



KLASİK ve MODERN KONTROL SİSTEMİ TASARIMI

YÜCEL ERCAN
Ankara 2022

Klasik ve Modern
Kontrol Sistemi
Tasarımı

Yücel Ercan

Ankara – 2022

KLASİK VE MODERN KONTROL SİSTEMİ TASARIMI

Yücel Ercan

Birinci Basım: Ocak 2022

ISBN: 978-605-83437-4-0

ISBN: 978-605-83437-5-7 (Elektronik sürüm)

Basım:

Kuban Matbaacılık Yayıncılık

İvedik Osb. Matbaacılar Sit. 1514 Cad. No: 20 Yenimahalle/Ankara

0 312 395 2070 • www.kubanmatbaa.com • Sertifika No: 47331

© Copyright, Yücel Ercan

Bu kitabın yayın hakları Yücel Ercan'a ait olup, fotokopi veya elektronik olarak çoğaltılmasına ve dağıtılmasına izin verilmiştir.

TEŐEKKÜR

Yazar bu kitabın basılma aşamasında sağladığı destek dolayısıyla TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teŐekkür eder.

YAZAR HAKKINDA

Yücel Ercan 1943 yılında Konya’da doğdu. 1961 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’nın yükseköğretim bursunu kazanarak makine mühendisliği eğitimi için ABD’ye gitti. Massachusetts Institute of Technology (MIT)’den sırasıyla lisans, yüksek lisans ve doktora derecelerini aldı. MIT’de araştırma asistanı ve araştırmacı olarak çalıştı. 1971 yılında yurda dönerek Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde öğretim üyesi olarak çalışmaya başladı. 1976’da doçent oldu. Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde rektör yardımcılığı ve bölüm başkan yardımcılığı yaptı. 1979-1981 yılları arasında Alexander von Humboldt Vakfı bursu kazanarak Almanya’da araştırmalarda bulundu. 1982’de profesör ünvanını aldı. Aynı yıl yeni kurulan Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi’ne kurucu dekan olarak atandı ve 1992’ye kadar dekanlık görevini sürdürdü. 2005 yılında TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi’nde çalışmaya başladı. TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi’nde rektör vekilliği ve rektör yardımcılığı, dekanlık, fen bilimleri enstitüsü müdürlüğü, bölüm başkanlığı gibi idari görevlerde bulunan yazar halen aynı üniversitenin makine mühendisliği bölümünde profesör olarak çalışmaktadır. Yazar, sistem dinamiği, otomatik kontrol, akışkan gücü kontrolü, dinamik, modelleme ve simülasyon konularında çalışmalar yapmaktadır.

Yazarın diğer kitapları:

1. Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği, ISBN: 978-975-04-0107-7, Literatür Yayıncılık, 2003.
2. İleri Dinamik, ISBN: 978-605-83437-1-9, 2016.
(Türkiye Bilimler Akademisi 2017 Yılı Kayda Değer Telif Eser Ödülü almıştır.)
3. Mühendislik Sistemlerinin Dinamiğine Hamilton Prensibi Yaklaşımı, ISBN: 978-605-83437-2-6, 2016.
4. Akışkan Gücü Kontrolü Teorisi, Genişletilmiş 2. Basım, ISBN: 978-605-83437-3-3, 2017.

2. - 4. sıradaki kitapların telif hakları yazara ait olup, bu kitapların ticari satışı yoktur. Bu kitaplar istek üzerine yazar tarafından ücretsiz olarak sağlanmaktadır. Bu kitaplara İnternet ortamında pdf olarak da erişilebilir.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ, 1
2. KONTROL SİSTEMİ PERFORMANSINI DEĞERLENDİRME ÖLÇÜTLERİ, 5
 - 2.1 Sistemin Durağan Davranışı, 6
 - 2.2 Parametre Hassasiyeti, 12
 - 2.3 Kararlılık, 13
 - 2.3.1 Mutlak Kararlılık, 14
 - 2.3.2 Göreceli Kararlılık, 16
 - 2.4 Sistemin Geçici Davranışı, 20
 - 2.4.1 Geçici Davranışı Tanımlayan Performans Parametreleri, 20
 - 2.4.2 Baskın Kutuplar, 22
 - 2.4.3 İkinci Mertebe Az Sönümlü Sistemin Geçici Davranış Performans Parametreleri, 24
 - 2.4.4 Birinci Mertebe Sistemin Geçici Davranış Performans Parametreleri, 33
 - 2.5 Optimizasyon, 34
 - 2.5.1 Klasik Kontrolde Optimizasyon, 34
 - 2.5.2 Modern Kontrolde Optimizasyon, 35
- KAYNAKLAR, 37
3. KÖKLERİN YER EĞRİSİ YÖNTEMİYLE KONTROL SİSTEMİ TASARIMI, 39
 - 3.1 Köklerin Yer Eğrisi Özellikleri ve Çizim Kuralları, 40
 - 3.2 Yer Eğrilerinin MATLAB Yardımıyla Çizilmesi, 52
 - 3.3 Yer Eğrisi Çizim Örnekleri, 53
 - Örnek 3.1, 53
 - Örnek 3.2, 55
 - Örnek 3.3, 57

3.4	Köklerin Yer Eğrisiyle Kontrol Sistemi Tasarımı,	59
3.4.1	Durağan Hataların Azaltılması,	60
3.4.2	Geçici Davranışın İyileştirilmesi,	63
3.4.3	Durağan ve Geçici Davranışların Birlikte İyileştirilmesi,	65
3.4.4	Tasarım Örnekleri,	66
	Örnek 3.4: Oransal Kontrol,	67
	Örnek 3.5: PD Kontrol,	71
	Örnek 3.6: PI Kontrol,	73
	Örnek 3.7: PID Kontrol,	76
	Örnek 3.8: Faz-İlerletici-Geriletici Kontrol,	85
	Örnek 3.9: I ve PI Kontrol,	91
	KAYNAKLAR,	96
	PROBLEMLER,	96
4.	BODE DİYAGRAMIYLA KONTROL SİSTEMİ TASARIMI,	103
4.1	Durağan Sinüsoidal Cevap,	104
4.2	Frekans Cevabı Analizinde ve Tasarımında Kullanılan Yöntemler,	107
4.3	Bode Diyagramlarının Elle Çizilmesi,	111
	Örnek 4.1,	121
4.4	Bode Diyagramlarının MATLAB Yardımıyla Çizilmesi,	124
4.5	Bode Diyagramları ve Kararlılık,	125
4.6	Durağan Davranış ve Bode Diyagramları,	127
4.7	Bode Diyagramlarında Büyüklük ve Faz Arasındaki İlişki,	129
4.8	Frekans Cevabıyla Sistem Tasarımında Kullanılan Performans Parametreleri,	133
	4.8.1 Kazanç Payı,	134
	4.8.2 Faz Payı,	134
	4.8.3 Büyüklük Geçme Frekansı,	135
	4.8.4 Bant Genişliği ve Kesme Frekansı,	135
	4.8.5 Rezonans Tepe Yüksekliği ve Rezonans Frekansı,	138

- 4.9 Açık Çevrim ve Kapalı Çevrim Frekans Cevapları, 140
- 4.10 Açık Çevrim Bode Diyagramının Şekillendirilmesinde Kullanılan Çarpanlar, 142
 - Kazanç Artırılması, 142
 - İntegral Kontrol, 143
 - Açık Çevrim Transfer Fonksiyonuna Kutup Eklenmesi, 143
 - Oransal + Türevsel (PD) Kontrol, 143
 - Oransal + İntegral (PI) Kontrol, 143
 - Faz-Geriletici Denkleştirici, 145
 - Faz-İlerletici Denkleştirici, 146
 - Faz-İlerletici-Geriletici Denkleştirici, 148
 - PID Kontrol, 151
- 4.11 Bode Diyagramıyla Kontrol Sistemi Tasarımı, 151
 - 4.11.1 Genel Tasarım Prensipleri, 151
 - 4.11.2 Faz-Geriletici Denkleştirici, 157
 - Örnek 4.2: Yöntem 1, 159
 - Örnek 4.3: Yöntem 1-b, 163
 - 4.11.3 Faz-İlerletici Denkleştirici, 167
 - Örnek 4.4: Yöntem 2, 169
 - Örnek 4.5: Yöntem 2, 174
 - 4.11.4 Faz-İlerletici-Geriletici Denkleştirici Tasarımı, 179
 - Örnek 4.6: Yöntem 3, 182
- KAYNAKLAR, 192
- PROBLEMLER, 193
- 5. KONTROL SİSTEMİ TASARIMINDA DENEYSEL YÖNTEMLER, 197
 - 5.1 Deneysel Frekans Cevabı Eğrilerinden Sistem Tanımlanması, 197
 - Örnek 5.1, 199
 - 5.2 Deneysel Zaman Cevabından PID Kontrolcü Parametrelerinin Belirlenmesi, 201
 - 5.2.1 Ziegler ve Nichols Yöntemleri, 201
 - 5.2.2 Sönümlü Titreşim Yöntemi, 203

5.2.3	Cohen-Coon Yöntemi,	204
5.2.4	Tyreus-Luyben Yöntemi,	205
5.2.5	Kapalı Çevrim Bang-Bang Test Yöntemi,	205
5.2.6	Chien-Hrones-Reswick Yöntemi,	205
	KAYNAKLAR,	207
	PROBLEMLER,	208
6.	DURUM DENKLEMLERİ VE MODERN KONTROL,	213
6.1	Durum Değişkenleri ve Durum Denklemleri,	214
6.2	Durum Denklemleri ve Transfer Fonksiyonu İlişkisi,	218
6.3	Kontrol Edilebilirlik ve Gözlenebilirlik,	220
6.4	Lineer Dönüşümle Yeni Durum Değişkenleri Türetilmesi,	221
6.5	Durumla Belirlenen Lineer Sistemin Zaman Cevabı,	222
6.6	Durum Dönüştürme Matrisi,	225
6.7	Örnekler,	227
	Örnek 6.1,	227
	Örnek 6.2,	229
	Örnek 6.3,	230
	KAYNAKLAR,	232
	PROBLEMLER,	232
7.	GENEL OPTİMUM KONTROL,	235
7.1	Euler Denklemi,	236
	Örnek 7.1,	239
7.2	Değişken Uç Noktası Problemi,	240
	Örnek 7.2,	244

- 7.3 Genel Optimum Kontrol Problemi, 246
 - 7.3.1 Sınırlayıcı Şartların Minimizasyon Problemlerine Uygulanması, 246
 - 7.3.2 Temel Optimum Kontrol Problemi ve Pontryagin Fonksiyonu, 249
 - Örnek 7.3, 257
 - Örnek 7.4, 259
 - Örnek 7.5, 261
- KAYNAKLAR, 263
- PROBLEMLER, 264
- 8. MİNİMUM-ZAMAN, MİNİMUM-YAKIT, MİNİMUM-ENERJİ KONTROLÜ, 269
 - 8.1 Minimum-Zaman Kontrolü, 269
 - 8.1.1 Sabit Parametrelili Lineer Sistemlerin Minimum-Zaman Kontrolü, 270
 - Örnek 8.1, 273
 - Örnek 8.2, 276
 - 8.1.2 Kompleks Kutupları Olan Kararlı Sistemlerin Minimum-Zaman Kontrolü, 278
 - 8.2 Optimum Kontrol Girişi Kontrolü, 279
 - 8.2.1 Minimum-Yakıt Kontrolü, 280
 - Örnek 8.3, 281
 - Örnek 8.4, 285
 - Örnek 8.5, 290
 - 8.2.2 Minimum-Enerji Kontrolü, 294
 - Örnek 8.6, 295
 - 8.2.3 İzoperimetrik Kısıtlı Optimum Kontrol, 299
 - Örnek 8.7, 300
- KAYNAKLAR, 303
- PROBLEMLER, 303
- 9. LİNEER KARESEL OPTİMUM KONTROL, 307
 - 9.1 Matris Riccati Denklemi, 308
 - Örnek 9.1, 310

	Örnek 9.2,	312
9.2	Kalman Denklemi ,	315
	Örnek 9.3,	317
	KAYNAKLAR,	319
	PROBLEMLER,	319
10.	KUTUP YERLEŞTİRME YÖNTEMİ ,	323
10.1	Kutup Yerleştirme Yöntemleri,	323
	Yöntem 1: Doğrudan Metot,	327
	Örnek 10.1,	328
	Yöntem 2: Ackermann Formülünün Kullanımı,	329
	Örnek 10.2,	330
10.2	Kutup Yerleştirme İçin MATLAB Kullanımı,	331
	KAYNAKLAR,	332
	PROBLEMLER,	332
11.	MODELE DAYALI OPTİMUM KONTROL SİSTEMİ TASARIMI,	335
11.1	Faz Değişkenleri ve Model Sistem,	335
	Örnek 11.1,	337
	Örnek 11.2,	341
	Örnek 11.3,	343
	Örnek 11.4,	345
	Örnek 11.5,	347
11.2	Modele Dayalı Tasarım,	352
	Örnek 11.6,	354
	PROBLEMLER,	357
12.	ÖLÇÜLEMİYEN DURUM DEğİŞKENLERİ,	361
12.1	Gözleyiciler ve Ölçülemeyen Değişkenler İçin Gözleyici Tasarımı,	362

12.1.1 Tam-Mertebeli Gözleyici Tasarımı,	362
Örnek 12.1,	366
Örnek 12.2,	370
12.1.2 Minimum-Mertebeli Gözleyici Tasarımı,	373
Örnek 12.3,	379
Örnek 12.4,	388
12.2 Kalman Filtresi,	398
Örnek 12.5,	401
Örnek 12.6,	402
KAYNAKLAR,	406
PROBLEMLER,	407
EK 1 MATRİS İŞLEMLERİ,	411
EK 2 MATLAB KOMUTLARI,	419
İNDEKS,	423

1

GİRİŞ

Lisans düzeyinde temel *kontrol sistemleri* dersini almış olan bir öğrencinin iki önemli eksikliği vardır. Bunlardan birincisi mühendislik sistemlerinin matematik modellerinin oluşturulmasındaki eksikliklerdir. Pek çok üniversitede öğrenci bu yetkinliğe tam olarak sahip olmadan, kontrol dersinin başında iki-üç hafta süreyle, oldukça yetersiz düzeyde aldığı bilgiyle kontrol konularına başlar. Önceki yıllarda kontrol dersi öncesinde zorunlu olarak okutulan *sistem dinamiği* dersi, kredi azaltma çalışmaları sırasında ilk kurbanlardan olmuştur. Bu eksiklik bazı üniversitelerde son sınıfta açılan bir sistem dinamiği seçmeli dersi ile telafi edilmektedir. Ancak bu dersin sıralaması, genellikle üçüncü sınıfta açılan kontrol dersine göre yanlıştır.

Diğer önemli eksiklik ise kontrol dersini alan bir öğrencinin PID kontrol dışında tasarım yetkinliğinin olmamasıdır. Türkiye’de çok az üniversitede kontrol sistemi tasarımı konusunda ders açılmaktadır. Bazı üniversitelerin müfredatlarında kontrol sistemi tasarımı adı altında seçmeli bir ders görülmesine rağmen, bunlar sadece isimde kalmakta ve çeşitli sebeplerden açılmamaktadır.

