer alan L_i ve l_i ise sırasıyla deformasyon öncesi ve sonrası konfigürasyonlardaki birim hücrenin kenar uzunluklarını ifade etmektedir. Başlangıç kenar uzunlukları arasındaki ilişki $2L_{10} = 2L_{20} = 2L_{30}$ 'dır. Birim hücrenin deformasyon öncesi ve sonrasındaki kenar uzunlukları arasında $l_i = L_i + U_i$ ilişkisi bulunmaktadır. Şekil 2.3'te birim hücrenin yüzeylerine uygulanan yer değiştirmeler ile birlikteki Şematik gösterimi ve yüzey isimlendirmeleri yer almaktadır.



Şekil 2.3: Birim hücrenin ve yüzeylerine uygulanan yer değiştirmelerin şematik gösterimi ile yüzey isimlendirmeleri.

Denklem (2.15)'te yer alan antisimetrik rotasyon tensörü, $\mathbf{\Omega}$, matris formunda,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

olarak gösterilmektedir. Periyodik deformasyona izin verirken birim hücrenin rijit cisim rotasyonundan kaçınılmalıdır. Rotasyon matrisinin bileşenleri bu durumda aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= -\Omega_{21} = E_{12}, \\ \Omega_{23} &= -\Omega_{32} = -E_{23}, \\ \Omega_{13} &= -\Omega_{31} = -E_{13}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Böylelikle, Denklem (2.15)'te yer alan periyodiklik bağıntısının matris gösterimi,

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & 2E_{12} & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 2E_{13} & 2E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta X_3 \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

halini almaktadır.

Denklem (2.20)'nin Denklem (2.17)'de gösterilen mezoskopik gerinimler ile ifadesi sonucu,

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= \frac{\Delta X_1}{L_1} U_1 + \frac{\Delta X_2}{L_2} U_4, \\ \Delta u_2 &= \frac{\Delta X_2}{L_2} U_2, \\ \Delta u_3 &= \frac{\Delta X_3}{L_3} U_3 + \frac{\Delta X_2}{L_2} U_5 + \frac{X_1}{L_1} U_6,\end{aligned}\tag{2.21}$$

elde edilmektedir. Burada, Denklem (2.21)'da verilen periyodik sınır koşullarının hem sonsuz küçük deformasyon için hem de sonlu deformasyon için geçerli olduğunun hatırlanılması önemlidir.

Birim hücrenin gerilme durumunu, doğrusal yaylar üzerinden uygulanan dış kuvvetler, $\{\mathbf{P}\}$, oluşturmaktadır. Dış kuvvetlerin oluşturduğu deformasyon gücü \dot{W}_d ,

$$\dot{W}_d = \{\mathbf{P}\}^T \{\dot{\mathbf{U}}\},\tag{2.22}$$

ile ifade edilmektedir (Dæhli v.d., 2017). Denklem (2.22)'de yer alan $\{\dot{\mathbf{U}}\}$, birim hücreye uygulanan yer değiştirme hızlarına karşılık gelmektedir. Ayrıca, Denklem (2.22)'de yer alan deformasyon gücü, Hill-Mandel koşulunun sağladığı şekilde, mezoskopik gerilme tensörü, $\boldsymbol{\Sigma}$, ve mezoskopik deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} , ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Hill, 1963; Mandel, 1966; Dæhli v.d., 2017):

$$\dot{W}_d = V \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}.\tag{2.23}$$

Burada, V birim hücrenin hacmini ifade etmektedir. Denklem (2.23)'te yer alan mezoskopik deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T),\tag{2.24}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanmaktadır. Burada gösterilen \mathbf{L} , hız gradyanı tensörüdür ve Denklem (2.25)'te gösterildiği gibi deformasyon gradyanı tensörü \mathbf{F} ile hesaplanabilmektedir:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}.\tag{2.25}$$

Denklem (2.25)'in kullanılması ile Denklem (2.24)'te gösterilen deformasyon hızı tensörünün ifadesi,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T),\tag{2.26}$$

halini almaktadır.

Ayrıca, deformasyon hızı tensörü ile birim hücreye uygulanan deplasman hızları, $\{\mathbf{U}\}$, arasında,

$$\{\mathbf{D}\} = \mathbf{T}\{\dot{\mathbf{U}}\}, \quad (2.27)$$

ilişkisi bulunmaktadır. Burada $\{\mathbf{D}\}$, Voigt notasyonu kullanılarak gösterilen deformasyon hızı tensörünü, \mathbf{T} ise lineer dönüşüm tensörünü ifade etmektedir.

Birim hücrenin deformasyon gücünü, \dot{W}_d , iki farklı şekilde hesaplamak mümkündür. Denklem (2.22)'de gösterilen dış kuvvetlerin oluşturduğu deformasyon gücü eşitliği ile Denklem (2.23)'te gösterilen birim hücreye ait gerilme tensörü ve deformasyon hızı tensörü kullanılarak hesaplanan deformasyon gücü eşitliklerinin beraber çözülmesi ile dış kuvvet vektörüne, $\{\mathbf{P}\}$ ait Denklem (2.28)'deki denklik elde edilmektedir (Dæhli v.d., 2017).

$$\begin{aligned} \dot{W}_d &= V\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = V \{\boldsymbol{\Sigma}\}^T \{\mathbf{D}\} = V \{\boldsymbol{\Sigma}\}^T \mathbf{T}\{\dot{\mathbf{U}}\} = \{\mathbf{P}\}^T \{\dot{\mathbf{U}}\}, \\ &\Rightarrow \{\mathbf{P}\} = V\mathbf{T}^T \{\boldsymbol{\Sigma}\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Birim hücreye uygulanan dış kuvvetlerin, $\{\mathbf{P}\}$, Denklem (2.28)'de yer alan denklige ek olarak, Hooke kanunu kullanılarak da ifade edilmesi mümkündür.

$$\{\mathbf{P}\} = k \{\mathbf{x}\}. \quad (2.29)$$

Denklem (2.29)'da yer alan k yay direngenliğini, $\{\mathbf{x}\}$ ise yayda meydana gelen yer değiştirmeyi temsil etmektedir. Birim hücreye uygulanan kuvvetler için elde edilen 2 farklı eşitlikten (Denklem (2.28) ve (2.29)) yararlanılarak, gerilme durumunu kontrol etmek için gerekli kinematik kısıtlar elde edilmektedir.

$$\{\mathbf{P}\} = V\mathbf{T}^T \{\boldsymbol{\Sigma}\} = k \{\mathbf{x}\}. \quad (2.30)$$

Tez kapsamında yapılan çalışmaların daha kolay anlaşılabilmesi amacıyla, Bölüm 2.2.1 ve 2.2.2'de Tekoğlu (2014) referans çalışmasında asal gerilme durumu ve normal gerilmelere ek bir kesme gerilmesinin bulunduğu durum için gerçekleştirilmiş olan teorik çalışmalar tekrar edilecektir. Ardından, Bölüm 2.2.3'de ise, tezin temel amacı olan en genel yükleme durumu için kinematik kısıtların türetmesi sunulacaktır.

2.2.1 Asal Gerilme Durumu İçin Kinematik Kısıtlar

Tekoğlu (2014) çalışmasında yer alan asal gerilme durumu altında yapılan birim hücre hesaplamaları için türetilmiş kinematik kısıtların hesaplanması bu bölüm altında tekrar edilmektedir. Burada, asal gerilme durumu iki adet gerilme oranı (ρ_{11} ve ρ_{33}) ile ifade edilmektedir. Bu bölüm içerisinde yer alan türetmelerin gösteriminde izlenecek yol öncelikle açıklanarak, türetme aşamalarının daha rahat anlaşılabilir olması hedeflenmektedir. Bu amaçla, türetme sürecinde izlenecek yol aşağıda bahsedildiği şekilde olacaktır.

Kinematik kısıtların kurulabilmesini sağlayan ana eşitlik olan $\{\mathbf{P}\} = V\mathbf{T}^T \{\boldsymbol{\Sigma}\} = k\{\mathbf{x}\}$ (Denklem (2.30)) iki kısımdan oluşmaktadır. Eşitliğin ilk kısmı deformasyon gücünden, \dot{W}_d , yararlanılarak türetilmiş olup, birim hücrenin yükleme durumuna bağlı olarak değişen lineer dönüşüm tensörü, \mathbf{T} , terimini içermektedir. Bu terimin normal yükleme durumu için hesaplanması türetme basamaklarının ilkinin oluşturmaktadır. Bu basamak içerisinde, lineer dönüşüm tensörünün elde edilebilmesi için sırasıyla deformasyon gradyanı tensörü, \mathbf{F} ve deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} , hesaplanacaktır. Sonrasında, deformasyon hızı tensörü kullanılarak, lineer dönüşüm tensörü elde edilecek ve ilk türetme adımı tamamlanacaktır. İkinci türetme adımı ise yay kuvvetlerinin eşitliği $\{\mathbf{P}\} = V\mathbf{T}^T \{\boldsymbol{\Sigma}\} = k\{\mathbf{x}\}$ son haline getirilecektir.

İlk olarak, deformasyon gradyanı tensörünün, \mathbf{F} , hesaplanması aşağıda gösterilmektedir:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Deformasyon gradyanı tensörünü hesaplayabilmek adına, birim hücreye ait sürekli yapının deformasyon sonrasındaki konfigürasyonunun ($x_i, i = 1, 2, 3$), deformasyon öncesi konfigürasyonlar ($X_i, i = 1, 2, 3$) ile ifade edilmesi gerekmektedir. Normal yükleme durumu için bu ifade,

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + \frac{X_1}{L_1} U_1, \\ x_2 &= X_2 + \frac{X_2}{L_2} U_2, \\ x_3 &= X_3 + \frac{X_3}{L_3} U_3, \end{aligned} \quad (2.32)$$

olarak hesaplanmaktadır. Denklem (2.32)'de belirtilen deformasyon sonrası konfigürasyonlar kullanıldığında deformasyon gradyanı tensörü, \mathbf{F} , Denklem (2.33)'te gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{U_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{U_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{U_3}{L_3} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Denklem (2.26)'da gösterilen $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T)$ eşitliğini kullanılarak deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{U}_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{U}_3}{l_3} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

olarak hesaplanmaktadır. \mathbf{D} 'nin hesaplanması ile birlikte, Denklem (2.27)'de gösterilen $\mathbf{D} = \mathbf{T}\{\dot{\mathbf{U}}\}$ eşitliğinden yararlanarak lineer dönüşüm tensörünü, \mathbf{T} , hesaplamak mümkün olmaktadır:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

\mathbf{T} 'nin elde edilmesi ile birlikte, Denklem (2.30)'da gösterilen yay kuvveti eşitliğinin son hali,

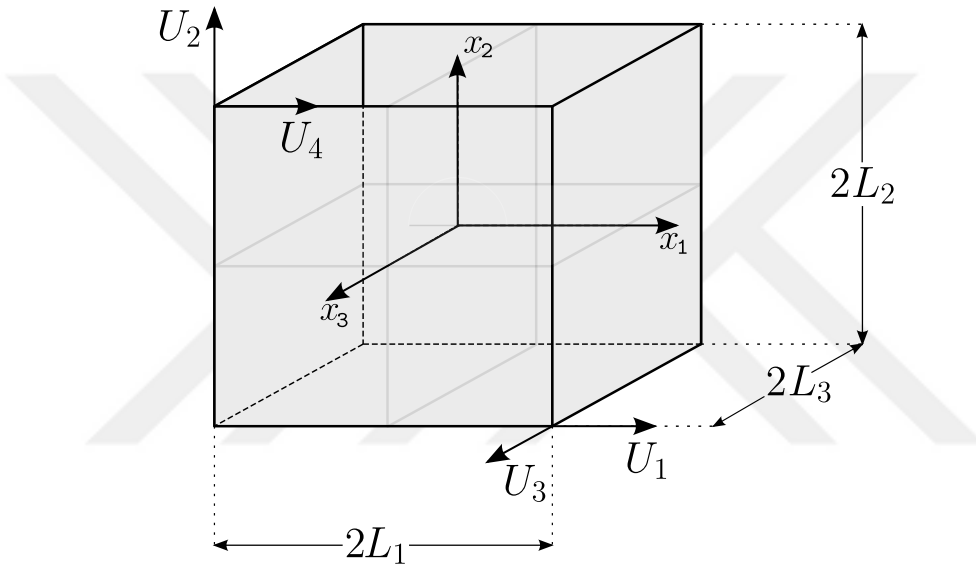
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = l_1 l_2 l_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix}, \quad (2.36)$$

olarak elde edilmektedir. Denklem (2.36)'dan elde edilen ve kinematik kısıtların belirlenmesinde kullanılan üç yay kuvveti aşağıdaki hali almaktadır:

$$\begin{aligned} P_1 &= \Sigma_{11} l_2 l_3 = k \Delta x_1, \\ P_2 &= \Sigma_{22} l_1 l_3 = k \Delta x_2, \\ P_3 &= \Sigma_{33} l_1 l_2 = k \Delta x_3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.2 Normal Gerilmelere Ek Bir Kesme Gerilmesi Bulunan Durum İçin Kinematik Kısıtlar

Tekoğlu (2014) çalışmasında yer alan bir diğer gerilme durumu, 3 doğrultuda normal gerilmelere ek olarak bir adet kesme gerilmesinin de bulunduğu durumdur. Referans çalışmada yer alan kesme gerilmesi, U_4 deplasmanı dolayısıyla birim hücre üzerine aktarılan kuvvet ile oluşmaktadır (bkz. Şekil 2.4). Yükleme durumunda bir adet kesme yüklemesinin olması sebebiyle gerilme durumu üç adet gerilme oranı (ρ_{11} , ρ_{33} ve ρ_{12}) ile ifade edilmektedir.



Şekil 2.4: Birim hücreye etkiyen kuvvetleri oluşturan deplasmanların (U_1 , U_2 , U_3 ve U_4) şematik gösterimi.

Bu bölümde yer alan türetmeler Bölüm 2.2.1’de bahsedilen türetme sürecinde izlenen yola uygun şekilde gerçekleştirilmektedir. Yani, ilk olarak lineer dönüşüm tensörünü, \mathbf{T} , elde etmek için gerekli türetmeler yapılacaktır, sonrasında ise yay kuvveti eşitliği, $\{\mathbf{P}\} = \mathbf{V}\mathbf{T}^T \{\boldsymbol{\Sigma}\} = k \{\mathbf{x}\}$ (Denklem (2.30)), hesaplanacaktır.

İlk olarak, deformasyon gradyanı tensörünün, \mathbf{F} , hesaplanması gerekmektedir. Deformasyon gradyanı tensörünü hesaplayabilmek adına (bkz. Denklem (2.31)) birim hücreye ait sürekli yapının deformasyon sonrasındaki konfigürasyonunun deformasyon öncesi konfigürasyon ile ifade edilmesi gerekmektedir. Bir yönde kesme gerilmesinin de olduğu yükleme durumu göz önüne alındığında deforma-

yon sonrasındaki konfigürasyonlar,

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + \frac{X_1}{L_1}U_1 + \frac{X_2}{L_2}U_4, \\x_2 &= X_2 + \frac{X_2}{L_2}U_2, \\x_3 &= X_3 + \frac{X_3}{L_3}U_3,\end{aligned}\tag{2.38}$$

olarak ifade edilmektedir. Denklem (2.38)'in ifade ettiği konfigürasyonlar ile, \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{U_1}{L_1} & \frac{U_4}{L_2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{U_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{U_3}{L_3} \end{bmatrix},\tag{2.39}$$

olarak hesaplanmaktadır. Deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} , Denklem (2.26)'ya göre hesaplandığında,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_1}{l_1} & \frac{1}{2} \left(-\frac{U_4}{l_1 l_2} \dot{U}_1 + \frac{\dot{U}_4}{l_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{U_4}{l_1 l_2} \dot{U}_1 + \frac{\dot{U}_4}{l_1} \right) & \frac{\dot{U}_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{U}_3}{l_3} \end{bmatrix},\tag{2.40}$$

elde edilmektedir. Denklem (2.40)'ta gösterilen deformasyon hızı tensörü Voigt notasyonu kullanılarak,

$$\{\mathbf{D}\} = \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \\ 2D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\dot{U}_1}{l_1} \\ \frac{\dot{U}_2}{l_2} \\ \frac{\dot{U}_3}{l_3} \\ -\frac{U_4}{l_1 l_2} \dot{U}_1 + \frac{\dot{U}_4}{l_1} \end{Bmatrix},\tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Artık, Denklem (2.27) kullanılarak lineer dönüşüm

tensörünü, \mathbf{T} , hesaplayabilmek mümkündür.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & 0 \\ \frac{-U_4}{l_1 l_2} & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

\mathbf{T} 'nin hesaplanmasının ardından Denklem (2.30)'da gösterilen yay kuvvetleri hesaplanabilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = l_1 l_2 l_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \frac{-U_4}{l_1 l_2} \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

Denklem (2.43) kullanılarak hesaplanan ve kinematik kısıtların belirlenmesinde kullanılan dört yay kuvveti aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} P_1 &= \Sigma_{11} l_2 l_3 - \Sigma_{12} U_4 l_3 = k \Delta x_1, \\ P_2 &= \Sigma_{22} l_1 l_3 = k \Delta x_2, \\ P_3 &= \Sigma_{33} l_1 l_2 = k \Delta x_3, \\ P_4 &= \Sigma_{12} l_1 l_3 = k \Delta x_4. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2.3 En Genel Yükleme Durumu İçin Kinematik Kısıtlar

Tezin temel amacını oluşturan ve en genel yükleme durumu olan üç adet normal ve üç adet kesme yüklemesinin tamamının birim hücreye uygulandığı durum için kinematik kısıtların türetilmesi bu bölümde sunulmaktadır. En genel yükleme durumunu oluşturan deplasmanların birim hücre üzerindeki şematik gösterimi Şekil 2.3'te gösterilmektedir. Burada, en genel yükleme durumu altında birim hücrenin maruz kaldığı gerilme durumu, beş adet gerilme oranı (ρ_{11} , ρ_{33} , ρ_{12} , ρ_{23} ve ρ_{13}) ile ifade edilmektedir.

Bu bölümde yer alan türetme aşamaları Bölüm 2.2.1 ve Bölüm 2.2.2'de yer alan aşamalara benzer şekilde gerçekleştirilmektedir. Türetmelere deformasyon gradyanı tensörünün, \mathbf{F} , hesaplanması için gerekli olan deformasyon sonrasındaki kon-

figürasyonların ifadesi ile başlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= X_1 + \frac{X_1}{L_1}U_1 + \frac{X_2}{L_2}U_4, \\
 x_2 &= X_2 + \frac{X_2}{L_2}U_2, \\
 x_3 &= X_3 + \frac{X_3}{L_3}U_3 + \frac{X_2}{L_2}U_5 + \frac{X_1}{L_1}U_6.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Denklem (2.45)'te yer alan deformasyon sonrasındaki konfigürasyonların ifade ettiği deformasyon gradyanı tensörü, \mathbf{F} , aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{U_1}{L_1} & \frac{U_4}{L_2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{U_2}{L_2} & 0 \\ \frac{U_6}{L_1} & \frac{U_5}{L_2} & 1 + \frac{U_3}{L_3} \end{bmatrix}. \tag{2.46}$$

Hesaplanan \mathbf{F} 'nin Denklem (2.26)'da kullanılması ile deformasyon hızı tensörü, \mathbf{D} , hesaplanmaktadır. Hesaplanan deformasyon hızı tensörünün Voigt notasyonu kullanılarak gösterimi Denklem (2.47)'de yer almaktadır.

$$\{\mathbf{D}\} = \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \\ 2D_{12} \\ 2D_{23} \\ 2D_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\dot{U}_1}{l_1} \\ \frac{\dot{U}_2}{l_2} \\ \frac{\dot{U}_3}{l_3} \\ -\frac{U_4}{l_1 l_2} \dot{U}_1 + \frac{\dot{U}_4}{l_1} \\ \left(\frac{U_4 U_6}{l_1 l_2 l_3} - \frac{U_5}{l_2 l_3} \right) \dot{U}_3 + \frac{\dot{U}_5}{l_2} - \frac{U_4}{l_1 l_2} \dot{U}_6 \\ -\frac{U_6}{l_1 l_3} \dot{U}_3 + \frac{\dot{U}_6}{l_1} \end{Bmatrix}. \tag{2.47}$$

Deformasyon hızı tensörünün elde edilmesi sonrasında, Denklem (2.27) kullanı-

arak linear dönüşüm tensörü, \mathbf{T} , hesaplanabilmektedir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_4}{l_1 l_2} & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{U_4 U_6}{l_1 l_2 l_3} - \frac{U_5}{l_2 l_3} \right) & 0 & \frac{1}{l_2} & -\frac{U_4}{l_1 l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{U_6}{l_1 l_3} & 0 & 0 & \frac{1}{l_1} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Denklem (2.30)'da yer alan yay kuvveti eşitliği matris gösterimi ile,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = l_1 l_2 l_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{U_4}{l_1 l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & 0 & \left(\frac{U_4 U_6}{l_1 l_2 l_3} - \frac{U_5}{l_2 l_3} \right) & -\frac{U_6}{l_1 l_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{U_4}{l_1 l_2} & \frac{1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.49)$$

şeklini almaktadır. Burada, kinematik kısıtların belirlenmesinde yararlanılan 6 adet yay kuvveti,

$$\begin{aligned} P_1 &= \Sigma_{11} l_2 l_3 - \Sigma_{12} U_4 l_3 = k \Delta x_1, \\ P_2 &= \Sigma_{22} l_1 l_3 = k \Delta x_2, \\ P_3 &= \Sigma_{33} l_1 l_2 + \Sigma_{23} (U_4 U_6 - U_5 l_1) - \Sigma_{13} U_6 l_2 = k \Delta x_3, \\ P_4 &= \Sigma_{12} l_1 l_3 = k \Delta x_4, \\ P_5 &= \Sigma_{23} l_1 l_3 = k \Delta x_5, \\ P_6 &= -\Sigma_{23} U_4 l_3 + \Sigma_{13} l_2 l_3 = k \Delta x_6, \end{aligned} \quad (2.50)$$

halini almaktadır.

3. NÜMERİK YÖNTEMLER

Bu bölüm içerisinde; Bölüm 2.2.1, 2.2.2 ve 2.2.3'te bahsedilen gerilme durumunu kontrol etmek için gerekli kinematik kısıtların kullanıldığı, BH nümerik modellemesinin detayları açıklanmaktadır.