Yabancı dilde yazılmış bazı kitaplarda kontrol tasarımıyla ilgili konular oldukça ayrıntılı olarak ve genellikle teoriye daha fazla ağırlık vererek işlenmiştir [1.1-1.5]. Sadece belli bir konuya özel olarak yazılan kitaplarda ise çok fazla ayrıntı vardır. Kontrol sistemleriyle ilgili temel konuların yanı sıra bazı tasarım konularının da ele alındığı Türkçe kitaplar da vardır [1.6-1.8]. Ancak bu kitaplarda tasarım konuları oldukça sınırlı olarak ele alınmıştır.

Bu kitabın amaçları ve bunların gerçekleşmesi için kullandığı yaklaşım aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Kontrol sistemi tasarımı konusunda özellikle İngilizce olarak yazılmış, pedagojik yöntemlerin öne çıktığı iyi hazırlanmış pek çok kitap vardır. Ayrıca kontrol sistemi tasarımının farklı

konularının ele alındığı, çoğu İngilizce olarak hazırlanmış ders notlarına, monogramlara ve sunumlara İnternet ortamında erişilebilir. Buna karşılık kontrol sistemi tasarımı konusunun ayrıntılı bir biçimde ele alındığı yeterli sayıda Türkçe kaynak yoktur. Bu eksikliği azaltmak için bu kitap Türkçe olarak hazırlanmıştır. Böylece Türkçe eğitim yapan üniversitelerde yaşanan kaynak eksikliğinin azaltılması amaçlanmıştır.

- Üniversiteden mezun olan pek çok mühendisin temel kontrol sistemleri dersi dışında, ayrıca bir kontrol sistemi tasarımı dersi almadığını dikkate alarak, konular okumaya hevesli bir mühendisin anlayıp uygulayabileceği sadelikle işlenmiştir. Anlaşılabilir olması bu kitabın önceliklerinden biridir. Bu yüzden kitabın yazımında neredeyse bir ders notu sadeliği kullanılmıştır. Kitapta işlenen tasarım yöntemlerinin kolaylıkla anlaşılabilmesi için çeşitli örnekler verilmiştir.
- Kitabın üniversite eğitiminde kullanılmasını kolaylaştırmak için her bölümün sonunda alıştırmaları problemleri verilmiştir. Ayrıca öğretim üyeleri için bir çözüm kitabı hazırlanmıştır.
- Günümüzde özellikle sanayide ve Ar-Ge merkezlerinde kontrol sistemi tasarımı için hazır bilgisayar yazılımlarından yoğun bir şekilde yararlanılmaktadır. Ancak kullanılan tasarım yönteminin teorisini bilmeden, kısıtlarını kavramadan bu programları kullanmak, bir zamanlar *katalog mühendisi* denilen ve sadece katalog ve abakları kullanarak tasarım yapan mühendislerin yaptığından çok farklı değildir. Bu programları kullanan kişilerin programların arkasında yatan teoriye de hakim olması gereklidir. Buna karşılık bu yazılımların iş hayatına getirdiği hız ve verimlilik artışı yadsınamaz. Bu düşüncelerle kitapta verilen tasarım yöntemlerine ilişkin MATLAB komutları hakkında da bilgi verilmiştir.
- Bu kitabı okuyan mühendislerin ya da bu kitaptan ders kitabı olarak yararlanan öğrencilerin, klasik kontrol konularının işlendiği temel bir kontrol sistemleri dersini daha önceden almış olmaları gereklidir. Sistemlerin durum uzayında tanımlanması ve kontrolü ile ilgili en azından temel bilgi düzeyinde aşinalık tavsiye olunur, ancak zorunlu değildir. Modern kontrolle ilgili temel bilgilerin gerekli olanları bu kitapta yeri geldiğinde kısaca özetlenmektedir.

Kitabın 2. bölümünde iyi bir kontrol sisteminden beklenen davranış biçimi ve kontrol sistemlerinin performanslarını değerlendirmek için kullanılan çeşitli kriterlerin toplu bir özeti verilmiştir. Bu kriterler yeri geldiğinde kitabın ilgili bölümlerinde kullanılmaktadır.

3.-5. bölümler klasik kontrolde kullanılan başlıca yaklaşımlara ayrılmıştır. Bu bölümlerde klasik kontrolün özelliği dolayısıyla tek giriş ve tek çıkışlı sistemler ele alınmaktadır. 3. bölümde yer eğrileri kullanarak kontrol sistemi tasarım yöntemleri verilmiştir. Bu kapsamda PID kontrolün yanı sıra, faz-ilerletici, faz-geriletici ve faz-ilerletici-geriletici denkleştiricilerin sistem davranışını ne yolla, ne biçimde etkilediği ve tasarım yöntemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

4. bölümde Bode diyagramları kullanarak frekans bölgesinde kontrol sistemi tasarımı üzerinde durulmuştur. Bu bölümde de PID kontrolcü, faz-ilerletici, faz-geriletici ve faz-ilerletici-geriletici denkleştiriciler ayrıntılı olarak anlatılmış ve örnekler verilmiştir.

5. bölümde yeterince tanımlanmamış olan sistemlerin deneysel yöntemlerle nasıl tanımlanacağı ve PID kontrolcü parametrelerinin nasıl belirleneceği anlatılmıştır.

6. bölümde sistemlerin durum denklemleriyle ifadesi, bu şekilde ifade edilen sistemler hakkında temel bilgiler, klasik kontrolde kullanılan transfer fonksiyonu yaklaşımıyla modern kontrolün durum denklemleri yaklaşımı arasındaki bağlantılar verilmiş, durum denklemleriyle tanımlanan sistemlerin zaman cevaplarını veren genel ifadeler elde edilmiştir.

7. bölümde optimum kontrolün türetilmesinde kullanılan matematik altyapı işlenmiş, Pontryagin fonksiyonunu kullanarak genel optimum kontrolü veren denklemler ve sınır şartları türetilmiştir.

8. bölümden itibaren modern kontrolde kullanılan tasarım yöntemlerinden yaygın olarak kullanılanlar ele alınmıştır. İşlenen konular minimum-zaman optimizasyonu, minimum-yakıt optimizasyonu, minimum-enerji optimizasyonu, lineer karesel regülatör (LQR), kök yerleştirme yöntemi, tam mertebeli gözleyici tasarımı, minimum mertebeli gözleyici tasarımı, Kalman filtresi tasarımı, modele dayalı sistem tasarımı şeklinde sıralanmıştır.

Kitapta sadece analog sistemler incelenmiştir. 7. bölüm dışında sistemlerin lineer olduğu kabul edilmiştir. Kalman filtresiyle ilgili bölüm dışında bütün sistemler deterministiktir. Bu kitabın ötesinde teorik altyapı

gerektiren stokastik kontrol, Wiener spektral ayrıştırma yöntemi ve filtre tasarımı, adaptif kontrol, gürbüz kontrol gibi konular içeriğe dahil edilmemiştir.

KAYNAKLAR

- [1.1] Goodwin, G.C., Graebe, S.F., M. E. Salgado, M.E., *Control System Design*, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-958653-9, 2001.
- [1.2] Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A., *Feedbak Control of Dynamic Systems*, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-032393-4, 2002.
- [1.3] Ogata, K., *Modern Control Engineering, 5th Ed.*, Pearson, New York, 2010.
- [1.4] D’Azzo, J.J., Houpis, C.H., *Linear Control System Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [1.5] Nise, N.S., *Control Systems Engineering, 6th Ed.*, Wiley, Hoboken, NJ, 2011.
- [1.6] Gökbulut, M., *Kontrol Sistemlerinin Analiz ve Tasarımı*, Seçkin Yayıncılık, ISBN: 9789750248993, 2018.
- [1.7] Efe, M.Ö., *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Seçkin Yayıncılık ISBN: 9789750226632, 2014.
- [1.8] Yüksel, İ., *Otomatik Kontrol Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri*, Dora Yayıncılık, ISBN: 9786052470626, 2014.

KONTROL SİSTEMİ PERFORMANSINI DEĞERLENDİRME ÖLÇÜTLERİ

Kontrol edilen bir sistemin performansı değerlendirilirken aşağıdaki özelliklerin olduğunca sağlanması istenir.

1. Durağan davranış özellikleri

- 1.1 Sistem çıkışı referans girişini hatasız olarak takip edebilmelidir. Bu özelliğe sistemin servo özelliği denir. İdeal olarak sistem çıkışının durağan değeri referans değere sıfır hatayla ulaşmalıdır.
- 1.2 Sistem çıkışı bozucu girişlerden az etkilenmelidir. Bu özelliğe sistemin regülatör özelliği denir. İdeal olarak bozucu giriş dolayısıyla sistem çıkışındaki değişikliğin durağan değerleri sıfır olmalıdır.
- 1.3 Sistem çıkışının durağan değeri ölçüm sistemindeki gürültülerden etkilenmemelidir.

2. Parametre hassasiyeti

- 2.1 Sistem çıkışı, kontrolcü, kontrol edilen sistem ve ölçüm sisteminin parametre değerlerindeki değişikliklerden etkilenmemelidir. Bu özelliğe sistemin parametre hassasiyeti denir.

3. Kararlılık

- 3.1 Sistem mutlaka kararlı olmalıdır.
- 3.2 Sistem kararsızlık durumundan yeterince uzak olmalıdır.

4. Dinamik davranış özellikleri

4.1 Sistemin bir başlangıç durumundan durağan duruma giderken gösterdiği dinamik davranış (geçici davranış) kabul edilebilir özelliklere sahip olmalıdır. Yani, aşırı salınım yapmadan son değere olduğunca hızlı yaklaşmalıdır.

5. Optimizasyon

5.1 Kontrol sırasında belli bir kriterin minimum yapılması durumudur.

Klasik kontrol tasarımlarında (tek giriş, tek çıkış, tek geribesleme) yukarıda sayılan özelliklerden ilk dördü değerlendirilir. Beşinci sıradaki optimizasyon ise ancak düşük mertebeli sistemlerde ve çok sınırlı olarak uygulanabilir. Modern kontrol uygulamalarında ise (çok giriş, çok çıkış, birden fazla geribesleme) sistem tasarımında optimizasyon öne çıkar.

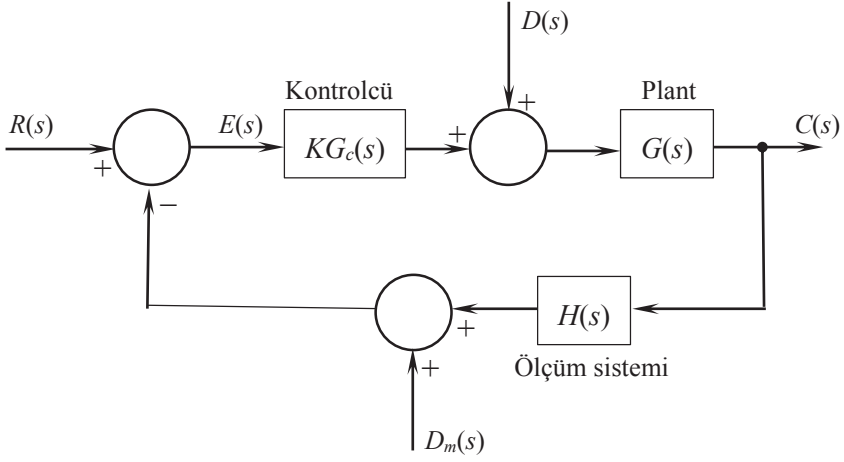
2.1 Sistemin Durağan Davranışı

Yukarıdaki özelliklerden ilki sistemin durağan davranış (sürekli rejim) kalitesini tanımlar. Yani yeterince beklenirse sistem çıkışının erişeceği son değerle ilgilidir. Kontrol sisteminin performansı değerlendirilirken, durağan davranış özelliklerinin incelenmesi ve sisteme uygulanabilecek girişler karşısında hatanın sıfır ya da kabul edilebilir düzeyde olup olmadığı çok önemlidir.

Kontrol edilmiş bir sistemin blok diyagramı Şekil 2.1'deki gibi olsun. Bu diyagramda K kontrolcünün kazancını göstermektedir. Referans girişi $R(s)$, bozucu giriş $D(s)$ ve ölçüm gürültüsü $D_m(s)$ ile sistem çıkışı $C(s)$ arasındaki transfer fonksiyonları bu diyagramdan sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG_c(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.1)$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.2)$$



Şekil 2.1

$$\frac{C(s)}{D_m(s)} = -\frac{KG_c(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.3)$$

Sözü edilen girişlerle hata $E(s)$ arasındaki transfer fonksiyonları da aşağıda verilmiştir.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.4)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{H(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.5)$$

$$\frac{E(s)}{D_m(s)} = -\frac{1}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.6)$$

Denklemler (2.4) - (2.6) incelenirse, her üç durumda da hatayı azaltmak için,

$$|1 + KG_c(s)G(s)H(s)| \gg 1 \quad (2.7)$$

ya da,

$$|KG_c(s)G(s)H(s)| \gg 1 \quad (2.8)$$

olması istenir. Bu ifadede $H(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla ölçü aletinin ve kontrol edilmek istenen sistemin (plant) transfer fonksiyonları olduğundan değiştirilme imkanı yoktur. Bu yüzden denklem (2.8) ile verilen şart ancak kontrolcü kazancı K 'yı çok büyük alarak sağlanabilir. (Diğer taraftan, K 'nın çok büyük değerleri, sistemin dinamik davranışını ve kararlılığını olumsuz etkileyebilir.) Bu şart sağlandığında, çıkış $C(s)$ 'nin değerleri aşağıdaki hali alır.

$$\frac{C(s)}{R(s)} \cong \frac{1}{H(s)} \quad (2.9)$$

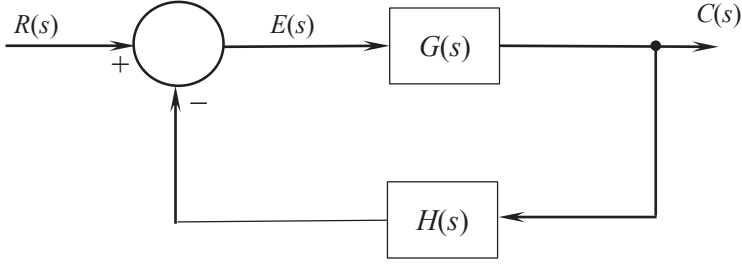
$$\frac{C(s)}{D(s)} \cong 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{C(s)}{D_m(s)} \cong \frac{1}{H(s)} \quad (2.11)$$

Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi, geri besleme hattı üzerinde olan değişiklikler ve gürültüler sistem çıkışını doğrudan etkiler. Bu yüzden kontrol sistemleri tasarlanırken ileri besleme hattındaki kazancın, yani kontrolcü kazancının yüksek değerlere ayarlanabilir olmasına; geribesleme hattındaki ölçü aleti özelliklerinin ise doğru olarak bilinmesine, değişmiyor ve gürültüsüz olmasına önem verilir.

Sistemin durağan hatası uygulanan girişin özelliğine ve açık çevrim transfer fonksiyonunun orijindeki kutup sayısına bağlıdır. Açık çevrim transfer fonksiyonunun orijindeki kutup sayısına sistemin tip sayısı denir. Bu sayının değerine göre sistemler *tip-1*, *tip-2* gibi adlandırılır. Sistem tipinin ve giriş cinsinin sistemin durağan davranışını nasıl etkilediğini görmek için sistemin blok diyagramı Şekil 2.2'deki kanonik forma indirgenmiş olsun.

Şekil 2.2'deki sistemde $G(s)$ teriminin içinde kontrolcü ve plantın transfer fonksiyonları yer almaktadır. $H(s)$ ise ölçüm sisteminin transfer fonksiyonudur. Bu sistemde kontrol girişi $R(s)$ ile hata $E(s)$ arasında aşağıdaki ilişki vardır.



Şekil 2.2

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (2.12)$$

Bu sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$, aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^N \prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.13)$$

Bu ifadedeki K kazancının içinde kontrolcü kazancı da yer almaktadır. N ise açık çevrim transfer fonksiyonunun orijindeki sıfır sayısı, yani sistemin tip numarasıdır.

Hatanın durağan değeri e_{ss} son değer teoreminden aşağıdaki gibi bulunur.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.14)$$

Sistemlerin durağan davranışlarını incelemek için basamak, rampa, parabol gibi şekilleri olan test girişleri kullanılır ve sistemin bu girişleri hatasız olarak izleyebilme yeteneği değerlendirilir. Bu girişlerin Laplace transformları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$R(s) = \frac{R}{s} \quad (R \text{ yüksekliğinde basamak}) \quad (2.15)$$

$$R(s) = \frac{R}{s^2} \quad (R \text{ eğimli rampa}) \quad (2.16)$$

$$R(s) = \frac{R}{s^3} \quad (R \text{ sabitli parabol}) \quad (2.17)$$

Yukarıdaki $R(s)$ değerleri denklem (2.14)'de yerine koyulup s değeri sıfıra doğru götürülürse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (\text{Basamak giriş}) \quad (2.18)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} \quad (\text{Rampa giriş}) \quad (2.19)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} \quad (\text{Parabolik giriş}) \quad (2.20)$$

Açık çevrim transfer fonksiyonun denklem (2.13) ile verilen tanımı yukarıdaki üç denkleme yerleştirilirse, tip-1 veya daha üstü sistemlerin basamak girişleri, tip-2 veya daha üstü sistemlerin basamak ve rampa girişleri, tip-3 veya daha yüksek tipteki sistemlerin ise basamak, rampa ve parabolic girişleri hatasız olarak izleyebildikleri anlaşılır. Yani tip numarası arttıkça sistemin referans girişlerini hatasız izleme yetkinliği de artar. Bu sebeptendir ki kontrol sistemlerinin statik davranışlarını iyileştirmek, yani kontrol doğruluğunu artırmak için integral kontrol işleminde yararlanılır.

Şekil 2.1'de verilen sistemde bozucu giriş $D(s)$ ile hata $E(s)$ arasındaki ilişki denklem (2.5)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(s) = -\frac{H(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} D(s) \quad (2.21)$$

Basamak, rampa ve parabolik bozucu girişlerin Laplace transformları aşağıdaki gibidir.

$$D(s) = \frac{D}{s} \quad (D \text{ yüksekliğinde basamak}) \quad (2.22)$$

$$D(s) = \frac{D}{s^2} \quad (D \text{ eğimli rampa}) \quad (2.23)$$

$$D(s) = \frac{D}{s^3} \quad (D \text{ sabitli parabol}) \quad (2.24)$$

Bu girişler denklem (2.21)'de yerine koyulup, son değer teoreminden hatanın durağan değerleri hesaplanırsa sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{D \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} KG_c(s)G(s)H(s)} \\ &= \frac{D}{\lim_{s \rightarrow 0} KG_c(s)} \end{aligned} \quad (\text{Basamak giriş}) \quad (2.25)$$

$$e_{ss} = \frac{D}{\lim_{s \rightarrow 0} sKG_c(s)} \quad (\text{Rampa giriş}) \quad (2.26)$$

$$e_{ss} = \frac{D}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2KG_c(s)} \quad (\text{Parabolik giriş}) \quad (2.27)$$

Bu ifadelerden görüldüğü gibi, bozucu girişlerin sebep olduğu durağan hatalar açık çevrim transfer fonksiyonunun değil, kontrolcünün tip numarasına bağlıdır. Basamak, rampa ve parabolik bozucu girişler uygulandığında durağan hataların sıfır olabilmesi için kontrolcünün tip numarasının sırasıyla en az 1, 2 ve 3 olması gerekir.

2.2 Parametre Hassasiyeti

Kontrol edilen sistemin, kontrolcünün ya da ölçüm sisteminin parametre değerlerinde imalattan kaynaklanan belirsizlikler ya da kullanım sonucu yıpranmanın sebep olduğu değişiklikler olabilir. Bunun dışında, arızalanan bazı elemanların devre dışında kalması ya da plant üzerinde yapılan tadilatlar dolayısıyla yapısal değişiklikler de olabilir. İyi bir kontrol sisteminin bu değişikliklerden mümkün olduğunca az etkilenmesi istenir. Bu etkiyi azaltacak biçimde kontrolcü parametrelerinin seçilmesi işleme parametre hassasiyeti analizi (sensitivite analizi) denir. Bu yöntemin ayrıntıları temel kontrol kitaplarında bulunabilir. Burada sadece genel prensiplere açıklık getirilecektir.

Şekil 2.2'deki sistemde giriş ile çıkış arasındaki transfer fonksiyonu $T(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.28)$$

Bu ifadede $G(s)$ terimi kontrolcü ve kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonlarını barındırmaktadır. Kontrolcünün K kazancı da bu terimin içinde bir çarpandır. Sistem performansının $G(s)$ ya da $H(s)$ 'de olabilecek parametre değeri değişikliklerinden ya da yapısal değişikliklerden fazla etkilenmemesi için bu değişikliklerin $T(s)$ üzerindeki etkilerinin az olması gereklidir. Denklem (2.28)'in iki tarafının diferansiyeli alınırsa, aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned} dT(s) &= \frac{dG(s)[1 + G(s)H(s)] - G(s)[H(s)dG(s) + G(s)dH(s)]}{[1 + G(s)H(s)]^2} \\ &= \frac{dG(s) - G(s)[G(s)dH(s)]}{[1 + G(s)H(s)]^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

ya da,

$$\begin{aligned} \frac{dT(s)}{T(s)} &= \frac{dG(s) - G(s)[G(s)dH(s)]}{[1 + G(s)H(s)]G(s)} \\ &= \left[\frac{1}{1 + G(s)H(s)} \right] \left(\frac{dG(s)}{G(s)} \right) + \left[\frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] \left(\frac{dH(s)}{H(s)} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Yukarıdaki denklemde $dG(s)/G(s)$ teriminin katsayısı, $T(s)$ 'nin $G(s)$ 'deki değişikliklere olan hassasiyeti S_G^T olarak tanımlanır. $G(s)$ 'de bir değişiklik olduğunda, bunun $T(s)$ 'de sebep olacağı % değişiklik oranını, $G(s)$ 'deki % değişiklik oranına bölerek bulunur. Benzer şekilde, $dH(s)/H(s)$ teriminin katsayısı ise $T(s)$ 'nin $H(s)$ 'deki değişikliklere olan hassasiyeti S_H^T olarak tanımlanır. $G(s)$ ve $H(s)$ 'de olabilecek değişikliklerin $T(s)$ üzerindeki etkisinin az olması için bu katsayıların küçük olması gerekir. Bu katsayılar da yer alan $G(s)$ teriminin içinde kontrolcü kazancı K bir çarpan olarak yer alır. Kontrolcü kazancı büyütülerek hassasiyet terimleri azaltılabilir. K 'nın değeri sonsuza doğru büyütüldüğünde hassasiyetlerin limit değerleri aşağıdaki hali alır.

$$S_G^T \cong 0 \quad (2.31)$$

$$S_H^T \cong -1 \quad (2.32)$$

Bu ifadelerden görüldüğü gibi, yeterince yüksek kontrolcü kazançları kullanarak ileri besleme hattındaki elemanların (kontrolcü ve plant) parametre değerlerinin veya yapısal sapmalarının etkileri azaltılabilir. Ancak ölçüm sisteminde olabilecek değişikliklerin telafisi mümkün değildir. Bu yüzden kontrol sistemleri tasarlanırken yüksek kazançlı, ama kazanç değerinin çok doğru olarak ayarlanması zorunlu olmayan kontrolcüler kullanılması, buna karşılık özellikleri değişmeyen, gürültüsüz, kaliteli ölçüm sistemleri kullanılması tercih edilir.

2.3 Kararlılık

Kontrol literatüründe kararlılığın pek çok tanımı olmasına rağmen mühendislik açısından çoğunlukla aşağıdaki tanımlar kullanılır.

- i) Bir sisteme sınırlı bir giriş uygulandığında sistem çıkışı sınırlı kalırsa ve $t \rightarrow \infty$ iken çıkış durağan bir değere doğru giderse bu sistem kararlıdır.
- ii) Denge durumundaki bir sistem bu durumdan uzaklaştırılıp bir başlangıç durumuna getirildiğinde, değişken değerleri sınırlı kalarak sistem tekrar denge durumuna dönerse bu sistem kararlıdır.

Yukarıdaki tanımlardan birincisi daha çok klasik kontrolde, ikincisi ise durum değişkenlerinin kullanıldığı modern kontrolde kullanılır.

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında kararlılık konusu iki yönden incelenir. Bunlardan birincisi sistemin mutlak anlamda kararlı olup olmadığını incelenmesidir. Sistemin kararlılığı kontrol sistemi için mutlak bir gerekliliktir. Ancak kontrol sisteminin kararlı olması yeterli değildir. Ne kadar kararlı olduğu, yani kararsızlık halinden ne kadar uzakta olduğu da önemlidir. Bu kavramlardan birincisi sistemin *mutlak kararlılığı*, ikincisi ise *göreceli (rölatif) kararlılığı* olarak adlandırılır.

2.3.1 Mutlak Kararlılık

Klasik kontrolün temel özellikleri; tek giriş ve tek çıkış olması, tek bir değişkenin (çıkış değişkeni) geri beslenmesi, analiz ve tasarımda Laplace transformlarından yararlanılmasıdır. Laplace transformları kullanıldığından klasik kontrolde incelenen sistemler lineerdir. Lineer bir sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki genel formda verilmiş olsun.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \prod_{k=1}^m (s+z_k)}{\prod_{i=1}^q (s+p_i) \prod_{j=1}^r (s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + \omega_j^2)} \quad (2.33)$$

Bu ifadede kolaylık olsun diye pay ve paydadaki terimler gerçek ve kompleks eşlenik köklerine ayrılarak gösterilmiştir. Yani sistemde m sayıda sıfır, $2r+q$ sayıda da kutup vardır. Şimdi bu sisteme birim basamak bir giriş uygulansın. Bu durumda $X(s) = 1/s$ olur. Denklem (2.33)'den $Y(s)$ çözülür, elde edilen ifade kısmi kesirlerine açılır ve ters Laplace transformu alınır, bazı ara işlemlerden sonra $y(t)$ için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$y(t) = a + \sum_{i=1}^m a_i e^{-p_i t} + \sum_{j=1}^r A_j e^{-\zeta_j \omega_j t} \cos(\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} t - \phi_j) \quad (2.34)$$

Bu denklemden görüldüğü gibi, sistem cevabı sabit bir değer, bir dizi birinci mertebeli sistem cevapları ve bir dizi ikinci mertebeli sistem cevaplarının toplamı şeklindedir. Bu denklemde geçen a , a_i , A_j ve ϕ_j terimleri kısmi kesir katsayıları cinsinden uygun biçimde tanımlanmıştır. Esas önemli olan husus ise eksponansiyel terimlerin üsleridir. Soldaki eksponansiyel terimlerin üsleri olan $-p_i$ ($i = 1, \dots, m$) sistemin gerçek kutupları, sağdaki eksponansiyel terimlerin üsleri olan $-\zeta_j \omega_j$ ($j = 1, \dots, r$) ise kompleks kutupların gerçek kısımlarıdır. Eğer bu üslerin hepsi negatif ise eksponansiyel terimler $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider ve $y(t) = a$ olur. Yani sistem çıkışı sonsuza gitmez ve sistem kararlıdır. Bu sonuca dayanarak lineer bir sistemin mutlak kararlılığı için şart aşağıdaki gibi ifade edilir.

Eğer lineer bir sistemin kapalı çevrim kutuplarının hepsinin gerçek kısımları negatif ise, yani kutuplar sanal eksenin sol tarafında ise o sistem kararlıdır.

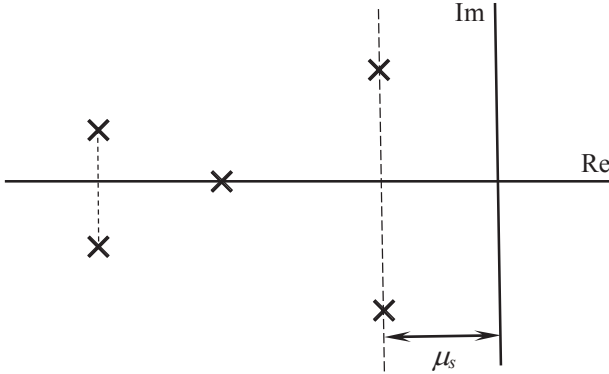
Lineer bir sistemin mutlak kararlılığı kutupların değerlerini çözmeden, sadece karakteristik denklemin katsayıları kullanılarak kolayca bulunabilir. Bu amaçla kullanılacak pek çok yöntem arasında en kolayı Routh-Hurwitz kriteridir. Bu yöntem kontrol sistemleriyle ilgili başlangıç derslerinde daima anlatıldığından burada tekrardan üzerinde durulmayacaktır [2.1-2.3].

Modern kontrolde kullanılan kararlılık test yöntemleri hem lineer hem de non-lineer sistemlere uygulanabilir. Ancak lineer sistemlere uygulama sonucunda Routh-Hurwitz kriterinin verdiği sonuçların aynısı bulunur. Bu yüzden esas kullanım amaçları non-lineer sistemlerin kararlılığını incelemektir. Bu yöntemlerde sistemin denge konumunun ya da konumlarının kararlılığı incelenir. Sistem denge konumundan ayrıldığında tekrardan denge konumuna gelip gelmeyeceği araştırılır. Bu amaçla en çok kullanılan yöntemlerden birisi Liapunov yöntemidir [2.4].