Bu açıklamalar yapılırken ilk önce Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan ve sadece normal yükleme durumunun söz konusu olduğu durumun nümerik modelleme detayları sunulacaktır. Daha sonra, Tekoğlu (2014) çalışmasında bulunan ve normal yüklemelere ek olarak bir kesme yüklemesinin de uygulanabildiği durum için nümerik modelleme detayları genişletilerek sunulacaktır.

Tez kapsamında yapılan çalışmaların Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan birim hücre nümerik modelleme çatılarının en genel yükleme durumu için genişletilmiş hali olması sebebi ile son olarak, en genel gerilme durumunun kontrol edilebildiği BH nümerik modellesinin detayları açıklanacaktır.

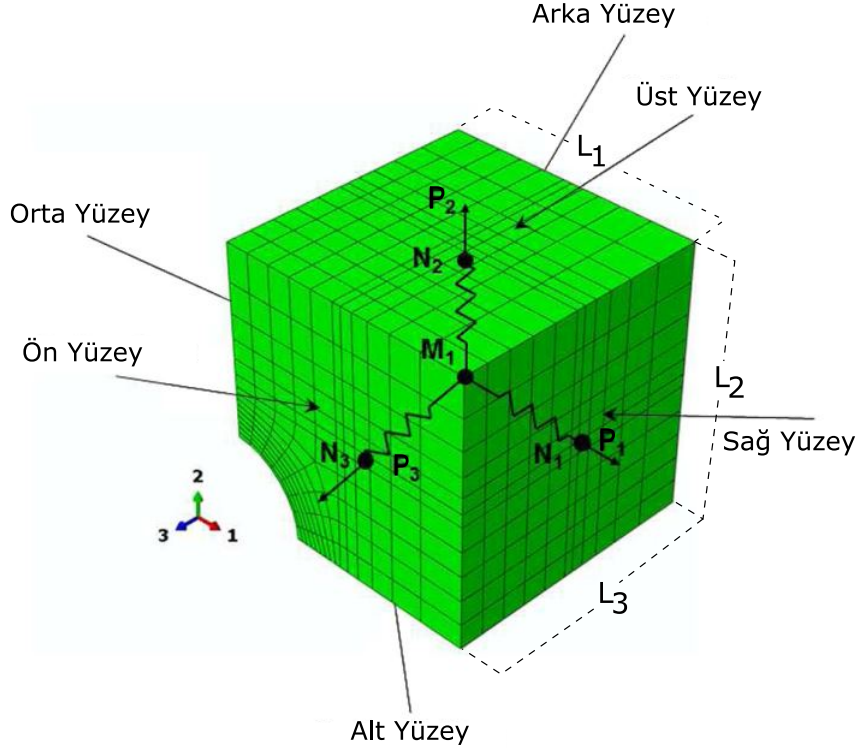
Bu bölümde detayları anlatılacak BH nümerik modelleme çalışmalarının tamamında ABAQUS sonlu elemanlar ticari yazılımı kullanılmıştır (ABAQUS v2016). Birim hücre hesaplamaları, ABAQUS/Standart kapalı çözücüsünde yer alan "Statik, Genel" çözüm prosedürü kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca çözüm iterasyonları, "Statik, Genel" prosedürü içerisinde yer alan Newton-Raphson metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

3.1 Asal Gerilme Durumu İçin Birim Hücre

Sadece normal doğrultudaki yüklemelerin uygulandığı birim hücre hesaplamalarında, BH'nin yalnızca 1/8'lik kısmının modellenmesi yeterli olmaktadır. Şekil 3.1'de Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan boşluklu BH'nin 1/8'lik bölümünün çözüm ağı gösterilmektedir. Ayrıca, BH'ye yüklemelerin uygulanması amacı ile kullanılan yay sisteminin şematik gösterimi ile yüzey isimlendirmeleri de Şekil 3.1'de bulunmaktadır.

Başlangıç durumundaki BH'nin kenarları, koordinat eksenleri, x_i ($i = 1, 2, 3$), doğrultusunda hizalanmaktadır. Kesme yüklemesinin bulunmadığı bu durumdaki deformasyon süreci boyunca birim hücrenin tüm kenarları düz kalmaktadır. Yani, dış yüzeyler başlangıç durumunda olduğu gibi düzlemselliğini korumaktadır.

BH'nin alt, arka ve orta yüzeylerine simetri sınır koşulu uygulanmaktadır. Geriye kalan yüzeylerdeki sınır koşulları ise çözüm ağına bağlı olmayan ve M_1 ile gösterilen düğüm noktası kullanılarak sağlanmaktadır. Bu aşamada; sağ, üst ve ön yü-



Şekil 3.1: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemeler (P_1 , P_2 ve P_3) altında yapılan hesaplamalarda kullanılan boşluklu BH'nin 1/8'lik kısmına ait SE çözüm ağı ile yüzeylere ait isimlendirme ve yay sisteminin gösterimi. Burada yer alan koordinat eksenleri görünürlük için BH'nin önünde gösterilmektedir. Aslında, koordinat ekseninin orijini arka, orta ve alt yüzeylerin kesiştiği noktada yer almaktadır.

zeyde bulunan düğüm noktalarına ait deplasmanlar, M_1 düğüm noktasına ait deplasman bileşenleri ile eşleştirilmektedir (aynı değeri almaya zorlanmaktadır). Bu eşleştirilmede, sağ yüzeydeki düğüm noktalarının x_1 doğrultusundaki deplasmanları (u_1) M_1 düğüm noktasının x_1 doğrultusundaki deplasmanı ($u_1^{M_1} = U_1$) ile, üst yüzeydeki düğüm noktalarının x_2 doğrultusundaki deplasmanları (u_2) $u_2^{M_1} = U_2$ ile, ve ön yüzeydeki düğüm noktalarının x_3 doğrultusundaki deplasmanları (u_3) ise $u_3^{M_1} = U_3$ ile eşleştirilmektedir. Sınır koşullarının bu şekilde tanımlanması ile birlikte, M_1 düğüm noktasına uygulanan noktasal kuvvetin birim hücreye aktarılması sağlanmaktadır.

Aşağıda, bahsedilen sınır koşullarının ifadeleri yer almaktadır.

$$\text{Sağ Yüzey } u_1(L_1, x_2, x_3) = u_1^{M_1}.$$

$$\text{Üst Yüzey } u_2(x_1, L_2, x_3) = u_2^{M_1}.$$

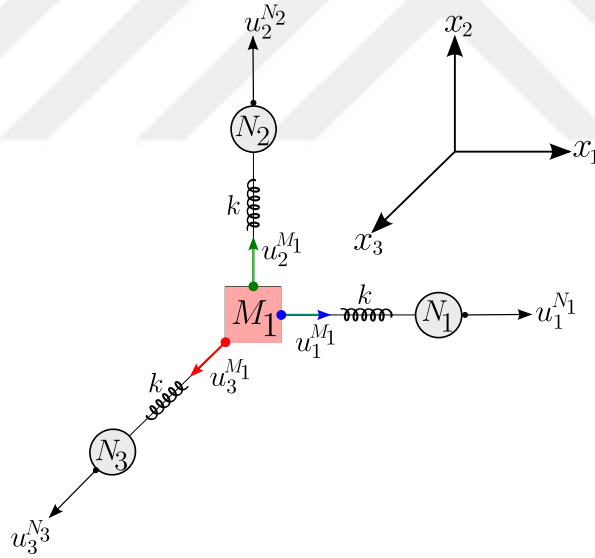
$$\text{Ön Yüzey } u_3(x_1, x_2, L_3) = u_3^{M_1}.$$

$$\text{Orta Yüzey } u_1(0, x_2, x_3) = 0.$$

$$\text{Alt Yüzey } u_2(x_1, 0, x_3) = 0.$$

$$\text{Arka Yüzey } u_3(x_1, x_2, 0) = 0.$$

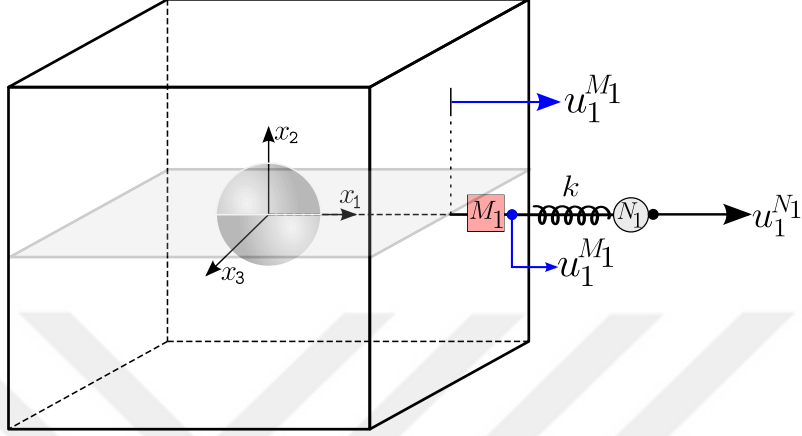
Birim hücreye uygulanan yüklemeler, M_1 düğüm noktasına yay elemanları (CONN2D2, eleman özelliklerinin detayı için bkz. ABAQUS v2016) ile bağlanan 3 adet çözüm ağından bağımsız düğüm noktası (N_1 , N_2 ve N_3) kullanılarak sağlanmaktadır. Şekil 3.2'de M_1 ile N_1 , N_2 , N_3 düğüm noktaları arasında kurulan yay bağlantılarının şematik gösterimi yer almaktadır.



Şekil 3.2: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yükleme altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi.

Kurulan yay bağlantılarının sadece tek bir doğrultuda hareket serbestliği bulunmaktadır. Böylece, M_1 düğüm noktası üzerinden aktarılan normal doğrultulu yüklemelerin üç ayrı yay bağlantısı ile kontrol edilmesi mümkün olmaktadır. x_1 doğ-

rultusundaki normal yüklemenin uygulanmasında kullanılan M_1 ve N_1 düğüm noktaları arasında tanımlı yay bağlantısı şematik olarak Şekil 3.3'te gösterilmektedir.



Şekil 3.3: M_1 ve N_1 düğüm noktaları arasında oluşturulan ve x_1 doğrultusundaki normal yüklemenin uygulanmasında kullanılan yay bağlantısının şematik gösterimi.

Yay sistemini oluşturan düğüm noktalarının isimlendirmeleri göz önüne alındığında, Bölüm 2.2.1'de açıklanan yay kuvvetlerinin eşitliğine dayanan kinematik kısıtlar (bkz. Denklem (2.37)) aşağıdaki formu almaktadır.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \Sigma_{11} l_2 l_3 = k \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right), \\
 P_2 &= \Sigma_{22} l_1 l_3 = k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right), \\
 P_3 &= \Sigma_{33} l_1 l_2 = k \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Türetilen kinematik ilişkilerin, çoklu nokta kısıtları (ÇNK) (İng. *multi-point-constraints*) altprogramında kullanılması ile nümerik hesaplamalara dahil edilmesi mümkün olmaktadır. ÇNK altprogramı, düğüm noktaları arasındaki doğrusal ya da doğrusal olmayan kinematik ilişkilerin kısıt fonksiyonları, f_i , kullanılarak tanımlanabildiği bir ABAQUS altprogramıdır (detayları için ABAQUS v2016 dökümantasyonu içerisinde bkz. MPC subroutine). ÇNK altprogramında tanımlanan kısıt fonksiyonları; N_1 , N_2 ya da N_3 düğüm noktalarına ait deplasmanlardan herhangi biri için türetilmektedir. Fakat, yükleme süreci boyunca deplasmanı monoton olarak değişen düğüm noktasına göre hesaplanan kısıt fonksiyonları, nümerik çözümün yakınsamasında kolaylık sağlamaktadır. Tekoğlu (2014) referans çalışması

sında N_2 düğüm noktasına ait $u_2^{N_2}$ deplasmanına göre kısıt fonksiyonları hesaplanmaktadır. Bu durumda, ÇNK altprogramı tanımlamalarındaki kısıt fonksiyonlarının (f_1 ve f_2) hesaplanması Denklem (3.1)'de yer alan P_2 eşitliği ile başlamaktadır.

$$\Sigma_{22} = \frac{k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right)}{l_1 l_3}. \quad (3.2)$$

Denklem (3.1)'de elde edilen Σ_{22} 'den yararlanılarak P_1 kuvvet eşitliği çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} k \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right) &= \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_2 l_3 \\ &= \rho_{11} \Sigma_{22} l_2 l_3 \\ &= \rho_{11} \frac{k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right)}{l_1 l_3} l_2 l_3 \\ \Rightarrow f_1 &= \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right) - \rho_{11} \frac{l_2}{l_1} \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

birinci kısıt fonksiyonu, f_1 elde edilmektedir. Benzer şekilde, ikinci kısıt fonksiyonunun, f_2 , hesaplanması ise Denklem (3.4)'te gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} k \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right) &= \frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_1 l_2 \\ &= \rho_{33} \Sigma_{22} l_1 l_2 \\ &= \rho_{33} \frac{k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right)}{l_1 l_3} l_1 l_2 \\ \Rightarrow f_2 &= \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right) - \rho_{33} \frac{l_2}{l_3} \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Denklem (3.3) ve (3.4)'te yer alan kısıt fonksiyonları 5 adet bilinmeyen deplasman değeri ($u_1^{N_1}$, $u_3^{N_3}$, $u_1^{M_1}$, $u_2^{M_1}$ ve $u_3^{M_1}$) içerirken, $u_2^{N_2}$ ise önceden belirlenmiş deplasman değeri olarak kısıt fonksiyonlarında yer almaktadır. ÇNK altprogramını çözüm süresince kullanan ABAQUS, her bir çözüm adımı artımında $u_2^{N_2}$ 'nin belirlenmiş değerine göre bilinmeyen 5 deplasman değerini iteratif olarak hesaplamaktadır. Numerik hesaplama, $u_2^{N_2}$ deplasmanının kullanıcı tarafından belirlenmiş değeri olan $u_2^{N_2-max}$ a ulaştığında sonuçlanmaktadır.

Nümerik hesaplamalarda kullanılan ÇNK altprogramı yay direngenliği değerinden, k , bağımsız kısıt fonksiyonları içermektedir. Bu sebeple, nümerik çözüm yay

direngenliği değerinden etkilenmemektedir. Fakat, yay direngenli değer, k , ile kullanıcı tarafından belirlenmiş $u_2^{N_2-max}$ deplasmanının değer, nümerik çözümin yakınsamasını dolaylı olarak etkilemektedir. k ve $u_2^{N_2-max}$ 'nin çok büyük ya da çok küçük değerlerde seçilmesi, çözümlerinin sayısını arttırmakta ve nümerik çözümlerinin yakınsamasını zorlaştırmaktadır.

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda, normal yükleme durumu için yukarıda açıklanan nümerik çatıya alternatif bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntemin, nümerik modelleme ve hesaplama maaliyeti açısından verimli olması hedeflenmektedir. Geliştirilen alternatif yöntemde, BH'nin sınır koşulları, Denklem (2.20)'de yer alan periyodiklik bağıntısı uyarınca,

$$\text{Sağ Yüzey } u_1(L_1, x_2, x_3) = u_1^*,$$

$$\text{Üst Yüzey } u_2(x_1, L_2, x_3) = u_2^*,$$

$$\text{Ön Yüzey } u_3(x_1, x_2, L_3) = u_3^*,$$

$$\text{Orta Yüzey } u_1(0, x_2, x_3) = 0,$$

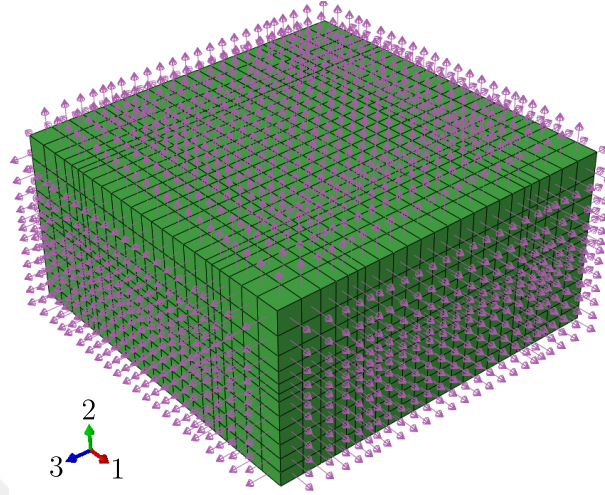
$$\text{Alt Yüzey } u_2(x_1, 0, x_3) = 0,$$

$$\text{Arka Yüzey } u_3(x_1, x_2, 0) = 0,$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada "*" sembolü ile gösterilen deplasmanlar, sınır koşulunun tanımlandığı yüzeyde yer alan herhangi bir düğüm noktasının deplasmanını ifade etmektedir. Örnek olarak, üst yüzeyde tanımlı sınır koşulunda yer alan u_2^* deplasmanı, üst yüzey üzerindeki düğüm noktalarından herhangi birinin x_2 eksenine doğrultusundaki deplasmanını ifade etmektedir. Bu tanımlama ile, temsili hacim elemanının tüm dış yüzeyleri deformasyon süreci boyunca düzlemselliğini korumaktadır.

Alternatif yöntem içerisinde yapılan yüklemenin uygulama biçimindeki değerlik ile BH'ye uygulanan yükleme yay sistemi yerine, direkt olarak dış yüzeylere uygulanan traksiyonlar ile sağlanmaktadır. Bu sayede, yay sisteminin ve ÇNK altprogramının kullanılmasına gerek duyulmamaktadır. şekil 3.4'te, normal yönlü yüzey traksiyonları tanımlanmış örnek bir temsili hacim elemanı SE modeli gösterilmektedir.

Bu yöntem içerisinde yapılan çözümlerinin prosedürü değerikliği ile doğrusal olmayan denge denklemlerinin çözümlerini Newton-Raphson metodu yerine eğri uzunluğu (İng. *arc-length*) metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu metod, ABAQUS/Standart kapalı çözümlerinde "Statik Riks" prosedürü olarak isimlendiril-



Şekil 3.4: Normal yönlü yüzey traksiyonları tanımlanmış örnek bir temsili hacim elemanı SE modeli.

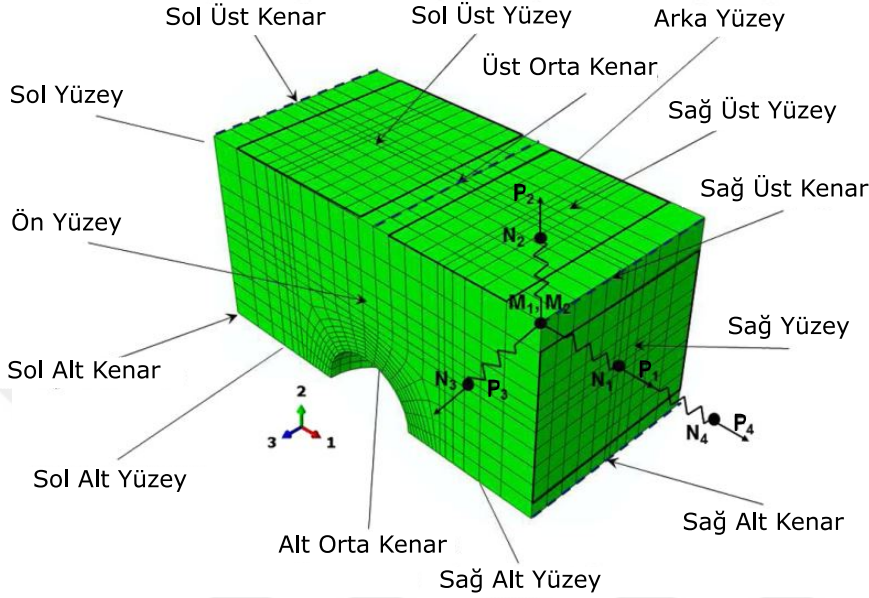
mektedir ve burkulma vb. direngenlik matrisinin kararsız olduğu doğrusal olmayan problemlerde kullanılmak üzere geliştirilmiş bir çözüm algoritmasıdır. Ayrıca, kararsızlık sergilemeyen doğrusal olmayan SE problemlerinin çözümlerinin yakınsamasını hızlandırmak için de kullanılmaktadır. Eğri uzunluğu metodunda, tüm yükleme bir "eğri uzunluğu" ile ifade edilirken, bu eğri uzunluğunun da bir dizi "eğri uzunluğu artımı"na bölünmesi söz konusudur. Her bir eğri uzunluğu artımı içerisinde denge denklemlerinin çözülmesi ile ise çözüm elde edilmektedir.

Tez kapsamında normal yükleme durumu için geliştirilen bu alternatif yöntem için devam eden bölümlerde "Riks yöntemi" isimlendirmesi ile bahsedilmektedir. Riks yöntemi kullanılarak uygulanan kesme doğrultularındaki traksiyonlar, normal doğrultudaki yüklemeleri etkileyerek gerilme durumunun kontrol edilmesine engel teşkil etmektedir. Bu sebeple, Riks yönteminin kullanımı sadece normal yüklemelerin bulunduğu birim hücre hesaplamaları ile sınırlı olmaktadır.

3.2 Normal Gerilmeye Ek Bir Kesme Gerilmesi Bulunan Durum İçin Birim Hücre

Tekoğlu (2014) çalışmasında yer alan bir diğer birim hücre hesaplaması, normal doğrultudaki yüklemelere ek olarak bir adet kesme yüklemesi bileşeninin bulunduğu durum için yapılmaktadır. Kesme yüklemesinin uygulanması sebebi ile artık BH'nin 1/8'lik kısmının modellenmesi yeterli olmamaktadır. Şekil 3.5'te referans çalışmada yer alan boşluklu BH'nin 1/4'lük bölümünün çözüm ağı, yüzey ve ke-

nar isimlendirmeleri ile yay sisteminin şematik gösterimi yer almaktadır.



Şekil 3.5: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemelere (P_1 , P_2 ve P_3) ek olarak bir kesme yüklemesinin (P_4) de bulunduğu durumda yapılan hesaplamalarda kullanılan boşluklu BH'nin 1/4'lük kısmına ait SE çözüm ağı ile yüzeylere ait isimlendirme ve yay sisteminin gösterimi. Burada yer alan koordinat eksenini görünürlük için BH'nin önünde gösterilmektedir. Aslında, koordinat ekseninin orijini arka, orta ve alt yüzeylerin kesiştiği noktada yer almaktadır.