2.3.2 Göreceli Kararlılık

Kararlılık Payı

Kontrol edilen bir sistemin ne derecede kararlı olduğu önemlidir. Kararlılık derecesini objektif olarak ifade etmek için pek çok yol vardır. Bunlardan bir tanesi sanal eksene en yakın kapalı çevrim kutbunun eksene olan uzaklığını ölçüt olarak kullanmaktır. Denklem (2.34) incelendiğinde, eksponansiyel terimlerin üslerinin büyüklüğü arttıkça, yani kutuplar gerçek eksenenden sola doğru uzaklaştıkça, bu terimlerin sifıra doğru daha hızlı gittikleri, yani sistem kararlılığının arttığı görülür. Bu yüzden sanal eksene en yakın kutupla ilgili terim sifıra en yavaş gideceğinden göreceli kararlılık açısından en kötü durumu temsil eder. Sanal eksene en yakın kutbun bu eksenenden olan uzaklığına *kararlılık payı* ya da *kararlılık marjı* denir. Bu uzaklık arttıkça sistemin göreceli kararlılığı da artar. Kapalı çevrim kutup dağılımı Şekil 2.3'de verilen sistemin kararlılık payı (μ_s) gösterilmiştir.



Şekil 2.3

Kazanç Payı ve Faz Payı

Bir sistemin giriş ve çıkışı arasındaki transfer fonksiyonunun frekans cevabı sistemin periyodik zorlamalar karşısındaki dinamik davranışının incelenmesi açısından önemlidir. Sisteme sinüsoidal bir giriş uygulandığında, geçici davranış sönümlendikten sonra geriye giriş frekansı ile aynı frekansa sahip olan, ama genliği ve girişe göre olan faz farkı frekansa bağlı olan sürekli bir salınım kalır. Bu salınıma sistemin durağan

sinüsoidal cevabı denir. Frekans cevabı analizinde çıkış ve giriş genliklerinin oranı ve faz farkının giriş frekansıyla değişimleri incelenir. Konu kontrol sistemleri ile ilgili temel kitaplarda işlendiğinden burada ayrıntılara girilmeyecektir [2.1-2.3]. Yöntem kısaca şöyledir. Transfer fonksiyonunda $s = j\omega$ koyulur. Bu şekilde elde edilen ifadeye frekans cevabı transfer fonksiyonu denir. Eğer giriş $x(t) = X \sin \omega t$ ve durağan sinüsoidal cevap $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ ise, çıkış ile giriş genlikleri arasındaki oran ile faz farkı ϕ 'nin frekansa bağlı olarak değişim şekli aşağıdaki ifadelerden bulunur.

$$\frac{Y}{X} = |G(j\omega)| \quad (2.35)$$

$$\phi = \angle G(j\omega) \quad (2.36)$$

Frekans cevabı sadece kontrol sistemleri için değil, titreşim analizlerinde de kullanılır. Titreşim analizlerinde salınım genliğinin frekansla değişimini gösteren eğriler (rezonans eğrileri) kaçınılması gereken frekans bölgelerini ve alınabilecek önlemleri belirlemekte yararlıdır. Kontrol sistemi analiz ve tasarımlarında frekans cevabı sonuçları Bode diyagramları, Nyquist diyagramı, Nichols diyagramı gibi grafiklerle gösterilerek kullanılır.

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu yerine açık çevrim transfer fonksiyonunun frekans cevabı incelenirse, sistemin hem mutlak kararlılığını belirlemek hem de göreceli kararlılığını değerlendirmek mümkündür. Şekil 2.2'de kanonik formda gösterilen kontrol sisteminin giriş ile çıkışı arasındaki transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.37)$$

şeklinde olup, karakteristik denklem aşağıdaki ifadeden bulunabilir.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (2.38)$$

Kararlı bir sistemde bu denklemin köklerinin hepsi, yani sistemin bütün kutupları sanal eksenin sol tarafındadır. Kutuplardan birisi bile sanal eksenin üzerinde olursa kararlılık durumu ortadan kalkar ve sistem marjinal kararlı hale gelir. Bu durumda sanal eksen üzerindeki kutbun gerçek kısmı

sıfır olacağından bu kutup $s = j\omega$ şeklindedir. O halde sistem kararlılıktan kararsızlığa geçerken, yani marjinal kararlı iken aşağıdaki denklem geçerlidir.

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0 \quad (2.39)$$

ya da,

$$G(j\omega)H(j\omega) = -1 \quad (2.40)$$

Yukarıdaki denklemin sol tarafı kompleks bir sayıdır. Eşitlik gereği bu kompleks sayının büyüklüğü ve faz açısı, -1 'in büyüklük ve faz açısına eşit olacağından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

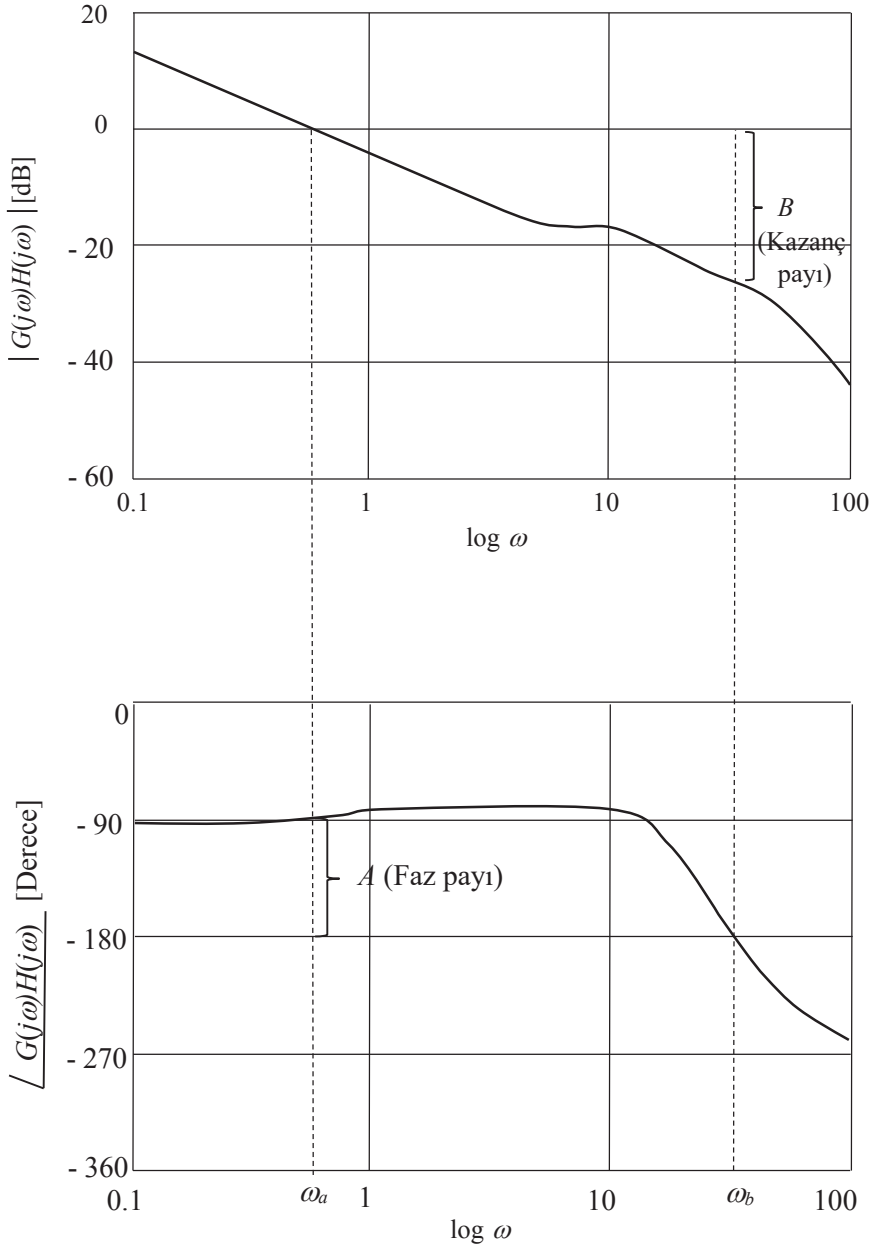
$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB} \quad (2.41)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ \quad (2.42)$$

Yukarıdaki denklemlerle ifade edilen şartlardan sistemin ne kadar uzakta olduğu, sistemin göreceli kararlılığını gösterir. Bunu belirlemek amacıyla Bode diyagramları, Nyquist diyagramı ya da Nichols diyagramından yararlanılabilir. Örnek olarak, açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramı Şekil 2.4'deki gibi olan bir sistem olsun. Bu diyagramda kazanç eğrisinin 0 dB değerini geçtiği frekans ω_a , faz eğrisinin -180° değerini geçtiği frekans ise ω_b ile gösterilmiştir.

Eğer kazanç eğrisi yukarı doğru B kadar kaydırılırsa *marjinal kararlılık* şartları oluşur. Yani büyüklük 0 dB iken faz açısı -180° olur. Bu kaydırma işlemi açık çevrim transfer fonksiyonunu uygun bir sabit ile çarparak, yani açık çevrim kazancını artırarak sağlanabilir. Bu yüzden şekildeki B uzaklığına *kazanç payı* denir.

Eğer faz eğrisi aşağı doğru A kadar kaydırılırsa yine *marjinal kararlılık* şartları oluşur. Yani büyüklük yine 0 dB iken faz açısı -180° olur. Bu kaydırma işlemi açık çevrim transfer fonksiyonuna, faz eğrisini aşağı doğru kaydıracak ya da faz eğrisinin eğimini uygun biçimde değiştirecek çarpanlar ekleyerek sağlanabilir. Şekildeki A uzaklığına *faz payı* denir.



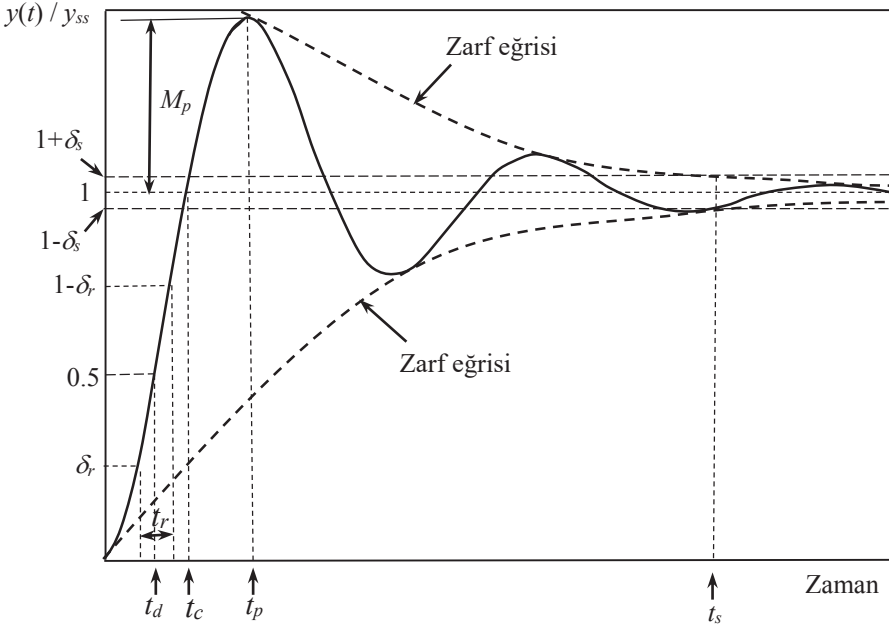
Şekil 2.4

Bir sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadar büyükse o sistemin göreceli kararlılığı o kadar iyidir. Uygulamalarda kazanç payının 6 dB'den büyük, faz payının ise 30° - 60° arasında olması önerilir.

2.4 Sistemin Geçici Davranışı

2.4.1 Geçici Davranışı Tanımlayan Performans Parametreleri

Kontrol edilen bir sistemin bir başlangıç durumundan durağan duruma gidinceye kadar sergilediği davranışa geçici davranış denir. Klasik kontrolde geçici davranışın incelenmesi sadece sistem çıkışı ile sınırlıdır. Modern kontrolde ise birden fazla sistem çıkışı, hatta bütün durum değişkenlerinin davranışları incelenebilir. Yani kontrol sırasında çıkışların yanı sıra sistemin çıkış olmayan değişkenleri de incelenebilir. Burada klasik kontrolde sistemin geçici davranış özelliklerini değerlendirmek için kullanılan parametrelerden söz edilecektir. Sistemin çıkışı $y(t)$, girişi ise $x(t)$ olsun. Şekil 2.5'de basamak giriş için tipik bir sistem cevabı görülmektedir. $y(t)$ başlangıçta sıfır değerdeyken, basamak giriş uygulandıktan sonra y_{ss} gibi durağan bir değere doğru gitmektedir.



Şekil 2.5

Şekildeki grafikte $y(t)$ değerleri y_{ss} ile bölünmüş ve düşey eksen $y(t)/y_{ss}$ olarak alınmıştır. Grafik, durağan değer etrafında genliği azalan salınımlar yaparak durağan değere doğru gitmektedir. Kontrol sisteminden istenen, sistem çıkışının en kısa sürede son duruma ulaşması ve bunu yaparken olduğunca az salınım yapmasıdır. Bu kriterlerden birincisi sistemin cevap hızıyla ilgili, ikincisi ise ne kadar kararlı olduğuyla ilgilidir. Bu kriterlerden her ikisini birden bağımsız olarak en iyilenme olanağı yoktur. Zira sistemin cevap hızını artırmak için alınan önlemler sistemin göreceli kararlılığına azaltır. Diğer yandan sistem salınımlarını azaltmak için alınan önlemler de sistemi hantallaştırır. Bu yüzden bu iki kriter arasında bir uzlaşma sağlanması gerekir. Bu uzlaşmanın sağlanabilmesi için geçici sistem cevabı bu iki kriteri yansıtan bazı parametrelerle tanımlanmalıdır. Daha sonra bu parametrelerin değerlerini istenen belirli sınırlar arasında tutacak biçimde kontrol sistemi tasarımı yapılabilir. Aşağıda bu parametreler özetlenmiştir.

Gecikme Zamanı (t_d)

Sistem cevabının, durağan değerinin %50'sine ilk defa eriştiği süreye gecikme zamanı denir. Gecikme zamanı sistemin cevap hızının bir ölçütüdür. Bu süre ne kadar kısaysa sistem cevabı o kadar hızlıdır. Gecikme zamanı Şekil 2.5'de t_d ile gösterilmiştir.

Yükselme zamanı (t_r)

Sistem cevabının $\delta_r y_{ss}$ değerinden $(1 - \delta_r) y_{ss}$ değerine erişmesine kadar geçen süreye yükselme zamanı denir. Yükselme zamanı da sistemin cevap hızının bir ölçütüdür. Bu süre ne kadar kısaysa sistem cevabı o kadar hızlıdır. δ_r değeri olarak 0, 0.05 veya 0.10 kullanılır. Salınımlı sistemlerde genellikle $\delta_r = 0$ kullanılır. Bu durumda yükselme zamanı sistem cevabının durağan değerini ilk defa geçtiği an olduğundan *geçme zamanı* adını alır. Salınımsız sistemlerde ise δ_r değeri olarak 0.05 veya 0.10 alınır. Yükselme zamanı belirtilirken *% 5 ya da % 10 kriterine göre yükselmeme zamanı* diye ifade edilir. Şekil 2.5'de yükselme zamanı t_r ile, geçme zamanı ise t_c ile gösterilmiştir.

Tepe Zamanı (t_p)

Tepe zamanı sadece sistem cevabının durağan değeri aştığı durumlarda tanımlanabilir. Cevabın durağan değeri aştıktan sonra ilk tepe

noktasına eriştiği andır. Tepe zamanı sistemin cevap hızının bir ölçütüdür. Bu süre ne kadar kısaysa sistem cevabı o kadar hızlıdır. Şekil 2.5’de tepe zamanı t_p ile gösterilmiştir.

Maksimum aşama (M_p) ve % Aşma

Sistem cevabının durağan değerin ötesine geçmesi haline aşma durumu denir. Cevabın ilk aşmasının yüksekliği sistemin göreceli kararlılığının bir ölçütüdür. Eğer $y_{ss} = 1$ ise aşma yüksekliği 1’den yukarıya doğru ölçülür ve bu yüksekliğe maksimum aşama (M_p) denir. Şekil 2.5’de maksimum aşma M_p ile gösterilmiştir. Eğer $y_{ss} \neq 1$ ise aşağıdaki gibi % aşma tanımlanır.

$$\% \text{ Aşma} = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \quad (2.43)$$

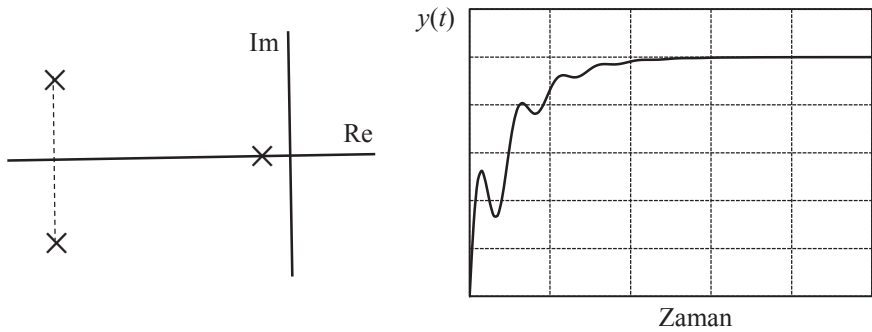
Yerleşme Zamanı (t_s)

Yerleşme zamanı sistem cevabının durağan değer etrafında $\pm \delta_s [y(t)/y_{ss}]$ bant aralığına girdiği ve o andan itibaren bu bant içinde kaldığı zamandır. δ_s değeri olarak 0.02 veya 0.05 kullanılır. Yerleşme zamanı belirtilirken % 2 ya da % 5 kriterine göre yerleşme zamanı diye ifade edilir. Sistemin salınım genliği değiştiğinde yerleşme zamanı değerlerinde atlamalar olacağından yerleşme zamanı tanımlanırken sistem cevabının kendisi değil, zarf eğrisi kullanılır. Yerleşme zamanı salınımların ne kadar hızla sönümlendiğini gösterdiğinden sistemin göreceli kararlılığının bir ölçütüdür. Ancak sistemin en uzun zaman sabitiyle ilişkili olduğundan aynı zamanda sistem cevabının hızı için de bir ölçüttür. Yerleşme zamanı kısaldıkça sistemin göreceli kararlılığı ve hızı artar. Şekil 2.5’de sistem cevabının zarf eğrisine göre tanımlanmış olan yerleşme zamanı t_s ile gösterilmiştir.

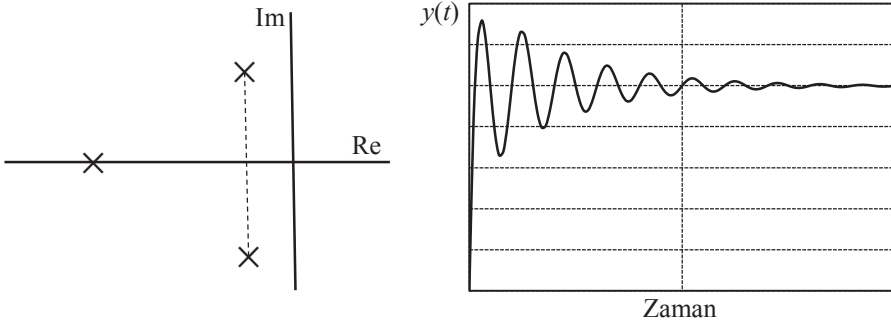
2.4.2 Baskın Kutuplar

Sistem çıkışı bir başlangıç değerinden durağan değerine doğru giderken dinamik bir davranış (geçici davranış) sergiler. Çıkış değerinin aşırı salınımlar yapmadan, ama hızlı bir biçimde son değerine yaklaşması istenir. Kabul edilebilir bir geçici davranış sağlanması için sistemin dinamiğini en fazla etkileyen kapalı çevrim kutuplarının yerleriyle oynanır. Baskın kutuplar denilen bu kutupların etkisi, denklem (2.34) ile tanımlanan sistem

cevabına bakarak daha kolay anlaşılabilir. Kararlı bir sistem için bu denklemdeki eksponansiyel terimlerin üslerinin hepsinin negatif olması gerektiği daha önce belirtilmişti. Yani kararlılık için kapalı çevrim kutuplarının hepsi negatif gerçekte kısma sahip olmalıdır. Negatif olan bu üslerin büyüklükleri arttıkça, yani kutuplar sanal eksenden sola doğru uzaklaştıkça eksponansiyel terimler sifira daha hızla gider. Yani sistem cevabında sanal eksene daha uzak olan kutuplarla ilişkili terimler daha kısa sürede kaybolur. Bunun sonucu olarak sistem cevabının genel şekli sanal eksene yakın olan kutup ya da kutuplar tarafından belirlenir. Sanal eksene en yakın olan kutba veya kompleks eşlenik kutup çiftine baskın kutup/kutuplar denir. Bu durumu daha iyi açıklayabilmek için Şekil 2.6'da kutup yerleşimleri gösterilen iki sistem ve bunların basamak cevapları verilmiştir. Şekil 2.6(a)'da görülen sistemde baskın kök gerçekte eksen üzerindedir. Bu birinci mertebeye karşılık gelir. Uzaktaki iki kök ise ikinci mertebeye salınımlı bir sisteme karşılık gelir. Sistem cevabına bakıldığında, genel görünümünün birinci mertebeye bir sistem cevabına yakın olduğu, bu cevabın üzerine etkisi daha zayıf olan ikinci mertebeye sistemin salınımlarının binmiş olduğu görülür. Şekil 2.6(b)'de görülen sistemde ise kompleks eşlenik kökler sanal eksene daha yakın, yani baskındır. Gerçekte kök ise sanal eksenden daha uzakta olduğundan sistem davranışına etkisi daha zayıftır. Sistem cevabına bakıldığında, genel görünümünün ikinci mertebeye salınımlı bir sistem cevabına yakın olduğu, bu cevabın üzerine etkisi daha zayıf olan birinci mertebeye sistemin eksponansiyel davranışının binmiş olduğu görülür.



Şekil 2.6 (a)



Şekil 2.6 (b)

2.4.3 İkinci Mertebe Az Sönümlü Sistemin Geçici Davranış Performans Parametreleri

İkinci mertebe bir sistemin transfer fonksiyonunun standart gösterim şekli aşağıdaki gibidir.

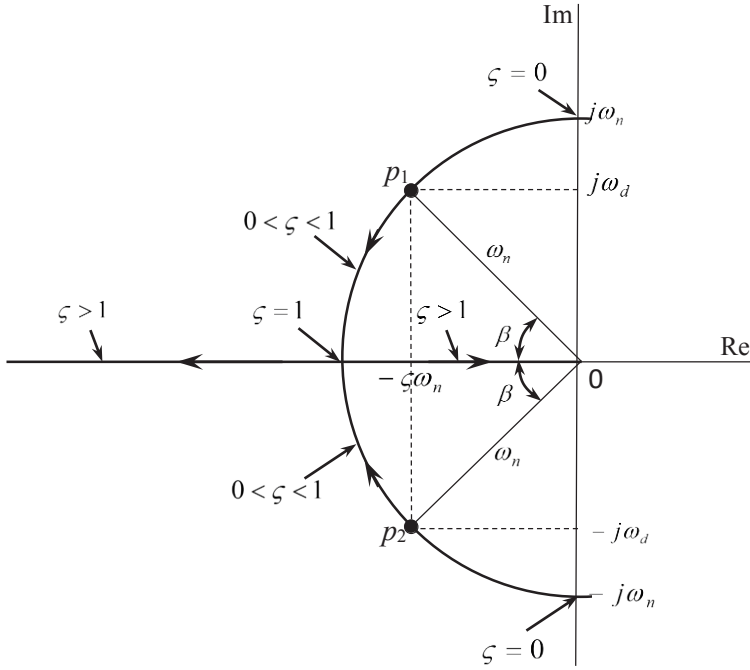
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.44)$$

Böyle bir sistemin iki bağımsız parametresi vardır. Bunlar sönüm oranı ζ ve sönümsüz sistem doğal frekansı ω_n 'dir. Sistemin kutupları, $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olup, bu iki parametre cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.45)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.46)$$

ζ 'nin değeri değiştiğinde sistem kutuplarının kompleks düzlemdeki yerleri de değişir. $\zeta > 1$ ise iki farklı gerçek kutup, $\zeta = 1$ ise iki tane katlı gerçek kutup, $0 < \zeta < 1$ ise iki eşlenik kompleks kutup ve $\zeta = 0$ ise iki eşlenik sanal kutup vardır. Kutupların ζ değerlerine göre kompleks düzlemdeki yerleri Şekil 2.7'deki gibidir.



Şekil 2.7

$0 \leq \zeta \leq 1$ ise sistem az sönümlü ve kutuplar merkezi orijinde olan ω_n yarıçaplı çember üzerindedir. Kompleks kutupların tanımlarından ve şeklin geometrisinden aşağıdaki eşitlikler kolayca yazılabilir.

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \quad (2.47)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.48)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.49)$$

$$\cos \beta = \zeta \quad (2.50)$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (2.51)$$

Sistemin baskın kökleri kompleks eşlenikse; geçici davranış performans parametreleri, sistemin ζ ve ω_n parametreleri cinsinden bulunabilir. Transfer fonksiyonu denklem (2.44) ile verilen sistemin girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olsun. Birim basamak giriş için çıkışın Laplace transformu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (2.52)$$

Bu ifade kısmi kesirlere ayrılır ve ters transform alınır, bazı ara işlemlerden sonra sistem cevabı $y(t)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = 1 - Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad (2.53)$$

Denklem (2.53)'deki A katsayısı ve ϕ faz açısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.54)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (2.55)$$

Geçme zamanı (t_c)

Geçme zamanında sistem çıkışının değeri durağan değere eşit olduğunda $y(t_c) = 1$ ifadesi geçerlidir. Bu şart denklem (2.53)'e uygulanır ve t_c çözülürse, geçme zamanı aşağıdaki gibi elde edilir.

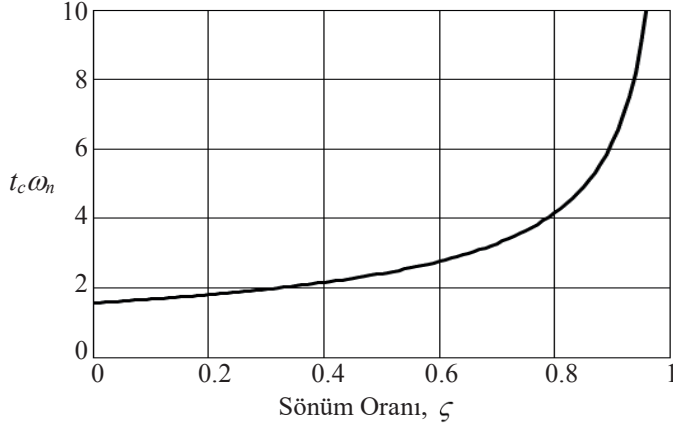
$$t_c = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.56)$$

ya da boyutsuz parametreler $t_c \omega_n$ ve ζ cinsinden,

$$t_c \omega_n = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.57)$$

olur.

Denklem (2.57)'den elde edilen $t_c \omega_n$ terimine karşı ζ eğrisi Şekil 2.8'de görülmektedir. Bu eğrinin şekline bakıldığında, t_c 'nin kısaltılması yani sistemin cevap hızının artırılması için ζ küçük, ω_n ise büyük olmalıdır.



Şekil 2.8

Eğer geçme zamanının istenen bir T_c değerine eşit veya daha küçük olması istenirse, denklem (2.56)'dan aşağıdaki şart bulunur.

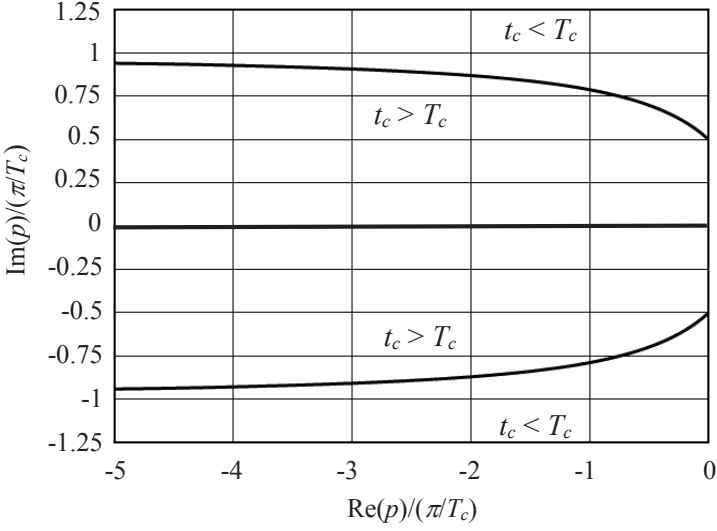
$$\omega_n \geq \frac{\pi - \beta}{T_c \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{T_c \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.58)$$

Kutupların Şekil 2.7'deki yerleşim özellikleri dikkate alınır, denklem (2.58)'i sağlayan kutuplar kompleks düzlemde Şekil 2.9'da işaretlenen bölge içinde, kalın çizgiyle gösterilen eğrilerin üstünde ve altında olmalıdır. Grafiği genel hale getirmek için köklerin sanal ve gerçek kısımları π/T_c ile bölünerek normalize edilmiştir.