Bu yükleme durumunda, P_1 , P_2 ve P_3 normal kuvvetlerine ek olarak P_4 kesme yüklemesi de BH'ye uygulanmaktadır. Kesme yüklemesinin uygulanabilmesi için, çözüm ağından bağımsız M_2 ve N_4 düğüm noktaları oluşturulmuş ve bu düğüm noktaları birbirlerine yay elemanı (CONN2D2) ile bağlanmıştır. Bölüm 3.2'de anlatıldığı üzere, simetri sınır koşulu uygulanmayan dış yüzeylere M_1 ve M_2 düğüm noktaları kullanılarak sınır koşulları tanımlanmıştır. Bu şekilde, M_1 düğüm noktası üzerinden normal kuvvetlerin (P_1 , P_2 ve P_3), M_2 düğüm noktası üzerinden de kesme kuvveti P_4 'ün birim hücreye aktarılması sağlanmaktadır ($M_1^{M_2} = U_4$). BH'ye uygulanan sınır koşulları aşağıda sıralanmaktadır:

Üst Orta Kenar

$$u_1(0, L_2, x_3) = u_1^{M_2},$$

$$u_2(0, L_2, x_3) = u_2^{M_1}.$$

Sol Üst Yüzey/Sağ Üst Yüzey

$$u_1(-x_1, L_2, x_3) + u_1(x_1, L_2, x_3) = 2u_1^{M_2},$$

$$u_2(-x_1, L_2, x_3) + u_2(x_1, L_2, x_3) = 2u_2^{M_1},$$

$$u_3(-x_1, L_2, x_3) - u_3(x_1, L_2, x_3) = 0.$$

Sol Üst Kenar/Sağ Üst Kenar

$$u_1(\mp L_1, L_2, x_3) = u_1^{M_2} \mp u_1^{M_1},$$

$$u_2(\mp L_1, L_2, x_3) = u_2^{M_1},$$

$$u_3(-L_1, L_2, x_3) - u_3(L_1, L_2, x_3) = 0.$$

Sol Yüzey/Sağ Yüzey

$$u_1(-L_1, x_2, x_3) - u_1(L_1, x_2, x_3) = -2u_1^{M_1},$$

$$u_2(-L_1, x_2, x_3) - u_2(L_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$u_3(-L_1, x_2, x_3) - u_3(L_1, x_2, x_3) = 0.$$

Sol Alt Kenar/Sağ Alt Kenar

$$u_1(\mp L_1, 0, x_3) = \mp u_1^{M_1},$$

$$u_2(\mp L_1, 0, x_3) = 0,$$

$$u_3(-L_1, 0, x_3) - u_3(L_1, 0, x_3) = 0.$$

Alt Orta Kenar

$$u_1(0, 0, x_3) = 0,$$

$$u_2(0, 0, x_3) = 0.$$

Sol Alt Yüzey/Sağ Alt Yüzey

$$u_1(-x_1, 0, x_3) + u_1(x_1, 0, x_3) = 0,$$

$$u_2(-x_1, 0, x_3) + u_2(x_1, 0, x_3) = 0,$$

$$u_3(-x_1, 0, x_3) - u_3(x_1, 0, x_3) = 0.$$

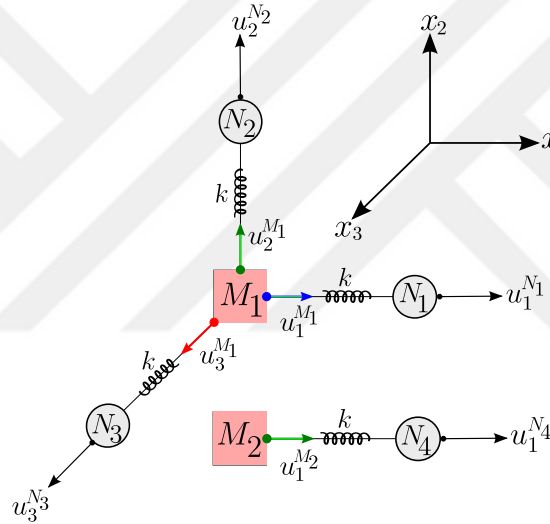
Arka Yüzey

$$u_3(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Ön Yüzey

$$u_3(x_1, x_2, L_3) = u_3^{M_1}.$$

Şekil 3.6'da M_1 ile N_1, N_2, N_3 düğüm noktaları ile M_2 ve N_4 düğüm noktaları arasında kurulan yay bağlantılarının şematik gösterimi yer almaktadır.



Şekil 3.6: Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan, normal yüklemeye ek bir kesme yüklemesinin de bulunduğu durum altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi.

Yay sistemini oluşturan düğüm noktalarının isimlendirmeleri göz önüne alındığında, Bölüm 2.2.2'de açıklanan yay kuvvetlerinin eşitliğine dayanan kinematik

kısıtlar (bkz. Denklem (2.37)) aşağıdaki formu almaktadır:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \Sigma_{11}l_2l_3 - \Sigma_{12}U_4l_3 = k \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right), \\
P_2 &= \Sigma_{22}l_1l_3 = k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right), \\
P_3 &= \Sigma_{33}l_1l_2 = k \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right), \\
P_4 &= \Sigma_{12}l_1l_3 = k \left(u_1^{N_4} - u_1^{M_2} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Denklem (3.5)'te yer alan eşitlikler kullanılarak N_2 düğüm noktasına ait $u_2^{N_2}$ deplasmanına göre kısıt fonksiyonları (f_1 , f_2 ve f_3) hesaplanmaktadır. Hesaplamalara P_2 yay kuvvetinin eşitliğinden başlanmaktadır.

$$\Sigma_{22} = \frac{k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right)}{l_1l_3}. \tag{3.6}$$

Denklem (3.6)'da elde edilen Σ_{22} ve P_1 yay kuvvetinin eşitliği kullanılarak ilk kısıt fonksiyonu, f_1 , hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}
k \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right) &= \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22}l_2l_3 - \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22}u_1^{M_2}l_3 \\
&= \left(\rho_{11}l_2l_3 - \rho_{12}u_1^{M_2}l_3 \right) \Sigma_{22} \\
&= k \left(\rho_{11} \frac{l_2}{l_1} - \rho_{12} \frac{u_1^{M_2}}{l_1} \right) \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right) \\
\Rightarrow f_1 &= \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right) - \left(\rho_{11} \frac{l_2}{l_1} - \rho_{12} \frac{u_1^{M_2}}{l_1} \right) \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Benzer şekilde, ikinci kısıt fonksiyonunun, f_2 , hesaplanması ise Denklem (3.8)'de gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}
k \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right) &= \frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22}l_1l_2 \\
&= \rho_{33} \Sigma_{22}l_1l_2 \\
&= \rho_{33} \frac{k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right)}{l_1l_3} l_1l_2 \\
\Rightarrow f_2 &= \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right) - \rho_{33} \frac{l_2}{l_3} \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Üçüncü kısıt fonksiyonu, f_3 , ise Denklem (3.9)'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}
k(u_1^{N_4} - u_1^{M_2}) &= \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_1 l_3 \\
&= \rho_{12} \Sigma_{22} l_1 l_3 \\
&= \rho_{12} \frac{k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1})}{l_1 l_3} l_1 l_3 \\
\Rightarrow f_3 &= (u_1^{N_4} - u_1^{M_2}) - \rho_{12} (u_2^{N_2} - u_2^{M_1}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

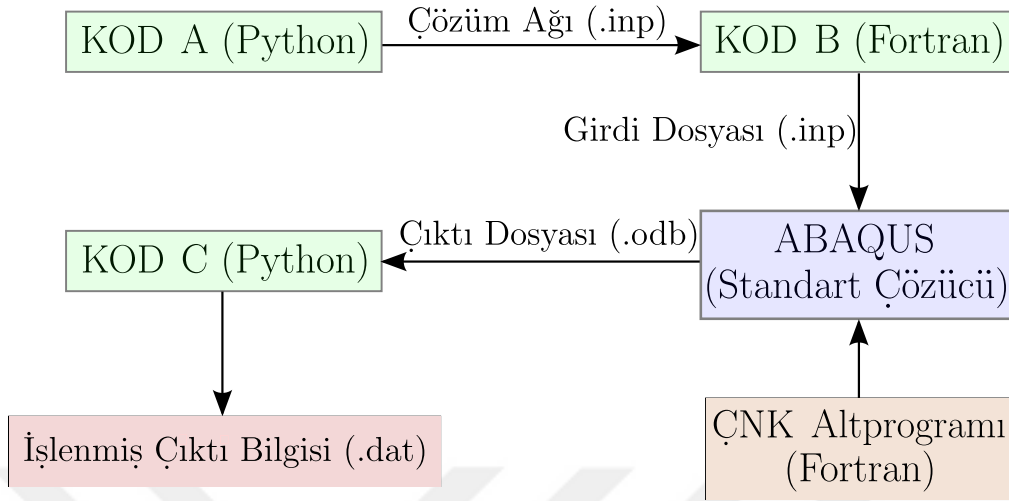
Denklem (3.7), (3.8) ve (3.9)'da yer alan kısıt fonksiyonları 7 adet bilinmeyen deplasman değeri ($u_1^{N_1}, u_3^{N_3}, u_1^{N_4}, u_1^{M_1}, u_2^{M_1}, u_3^{M_1}$ ve $u_1^{M_2}$) içerirken, $u_2^{N_2}$ ise önceden belirlenmiş deplasman değeri olarak kısıt fonksiyonlarında yer almaktadır. ÇNK altprogramını çözüm boyunca kullanan ABAQUS, her bir çözüm adımı artımında $u_2^{N_2}$ 'nin belirlenmiş değerine göre bilinmeyen 7 deplasman değerini iteratif olarak hesaplamaktadır. Numerik hesaplama, $u_2^{N_2}$ deplasmanının kullanıcı tarafından belirlenmiş değeri olan $u_2^{N_2-max}$ 'a ulaştığında sonuçlanmaktadır.

3.3 En Genel Yükleme Durumu İçin Birim Hücre

Bölüm 2.2.1 ve 2.2.2'de, Tekoğlu (2014) referans çalışmasında yer alan yükleme durumlarında birim hücreye ait nümerik modellemenin nasıl gerçekleştirildiği hakkında açıklamalar yapılmıştır. Bu bölüm içerisinde ise referans çalışmanın kapsamı genişletilecek ve tezin amacı olan tüm gerilme oranları sabit tutularak yapılan BH hesaplamaları için nümerik yöntem ve arka plan açıklanacaktır.

BH hesaplamalarında uygulanan en genel yükleme durumu 3 adet normal ve 3 adet kesme yüklemesinden oluşmaktadır. Bu sebeple, artık birim hücrenin en az 1/2'lik kısmının modellenmesi gerekmektedir. Tez kapsamındaki çalışmalarda Python ve Fortran dillerinde kodlar hazırlanarak ABAQUS programında gerçekleştirilen modelleme işlemleri parametrik olarak verimli bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Tez çalışması boyunca gerçekleştirilen sonlu elemanlar modellemesi, çözümü ve analiz sonucu işleme süreçlerine ait akış şeması Şekil 3.7'de yer almaktadır.

Şekil 3.7'de gösterildiği üzere, sonlu elemanlar modellemesi, Python dilinde hazırlanmış olan KOD A kullanılarak üretilen .inp uzantılı dosya ile başlamaktadır. Bu dosyada, birim hücrenin 1/8'lik kısmının çözüm ağı ve düğüm noktası bilgisi

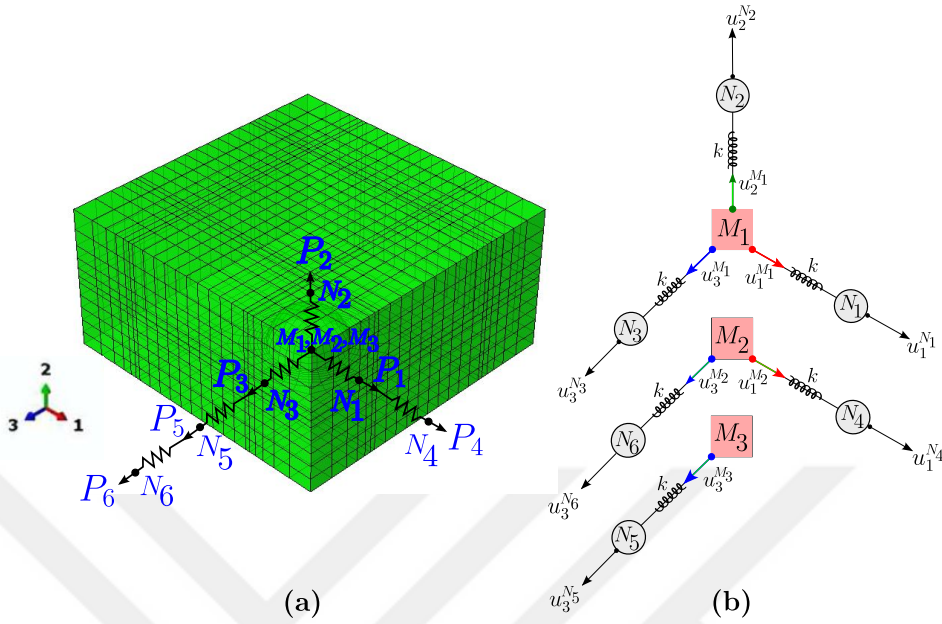


Şekil 3.7: Tüm gerilme oranları sabit tutulabilen birim hücre SE modellemesi, çözümü ve analiz sonucu işleme süreçleri.

yer almaktadır. Bu dosyada yer alan bilgileri kullanan Fortran dilinde hazırlanmış KOD B, sonlu elemanlar çözücüsü tarafından kullanılan ve BH'nin 1/2'lik kısmına ait bilgileri içeren girdi dosyasını oluşturmaktadır. Son aşamada ise SE analizi sonucunda elde edilen sonuç dosyasının KOD C kullanılarak işlenmesi ile birim hücrede oluşan yer değiştirmeler, gerinimler, gerilmeler, boşluk oylum oranı vb. değerler elde edilmektedir. Şekil 3.8a'da, tez çalışması kapsamındaki nümerik modelleme çalışmalarında elde edilmiş örnek bir BH çözüm ağı, Şekil 3.8b'de ise en genel yükleme durumu altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi bulunmaktadır.

En genel yükleme koşulunu sağlamak adına, P_1 , P_2 ve P_3 normal kuvvetlerine ek olarak P_4 , P_5 ve P_6 kesme yüklemeleri de BH'ye uygulanmaktadır. Bölüm 3.1 ve 3.2'de bahsedilen sınır koşulları Denklem (2.20)'de yer alan periyodiklik bağıntısına göre BH'nin dış yüzeylerine M_1 , M_2 ve M_3 düğüm noktaları kullanılarak tanımlanmaktadır ($U_1^{M_1} = U_1$, $U_2^{M_1} = U_2$, $U_3^{M_1} = U_3$, $U_1^{M_2} = U_4$, $U_3^{M_3} = U_5$, $U_3^{M_2} = U_6$).

Yay sistemini oluşturan düğüm noktalarına ait deplasmanların isimlendirmeleri göz önüne alındığında, Bölüm 2.2.3'te açıklanan yay kuvvetlerinin eşitliğine da-



Şekil 3.8: (a) Örnek bir birim hücrenin 1/2'lik çözüm ağı. (b) En genel yükleme durumu altında yapılan hesaplamalarda kullanılan yay bağlantılarının şematik gösterimi.

yanan kinematik kısıtlar (bkz. Denklem (2.50)) aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \Sigma_{11} l_2 l_3 - \Sigma_{12} U_4 l_3 = k \left(u_1^{N_1} - u_1^{M_1} \right), \\
 P_2 &= \Sigma_{22} l_1 l_3 = k \left(u_2^{N_2} - u_2^{M_1} \right), \\
 P_3 &= \Sigma_{33} l_1 l_2 + \Sigma_{23} (U_4 U_6 - U_5 l_1) - \Sigma_{13} U_6 l_2 = k \left(u_3^{N_3} - u_3^{M_1} \right), \\
 P_4 &= \Sigma_{12} l_1 l_3 = k \left(u_1^{N_4} - u_1^{M_2} \right), \\
 P_5 &= \Sigma_{23} l_1 l_3 = k \left(u_3^{N_5} - u_3^{M_3} \right), \\
 P_6 &= -\Sigma_{23} U_4 l_3 + \Sigma_{13} l_2 l_3 = k \left(u_3^{N_6} - u_3^{M_2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Bölüm 3.1 ve 3.2'de bulunan kısıt fonksiyonlarının N_2 düğüm noktasına ait $u_2^{N_2}$ deplasmanına göre türetilmesi sebebiyle, burada da ilk olarak aynı deplasman değeri için kısıt fonksiyonları (f_1, f_2, f_3, f_4 ve f_5) hesaplanmıştır. Hesaplamalara bu sebeple P_2 yay kuvvetinin eşitliği kullanılarak başlanmaktadır.

$$\Sigma_{22} = \frac{k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1})}{l_1 l_3}. \tag{3.11}$$

Geriye kalan diğer yay kuvvetlerine ait Denklem (3.10)'da yer alan eşitliklerin Σ_{22} kullanılarak sağlanması ile 5 adet kısıt fonksiyonu hesaplanmaktadır. P_1 ve P_4 kuvvetlerine ait eşitlikler Bölüm 3.2'de bulunan eşitlikler ile aynı olduğu için, f_1 ve f_3 kısıt fonksiyonları da aynı şekilde hesaplanmaktadır (bkz. Denklem (3.7) ve Denklem (3.9)). P_3 kuvvet eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} k(u_3^{N_3} - u_3^{M_1}) &= \frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_1 l_2 + \left(u_1^{M_2} u_3^{M_2} - u_3^{M_3} l_1 \right) \frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} - u_3^{M_2} \frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_2 \\ &= \left(\rho_{33} l_1 l_2 + \left(u_1^{M_2} u_3^{M_2} - u_3^{M_3} l_1 \right) \rho_{23} - u_3^{M_2} \rho_{13} l_2 \right) \frac{k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1})}{l_1 l_3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_2 = (u_3^{N_3} - u_3^{M_1}) \left(\rho_{33} l_1 l_2 + \left(u_1^{M_2} u_3^{M_2} - u_3^{M_3} l_1 \right) \rho_{23} - u_3^{M_2} \rho_{13} l_2 \right) (u_2^{N_2} - u_2^{M_1}) = 0, \quad (3.12)$$

hesaplanmaktadır. Benzer şekilde, dördüncü kısıt fonksiyonunun, f_4 , hesaplanması aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} k(u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) &= \frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_1 l_3 \\ &= \rho_{23} l_1 l_3 \frac{k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1})}{l_1 l_3} \\ \Rightarrow f_4 &= (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) - (u_2^{N_2} - u_2^{M_1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Son olarak, beşinci kısıt fonksiyonunun, f_5 , hesaplanması Denklem (3.14)'te yer almaktadır.

$$\begin{aligned} k(u_3^{N_6} - u_3^{M_2}) &= -u_1^{M_2} \frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_3 + \frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{22}} \Sigma_{22} l_2 l_3 \\ &= (-u_1^{M_2} \rho_{23} l_3 + \rho_{13} l_2 l_3) \frac{k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1})}{l_1 l_3} \\ \Rightarrow f_5 &= (u_3^{N_6} - u_3^{M_2}) - \left(-u_1^{M_2} \frac{\rho_{23}}{l_1} + \rho_{13} \frac{l_2}{l_1} \right) (u_2^{N_2} - u_2^{M_1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Denklem (3.7), (3.9), (3.12), (3.13) ve (3.14)'te yer alan kısıt fonksiyonları 11 adet bilinmeyen deplasman değeri ($u_1^{N_1}$, $u_3^{N_3}$, $u_1^{N_4}$, $u_3^{N_5}$, $u_3^{N_6}$, $u_1^{M_1}$, $u_2^{M_1}$, $u_3^{M_1}$, $u_1^{M_2}$, $u_3^{M_2}$ ve $u_3^{M_3}$) içerirken, $u_2^{N_2}$ ise önceden belirlenmiş deplasman değeri olarak kısıt fonksiyonlarında yer almaktadır. ÇNK altprogramını çözüm boyunca kullanan ABAQUS, her bir çözüm adımı artımında $u_2^{N_2}$ 'nin belirlenmiş değerine göre

bilinmeyen 11 deplasman değerini iteratif olarak hesaplamaktadır. Numerik hesaplama, $u_2^{N_2}$ deplasmanının kullanıcı tarafından belirlenmiş değeri olan $u_2^{N_2-max}$, a ulaştığında sonuçlanmaktadır.

BH hesaplamalarında kullanılan kısıt fonksiyonlarının hesaplanışının yükleme süreci boyunca monotonik olarak değişen bir deplasman bileşeni kullanılarak gerçekleştirilmesi, SE çözümünün yakınsaması için önemli bir faktördür. Bu sebeple, BH hesaplamalarında yükleme durumu gözetilmeli ve en uygun deplasman bileşenine göre kısıt fonksiyonları hesaplanmalıdır. Kısıt fonksiyonlarının $u_1^{N_1}$, $u_2^{N_2}$, $u_3^{N_3}$, $u_1^{N_4}$, $u_3^{N_5}$ ve $u_3^{N_6}$ deplasmanlarından herhangi biri için türetilmesi yukarıda açıklanan yöntem kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Aşağıda, hesaplama açıklamalarının daha iyi anlatılabilmesi amacıyla, N_5 düğüm noktasına ait $u_3^{S_5}$ deplasmanına göre kısıt fonksiyonlarının nasıl hesaplandığı gösterilmiştir.