Tepe Zamanı (t_p)

Tepe noktasında cevap eğrisinin türevi sıfırdır. Bu şart denklem (2.53)'e uygulanıp t_p çözülürse,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (2.59)$$



Şekil 2.9

ya da boyutsuz parametreler cinsinden aşağıdaki ifade bulunur.

$$\omega_n t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.60)$$

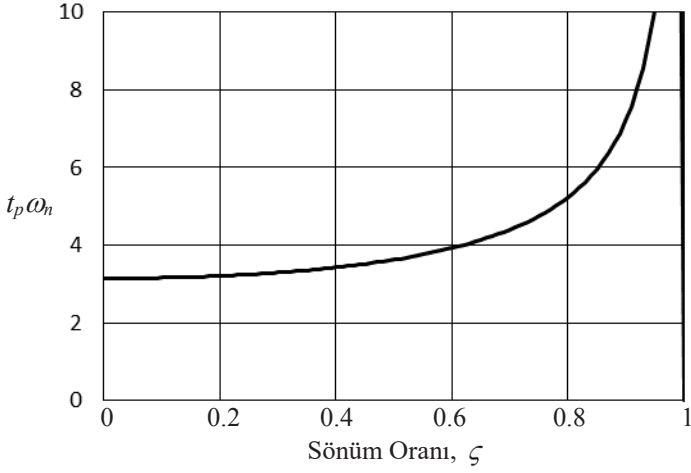
Denklem (2.60) ile hesaplanan $\omega_n t_p$ 'ye karşı ζ eğrisi Şekil 2.10'da görülmektedir. Bu şekildeki eğriye bakıldığında, sistemin cevap hızının artırmak, yani t_p 'yi kısaltmak için ζ küçük, ω_n ise büyük alınmalıdır.

Eğer tepe zamanının istenen bir T_p değerine eşit veya daha küçük olması istenirse, denklem (2.59)'dan aşağıdaki şart bulunur.

$$\frac{\pi}{\omega_d} \leq T_p \quad (2.61)$$

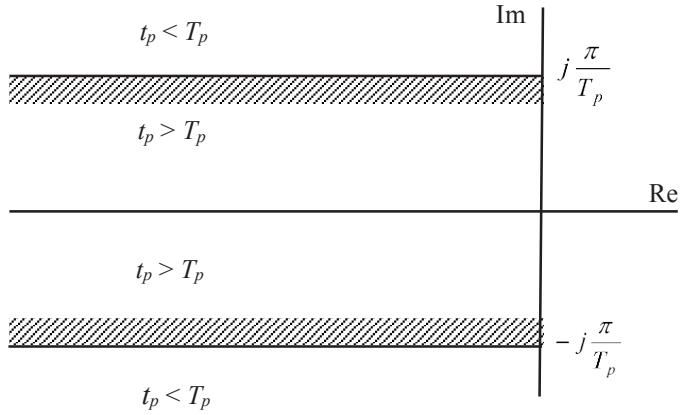
ya da,

$$\omega_d \geq \frac{\pi}{T_p} \quad (2.62)$$



Şekil 2.10

İkinci mertebe sistemin bu şartı sağlayan kutuplarının kompleks düzlemdeki bölgeleri Şekil 2.11’de görülmektedir.



Şekil 2.11

Maksimum aşama (M_p)

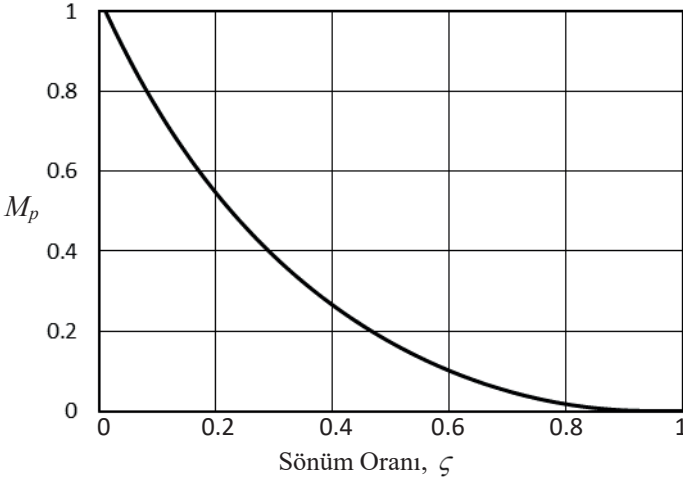
Maksimum aşama aşağıdaki ifadeden bulunabilir.

$$M_p = y(t_p) - 1 \quad (2.63)$$

Denklem (2.53) bu ifadede yerine koyulursa, M_p aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (2.64)$$

M_p 'nin ζ ile değişim biçimi Şekil 2.12'deki gibidir. O halde, M_p 'yi azaltmak için, yani göreceli kararlılığı artırmak için ζ 'nin artırılması gereklidir. Halbuki daha önce cevap hızını artırmak için ise ζ 'nin azaltılması gerektiği belirtilmişti. Bu yüzden ζ 'nin değeri belirlenirken cevap hızı ve göreceli kararlılık arasında bir uzlaşma yapılması gereklidir.



Şekil 2.12

Eğer M_p 'nin verilen bir M_{pm} değerine eşit ya da daha küçük olması istenirse,

$$\exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \leq M_{pm} \quad (2.65)$$

olmalıdır. Bazı kısa ara işlemlerden sonra bu durum için gereken şart aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta = \tan^{-1}\left[-\frac{\pi}{\ln(1/M_{pm})}\right] = \beta^* \quad (2.66)$$

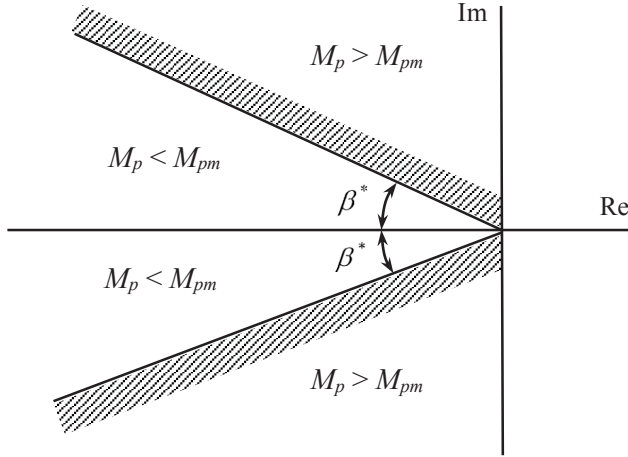
$M_p \leq M_{pm}$ şartını sağlayan kutupların kompleks düzlem üzerindeki yerleri Şekil 2.13'de verilmiştir.

Yerleşme Zamanı (t_s)

Şekil 2.2'de üstteki zarf eğrisinin yerleşme bandına girdiği anda,

$$\delta_s = 1 + Ae^{-\zeta\omega_n t_s} - 1 \quad (2.67)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikten t_s aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 2.13

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \left(\frac{1}{\delta_s \sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (2.68)$$

Eğer ζ 'nın değeri küçükse, kareköklü terim yaklaşık 1.0 olur. Bu durumda δ_s 'nin 0.02 ve 0.05 olduğu haller için yerleşme zamanı sırasıyla aşağıdaki eşitliklerden bulunur.

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\delta_s = 0.02) \quad (2.69)$$

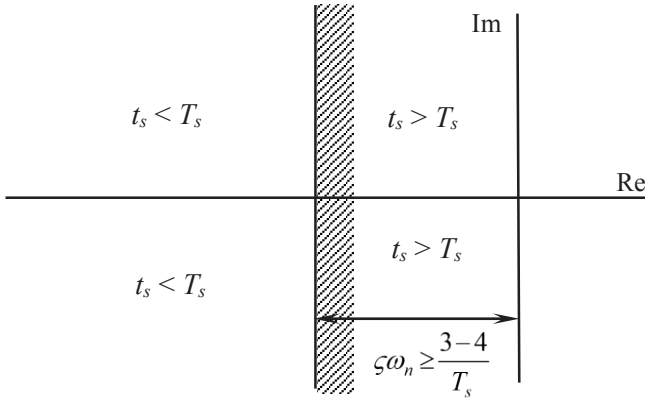
$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\delta_s = 0.05) \quad (2.70)$$

Eğer t_s 'nin verilen bir T_s değerine eşit ya da daha küçük olması istenirse aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

$$\zeta\omega_n \geq \frac{4}{T_s} \quad (\delta_s = 0.02) \quad (2.71)$$

$$\zeta\omega_n \geq \frac{3}{T_s} \quad (\delta_s = 0.05) \quad (2.72)$$

$t_s \leq T_s$ şartını sağlayan kutupların kompleks düzlem üzerindeki yerleri Şekil 2.14'de görülmektedir.



Şekil 2.14

2.4.4 Birinci Mertebe Sistemin Geçici Davranış Performans Parametreleri

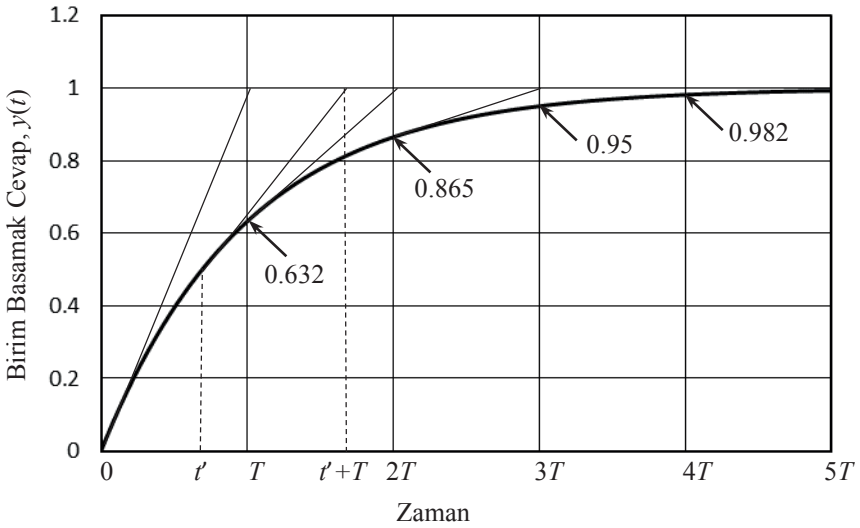
Gerçek eksen üzerinde tek bir kutup olması durumunda buna karşılık gelen sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.73)$$

Bu sistemin davranışı sadece bir sistem parametresi, yani T tarafından belirlenir. Bu parametreye sistemin *zaman sabiti* denir. Sistemin birim basamak cevabı aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.74)$$

Şekil 2.15’de birinci mertebe sistemin birim basamak cevabı bazı özellikleriyle birlikte görülmektedir. Sistemin cevabı bir zaman sabiti sonra durağan değerinin % 63’üne erişir.



Şekil 2.15

Birinci mertebe sistem için yükselme zamanı, geçme zamanı ve tepe zamanı kullanılmaz. Bunlar yerine zaman sabiti T sistemin cevap hızının bir ölçütü olarak kullanılır. Sistem salınımsız olduğundan maksimum aşma da kullanılmaz. Birinci mertebe sistem üç zaman sabiti sonra % 5 tolerans bandına, dört zaman sabiti sonra da % 2 tolerans bandına girer.

2.5 Optimizasyon

2.5.1 Klasik Kontrolde Optimizasyon

Hataya Bağlı İntegral Kriterler

Klasik kontrol uygulamalarında normal olarak minimum yapılan bir amaç fonksiyonu yoktur. Yukarıdaki kısımlarda sözü edilen performans parametrelerini belirli sınırlar içinde tutacak şekilde bir tasarım yapılmasına çalışılır. Bununla beraber, literatürde klasik kontrol tasarımı için önerilmiş bazı performans kriterleri de (performans indisi) bulunmaktadır. Kontrol sırasında minimum yapılmaya çalışılan bu kriterler hatanın integral bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Bunlar arasında öne çıkanlar aşağıdaki gibidir [2.5].

1. Hatanın Karesinin İntegrali

$$P.K. = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.75)$$

Bu kriterin minimum yapılması sırasında büyük genlikli hatalar küçük genliklilere göre daha fazla cezalandırıldığından, öncelikle büyük genlikli hataların azaltılmasına çalışılır.

2. Hatanın Mutlak Değerinin İntegrali

$$P.K. = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.76)$$

Bu kriterin minimum yapılması sırasında hatalar genliklerine bakılmadan eşit olarak cezalandırılır.

3. Hatanın Karesinin Zamanla Çarpımının İntegrali

$$P.K. = \int_0^{\infty} te^2(t) dt \quad (2.77)$$

Bu kriter büyük genlikli hataları ve ilerleyen zamanda oluşan hataları daha fazla cezalandırır.

4. Hatanın Mutlak Değerinin Zamanla Çarpımının İntegrali

$$P.K. = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \quad (2.78)$$

Bu kriter hataları genliklerine bakmadan eşit olarak cezalandırırken, ilerleyen zamanda oluşan hataları daha fazla cezalandırır.

Klasik kontrolde yukarıdaki kriterlerin kullanımı düşük dereceli sistemlerle sınırlı olup, analitik yöntemlerle kapalı çevrim transfer fonksiyonunun (ya da baskın köklere karşılık gelen transfer fonksiyonu paydasının) katsayılarını belirlemek biçimindedir [2.5].

1/4-Genlik Oranı Kriteri

1/4 – genlik oranı kriterine göre, sisteme bir basamak referans giriş uygulandığında sistem çıkışının ikinci aşma genliği, birinci aşma genliğinin 1/4'ü olmalıdır. Bu kriteri kullanan deneysel bir tasarım yöntemi, gecikmeli birinci mertebeli sistemler için ilk defa Ziegler ve Nichols tarafından geliştirilmiştir [2.6, 2.7]. Yöntem, PID kontrol sistemlerinde oransal kazanç, türev zaman sabiti ve integral zaman sabiti değerlerinin belirlenmesinde kullanılır. Bu konu ileride Bölüm 5’de ayrıntılı olarak incelenecektir.

2.5.2 Modern Kontrolde Optimizasyon

Modern kontrolü klasik kontrolden ayıran temel özellikler, birden fazla kontrol girişi ve birden fazla kontrol edilen değişken olması, sistemin mertebesi sayısında durum değişkeninin geri beslenmesi ve kontrol sırasında integral bir performans kriterinin minimum yapılmasıdır. Modern kontrolde, klasik kontrolde olduğu gibi sistem çıkışı cinsinden yazılan tek bir diferansiyel denklem ve bundan türetilen transfer fonksiyonu kullanılmaz. Buna karşılık sistemin mertebesi sayısında, aşağıda matrisler cinsinden ifade edilen birinci mertebeli diferansiyel denklemler kullanılır.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (2.79)$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (2.80)$$

Yukarıda \underline{x} durum değişkenleri matrisi, \underline{u} kontrol girişleri matrisi, \underline{y} ise sistemin çıkış değişkenleri matrisidir. Denklem (2.79) durum denklemlerini, denklem (2.80) ise çıkışları tanımlar. \underline{f} ve \underline{g} fonksiyonları non-lineer olabilen fonksiyonlardır. Eğer sistem lineer, sabit parametrelidir ve giriş çıkışa doğrudan katkıda bulunmuyorsa, yukarıdaki denklemler aşağıdaki özel hali alır.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (2.81)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} \quad (2.82)$$

Modern kontrol sistemlerinin tasarımında integral formunda performans kriterleri kullanılır. Denklemler (2.79) ile tanımlanan non-lineer sistemlerde kullanılan performans kriterinin genel şekli aşağıdaki gibidir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (2.83)$$

İntegral performans kriterinin anlamlı olması için integrant L 'nin pozitif definit ya da yarı-definit olması gereklidir. Burada L bir fonksiyon fonksiyonu olup, \underline{x} ve \underline{u} fonksiyonlarının fonksiyonudur. Kontrol sistemi tasarımının amacı sistemi bir başlangıç durumu $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ 'dan $\underline{x}(t_f) = 0$ denge durumuna $P.K.$ 'yi minimum yaparak getirecek olan \underline{u} 'yu bulmaktır. \underline{u} 'nun değerlerinin belli sınırlar içinde olması bir şart olarak uygulanabilir. L terimi; enerji, titreşim genliği, kontrol için kullanılan güç gibi sistemin ilgi duyulan özelliklerinin ağırlıklı bir bileşeni olabilir. $L = 1$ alındığında ise kontrol süresi kısaltılmaya çalışılır. Denklemler (2.79) ve (2.80)'deki gibi genel biçimde tanımlanan sistemlerin optimum kontrol çözümleri açık çevrimli olup, iki uçlu sınır değer problemlerinin çözümünü gerektirir. Bu yüzden mümkün olduğunca denklemler (2.81) ve (2.82) ile tanımlanan lineer sistem modelleri ve aşağıdaki gibi tanımlanan karesel formdaki integral performans kriterleri tercih edilir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} (\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{P}\underline{u}) dt + \underline{x}^T \underline{S}\underline{x} \Big|_{t=t_f} \quad (2.84)$$

Burada \underline{Q} matrisi pozitif definit veya yarı-definit, \underline{P} matrisi pozitif definittir. İntegralden sonra yer alan terime son durum ceza fonksiyonu denir.

KAYNAKLAR

- [2.1] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, 5th Ed., Pearson, New York, 2010.
- [2.2] D'Azzo, J.J., Houpis, C.H., *Linear Control System Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [2.3] Nise, N.S., *Control Systems Engineering*, 6th Ed. Wiley, Hoboken, NJ, 2011.
- [2.4] Schultz, D.G., Melsa, J.L., *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [2.5] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, 2nd Ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [2.6] Ziegler, J.G., Nichols, N.B., *Optimum Settings for Automatic Controls*, Transactions of the A.S.M.E., 759-768, November 1942.
- [2.7] Ziegler, J.G., Nichols, N.B., *Process Lags in Automatic-Control Circuits*, Transactions of the A.S.M.E., 433-444, July 1943.

KÖKLERİN YER EĞRİSİ YÖNTEMİYLE KONTROL SİSTEMİ TASARIMI

Köklerin yer eğisi yöntemi ilk defa 1948 yılında Evans [3.1-3.2] tarafından önerilmiş ve klasik kontrol sistemlerinin tasarımında etkin bir araç olarak kontrol sistemi kitaplarında yerini almıştır. Yer eğrisi sistemin herhangi bir parametresi değiştirilirken kapalı çevrim kutuplarının (karakteristik denklemin köklerinin) kompleks düzlemde çizdiği yörüngeyi verir. Amaç, tasarım sırasında kullanılan kontrol organının herhangi bir parametresinin kutupların yerleşimi üzerindeki etkisini incelemektir. Uygulamalarda normal olarak değiştirilen parametre kontrolcünün statik kazancıdır. Yer eğrisinin elle çizilmesi, kapalı çevrim kutuplarının hesaplanmasını gerektirmez. Bunun yerine yer eğrilerinin genel özelliklerine dayanarak geliştirilmiş olan bir dizi kuraldan yararlanır. Bazı kontrol sistemi analiz ve tasarım yazılımları ise kutupları belli kazanç değerleri için hesaplayıp, hesaplanan değerlere eğri uydurarak yer eğrisi çizerler.

Kontrolcünün kazanç dışında başka parametreleri varsa ve bu parametrelerin belirlenmesi de tasarımın bir parçası ise, bunlara farklı değerler verilerek değişen kazanç değerleri için yer eğrileri çizilir ve bu şekilde bir yer eğrisi ailesi elde edilir. Böylece belli tasarım kriterlerini sağlamak amacıyla kapalı çevrim kutuplarının kompleks düzlem üzerinde yerleşimi daha esnek bir biçimde sağlanmış olur.

Bir sistem için yer eğrisinin sadece çizilmesi tasarım yönünden bir anlam taşımaz. Amaç yer eğrisini belli performans ölçütleriyle birlikte ele alarak bunları sağlamaktır. Köklerin yer eğrisini kullanarak tasarım yapılırken iki yaklaşımdan yararlanır. Birinci yaklaşımda sistem yapısıyla ilgili bir değişiklik yapılmaz. Burada amaç kapalı çevrim kutup yerlerini ve bunları verecek olan kazanç değerini (yer eğrisi ailesi kullanılıyorsa kazanç değeri ve diğer kontrolcü parametrelerini) belirlemektir. Bu amaçla kararlılık payı, geçici davranış özelliklerini tanımlayan performans parametreleri gibi ölçütler kullanılır. Uygulamalarda genellikle bu tür bir yaklaşım amaca ulaşmak için yeterlidir.

İkinci yaklaşımda ise yukarıdaki birinci yaklaşımda belirtilenlerin yanı sıra açık çevrim transfer fonksiyonuna yeni kutup ve sıfırlar ekleyerek yer eğrisinin şekli de değiştirilir. Bu şekilde yürütülen bir çalışma aslında bir *denkleştirici (kompansatör)* tasarımıdır.

3.1 Köklerin Yer Eğrisi Özellikleri ve Çizim Kuralları

Yapısı Şekil 3.1'deki gibi olan bir sistem verilmiş olsun. Bu sistemde çıkış değişkeni için aşağıdaki gibi bir ifade yazılabilir.

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) + \frac{T(s)}{1 + G(s)H(s)} D(s) \quad (3.1)$$

Bu sistemin referans girişiyle çıkış değişkeni arasındaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

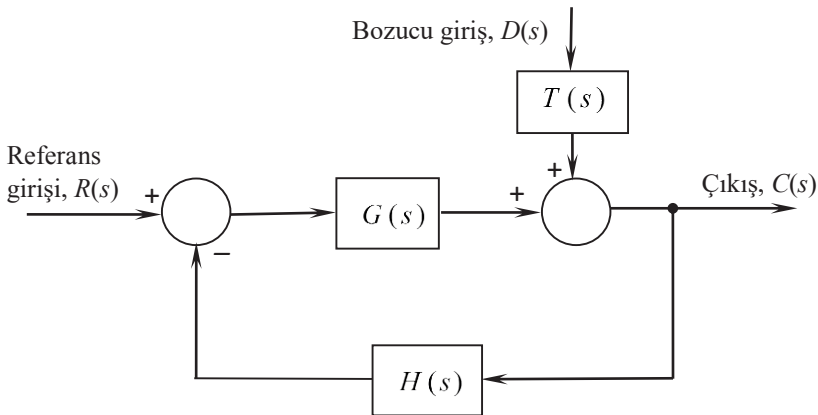
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.2)$$

Sistemin karakteristik denklemi,

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.3)$$

olduğundan bir s değerinin sistemin kapalı çevrim kutbu olması için aşağıdaki denklemi sağlaması gereklidir.

$$G(s)H(s) = -1 \quad (3.4)$$



Şekil 3.1

Kapalı çevrim kutupları kompleks, ya da bunun özel hali olarak reel veya sanal olduğundan yukarıdaki denklemdeki $G(s)H(s)$ terimi kompleks bir değere sahiptir. Bu kompleks değerın büyüklük ve açısının -1 'in büyüklük ve açısına eşit olması gerektiğinden, aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

Büyüklük şartı:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (3.5)$$

Açı şartı:

$$\angle G(s)H(s) = \pm(2k + 1) 180^\circ \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.6)$$

Yukarıdaki ifadelerden birincisi büyüklük şartı, ikincisi ise açı şartı olarak anılır. Denklemlerin sol taraflarında sistemin sadece açık çevrim transfer fonksiyonu yer almaktadır. Bir s değerinin sistemin kapalı çevrim kutbu olabilmesi için bu şartların sağlanması gereklidir. Açık çevrim transfer fonksiyonu ise aşağıdaki gibi çarpanları cinsinden yazılabilir.

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (3.7)$$

Yukarıdaki denklemde p_i ($i = 1, \dots, n$) açık çevrim transfer fonksiyonunun kutupları, z_j ($j = 1, \dots, m$) ise açık çevrim transfer fonksiyonunun sıfırlarıdır. (Bunlar kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırlarıyla karıştırılmamalıdır.) Pozitif değere sahip olan K ise sistemin statik açık çevrim kazancı olup, kontrol organının kazancı bunun içindedir. Köklerin yer eğrileri K 'nın değerini $0 - \infty$ aralığında ($0 \leq K \leq \infty$) değiştirerek çizilir.

Aşağıdaki gibi pay ve paydasında çarpım faktörleri olan kompleks bir ifade verilmiş olsun.

$$Q(s) = \frac{A(s)B(s)}{C(s)D(s)} \quad (3.8)$$

Bu ifadenin büyüklük ve açısı pay ve paydadaki faktörlerinin büyüklük ve faz açıları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$|Q(s)| = \frac{|A(s)||B(s)|}{|C(s)||D(s)|} \quad (3.9)$$

$$\angle Q(s) = \angle A(s) + \angle B(s) - \angle C(s) - \angle D(s) \quad (3.10)$$

Yukarıdaki formüller denklem (3.7)'ye uygulanır ve sonuç denklemler (3.5) ve (3.6)'da kullanılırsa, büyüklük ve açı şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

Büyüklük şartı:

$$K \prod_{j=1}^m |s - z_j| = \prod_{i=1}^n |s - p_i| \quad (0 \leq K \leq \infty) \quad (3.11)$$

Açı şartı:

$$\sum_{j=1}^m \angle (s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle (s - p_i) = \pm (2k + 1) 180^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

Yukarıdaki şartlar incelendiğinde, açı şartının K 'nın değerinden bağımsız olduğu görülür. Bu yüzden kompleks düzlemde s_1 gibi bir noktanın bir sistemin yer eğrisi üzerinde olup olmadığını test etmek için açı şartının sağlanıp sağlanmadığına bakmak yeterlidir. Eğer bu şart sağlanıyorsa, büyüklük şartı kullanılarak s_1 kökünü (karakteristik denklemin kökü, yani kapalı çevrim kutbu) veren K değeri bulunur.

Köklerin yer eğrisi elle çizilirken kök değerleri hesaplanmadan yukarıda verilen açı ve büyüklük şartlarından türetilen basit kuralları kullanılır. Aşağıda bunlar ayrıntılı olarak verilecektir.

Kural 1: Yer eğrisi $K = 0$ iken açık çevrim kutuplarında başlar.

Bu kural büyüklük şartının sonucudur. Denklem (3.11)'de $K = 0$ alınır, çözülecek n sayıda s değerlerinin p_i ($i = 1, \dots, n$) açık çevrim kutup değerlerine eşit olduğu görülür.

Kural 2: Yer eğrisi $K = \infty$ iken açık çevrim sıfırlarında sona erer.

Bu kural da büyüklük şartının sonucudur. Denklem (3.11)'de $K \rightarrow \infty$ alınır, çözülecek m sayıda s değerlerinin z_j ($j = 1, \dots, m$) açık çevrim sıfır değerlerine eşit olduğu görülür. Eğer $m < n$ ise, geri kalan

$n - m$ sayıdaki kol sonsuzda sona erer. Yani sistemin sonsuzda $n - m$ sayıda açık çevrim sıfırının olduğu varsayılır.

Kural 3: Yer eğrilerinin kol sayısı n ve m 'den hangisi büyükse, ona eşittir. Ancak fiziksel sistemlerde normal olarak $n \geq m$ olduğundan, kol sayısı n olarak, yani karakteristik denklemin mertebesine eşit olarak elde edilir. Bu kural yukarıda verilen Kural 1 ve Kural 2'nin doğal bir sonucudur.

Kural 4: Yer eğrileri gerçek eksene göre simetriktir.

Karakteristik denklemin kökleri kompleks olduğunda daima eşlenik kökler elde edileceğinden, yer eğrileri gerçek eksene göre daima simetriktir.

Kural 5: Yer eğrilerinin $|n - m|$ sayıda asemptotu vardır. Asemptot açıları aşağıdaki formülden elde edilir.

$$\theta_a = \frac{(2k + 1)180^\circ}{n - m} \quad (k = 0, 1, \dots, |n - m| - 1) \quad (3.13)$$

Bu kural aşağıdaki gibi ispat edilebilir [3.3]. Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s)H(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$N(s) = s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1 \quad (3.15)$$

$$D(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (3.16)$$

olup, K ise kontrolcü kazancını da içeren açık çevrim kazancıdır. Bu durumda denklem (3.4) aşağıdaki hali alır.

$$K \frac{N(s)}{D(s)} = -1 \quad (K > 0) \quad (3.17)$$

Amaç, $N(s) \neq 0$ olmak kaydıyla, yani açık çevrim sıfırlarına gitmeyen kutupların sonsuza giderken ($s \rightarrow \infty$) erişeceği asemptotları belirlemektir. Denklemler (3.15) - (3.17)'den,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{s^m}{s^n} = K \frac{1}{s^{n-m}} = K s^{-(n-m)} = -1 \quad (3.18)$$

ya da, $q = n - m$ olarak tanımlanırsa ve $s = |s|e^{j\theta}$ şeklinde eksponansiyel form kullanılırsa, $K|s|e^{-jq\theta} = -1$ elde edilir. K ve $|s|$ pozitif olduğundan açıların sıfır olduğunu dikkate alarak iki tarafın açıları eşitlenirse, s 'nin açısı asemptot açısıyla aynı olacağından, asemptot açısı için aşağıdaki ifade bulunur.

$$q\theta = \pm(2k+1)180^\circ \quad (k=0,1,\dots,|n-m|-1) \quad (3.19)$$

Bu ifadeden θ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta = \pm(2k+1) \frac{180^\circ}{n-m} \quad (k=0,1,\dots,|n-m|-1) \quad (3.20)$$

Kural 6: Asemptotlar gerçek eksen üzerinde kesişir. Bu noktaya yer eğrisinin merkezi de denir. Kesişme noktası σ_a aşağıdaki ifadeden bulunur.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(z_j)}{n-m} \quad (3.21)$$

Denklem (3.18)'de limiti alınan ifadeye ikinci mertebe terimler de dahil edilirse, hem denklem (3.20) hem de denklem (3.21) birlikte bulunabilir [3.3, 3.4]. Bu durumda denklem (3.18) yerine aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{s^m + b_m s^{m-1}}{s^n + a_n s^{n-1}} = K \frac{1 + s^{-1} b_m}{s^{n-m} + s^{n-m-1} a_n} = -1 \quad (3.22)$$