Kısıt fonksiyonu hesaplamaları, P_5 kuvvet eşitliğinin çözümü ile başlamaktadır.

$$\Sigma_{23} = \frac{k(u_3^{N_5} - u_3^{M_3})}{l_1 l_3}. \quad (3.15)$$

P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , ve P_6 yay kuvvetlerine ait denkliklerin Denklem (3.15)'te hesaplanan Σ_{23} eşitliği kullanılarak çözülmesi ile kısıt fonksiyonları elde edilmektedir. P_1 yay kuvveti denkliğinden yararlanılarak hesaplanan birinci kısıt fonksiyonu Denklem (3.16)'da yer almaktadır.

$$\begin{aligned} k(u_1^{N_1} - u_1^{M_1}) &= \frac{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}{\Sigma_{22} \Sigma_{23}} \Sigma_{23} l_2 l_3 - u_1^{M_2} \frac{\Sigma_{12} \Sigma_{22}}{\Sigma_{22} \Sigma_{23}} \Sigma_{23} l_3 \\ &= \frac{\rho_{11}}{\rho_{23}} \Sigma_{23} l_2 l_3 - u_1^{M_2} \frac{\rho_{12}}{\rho_{23}} \Sigma_{23} l_3 \\ &= \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_{23}} l_2 l_3 - u_1^{M_2} \frac{\rho_{12}}{\rho_{23}} l_3 \right) \frac{k(u_3^{N_5} - u_3^{M_3})}{l_1 l_3} \\ \Rightarrow f_1 &= (u_1^{N_1} - u_1^{M_1}) - \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_{23}} \frac{l_2}{l_1} - u_1^{M_2} \frac{\rho_{12}}{\rho_{23} l_1} \right) (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

İkinci kısıt fonksiyonun, f_2 , hesaplanması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
k(u_2^{N_2} - u_2^{M_1}) &= \frac{\Sigma_{22}}{\Sigma_{23}} \Sigma_{23} l_1 l_3 \\
&= \frac{1}{\rho_{23}} \Sigma_{23} l_1 l_3 \\
&= \frac{1}{\rho_{23}} l_1 l_3 \frac{k(u_3^{N_5} - u_3^{M_3})}{l_1 l_3} \\
\Rightarrow f_2 &= \rho_{23} (u_2^{N_2} - u_2^{M_1}) - (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Benzer yöntemin kullanılması ile hesaplanan diğer kısıt fonksiyonları aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}
f_3 &= (u_3^{N_3} - u_3^{M_1}) - \left(\frac{\rho_{33} l_2}{\rho_{23} l_3} + \frac{u_1^{M_2} u_3^{M_2}}{l_1 l_3} - \frac{u_3^{M_3}}{l_3} - u_3^{M_2} \frac{\rho_{13} l_2}{\rho_{23} l_1 l_3} \right) (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) = 0, \\
f_4 &= (u_1^{N_4} - u_1^{M_2}) - \frac{\rho_{12}}{\rho_{23}} (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) = 0, \\
f_5 &= (u_3^{N_6} - u_3^{M_2}) - \left(\frac{\rho_{13} l_2}{\rho_{23} l_1} - \frac{u_1^{M_2}}{l_1} \right) (u_3^{N_5} - u_3^{M_3}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$



4. BİRİM HÜCRE HESAPLAMALARININ SONUÇLARI

Tez çalışması kapsamında gerçekleştirilen birim hücre hesaplamalarının teorik arka planı Bölüm 2.2.3'te açıklanmıştır. Bu bölümde sonuçları sunulan BH hesaplamaları, tüm gerilme oranlarının sabit tutulabildiği nümerik modelleme yöntemi, ÇNK yöntemi, (bkz. Bölüm 3.3) kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu hesaplama sonuçlarına ek olarak normal yükleme durumu için alternatif olarak sunulan Riks yönteminin (bkz. Bölüm 3.1) kullanıldığı sonuçlar da sunulmaktadır.

Tez çalışması süreci boyunca onlarca farklı yükleme durumu için birim hücre hesaplamaları yapılmış ve kurulan hesaplama çatisının yeterliliği sınanmıştır. Bu bölüm içerisinde yer alan hesaplama sonuçları, tez çalışması süreci boyunca gerçekleştirilmiş ve karşılaştırılması olası yükleme durumlarını temsil ettiği düşünülen BH hesaplamalarından seçilerek sunulmaktadır.

Hesaplama sonuçları sunulan birim hücrelerin tamamının matris mekanik özellikleri elastik bölgede Hooke kanununa uyarken (bkz. Denklem (4.1)), plastik bölge gerçek gerilme-gerinim davranışları ise Denklem 4.2'de gösterildiği gibidir:

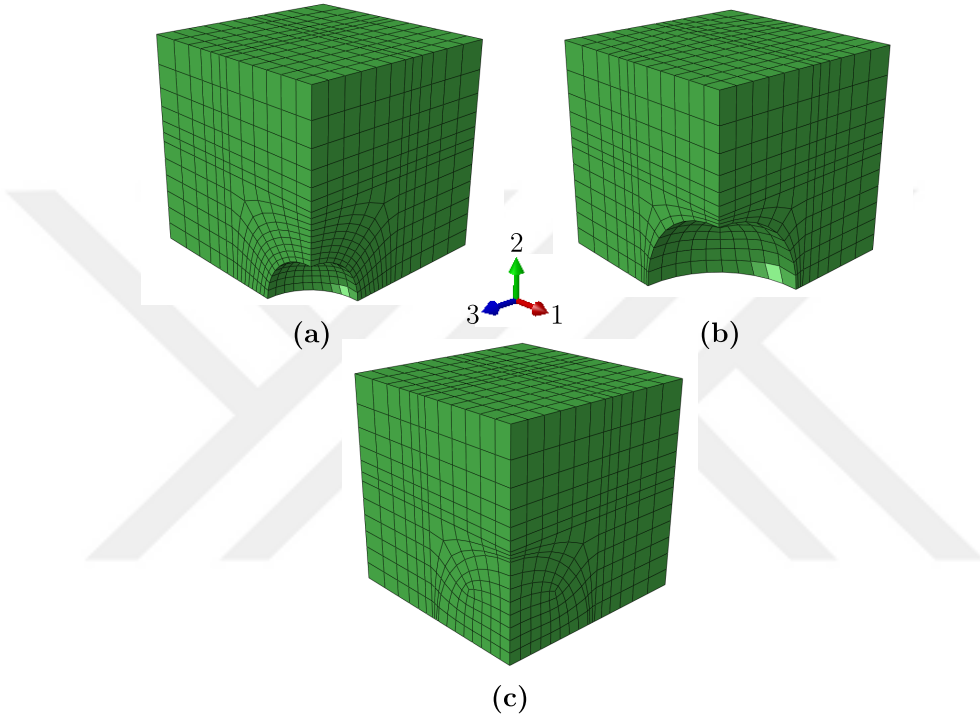
$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{E\varepsilon}{\sigma_0}, \quad \sigma < \sigma_0 \text{ olduğunda,} \quad (4.1)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(1 + \frac{E\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_0}\right)^n, \quad \sigma \geq \sigma_0 \text{ olduğunda.} \quad (4.2)$$

Burada, σ gerçek gerilmeyi, σ_0 akma gerilmesini, E Young modülünü, ε elastik gerinimi, ε_{eq}^p eşdeğer plastik gerinimi ve n pekleşme katsayısını ifade etmektedir. BH matrisinin mekanik özelliklerinin yaygın olarak kullanılan metal ve metal alaşımlı mühendislik malzemelerinin mekanik özelliklerine genel bir yakınlık taşıması amaçlanmıştır. Bu sebeple, hesaplama sonuçları sunulan birim hücrelerin matrislerinin mekanik özellikleri tanımlanırken Young modülü, $E = 300$ GPa, Poisson oranı, $\nu = 0.3$, akma gerilmesi, $\sigma_0 = 1000$ MPa ve pekleşme katsayısı $n = 0.1$ değerleri kullanılmıştır.

Hesaplama sonuçları sunulan birim hücreler küresel boşluk ya da küresel parçacık içermektedir. Hesaplamalarda yer alan küresel parçacık, BH matrisine benzer şekilde, elastik bölgede Hooke kanununa uyarken, plastik bölge davranışı ise Denklem 4.2'de gösterilen gerçek gerilme-gerinim ilişkisi ile tanımlanmaktadır. Küresel parçacığın mekanik özellikleri, Young modülü $E = 150$ GPa, Poisson oranı $\nu = 0.3$, akma gerilmesi $\sigma_0 = 2000$ MPa, pekleşme katsayısı $n = 0.1$ olarak belirlenmiştir.

Şekil 4.1’de, hesaplamalarda kullanılan birim hücrelere ait çözüm ağlarının 1/4’lük kısmı gösterilmektedir. Gerçekleştirilen tüm analizlerde, ABAQUS/Standart eleman kütüphanesinde C3D8 olarak adlandırılan 3 boyutlu, 8 düğüm noktasına sahip doğrusal elemanlar kullanılmıştır. Hesaplamalarda kullanılan çözüm ağları, Tekoğlu (2014) referans çalışmasında kullanılan çözüm ağları ile aynı yoğunluktadır ve bu sebeple ek bir çözüm ağı yakınsama çalışması yapılmamıştır.



Şekil 4.1: Hesaplamalarda kullanılan (a) $f_0 = 0.01$ küresel boşluk oylum oranına, (b) $f_0 = 0.05$ küresel boşluk oylum oranına ve (c) $f_{0p} = 0.05$ küresel parçacık oylum oranına sahip birim hücrelere ait çözüm ağının 1/4’lük kısmının görünümü.

Küresel boşluk/parçacık oylum oranının hesaplanması, Denklem 4.3’te gösterilmektedir.

$$f_0 = \frac{\pi R_0^3}{6L_1L_2L_3}, \quad f_{0p} = \frac{\pi R_{0p}^3}{6L_1L_2L_3}. \quad (4.3)$$

Burada, R_0 ve R_{0p} sırasıyla, başlangıç durumundaki temsili hacim elemanın sahip olduğu küresel boşluk ya da parçacığın yarıçapını, L_1 , L_2 , L_3 ise birim hücrenin birbirine dik kenarlarının uzunluklarının yarısını ifade etmektedir.

Tez kapsamında yürütülen çalışmaların tamamında HP Z8G4 iş istasyonu kullanılmıştır. Gerçekleştirilen SE analizlerinde çoklu çekirdek kullanımından yararlanılmış olup her bir analizin çözümünde 6 çekirdek kullanılmıştır. Donanımsal açıdan tez kapsamındaki tüm analizlerin aynı şartlar içerisinde gerçekleştirilmesi, kullanılan farklı çözüm yöntemlerinin süre açısından karşılaştırılabilir olmasına olanak sağlamaktadır.

4.1 Asal Gerilme Durumu Altındaki Birim Hücre Hesaplamalarının Sonuçları

ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranları ile ifade edilen asal gerilme durumu altında, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.01$ ve $f_0 = 0.05$ olan BH hesaplamalarının sonuçları bu bölümde yer almaktadır.

İlk olarak, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.01$ olan BH hesaplama sonuçları sunulmaktadır. $f_0 = 0.01$ olan birim hücrenin kullanıldığı 4 farklı asal gerilme durumu altında hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Bu hesaplamalarda hem ÇNK yöntemi hem de asal gerilme durumu için alternatif olarak sunulan Riks yöntemi (bkz. Bölüm 2.2.1) kullanılmıştır.

Riks yöntemi kullanılarak yapılan hesaplamalarda kullanılan çözüm adımı parametreleri Çizelge 4.1’de gösterilmektedir.

Çizelge 4.1: Riks yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda kullanılan çözüm adımı parametreleri.

| İS | TTE | EKS | EBS |
|-----------|-----|-----------|-----|
| 10^{-4} | 1 | 10^{-9} | 1 |

Riks yönteminin kullanıldığı çalışmalarda, çözüm adımı içerisindeki eğri uzunluğu artımlarının büyüklüklerinin otomatik olarak ABAQUS tarafından belirlenmesi tercih edilmiştir. Çizelge 4.1’de yer alan ilk eğri uzunluğu artım büyüklüğü İS, tahmini toplam eğri uzunluğu TTE, izin verilen en küçük eğri uzunluğu artım büyüklüğü EKS, izin verilen en büyük eğri uzunluğu artım büyüklüğü EBS değerlerinin ABAQUS’ta tanımlanması ile çözüm içerisinde gerçekleşen otomatik eğri uzunluğu artımlarının limitleri belirlenmiştir (bkz. ABAQUS v2016).

ÇNK yönteminin kullanıldığı hesaplamalarda ise, Çizelge 4.2’de gösterilen çözüm adımı parametreleri ile yay direngenliği kullanılmaktadır.

Çizelge 4.2: ÇNK yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda kullanılan çözüm adımı parametreleri ile yay direngenliği.

| İAB | TAB | EKAB | EBAB | Yay Direngenliği (kN/mm) |
|-----------|-----|------------|-----------|-----------------------------|
| 10^{-3} | 1 | 10^{-15} | 10^{-1} | 10^2 |

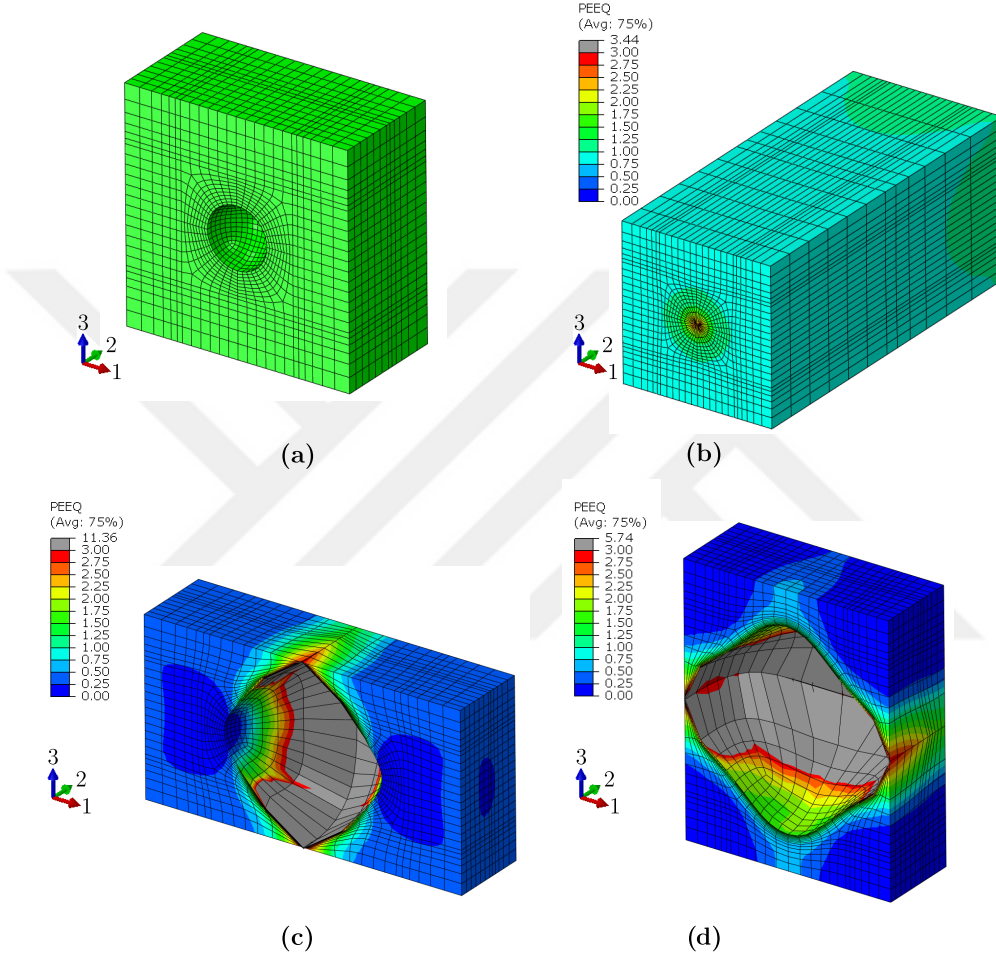
ÇNK yöntemi içerisinde Newton-Raphson metodu kullanılarak doğrusal olmayan denge denklemlerinin çözümü elde edilmektedir. Burada da eğri uzunluğu metoduna benzer şekilde, tüm yükleme "adımı"nın "artım"lara bölünmesi ve artımlar içerisinde denge denklemlerinin çözülmesi söz konusudur. Fakat eğri uzunluğu metodundan farklı olarak, Newton-Raphson metodu kararsızlık içeren problemlerin çözümünde kullanılamamaktadır. ÇNK yönteminin kullanıldığı çalışmalarda, çözüm adımı içerisindeki artımların büyüklüklerinin otomatik olarak ABAQUS tarafından belirlenmesi tercih edilmiştir. Bu tercihe ek olarak, Çizelge 4.2’de yer alan ilk artım büyüklüğü İAB, toplam adım büyüklüğü TAB, izin verilen en küçük artım büyüklüğü EKAB ve izin verilen en büyük artım büyüklüğü EBAB değerlerinin ABAQUS’ta tanımlanması ile çözüm adımı içerisinde gerçekleşen otomatik artımların limitleri belirlenmiştir (bkz. ABAQUS v2016).

Asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen, $f_0 = 0.01$ boşluk oylum oranlı birim hücre hesaplamalarına ait bilgiler, Çizelge 4.3’te gösterilmektedir.

Çizelge 4.3: Asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.01$ olan BH hesaplamalarına ait analiz isimlendirmesi, eğri gösterimi, çözüm yöntemi ve boyutsuz parametre bilgisi.

| Analiz İsimlendirmesi | Eğri Gösterimi | Çözüm Yöntemi | ρ_{11} | ρ_{33} | L | T |
|--------------------------|-------------------|------------------|-------------|-------------|-------|-------|
| 1 | ----- | Riks Yöntemi | -1.50 | -1.50 | -1.00 | -2.66 |
| 2 | — | ÇNK Yöntemi | -1.50 | -1.50 | -1.00 | -2.66 |
| 3 | --- | Riks Yöntemi | -4.00 | -0.30 | 0.48 | -0.24 |
| 4 | — | ÇNK Yöntemi | -4.00 | -0.30 | 0.48 | -0.24 |
| 5 | ---- | Riks Yöntemi | 2.30 | 1.20 | -0.69 | 1.24 |
| 6 | — | ÇNK Yöntemi | 2.30 | 1.20 | -0.69 | 1.24 |
| 7 | --- | Riks Yöntemi | 1.45 | 1.45 | 1.00 | 2.89 |
| 8 | — | ÇNK Yöntemi | 1.45 | 1.45 | 1.00 | 2.89 |

Şekil 4.2a'da, Çizelge 4.3'te bahsedilen hesaplamalarda kullanılan birim hücrenin deformasyon öncesi görüntüsü gösterilmektedir. Analiz 1, 5 ve 7'e ait hesaplamaların çözüm adımı son artımında elde edilen deformasyon şekilleri ve eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları sırasıyla Şekil 4.2b, c ve d'de yer almaktadır.



Şekil 4.2: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.01$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 1 (c) analiz 5 (d) analiz 7.

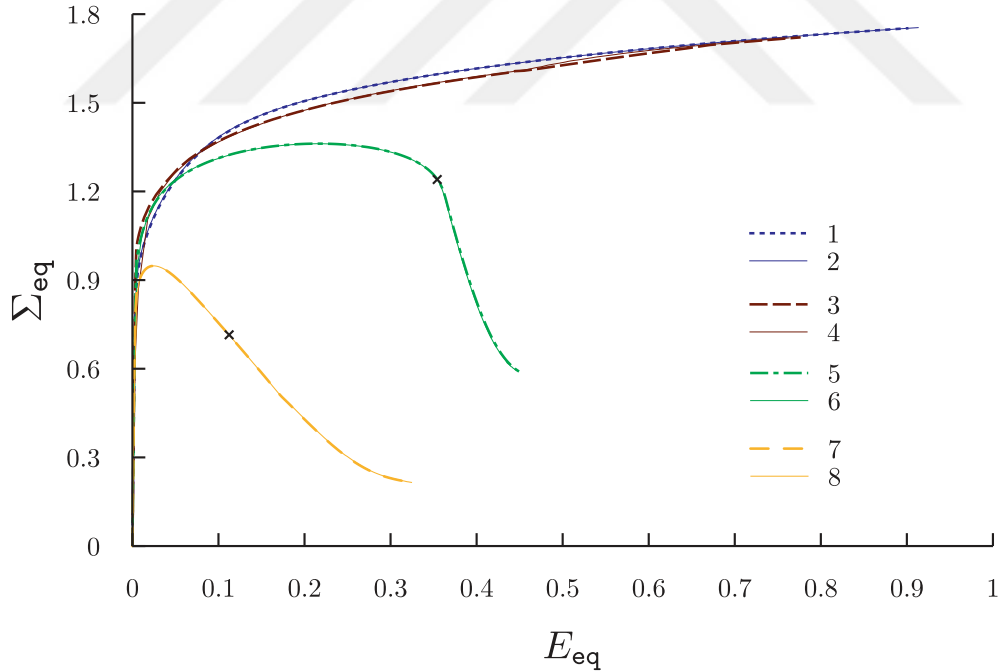
Analiz 1'de; x_1 ve x_3 eksenleri doğrultularında basma yönlü, x_2 eksenine doğrultusunda ise çekme yönlü normal yüklemeler söz konusudur. Gerilme üçeşkenliliği değerinin negatif ($T = -2.66$), Lode parametresinin ise $L = -1.00$ olduğu bu yükleme durumunda, birim hücrenin başlangıçta barındırdığı boşluğun kapandığı görülmektedir (bkz. Şekil 4.2b). Boşluk kapanması sonrasında, yükleme artımlarının devam ettiği hesaplamada, BH'nin x_2 eksenine doğrultusunda uzamaya devam

ettiği gözlemlenmektedir.

Analiz 5'te ise, x_1 eksenine doğrultusundaki yüklemeye diğer iki doğrultudaki yüklemelerden daha büyük değerdedir. Tüm yüklemelerin çekme yönünde uygulandığı bu hesaplamada, gerilme üçeksenliliği değeri pozitif olmaktadır ($T = 1.24$). Analiz 5'te, birim hücrenin x_1 eksenine doğrultusunda uzadığı ve boşluğun da diğer eksenlerin oluşturduğu (x_2-x_3) düzlemde büyüdüğü görülmektedir (bkz. Şekil 4.2c).

Analiz 7, analiz 5'e yüklemelerinin tamamının çekme yönünde olması sebebi ile benzemektedir. Fakat, analiz 7'de gerilme oranları birbirine eşit değerdedir ($\rho_{11} = \rho_{33} = 1.45$). Bu durum Lode parametresinin $L = 1.00$ olduğu, iki eksenli çekme durumunu temsil etmektedir. Gerilme üçeksenliliği değerinin pozitif olduğu ($T = 2.89$) bu hesaplamada, boşluk büyümesi gözlemlenmektedir (bkz. Şekil 4.2d).

Çizelge 4.3'te yer alan analiz 2, 3, 4, 6 ve 8'e ait hesaplama çözüm adımı sonu artımındaki eşdeğer plastik gerinim dağılımları EK 1'de bulunan Şekil 5.1'de gösterilmektedir. Çizelge 4.3'te bilgileri bulunan hesaplamalara ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrisi Şekil 4.3'te gösterilmektedir.

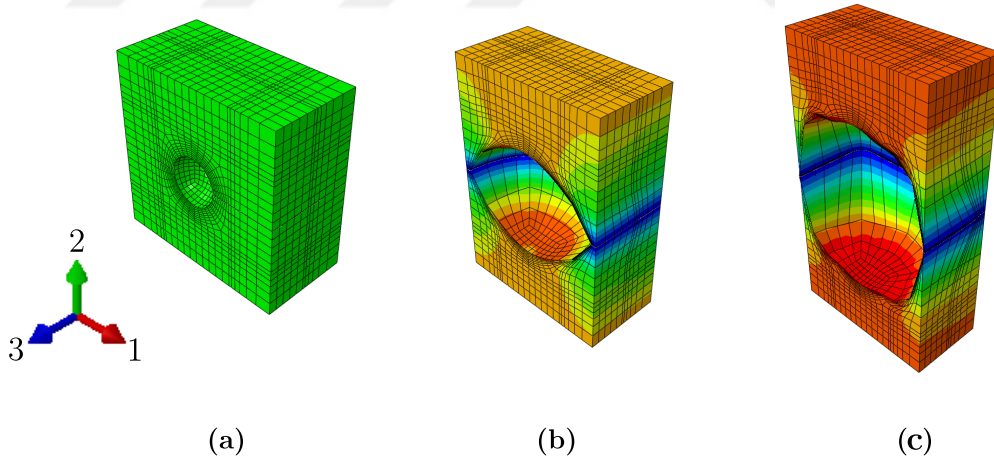


Şekil 4.3: Analiz 1-8'e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri.

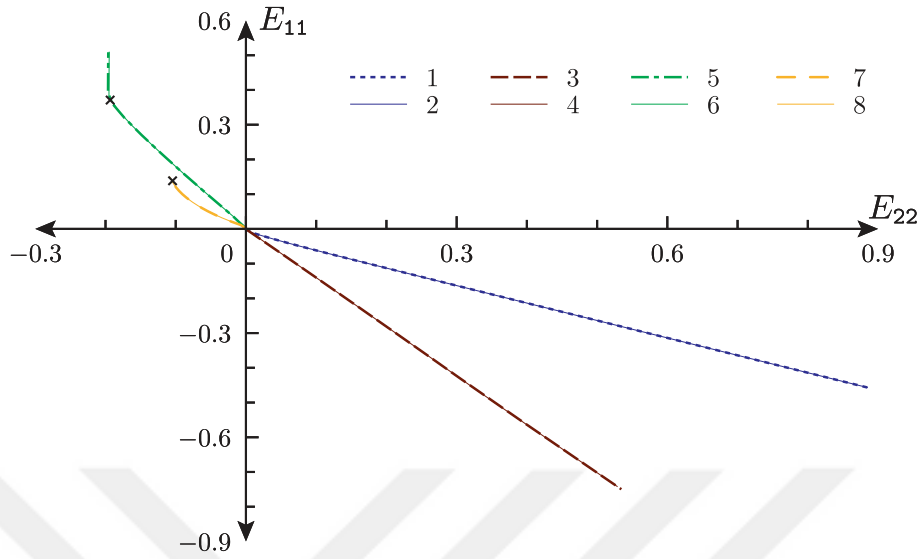
İki farklı çözüm yöntemi kullanılarak elde edilen eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrilerinin birbirleri ile büyük oranda örtüştüğü gözlemlenmektedir. Analiz 1-2 ve 3-4'te uygulanan yüklemeler altında, BH merkezinde yer alan boşluk kapanmaktadır. Bu sebeple, analiz 5-6 ve 7-8'de gözlemlenen boşluk büyümesi davranışına bağlı oluşan eşdeğer gerilme - gerinim eğrilerinden farklı olarak pekleşmenin devam ettiği eğriler elde edilmektedir.

Analiz 5-6 ve 7-8 eğrileri üzerinde yer alan siyah çarpı ile gösterilen noktalar, tek eksenli gerinim durumunun başlangıcını belirtmektedir. Tek eksenli gerinim durumu, yüklenme artımı sonucunda sadece tek bir doğrultuda gerinim artışının meydana geldiği durumdur ve boşluk birleşmesinin başlangıcını ifade etmektedir.

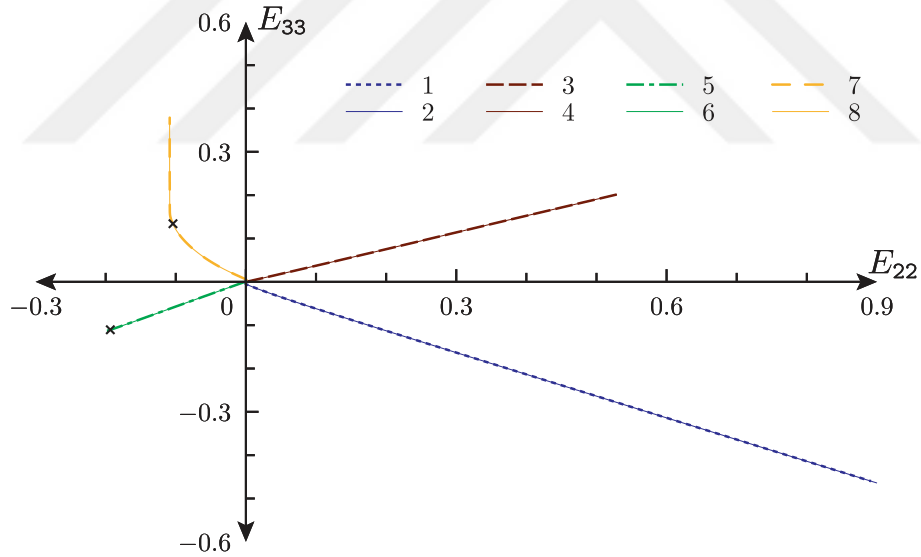
Boşluk büyümesi ardından x_2 doğrultusunda tek eksenli gerinim durumunun gözlemlenebildiği örnek bir BH hesaplamasına ait deformasyonlar Şekil 4.4'te gösterilmektedir. Analiz 1-8'e ait yüklenme süreci boyunca E_{11} mezoskopik geriniminin E_{22} mezoskopik gerinimi ile birlikte gösterimi Şekil 4.5'te gösterilmektedir. Yüklenme süreci boyunca E_{33} mezoskopik geriniminin E_{22} mezoskopik gerinimi ile birlikte gösterimi ise Şekil 4.6'da yer almaktadır. Mezoskopik gerinimlerin yüklenme süreci boyunca değişen değerlerinin incelenmesi ile tek eksenli gerinim durumu tespit edilebilmektedir (bkz. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da analiz 5-6 ve 7-8 için gösterilen siyah çarpı ile gösterilen noktalar).



Şekil 4.4: Tek eksenli gerinimin gözlemlendiği örnek bir BH hesaplamasının (a) başlangıç (b) boşluk birleşmesi ve (c) x_2 doğrultusundaki tek eksenli gerinimin abartılı şekilde görülebildiği çözüm adımı sonu görünümüleri.



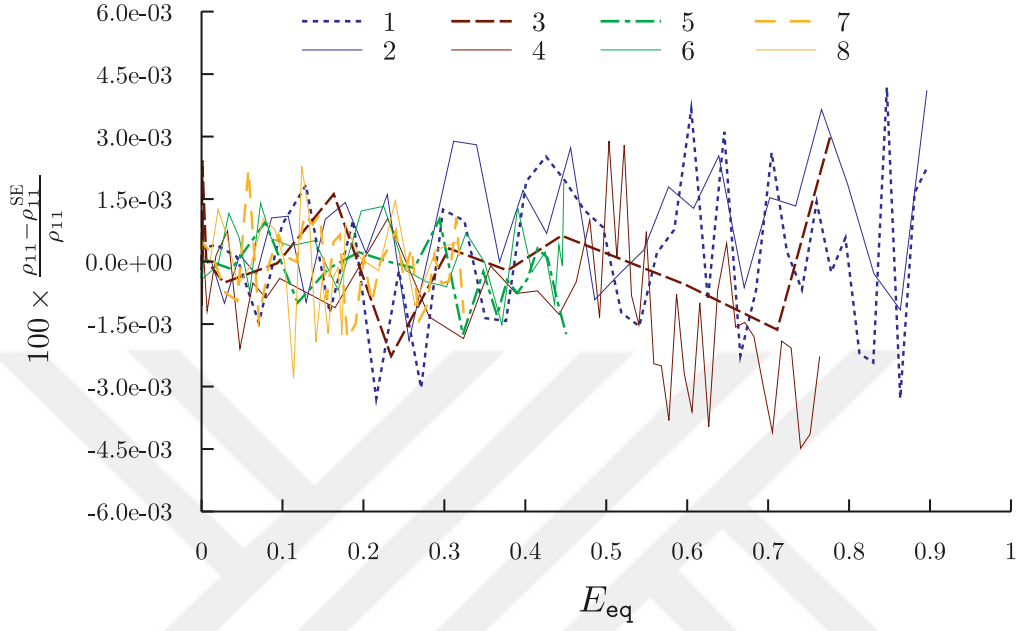
Şekil 4.5: Analiz 1-8'e ait yüklemeye boyunca elde edilen E_{11} değerlerine karşılık E_{22} değerlerinin gösterimi.



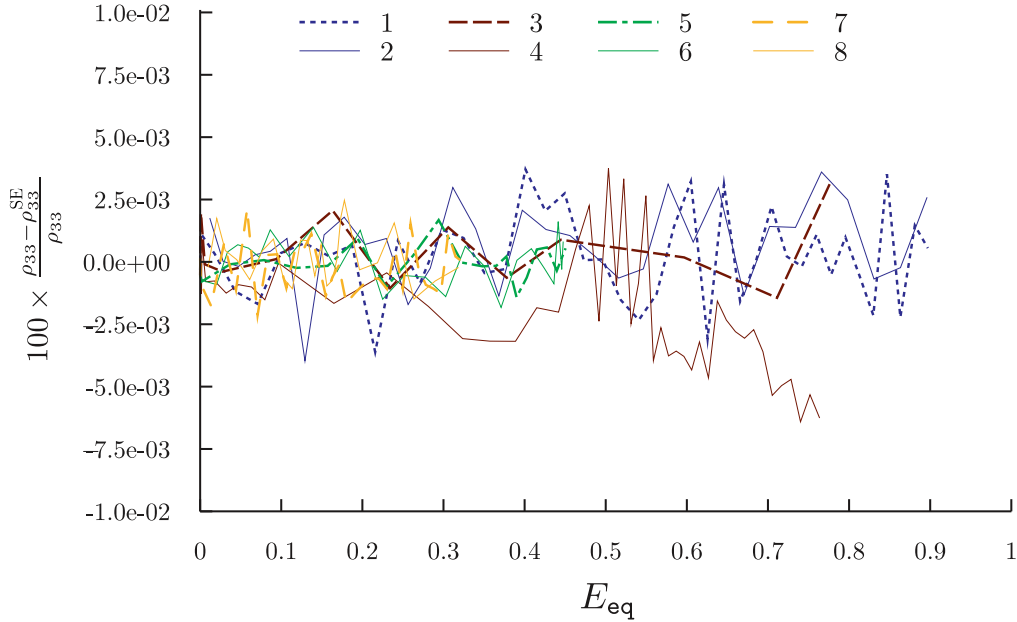
Şekil 4.6: Analiz 1-8'e ait yüklemeye boyunca elde edilen E_{33} değerlerine karşılık E_{22} değerlerinin gösterimi.

Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de analiz 1-8'e ait birim hücre hesaplamalarının sırasıyla ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerilim eğrileri bulunmaktadır. Çözüm adımında kullanılan parametreler altında, gerçekleştirilen tüm analizlerde ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranlarının, %1.0 ve altında hata ile yüklemeye süreci boyunca sabit tutulabildiği gözlemlenmektedir. Çözüm parametrelerinde yapılacak değişiklikler

ile daha küçük artımlar kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda, sunulan hata oranlarını değerlerini düşürmek mümkün olmaktadır.



Şekil 4.7: Analiz 1-8'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



Şekil 4.8: Analiz 1-8'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

Aşağıda yer alan Çizelge 4.4'te, analiz 1-8'e ait birim hücre hesaplamalarında harcanan toplam çekirdek süreleri yer almaktadır.

Çizelge 4.4: Analiz 1-8'e ait birim hücre hesaplamalarında harcanan toplam çekirdek süresi.

| Analiz İsimlendirmesi | Çözüm Yöntemi | Çekirdek Süresi (s) |
|-----------------------|---------------|---------------------|
| 1 | Riks Yöntemi | 8577.1 |
| 2 | ÇNK Yöntemi | 32304.0 |
| 3 | Riks Yöntemi | 733.2 |
| 4 | ÇNK Yöntemi | 7048.8 |
| 5 | Riks Yöntemi | 1893.5 |
| 6 | ÇNK Yöntemi | 3145.9 |
| 7 | Riks Yöntemi | 2948.8 |
| 8 | ÇNK Yöntemi | 6651.7 |

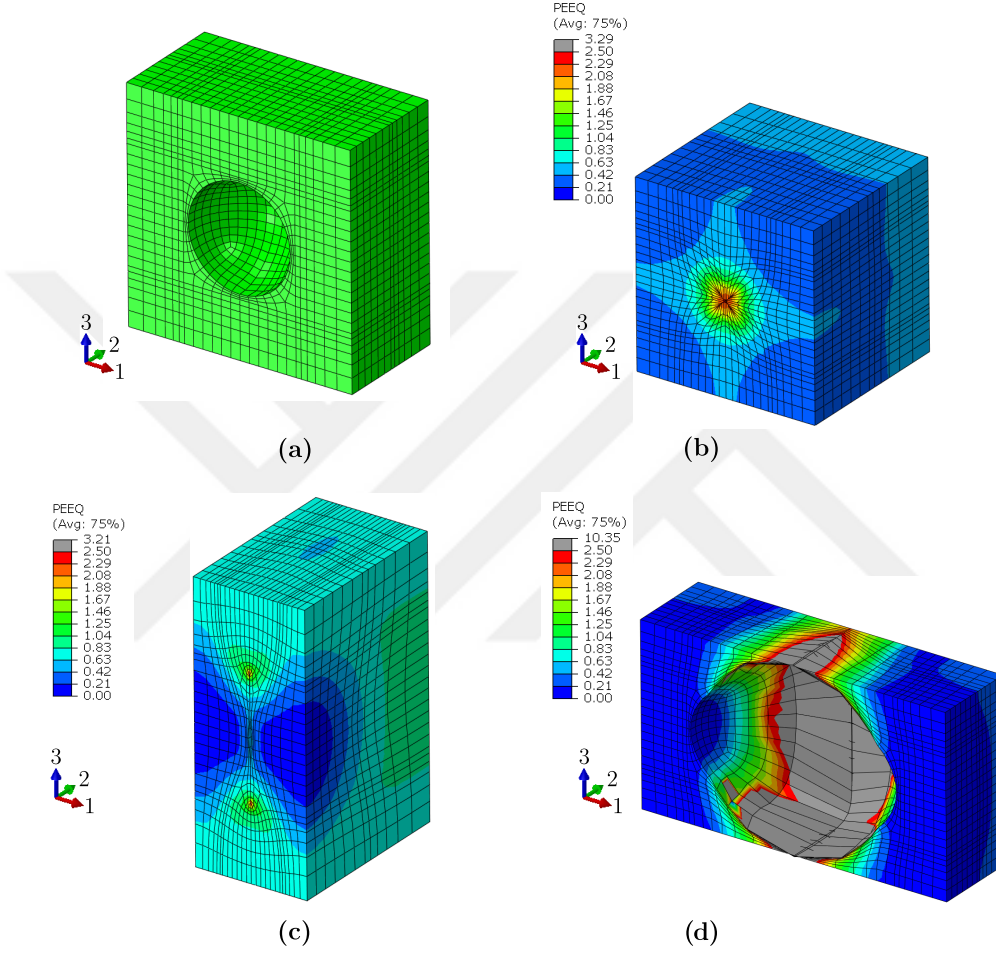
Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de gösterilen çözüm adımı parametrelerinin kullanıldığı SE analizlerinde, Riks yönteminin ÇNK yöntemine göre çözüm süresi açısından daha verimli olduğu görülmektedir. Çizelge 4.4'de yer alan çekirdek süreleri incelendiğinde, aynı şartlar altında farklı çözüm yöntemleri ile gerçekleştirilen analizlerde en az 1.6 kat (bkz. analiz 5 ve 6), en çok 9.6 kat (bkz. analiz 3 ve 4) Riks yöntemi lehine süre farkı olduğu görülmektedir.

Bu bölüm içerisinde son olarak, $f_0 = 0.05$ boşluk oylum oranlı BH hesaplama sonuçları sunulmaktadır. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de yer alan parametre değerleri kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalara ait bilgiler Çizelge 4.5'te yer almaktadır.

Çizelge 4.5: Asal gerilme durumu altında gerçekleştirilen, boşluk oylum oranı $f_0 = 0.05$ olan BH hesaplamalarına ait analiz isimlendirmesi, eğri gösterimi, çözüm yöntemi ve boyutsuz parametre bilgisi.

| Analiz İsimlendirmesi | Eğri Gösterimi | Çözüm Yöntemi | ρ_{11} | ρ_{33} | L | T |
|-----------------------|----------------|---------------|-------------|-------------|-------|-------|
| 9 | ----- | Riks Yöntemi | -1.50 | -1.50 | -1.00 | -2.66 |
| 10 | — | ÇNK Yöntemi | -1.50 | -1.50 | -1.00 | -2.66 |
| 11 | --- | Riks Yöntemi | -4.00 | -0.30 | 0.48 | -0.24 |
| 12 | — | ÇNK Yöntemi | -4.00 | -0.30 | 0.48 | -0.24 |
| 13 | --- | Riks Yöntemi | 2.30 | 1.20 | -0.69 | 1.24 |
| 14 | — | ÇNK Yöntemi | 2.30 | 1.20 | -0.69 | 1.24 |

Çizelge 4.5’te bahsedilen hesaplamalarda kullanılan birim hücrenin deformasyon öncesi görüntüsü Şekil 4.9a’da yer almaktadır. Analiz 9, 11 ve 13’e ait hesaplamaların çözüm adımı son artımında elde edilen deformasyon şekilleri ve eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları sırasıyla Şekil 4.9b, c ve d’de gösterilmektedir.



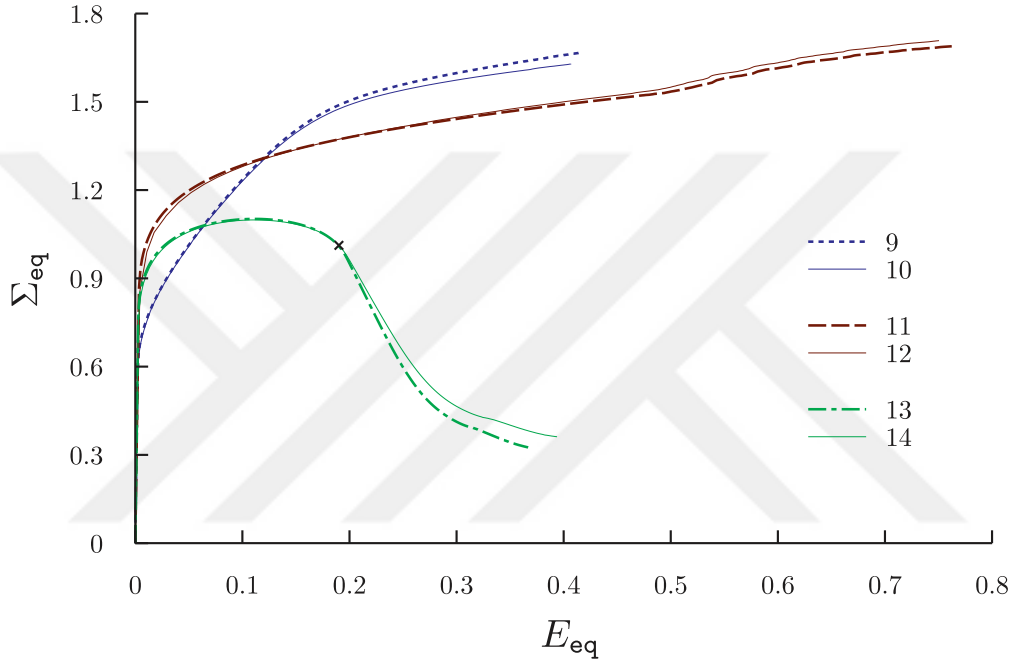
Şekil 4.9: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.05$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 9 (c) analiz 11 (d) analiz 13.

Analiz 11’de; x_1 eksen ve x_3 eksen doğrultularında basma yönündeki yüklemeleri x_2 eksen doğrultusunda ise çekme yönündeki yüklemeler söz konusudur. Gerilme üçeşkenliliğinin $T = -0.24$, Lode parametresinin $L = 0.48$ olduğu bu hesaplamada, x_1 eksen doğrultusundaki basma yüklemesinin büyüklüğü diğer yüklemelerden daha fazladır. Bu fark sebebi ile, BH’nin içerdiği boşluğun öncelikle x_1 eksen boyunca kapandığı gözlemlenmektedir (bkz. Şekil 4.9c). Boşluğun kapanmasının ardından hesaplanan yüklemelerde, birim hücrenin x_1 eksen

doğrultusunda boyunun kısaldığı, x_2 ve x_3 eklenleri doğrultularında ise uzadığı görülmektedir.

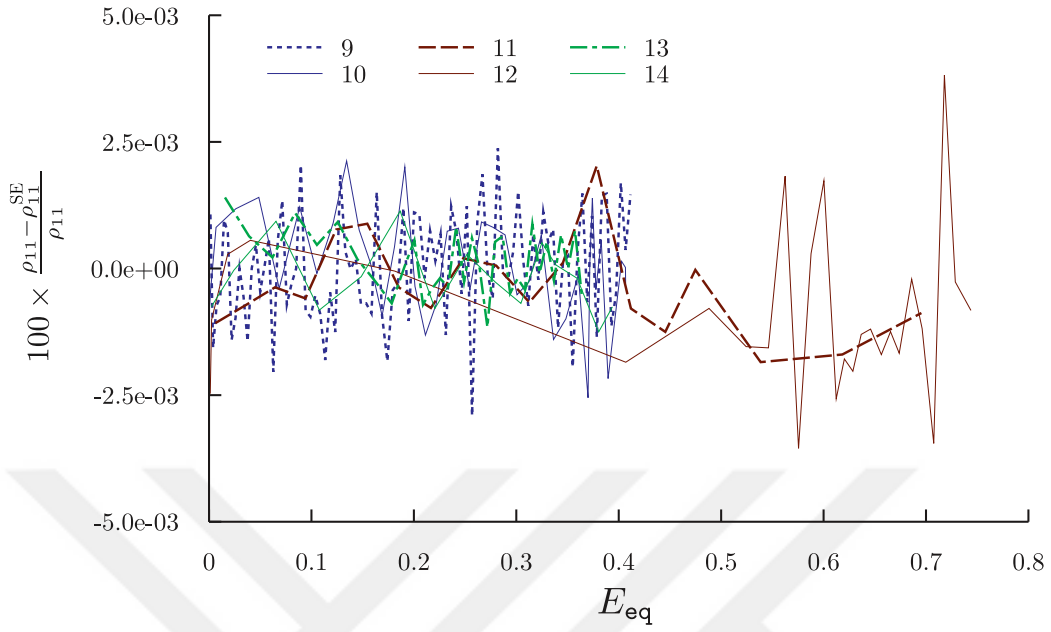
EK 2’de bulunan Şekil 5.2, analiz 10, 12 ve 14’e ait hesaplama çözüm adımı sonu artımındaki eşdeğer plastik gerinim dağılımlarını içermektedir.

Analiz 9-14’e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrisi Şekil 4.10’da gösterilmektedir.

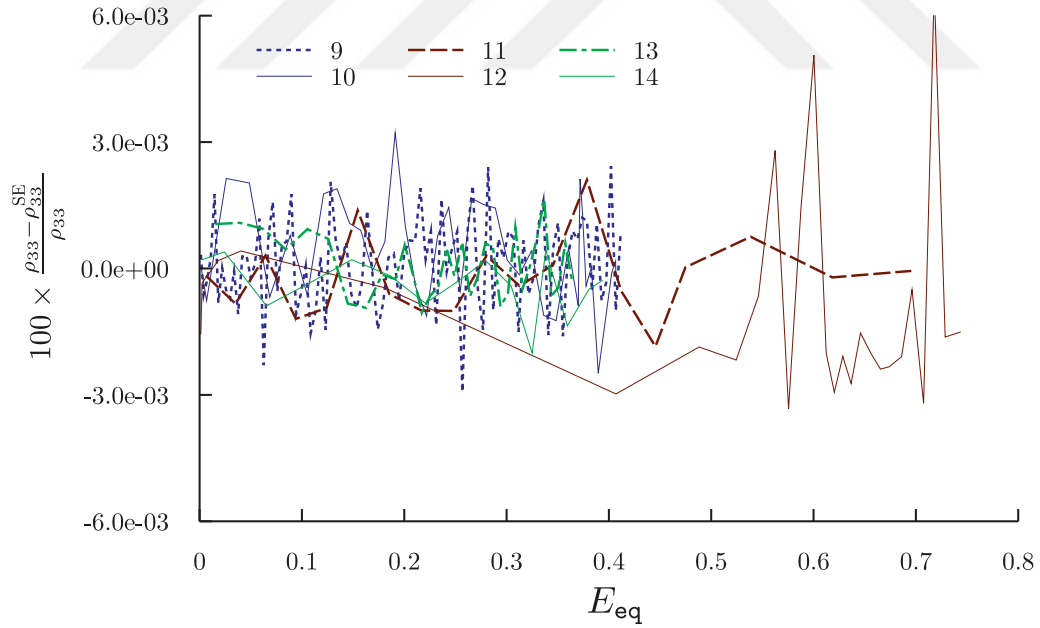


Şekil 4.10: Analiz 9-14’e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri.

Şekil 4.11 ve Şekil 4.12’de gösterilen ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri incelendiğinde, gerçekleştirilen tüm analizlerde ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranlarının, %1.0 ve altında hata ile yükleme süreci boyunca sabit tutulabildiği gözlemlenmektedir. Elde edilen sonuçlar, Riks metodu ve ÇNK metodunun asal gerilme durumu için kullanılabilir olduğunu göstermektedir. Bu sonucun yanında, ÇNK metodu ile hesaplama maliyetini düşürmesi amacıyla alternatif bir hesaplama yöntemi olarak önerilen Riks metodu kullanılarak gerçekleştirilen analiz 9-14’e ait harcanan çekirdek süreleri Çizelge 4.6’da gösterilmektedir.



Şekil 4.11: Analiz 9-14'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğri-leri.



Şekil 4.12: Analiz 9-14'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğri-leri.

Çizelge 4.6: Analiz 9-14'e ait birim hücre hesaplamalarında harcanan toplam çekirdek süresi.

| Analiz İsmlendirmesi | Çözüm Yöntemi | Çekirdek Süresi (s) |
|-------------------------|------------------|------------------------|
| 9 | Riks Yöntemi | 1146.3 |
| 10 | ÇNK Yöntemi | 8346.8 |
| 11 | Riks Yöntemi | 2695.7 |
| 12 | ÇNK Yöntemi | 14115.0 |
| 13 | Riks Yöntemi | 1408.0 |
| 14 | ÇNK Yöntemi | 2399.9 |

Çizelge 4.6 incelendiğinde, ÇNK yönteminin Riks yöntemine göre en az 1.7 kat (bkz. analiz 13 ve 14), en çok 7.2 kat (bkz. analiz 9 ve 10) daha fazla çekirdek süresi kullanarak hesaplamaları gerçekleştirdiği gözlemlenmektedir.

4.2 Genel Gerilme Durumu Altındaki Birim Hücre Hesaplamalarının Sonuçları

Bu bölümde, genel gerilme durumu altında gerilme oranlarını sabit tutarak yapılan BH hesaplamalarının sonuçları sunulmaktadır. ÇNK yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalarda Çizelge 4.2'de bahsedilen çözüm adımı parametreleri ve yay direngi değeri kullanılmıştır.

Sunulan sonuçlar, boşluk ve parçacık içeren birim hücre hesaplamalarından elde edilmiştir. İlk olarak, boşluk içeren ($f_0 = 0.01$) birim hücre hesaplamalarının sonuçları sunulmaktadır. Bu hesaplamalara ait isimlendirme, gösterim ve gerilme oranı değerlerinin bilgileri Çizelge 4.7'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.7: Genel gerilme durumu altında gerçekleştirilen, BH ($f_0 = 0.01$) hesaplamalarına ait isimlendirme, gösterim ve gerilme oranı bilgileri.

| Analiz İsmlendirmesi | Eğri Gösterimi | ρ_{11} | ρ_{33} | ρ_{12} | ρ_{23} | ρ_{13} |
|-------------------------|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 15 | | 1.30 | 1.70 | 0.00 | 0.10 | 0.10 |
| 16 | ---- | 50.00 | 30.00 | 10.00 | 15.00 | 20.00 |
| 17 | ---- | 0.40 | 0.80 | 0.10 | 0.00 | 0.15 |
| 18 | ---- | 1.10 | 1.40 | 0.02 | 0.10 | 0.20 |
| 19 | ---- | 1.50 | 1.30 | 0.10 | 0.00 | 0.00 |

Analiz 15-19'a ait gerilme durumlarının ifadesinde gerilme oranlarının yanı sıra L , T , S_{12} , S_{23} ve S_{13} parametreleri de (bkz. Denklem (1.1), (1.2) ve (2.13)) kullanılabilir. Bu parametrelerin analiz 15-19 için değerleri Çizelge 4.8'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.8: Analiz 15-19'a ait L , T , S_{12} , S_{13} ve S_{23} değerleri.

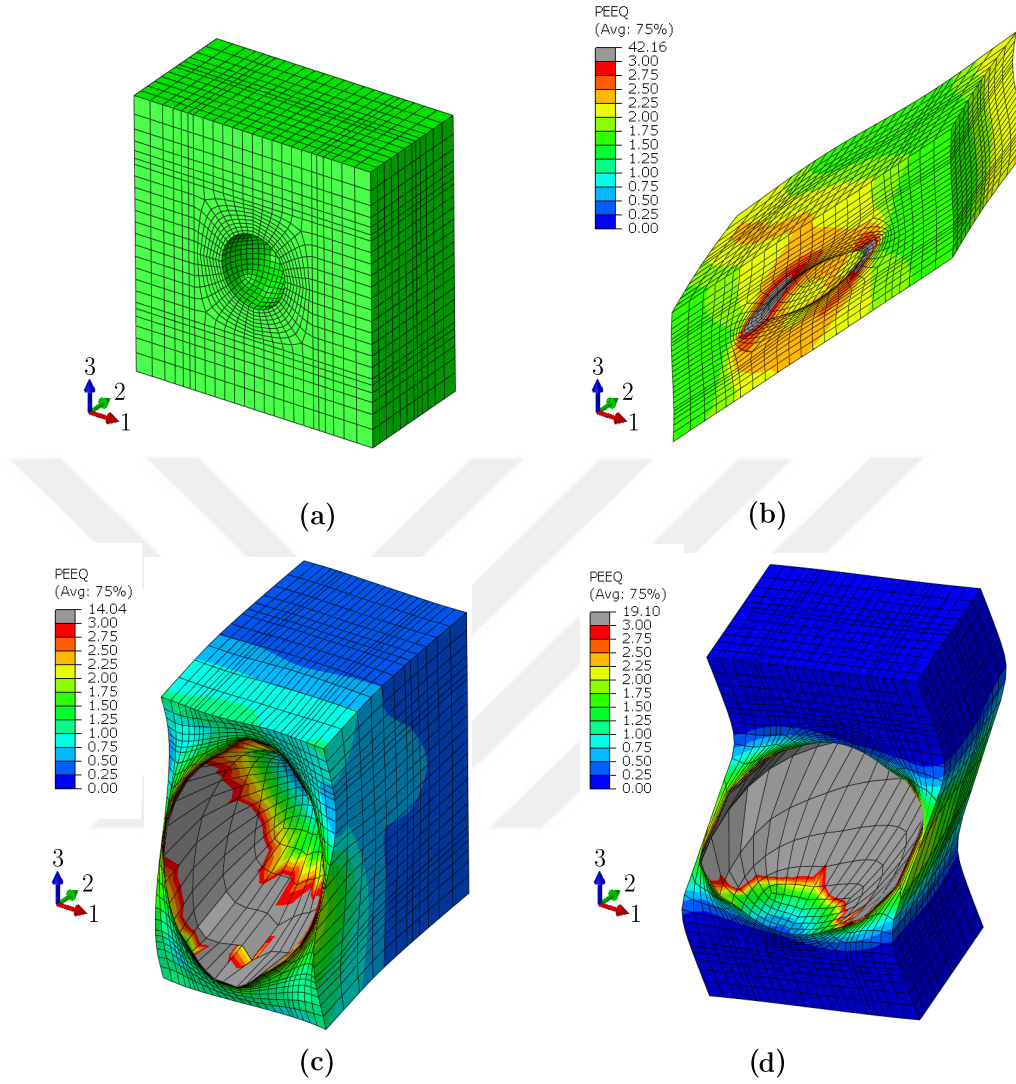
| Analiz İsimlendirmesi | L | T | S_{12} | S_{23} | S_{13} |
|-----------------------|-------|-------|----------|----------|----------|
| 15 | 0.22 | -2.03 | 0.00 | 0.26 | 0.26 |
| 16 | -0.02 | 0.43 | 0.27 | 0.41 | 0.55 |
| 17 | -0.03 | 1.19 | 0.28 | 0.00 | 0.42 |
| 18 | -0.45 | 2.20 | 0.07 | 0.33 | 0.65 |
| 19 | 0.19 | 2.70 | 0.37 | 0.00 | 0.00 |

Şekil 4.13a'da $f_0 = 0.01$ başlangıç hacim oranına sahip küresel boşluklu BH'nin deformasyon öncesi görüntüsü gösterilmektedir.

Analiz 16'da tanımlanan gerilme oranları, tez çalışmasında sunulan hesaplama sonuçları içerisindeki birbirlerinden farkı en yüksek gerilme oranlarına ($\rho_{11} = 50.0$, $\rho_{33} = 30.0$, $\rho_{12} = 10.0$, $\rho_{23} = 15.0$ ve $\rho_{13} = 20.0$) sahip olma özelliğini taşımaktadır. Normal gerilme oranları olan ρ_{11} ve ρ_{33} 'ün değerlerinin yüksek olmasının yanında, kesme oranlarının değerleri de oldukça yüksektir. Analiz 16'ya ait hesaplama sonuçlarının incelendiğinde, birim hücrenin kesme yüklemesi sebebiyle şekil değişikliği baskın bir deformasyon gösterdiği görülmektedir. Boşluğun, yükleme süreci boyunca, yüksek normal gerilme oranlarına rağmen büyüme ya da kapanma davranışı yerine dönerek şekil değiştirdiği gözlemlenmektedir.

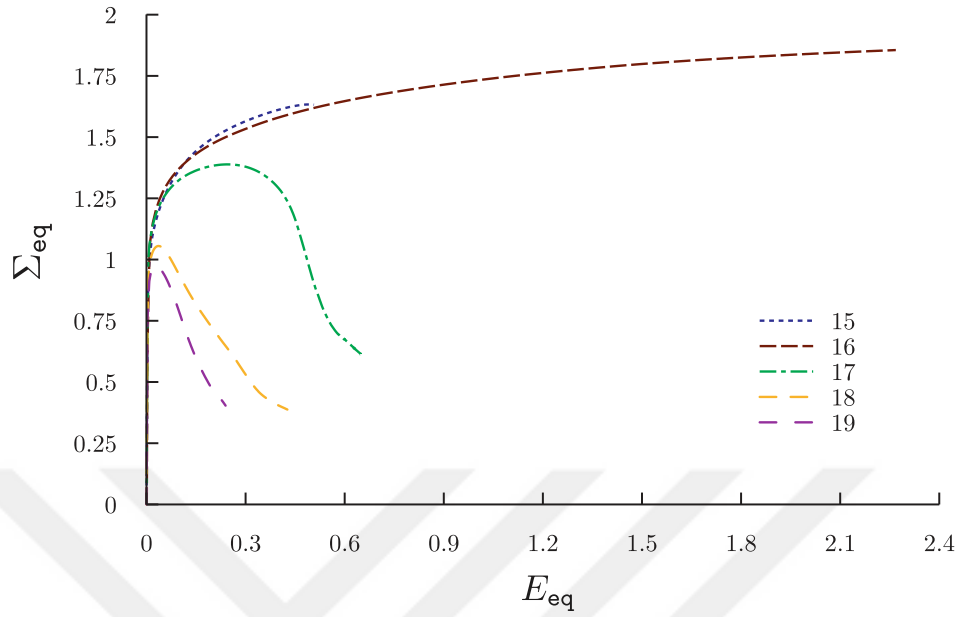
Analiz 17 ve 18'e ait Şekil 4.9c ve Şekil 4.9d'de yer alan deformasyon şekilleri incelendiğinde, boşluk büyümesinin gerçekleştiği ve kesme yüklemesine bağlı olarak da aynı zamanda boşluk şekillerinin de değiştiği gözlemlenmektedir. Analiz 17'de tüm gerilme oranları 1'in altında değerlerdedir. Bu durum, Σ_{22} 'nin yüksek olduğu gerilme halini ifade etmektedir. Analiz 17'nin hesaplama sonucunda elde edilen deformasyon şekli, boşluk büyümesinin x_2 eksenine doğrultusundaki uzama yönüne bağlı olarak geliştiğini göstermektedir.

Analiz 18'de ise, normal gerilme oranları 1'in üstünde değerlerdedir ($\rho_{11} = 1.10$ ve $\rho_{33} = 1.40$). Bu durumda, en yüksek normal gerilme oranının etkisi (ρ_{33}) ile, x_3 eksenine doğrultusunda uzama gerçekleşirken, boşluk büyümesi de gözlemlenmiştir. Analiz 18'de tanımlı en yüksek kesme gerilme oranı $\rho_{13} = 0.20$ 'dir ve bu kesme oranı sebebiyle oluşan kesme gerilmesinin (Σ_{13}) büyüyen boşluğu



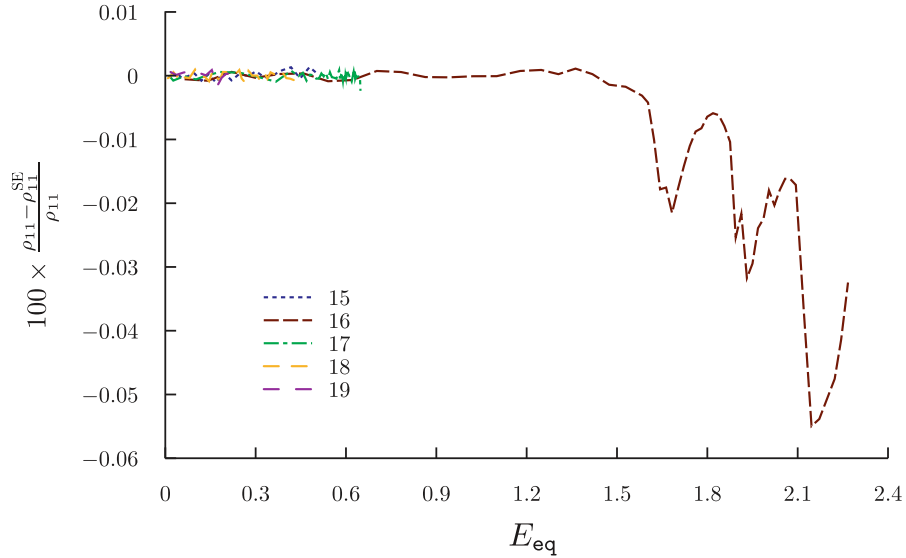
Şekil 4.13: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_0 = 0.01$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 16 (c) analiz 17 (d) analiz 18.

(x_1-x_3) düzleminde döndürdüğü gözlemlenmektedir. Analiz 15 ve 19'a ait hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim dağılımları EK 3'te yer alan Şekil 5.3'te gösterilmektedir. Analiz 15-19'a ait BH hesaplaması sonuçlarından elde edilen eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri Şekil 4.14'te gösterilmektedir.

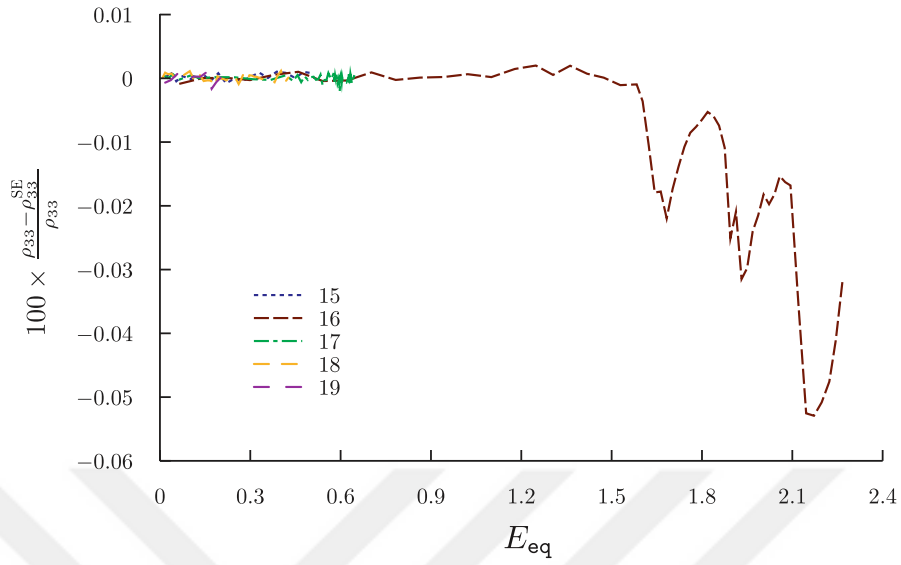


Şekil 4.14: Analiz 15-19'a ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri.

ρ_{11} ve ρ_{33} normal gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri, analiz 15-19 için aşağıda sunulmaktadır (bkz. Şekil 4.15-4.16). Sunulan tüm hesaplama sonuçlarında, ρ_{11} ve ρ_{33} gerilme oranlarının, %1'in altındaki hata ile sabit tutulabilmektedir.

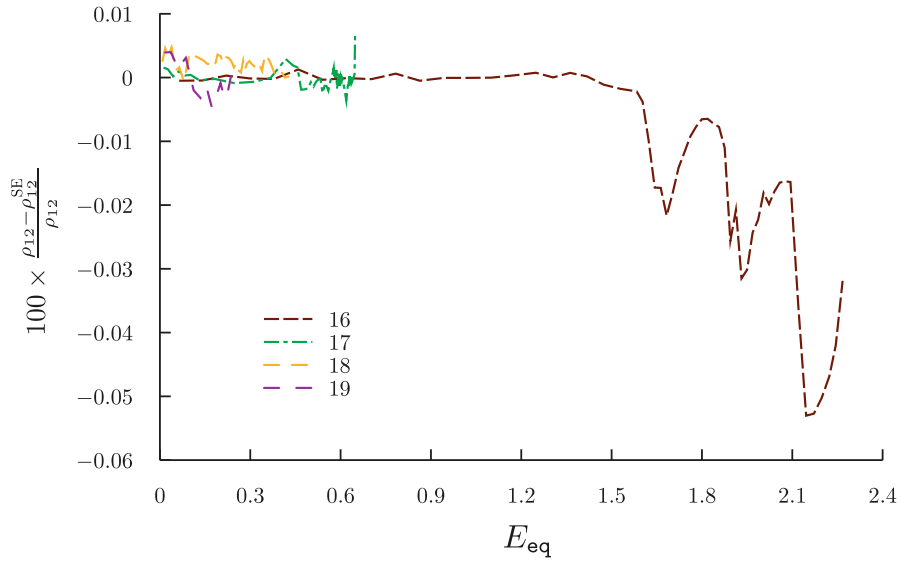


Şekil 4.15: Analiz 15-19'a ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

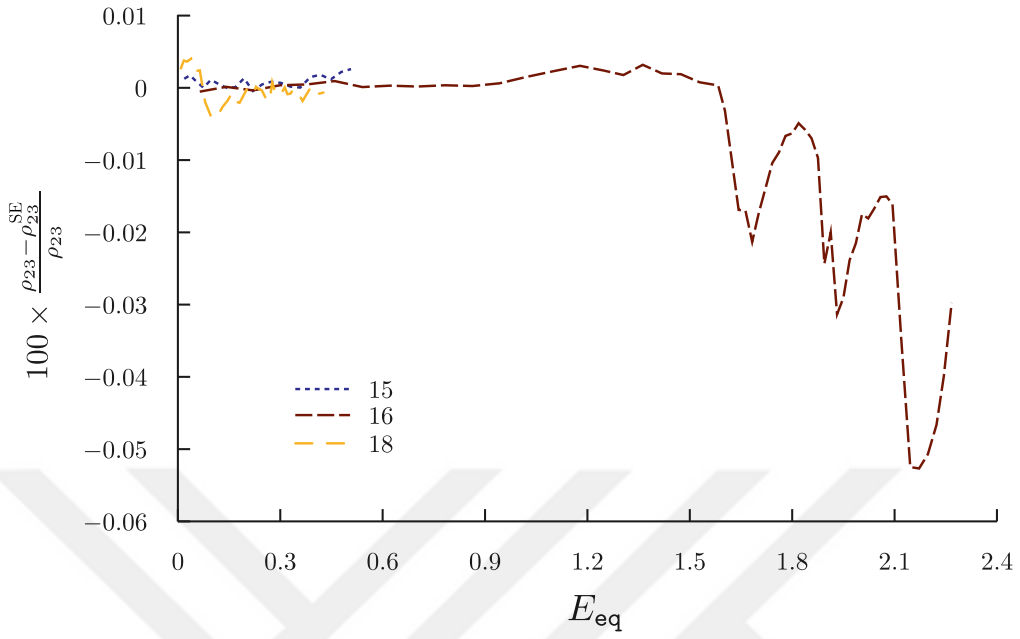


Şekil 4.16: Analiz 15-19'a ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

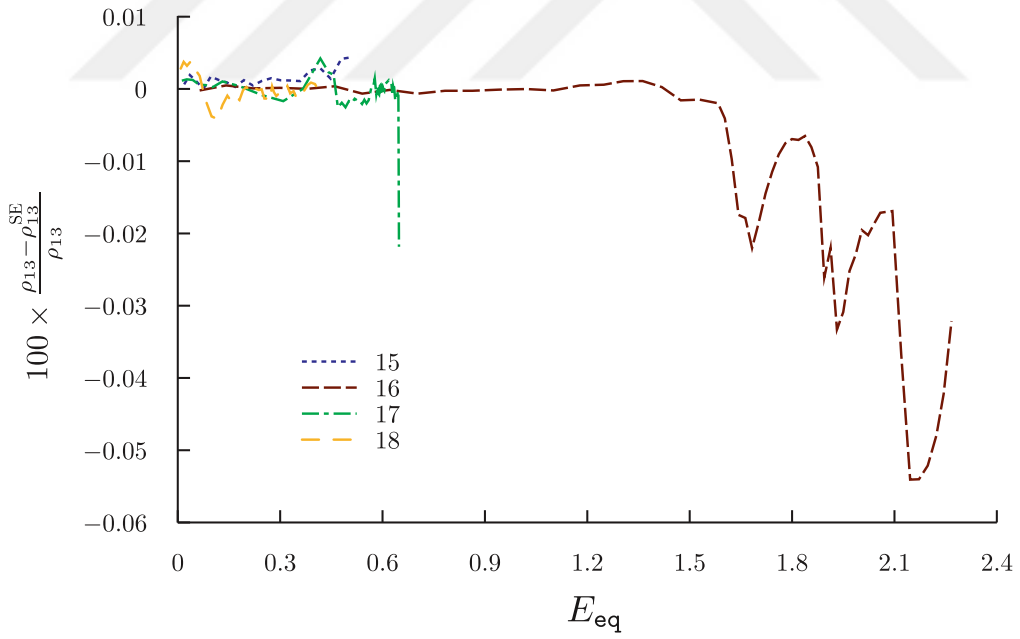
Analiz 15-19 için kesme oranlarına ait ρ_{12} , ρ_{23} ve ρ_{13} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri aşağıda gösterilmektedir (bkz. Şekil 4.17-4.19). Kesme gerilme oranlarının da benzer şekilde, %1'in altındaki hata ile sabit tutulabildiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.17: Analiz 15-19'a ait ρ_{12} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



Şekil 4.18: Analiz 15-19'a ait ρ_{23} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



Şekil 4.19: Analiz 15-19'a ait ρ_{13} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

Son olarak, parçacık içeren ($f_{0p} = 0.05$) BH hesaplamalarının sonuçları bu kısımda paylaşılmaktadır. Bu hesaplamalara ait bilgiler Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da bulunmaktadır.

Çizelge 4.9: Genel gerilme durumu altında gerçekleştirilen, BH ($f_{0p} = 0.05$) hesaplamalarına ait isimlendirme, gösterim ve gerilme oranı bilgileri.

| Analiz İsimlendirmesi | Eğri Gösterimi | ρ_{11} | ρ_{33} | ρ_{12} | ρ_{23} | ρ_{13} |
|--------------------------|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 20 | ----- | 50.00 | 30.00 | 10.00 | 15.00 | 20.00 |
| 21 | ---- | 0.40 | 0.80 | 0.10 | 0.00 | 0.15 |

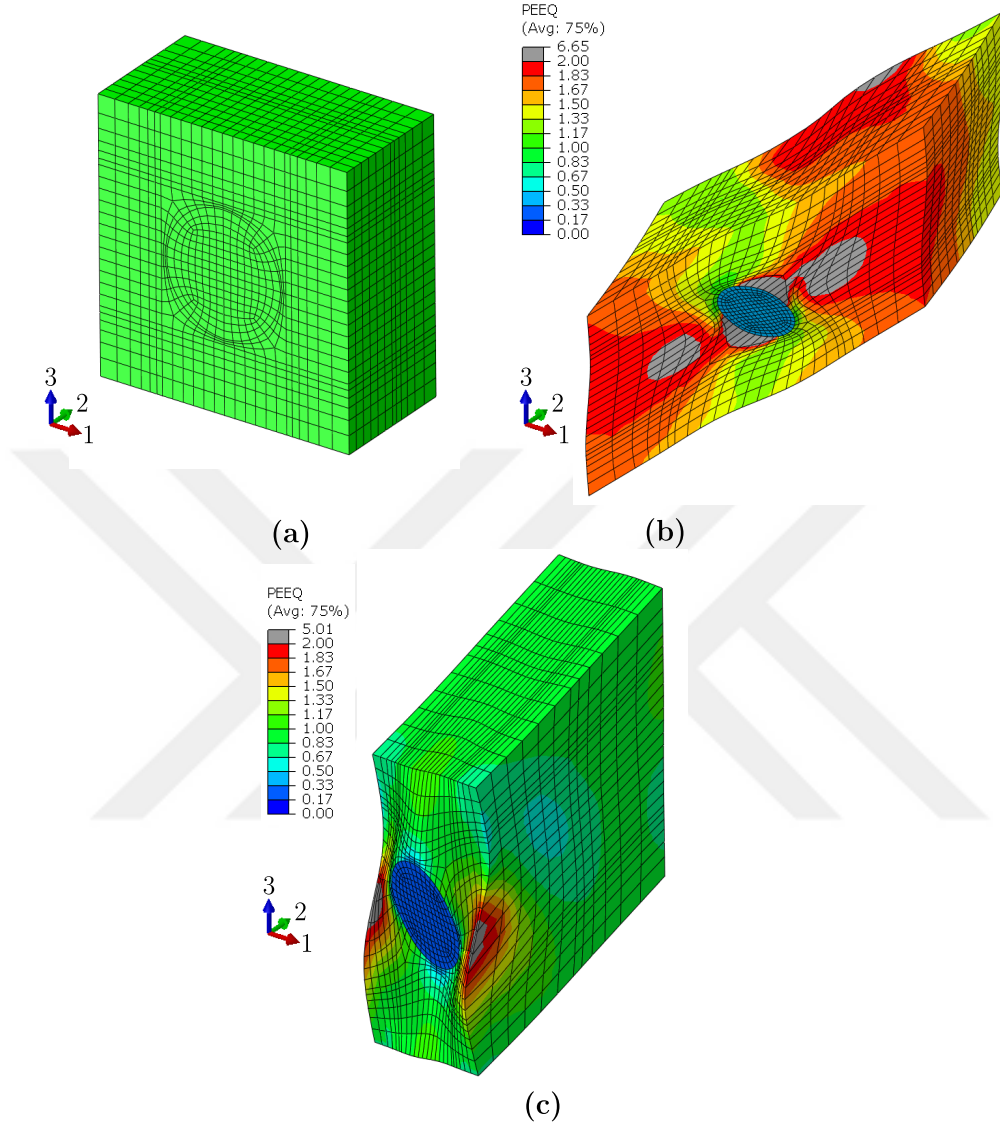
Çizelge 4.10: Analiz 20 ve 21'e ait L , T , S_{12} , S_{23} ve S_{13} değerleri.

| Analiz İsimlendirmesi | L | T | S_{12} | S_{23} | S_{13} |
|--------------------------|-------|------|----------|----------|----------|
| 20 | -0.02 | 0.43 | 0.27 | 0.41 | 0.55 |
| 21 | -0.03 | 1.19 | 0.28 | 0.00 | 0.42 |

Şekil 4.20a'da parçacık oylum oranı $f_{0p} = 0.05$ olan ve hesaplamalarda kullanılan birim hücrenin deformasyon öncesi görüntüsü gösterilmektedir.

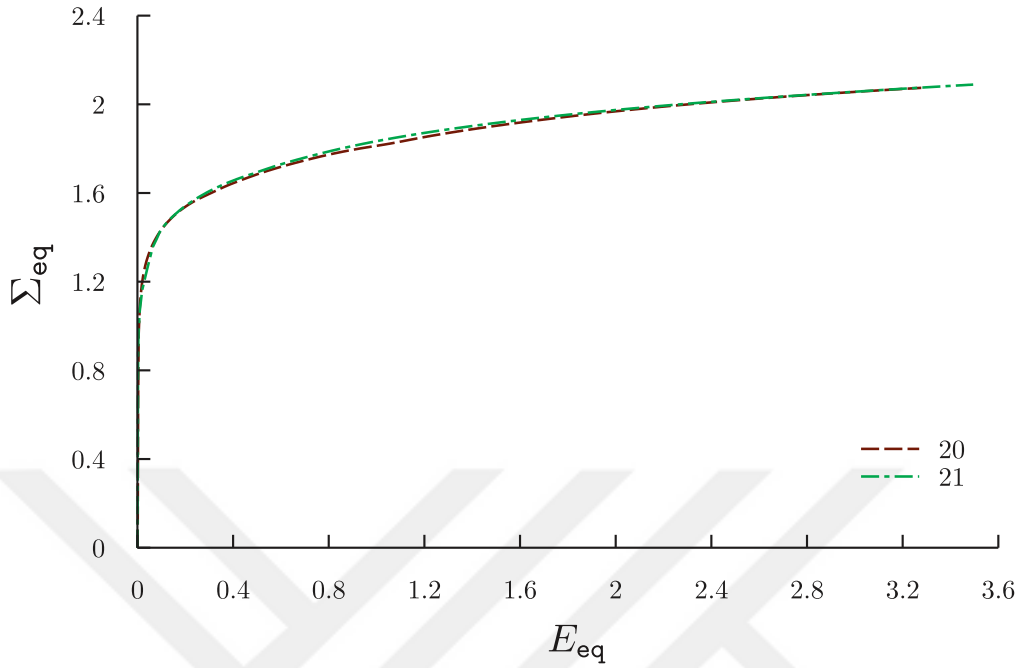
Analiz 20, bu bölüm içerisinde daha önceden bahsedilmiş olan analiz 16'daki birbirlerinden farkı en yüksek değerlere sahip gerilme oranlarının ifade ettiği gerilme durumu altında gerçekleştirilmiş bir birim hücre hesaplamasıdır. Analiz 20'den elde edilen hesaplama sonuçları incelendiğinde analiz 16'ya ait sonuçlardaki deformasyon şekline benzer bir deformasyon ile karşılaşılmaktadır. Kesme gerilmelerinin baskınlığının gözlemlendiği bu deformasyon şeklinde, parçacığın da şeklinin değiştiği gözlemlenmektedir. Malzeme özellikleri sebebi ile BH matrisi parçacıktan daha önce plastik olarak deforme olmaya başlamaktadır ve parçacık çevresindeki bölgesinde plastik gerinimlerin yoğunlaştığı gözlemlenmektedir (bkz. Şekil 4.20b).

Analiz 21'de tanımlanan gerilme oranları Σ_{22} gerilmesinin diğer gerilmelerden yüksek değerde olduğu gerilme durumunu ifade etmektedir. Bu sebeple, x_2 eksenini doğrultusunda birim hücrenin uzadığı gözlemlenmektedir. Gerçekleştirilen hesaplama sonucunda birim hücre matrisinin plastik olarak deforme olduğu fakat parçacığın elastik bölgede kaldığı gözlemlenmektedir. Ayrıca Analiz 21'de, kesme gerilmelerinin etkisi ile parçacığın önemli oranda şekil değiştirdiği de görülmektedir (bkz. Şekil 4.20c).



Şekil 4.20: (a) Deformasyon öncesi BH ($f_{0p} = 0.05$) görünümü. Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (b) analiz 20 (c) analiz 21.

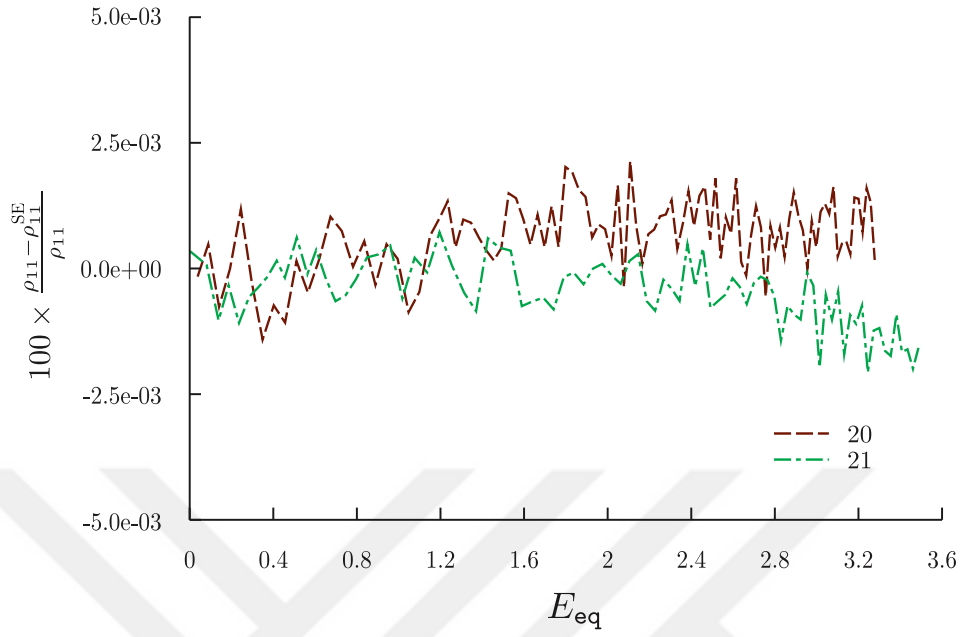
Analiz 20 ve 21'e ait BH hesaplaması sonuçlarından elde edilen eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri Şekil 4.21'de gösterilmektedir.



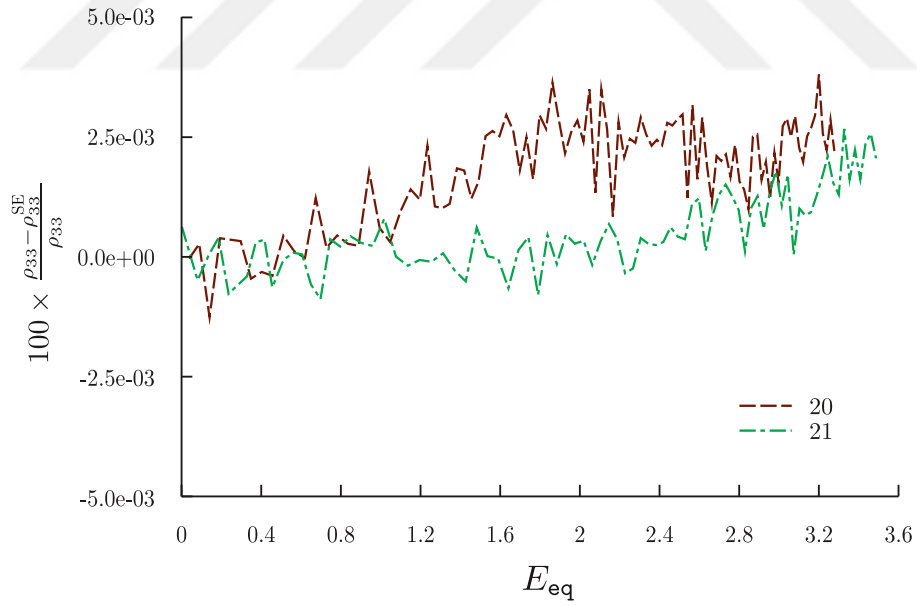
Şekil 4.21: Analiz 20 ve 21'e ait eşdeğer gerilme - eşdeğer gerinim eğrileri.

ρ_{11} ve ρ_{33} normal gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri ise Şekil 4.22 ve Şekil 4.23'de sunulmaktadır. Analiz 20 ve 21'e ait hesaplamalarda ρ_{11} ve ρ_{33} normal gerilme oranları, %1'in altındaki hata ile sabit tutulmaktadır.

Elde edilen hata oranları, Çizelge 4.2'de yer alan çözüm adımı parametreleri kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalardan elde edilmiştir. Gerek duyulduğu takdirde artım büyüklüğünü azaltacak parametre değişikliklerini yaparak, elde edilen sonuçlardaki hata oranlarını da azaltmak mümkün olmaktadır.

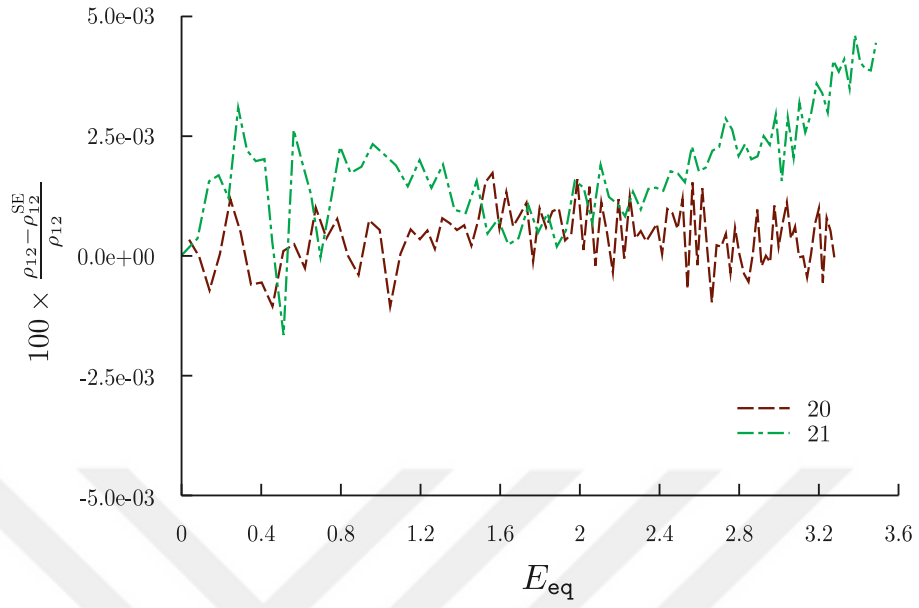


Şekil 4.22: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{11} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

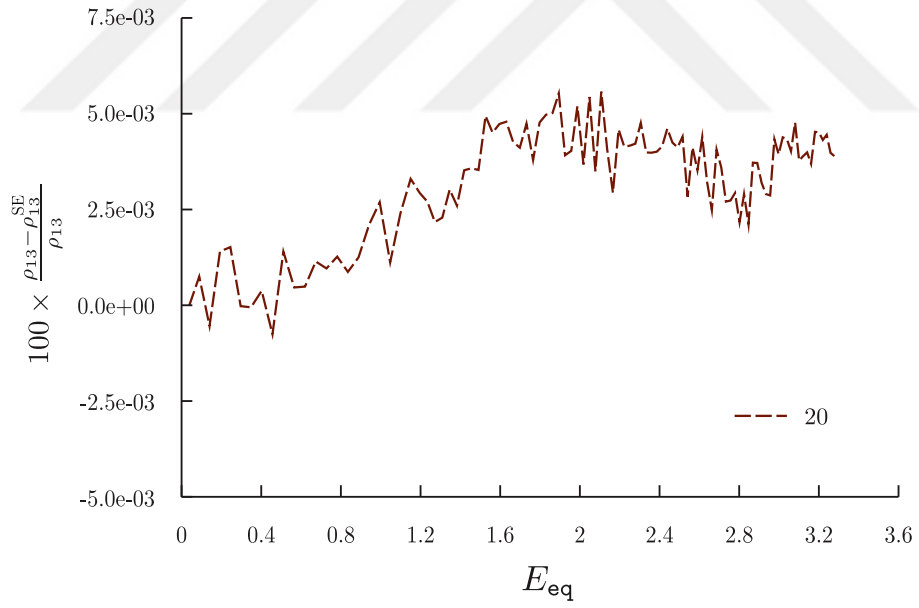


Şekil 4.23: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{33} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.

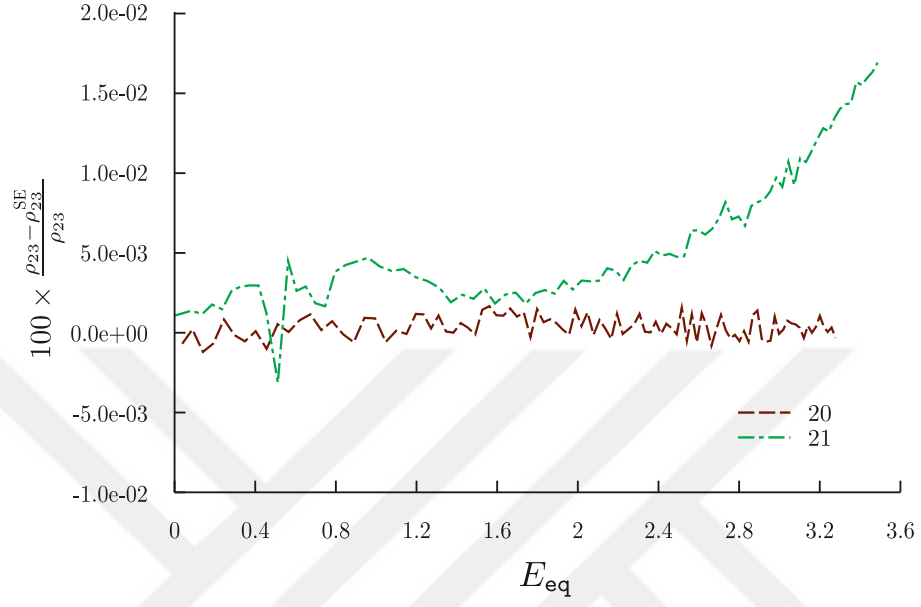
Analiz 20 ve 21'e ait hesaplamalarda ρ_{12} , ρ_{23} ve ρ_{13} kesme gerilmesi oranlarının, %1'in altındaki hata ile sabit tutulabildiği görülmektedir (bkz. Şekil 4.24-4.26).



Şekil 4.24: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{12} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



Şekil 4.25: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{23} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



Şekil 4.26: Analiz 20 ve 21'e ait ρ_{13} gerilme oranı yüzde hata - eşdeğer gerinim eğrileri.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Gerilme durumunun en genel hali 5 adet boyutsuz gerilme oranı parametresi ile ifade edilebilmektedir. Tekoğlu (2014) referans çalışmasında, normal gerilmelere ek olarak yalnızca bir kesme gerilmesinin bulunduğu gerilme durumunu 3 adet gerilme oranı ile ifade etmiş ve bu 3 gerilme oranını sabit tutarak yaptığı birim hücre hesaplamaları için bir hesaplama çatısı sunmuştur.

Bu tez çalışması kapsamında, Tekoğlu (2014) çalışmasındaki hesaplama çatısının yetersiz kaldığı, gerilme durumunun en genel halinin ifadesinde kullanılan 5 adet gerilme oranını BH hesaplamalarında sabit tutabilecek bir hesaplama çatısı geliştirilmiştir. Gerçekleştirilen BH hesaplamaları ile de geliştirilen çatının kullanım sınırları sınanmıştır.

Bu süreç boyunca yapılan çalışmalar değerlendirildiğinde, aşağıda listelenen sonuçlara varılmaktadır:

- Önerilen hesaplama çatısı, gerilme durumunun hangi gerilme bileşenlerini içerdiğinden bağımsız olarak, tüm gerilme durumları için kullanılabilir.
- Önerilen hesaplama çatısının kullanıldığı BH hesaplamalarının tamamında hata oranlarını %1'in altında tutmak mümkündür. Burada belirtilen %1'lik hata oranı, tez çalışması için belirlenmiş bir hedef niteliği taşımaktadır. Fakat, istendiği takdirde, Çizelge 4.2'de yer alan parametrelerde yapılacak değişiklikler ile çözüm adımı artım büyüklüğünün düşürülmesi ve dolayısıyla da daha düşük hata oranlarının elde edilmesi mümkündür. Ancak, çözüm adımı artımının büyüklüğünün düşürülmesi ile çözüm adımı boyunca yapılan iterasyonların toplam sayısının da artacağı ve dolayısıyla da hesaplama maliyeti ve süresinin de yükseleceği göz önünde bulundurulmalıdır.
- İçerisinde parçacık, boşluk vb. safsızlık bulduran her türlü periyodik yapının gerilme durumunun sabit tutulduğu BH hesaplamaları, önerilen hesaplama çatısı kullanılarak gerçekleştirilebilmektedir. Bu çalışmada yer alan birim hücreler boşluk ve parçacık içerse de, önerilen çatı, herhangi bir homojen olmayan periyodik mikroyapının homojenize edilerek malzeme özelliklerinin tespitinde kullanılabilir özelliktedir. Ayrıca, önerilen çatı malzemelerin farklı gerilme durumlarındaki davranışlarının gözlemlenebilmesine de olanak sağlamaktadır.
- Sadece asal gerilmelerin söz konusu olduğu durumda, gerilme oranlarının sabit tutulduğu BH hesaplamaları Riks yöntemi kullanılarak daha hızlı bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir.

İlerisi için yapılacak çalışmalarda, gerilme oranlarını sabit tutarak BH hesaplamalarının gerçekleşmesini mümkün kılan çatıda değişiklik yapılacak ve hesaplama boyunca gerilme oranlarının değerlerinin değiştirilebilir olması sağlanacaktır. Böylece, değişen gerilme durumları için de BH hesaplamaları yapılabilecektir.

İlerisi için yapılacak diğer bir çalışma ise, sünek kırılmanın araştırılmasında önerilen çatının kullanıldığı ve kesme gerilmelerinin de etkisinin dahil olduğu hesaplamalar yaparak, çok boyutlu bir kırılma yörüngesi (İng. *locus*) olup olmadığının değerlendirilmesi olacaktır.



KAYNAKLAR

- ABAQUS (v2016). The Abaqus documentation collection, version 2016, Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, Rhode Island.
- Babout, L., Maire, E. ve Fougères, R. (2004). “Damage initiation in model metallic materials: X-ray tomography and modelling”. *Acta Materialia* 52.8, ss. 2475–2487.
- Bao, Y. ve Wierzbicki, T. (2004). “On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space”. *International Journal of Mechanical Sciences* 46.1, ss. 81–98.
- Barsoum, I. ve Faleskog, J. (2007a). “Rupture mechanisms in combined tension and shear—Experiments”. *International journal of solids and structures* 44.6, ss. 1768–1786.
- (2007b). “Rupture mechanisms in combined tension and shear—Micromechanics”. *International Journal of Solids and Structures* 44.17, ss. 5481–5498.
- (2011). “Micromechanical analysis on the influence of the Lode parameter on void growth and coalescence”. *International Journal of Solids and Structures* 48.6, ss. 925–938.
- Benzerga, A., Surovik, D. ve Keralavarma, S.M. (2012). “On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials—analysis”. *International Journal of Plasticity* 37, ss. 157–170.
- Benzerga, A.A. ve Leblond, J-B. (2010). “Ductile fracture by void growth to coalescence”. *Advances in applied mechanics* 44, ss. 169–305.
- Böhm, J. (1998). “A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics”. *Cdl-fmd Report* 3.
- Council, National Research (1984). *Structural Uses for Ductile Ordered Alloys*. Washington, DC: The National Academies Press. DOI: 10 . 17226 / 19385. URL: <https://www.nap.edu/catalog/19385/structural-uses-for-ductile-ordered-alloys>.
- Dæhli, L.E.B., Morin, D., Børvik, T. ve Hopperstad, O.S. (2017). “Influence of yield surface curvature on the macroscopic yielding and ductile failure of isotropic porous plastic materials”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 107, ss. 253–283.

- Dæhli, L.E.B., Tekoğlu, C., Morin, D., Børvik, T. ve Hopperstad, O.S. (2022). “Ductile failure predictions using micromechanically-based numerical models”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 159. submitted.
- Gao X. and Kim, J. (2006). “Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence”. *International Journal of Solids and Structures* 43.20, ss. 6277–6293.
- Gao, X., Zhang, G. ve Roe, C. (2010). “A study on the effect of the stress state on ductile fracture”. *International Journal of Damage Mechanics* 19.1, ss. 75–94.
- Garrison, W.M. ve Moody, N.R. (1987). “Ductile fracture”. *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 48.11, ss. 1035–1074.
- Hancock, J.W. ve Brown, D.K. (1983). “On the role of strain and stress state in ductile failure”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31.1, ss. 1–24.
- Hill, R. (1963). “Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5, ss. 357–372.
- Keralavarma, S.M., Hoelscher, S. ve Benzerga, A.A. (2011). “Void growth and coalescence in anisotropic plastic solids”. *International Journal of Solids and Structures* 48.11-12, ss. 1696–1710.
- Kim, J., Gao, X. ve Srivatsan, T.S. (2004). “Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity”. *Engineering fracture mechanics* 71.3, ss. 379–400.
- Koplik, J. ve Needleman, A. (1988). “Void growth and coalescence in porous plastic solids”. *International Journal of Solids and Structures* 24.8, ss. 835–853.
- Leblond, J-B. ve Mottet, G. (2008). “A theoretical approach of strain localization within thin planar bands in porous ductile materials”. *Comptes Rendus Mecanique* 336.1-2, ss. 176–189.
- Li, S. ve Sitnikova, E. (2019). *Representative Volume Elements and Unit Cells: Concepts, Theory, Applications and Implementation*. Woodhead Publishing.
- Lin, R.C., Steglich, D., Brocks, W. ve Betten, J. (2006). “Performing RVE calculations under constant stress triaxiality for monotonous and cyclic loading”. *International journal for numerical methods in engineering* 66.8, ss. 1331–1360.
- Luo, T. ve Gao, X. (2018). “On the prediction of ductile fracture by void coalescence and strain localization”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 113, ss. 82–104.
- Maire, E., Zhou, S., Adrien, J. ve Dimichiel, M. (2011). “Damage quantification in aluminium alloys using in situ tensile tests in X-ray tomography”. *Engineering Fracture Mechanics* 78.15, ss. 2679–2690.
- Mandel, J. (1966). “Contribution théorique à l’étude de l’écrouissage et des lois de l’écoulement plastique”. *Applied Mechanics*. Springer, ss. 502–509.

- Morgeneyer, T.F., Khadyko, M., Buljac, A., Helfen, L., Helfen, F.H., Benallal, A., Børvik, T. ve Hopperstad, O.S. (2021). “On crystallographic aspects of heterogeneous plastic flow during ductile tearing: 3D measurements and crystal plasticity simulations for AA7075-T651”. *International Journal of Plasticity*, s. 103028.
- Morgeneyer, T.F., Taillandier, T.T., Buljac, A., Helfen, L. ve Hild, F. (2016). “On strain and damage interactions during tearing: 3D in situ measurements and simulations for a ductile alloy (AA2139-T3)”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 96, ss. 550–571.
- Morgeneyer, T.F., Taillandier, T.T., Helfen, L., Baumbach, T., Sinclair, I., Roux, S. ve Hild, F. (2014). “In situ 3-D observation of early strain localization during failure of thin Al alloy (2198) sheet”. *Acta Materialia* 69, ss. 78–91.
- Morin, D., Dæhli, L.E.B., Børvik, T., Benallal, A. ve Hopperstad, O.S. (2019). “Numerical study of ductile failure under non-proportional loading”. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 74, ss. 221–241.
- Needleman, A. (1972). “Void Growth in an Elastic-Plastic Medium”. *Journal of Applied Mechanics* 39, ss. 964–970.
- Nielsen, K.L. ve Tvergaard, V. (2011). “Failure by void coalescence in metallic materials containing primary and secondary voids subject to intense shearing”. *International Journal of Solids and Structures* 48.9, ss. 1255–1267.
- Pineau, A., Benzerga, A.A. ve Pardoën, T. (2016). “Failure of metals I: Brittle and ductile fracture”. *Acta Materialia* 107, ss. 424–483.
- Pineau, A. ve Pardoën, T. (2007). “Failure mechanisms of metals”. *Comprehensive structural integrity encyclopedia* 2, ss. 684–797.
- Puttick, K.E. (1959). “Ductile fracture in metals”. *Philosophical magazine* 4.44, ss. 964–969.
- Reboul, J., Srivastava, A., Osovski, S. ve Vadillo, G. (2020). “Influence of strain rate sensitivity on localization and void coalescence”. *International Journal of Plasticity* 125, ss. 265–279.
- Rice, J.R. (1976). “The Localization of Plastic Deformation”. *Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. C. 1. Delft: North-Holland Publishing, ss. 207–220.
- Scheyvaerts, F., Onck, P.R., Tekoğlu, C. ve Pardoën, T. (2011). “The growth and coalescence of ellipsoidal voids in plane strain under combined shear and tension”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59.2, ss. 373–397.
- Steglich, D., Brocks, W., Heerens, J. ve Pardoën, T. (2008). “Anisotropic ductile fracture of Al 2024 alloys”. *Engineering Fracture Mechanics* 75.12, ss. 3692–3706.
- Steglich, D., Wafai, H. ve Besson, J. (2010). “Interaction between anisotropic plastic deformation and damage evolution in Al 2198 sheet metal”. *Engineering Fracture Mechanics* 77.17, ss. 3501–3518.

- Tekoğlu, C. (2014). “Representative volume element calculations under constant stress triaxiality, lode parameter, and shear ratio”. *International Journal of Solids and Structures* 51.25-26, ss. 4544–4553.
- Tekoğlu, C., Hutchinson, J.W. ve Pardoën, T. (2015). “On localization and void coalescence as a precursor to ductile fracture”. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373.2038, s. 20140121.
- Tekoğlu, C., Leblond, J-B. ve Pardoën, T. (2012). “A criterion for the onset of void coalescence under combined tension and shear”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60.7, ss. 1363–1381.
- Thomson, R.D. ve Hancock, J.W. (1984). “Ductile failure by void nucleation, growth and coalescence”. *International Journal of Fracture* 26.2, ss. 99–112.
- Torki, M.E., Tekoglu, C., Leblond, J-B. ve Benzerga, A.A. (2017). “Theoretical and numerical analysis of void coalescence in porous ductile solids under arbitrary loadings”. *International Journal of Plasticity* 91, ss. 160–181.
- Tvergaard, V. (1989). “Material failure by void growth to coalescence”. *Advances in applied Mechanics* 27, ss. 83–151.
- (2015). “Study of localization in a void-sheet under stress states near pure shear”. *International Journal of Solids and Structures* 75, ss. 134–142.
- Tvergaard, V. ve Legarth, B.N. (2020). “3D study of plastic flow localization at a void-sheet”. *International Journal of Mechanical Sciences* 173, s. 105426.
- Vishwakarma, V. ve Keralavarma, S.M. (2019). “Micromechanical modeling and simulation of the loading path dependence of ductile failure by void growth to coalescence”. *International Journal of Solids and Structures* 166, ss. 135–153.
- Wong, W.H. ve Guo, T.F. (2015). “On the energetics of tensile and shear void coalescences”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 82, ss. 259–286.
- Zhang, K.S., Bai, J.B. ve Francois, D. (2001). “Numerical analysis of the influence of the Lode parameter on void growth”. *International Journal of Solids and Structures* 38.32-33, ss. 5847–5856.

EKLER

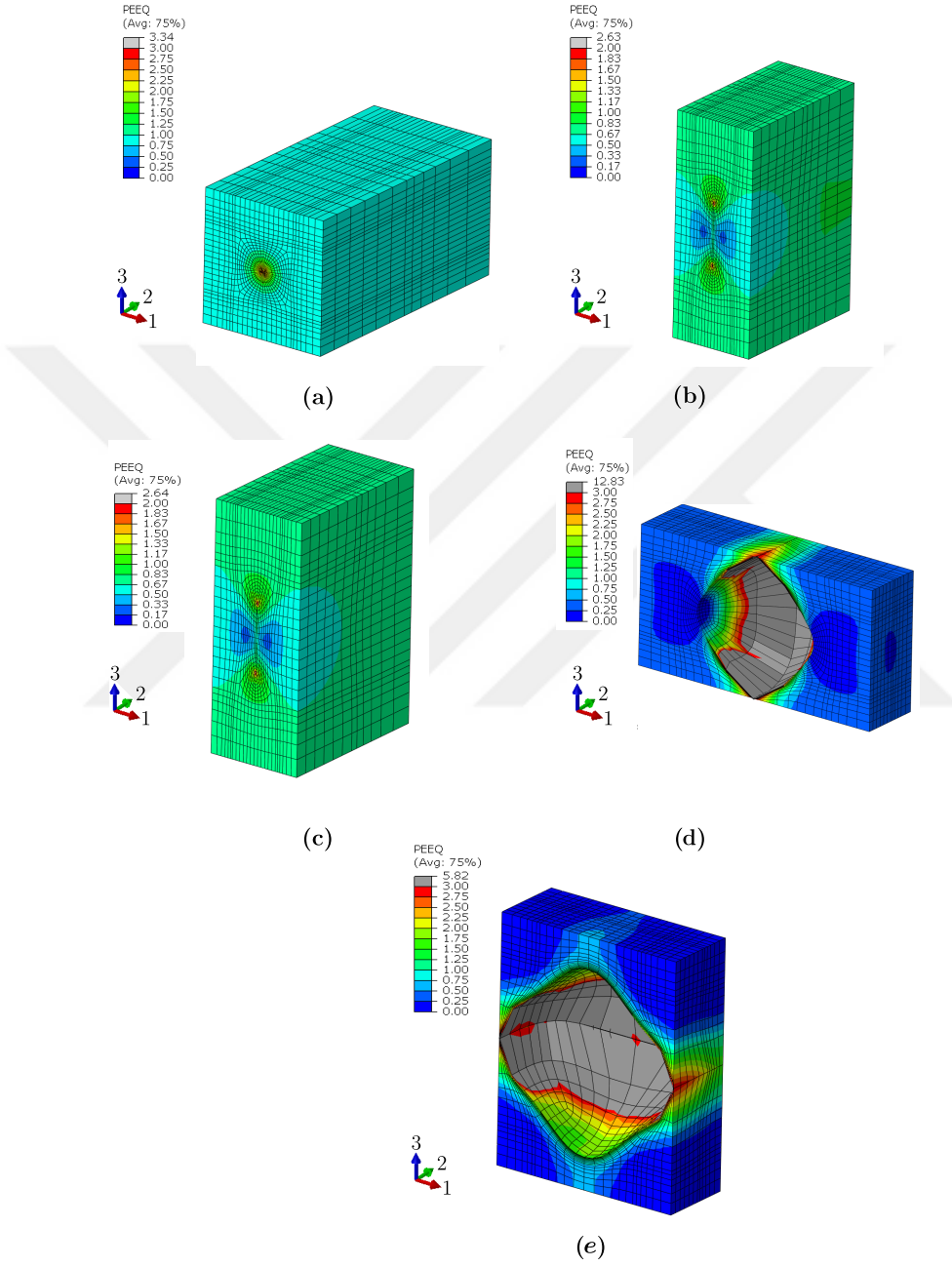
EK 1 : Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 2 (b) analiz 3 (c) analiz 4 (d) analiz 6 (e) analiz 8.

EK 2 : Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 10 (b) analiz 12 (c) analiz 14.

EK 3 : Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 15 (b) analiz 19.

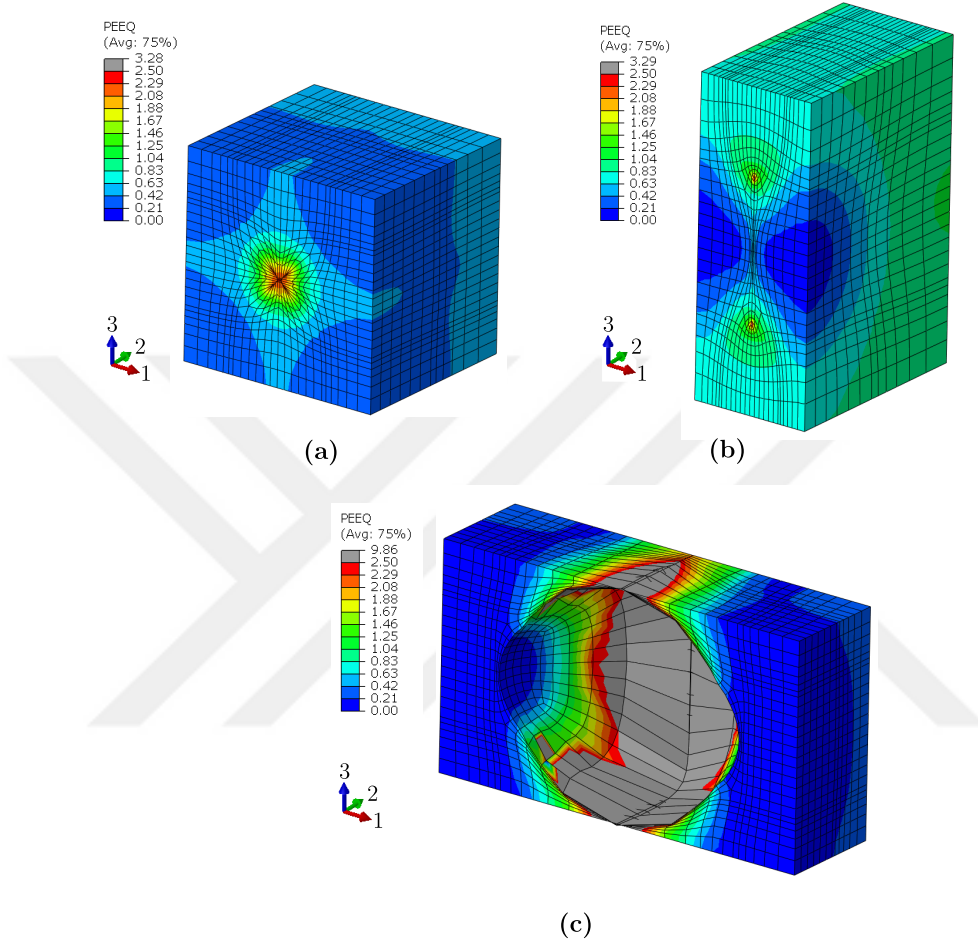


EK 1



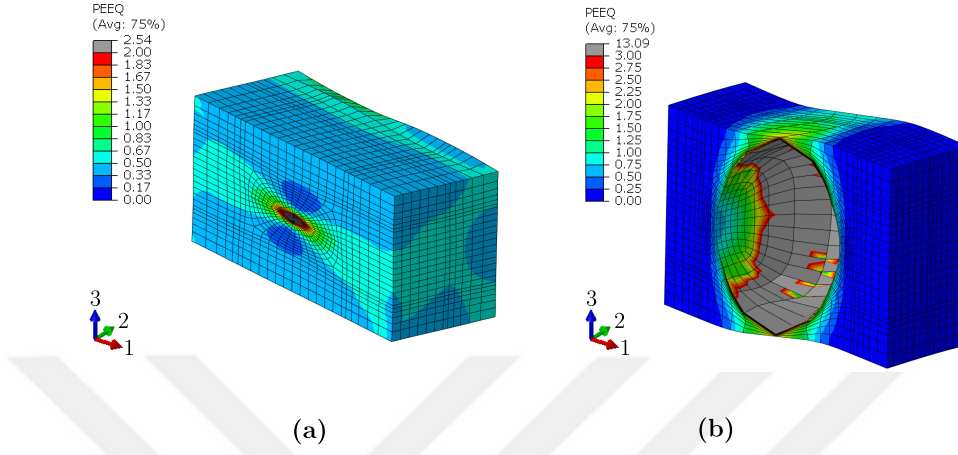
Şekil 5.1: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerilim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 2 (b) analiz 3 (c) analiz 4 (d) analiz 6 (e) analiz 8.

EK 2



Şekil 5.2: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerilim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 10 (b) analiz 12 (c) analiz 14.

EK 3



Şekil 5.3: Hesaplama çözüm adımı son artımında elde edilen eşdeğer plastik gerinim, PEEQ, dağılımları (a) analiz 15 (b) analiz 19.