Ama, denklemler (3.15) ve (3.16) ile verilen polinomlardaki b_m ve a_n katsayıları bu polinomların kökleri cinsinden,

$$b_m = -\sum_{j=1}^m z_j \quad a_n = -\sum_{i=1}^n p_i \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan, denklem (3.22)'nin payındaki ikinci terimin birinciye göre çok daha küçük olduğu dikkate alınır, ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) \cong \frac{1}{1 + x} \quad (3.24)$$

ifadesinden de yararlanılırsa, aşağıdaki ifade bulunur.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K \frac{N(s)}{D(s)} \cong K \frac{1}{s^{n-m} - s^{n-m-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) + s^{n-m-2} \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^m z_j} = -1$$

Yukarıdaki denklemin paydasında sadece en yüksek mertebeli iki terim tutulursa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K \frac{N(s)}{D(s)} \cong K \frac{1}{s^q + s^{q-1} \alpha} = -1 \quad (3.25)$$

Burada α ve q aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\alpha = - \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m z_j \quad q = n - m \quad (3.26)$$

Denklem (3.25)'den,

$$s^q \left(1 + \frac{\alpha}{s} \right) = -K \quad (3.27)$$

ya da,

$$-K^{\frac{1}{q}} = s \left(1 + \frac{\alpha}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.28)$$

olur. Ama, küçük x değerleri için Taylor serisi açılımından $(1 + x)^r \cong 1 + rx$ alınabileceğinden,

$$-K^{\frac{1}{q}} \cong s \left(1 + \frac{\alpha}{sq} \right) = s + \frac{\alpha}{q} \quad (3.29)$$

yazılabilir. Bu denklemin sol tarafı eksponansiyel formda yazılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$s = K \frac{1}{n-m} e^{\frac{j\pi}{n-m}(2k+1)} - \frac{\alpha}{n-m} \quad (k = 0, 1, \dots, |n-m|-1) \quad (3.30)$$

Bu ifadeden görüldüğü gibi, $K \rightarrow \infty$ iken, s terimi de reel eksen üzerindeki,

$$\sigma_a = -\frac{\alpha}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(z_j)}{n-m} \quad (3.31)$$

noktasından geçen ve eğimleri,

$$\theta_a = \frac{\pi}{n-m} (2k+1) \quad (k = 0, 1, \dots, |n-m|-1) \quad (3.32)$$

ile tanımlanan $(n-m)$ sayıda asimptota doğru gider.

Kural 7: Gerçek eksen üzerindeki yer eğrisi kısımları, toplam sayısı tek olan açık çevrim kutup ve sıfırının sol tarafında kalır.

Bu kural açılı şartının incelenmesi sonucu doğrudan elde edilir. Denklem (3.12)'de verilen açı şartında, reel eksen üzerindeki bir s noktasından, bu noktanın sağındaki reel kutuplara ve sıfırlara çizilen doğruların açıları 180° , kompleks eşlenik kutup ya da sıfırlara çizilen doğruların toplam açıları ise 0° olacağından, sağ taraftaki reel kutup ve sıfırların sayısı tek olursa, yani sağ taraftaki toplam açık çevrim kutup ve sıfır sayısı tek olursa, açı şartı sağlanmış olur.

Kural 8: Ayrılma/birleşme noktaları.

İki kolun bir noktada birleştikten sonra ayrılması halinde bu noktada katlı kökler oluşur. Katlı kökleri olan bir s polinomu için bu noktada sadece polinom değil, polinomun s 'ye göre birinci türevi de sıfırdır. Buna dayanarak, ayrılma noktası için sağlanması gereken şart aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{d}{ds} [1 + G(s)H(s)] = 0 \quad (3.33)$$

ya da,

$$\frac{d}{ds} [G(s)H(s)] = 0 \quad (3.34)$$

Bu ifade ayrılma birleşme noktalarının bulunması için gerek şart olup, yeter şart değildir. Bu noktanın pozitif bir K değerine karşılık gelmesi de gereklidir. Yer eğrileri gerçek eksene göre simetrik olduğundan, ayrılma/birleşme noktaları ya gerçek eksen üzerinde ya da kompleks eşleniktir. Gerçek eksen üzerindeki ayrılma/birleşme noktaları için denklem (3.34)'den elde edilen çözümlerden doğru olanını seçerken, mantık gereği türetilen aşağıdaki ek özelliklerin kullanılması yararlıdır.

- i) Gerçek eksen üzerinde iki açık çevrim kutbu arasında yer eğrisi varsa, aralarında ayrılma noktası vardır.
- ii) Gerçek eksen üzerinde iki açık çevrim sıfırı arasında yer eğrisi varsa, aralarında birleşme noktası vardır. (Not: Sıfırlardan birisi ∞ 'da da olabilir.)
- iii) Gerçek eksen üzerinde bir açık çevrim kutbu ile bir açık çevrim sıfırı arasında yer eğrisi varsa, aralarında ya ayrılma/birleşme noktası yoktur, ya da eşit sayıda ayrılma/birleşme noktası vardır. (Not: Sıfır ∞ 'da da olabilir.)

y sayıda yer eğrisi kolu bir noktada birleşiyorsa, yaklaşan yan yana iki kol arasındaki açı ya da uzaklaşan yan yana iki kol arasındaki açı γ_y ve yaklaşan ve uzaklaşan iki kol arasındaki açı η_y aşağıdaki ifadelerden bulunur [3.5].

$$\gamma_y = \pm \frac{360^\circ}{y} \qquad \eta_y = \pm \frac{180^\circ}{y} \qquad (3.35)$$

Yani birleşme noktasına gelen ve giden kollar birlikte 360° lik toplam açığı eşit parçalara böler.

Ayrılma ve birleşme noktalarını bulmak için türev alma işlemi gerektirmeyen bir başka yöntem ise aşağıdaki formülü kullanmaktır. Bu denklemden çözülen σ değerlerinden gerçek eksen üzerinde olanlar ayrılma ve birleşme noktalarını verir [3.6].

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma + z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma + p_i} \qquad (3.36)$$

Kural 9: Kompleks açık çevrim kutuplarından ayrılma açısı, kompleks açık çevrim sıfırlarına yaklaşma açısı.

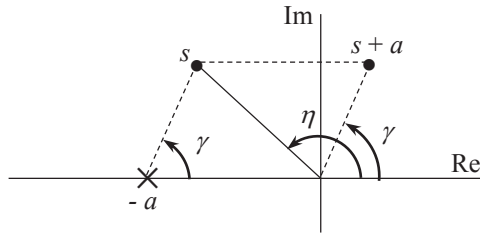
Kompleks bir açık çevrim kutbu p 'den ayrılma açısı θ_D ve kompleks bir açık çevrim sıfırı z 'ye yaklaşma açısı θ_A sırasıyla aşağıdaki ifadelerden bulunur.

$$\theta_D = 180^\circ + \lim_{s \rightarrow p} G(s)H(s)(s-p) \quad (3.37)$$

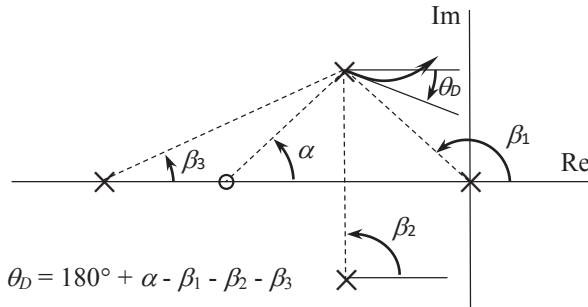
$$\theta_A = 180^\circ - \lim_{s \rightarrow z} G(s)H(s)/(s-z) \quad (3.38)$$

Yukarıdaki ifadeler söz konusu kutup ya da sıfır dolayında bir s noktası olarak ve bu noktayı kutba birleştiren doğrunun açısının, açı şartını sağlaması için ne olması gerektiğini belirleyip limitte s noktasını söz konusu kutup ya da sıfıra götürerek kolaylıkla bulunabilir.

Uygulamalarda yukarıdaki formüller yerine aynı sonucu veren aşağıda açıklanan geometrik bir yöntem tercih edilir. Şekil 3.2(a)'da kompleks düzlemde bir s noktası ve $-a$ 'da bulunan bir nokta görülmektedir. s 'nin açısı η ile gösterilmiştir. Aynı düzlemde $s+a$ kompleks sayısı da görülmektedir. $s+a$ 'nın açısı ise γ 'dır. Dikkat edilirse γ açısı aynı zamanda s 'yi $-a$ 'ya birleştiren doğrunun pozitif gerçel eksenle yaptığı açıya eşittir. Bu özellikten yararlanarak kompleks bir açık çevrim kutbundan ayrılma açısı Şekil 3.2(b)'de görüldüğü gibi bulunur.



(a)



(b)

Şekil 3.2

- i) Söz konusu kutuptan veya sıfırdan diğer açık çevrim kutup ve sıfırlarına doğrular çizilir. Sıfırlara çizilen doğruların pozitif gerçekteksenle yaptıkları açılar α_i ($i = 1, \dots, q$), kutuplara çizilen doğruların pozitif gerçekteksenle yaptıkları açılar β_j ($j = 1, \dots, r$) olsun.
- ii) Bu açılar cinsinden açık çevrim kutbundan ayrılma açısı ve açık çevrim sıfırına yaklaşma açısı sırasıyla aşağıdaki ifadelerden bulunur.

$$\theta_D = 180^\circ + \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^r \beta_j \quad (3.39)$$

$$\theta_A = 180^\circ - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^r \beta_j \quad (3.40)$$

Not: Eğer ayrılma noktasında q sayıda katlı kutup, yaklaşma noktasında q sayıda katlı sıfır varsa, Denklemler (3.37) - (3.38) aşağıdaki hali alır. Bu ifadeler denklem (3.37) ve (3.38)'i elde ederken kullanılan yaklaşımı denklemler (3.35) ile birlikte kullanarak bulunabilir.

$$\theta_D = 180^\circ + \frac{1}{q} \left[- \sum_{r=1}^{q-1} r \frac{360}{q} + \lim_{s \rightarrow p} G(s)H(s)(s-p)^q \right] + k \frac{360}{q} \quad (k = 0, 1, \dots, q-1) \quad (3.41)$$

$$\theta_A = 180^\circ + \frac{1}{q} \left[- \sum_{r=1}^{q-1} r \frac{360}{q} - \lim_{s \rightarrow z} G(s)H(s)/(s-z)^q \right] + k \frac{360}{q} \quad (k = 0, 1, \dots, q-1) \quad (3.42)$$

Kural 10: Sanal ekseni geçme noktaları.

Kapalı çevrim kutuplarında birisi sanal eksen üzerine geldiğinde marjinal kararlılık şartları oluşur. Bu noktada olan bir kökün gerçekteksen kısmı sıfırdır. Bu özellikten yararlanarak yer eğrilerinin sanal ekseni geçtiği

noktalar ve bunlara karşılık gelen K kazançları aşağıdaki iki yöntemden birisini kullanarak bulunabilir.

- i) Routh tablosundan yararlanılarak marjinal kararlılık şartlarını verecek K değeri bulunur. Sanal eksen üzerindeki kutuplar orijine göre simetrik olacağından yardımcı polinom çözülerek geçme noktaları elde edilir.
- ii) Sistemin karakteristik polinomunda $s = j\omega$ koyulur. Elde edilen kompleks sayının sanal ve gerçek kısımları ayrı ayrı sifıra eşitlenerek ω ve K değerleri çözülür. Geçme noktası $\pm j\omega'$ dadır.

Kural 11: Sistem kutuplarının korunumu – Grant kuralı [3.5, 3.7].

Eğer açık çevrim transfer fonksiyonunda pay polinomunun mertebesi payda polinomunun mertebesinden iki veya daha fazla az ise, yani $m \leq n - 2$ ise, kapalı çevrim kutuplarının toplamı K 'nın değerinden bağımsız olarak sabittir ve açık çevrim kutuplarının toplamına eşittir. Bu durum aşağıdaki denklemle ifade edilebilir.

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)_{\text{Kapalı çevrim}} = \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)_{\text{Açık çevrim}} \quad (3.43)$$

Böyle bir durumda kutuplar toplamının sabit olabilmesi için bazı kollar sola doğru giderken, diğer bazıları sağa doğru gider. Yani yer eğrileri sola ve sağa doğru açılır.

Bu kural bir polinomun kökleriyle katsayıları arasındaki ilişkiyi kullanarak ispatlanabilir. Daha önce denklemin (3.16) ile verilen açık çevrim transfer fonksiyonunun payda polinomu sifıra eşitlenirse,

$$s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1 = 0 \quad (3.44)$$

bulunur. Bu denklemin kökleri, yani sistemin açık çevrim kutupları $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ise bu köklerle a_n katsayısı arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$a_n = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n \quad (3.45)$$

Diğer yandan sistemin karakteristik denklemi açık çevrim transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad (3.46)$$

ya da,

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad (3.47)$$

Denklemler (3.15) ve (3.16)'dan $D(s)$ ve $N(s)$ alınarak denklem (3.47)'de yerine koyulursa aşağıdaki ifade bulunur.

$$s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1 + K(s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1) = 0 \quad (3.48)$$

Bu denklemden görüldüğü gibi, eğer $m \leq n - 2$ ise a_n katsayısı değişmez. Yani kapalı çevrim kutuplarının toplamı değişmez ve açık çevrim kutuplarının toplamına eşit olur.

Kural 12: Yer eğrilerinin ölçeklendirilmesi.

Yer eğrisi üzerindeki noktalara karşılık gelen K değerlerinin bulunmasına ölçeklendirme denir. Yer eğrisi üzerinde herhangi bir s_1 noktasındaki K değerini bulmak için aşağıda tekrar verilen büyüklük şartı kullanılır.

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s_1 - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s_1 - z_j|} \quad (3.49)$$

s_1 noktasındaki K değerini bulmak için bu kural aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$K = \frac{s_1 \text{ noktasının açık çevrim kutuplarına olan uzaklıklarının çarpımları}}{s_1 \text{ noktasının açık çevrim sıfırlarına olan uzaklıklarının çarpımları}} \quad (3.50)$$

Özel Kural: Çember biçiminde yer eğrisi kısımları.

Aşağıdaki şartlar birlikte sağlandığı takdirde, yer eğrisinin gerçek eksen dışında kalan kısmı çember biçimindedir.

- i) Sistemin p_1, p_2 gibi iki açık çevrim kutbu ve z_1, z_2 gibi iki açık çevrim sıfırı varsa (Bunlar gerçek ya da kompleks eşlenik olabilir, ayrıca aralarından birisi ∞ 'da olabilir.)
- ii) Gerçek açık çevrim kutupları arasında bir ayrılma noktası, gerçek açık çevrim sıfırları arasında bir birleşme noktası varsa,
- iii) $p_1 + p_2 \neq z_1 + z_2$ ise.

Eğer açık çevrim sıfırlarından birisi ∞ 'da, açık çevrim kutupları da $p_{1,2} = p_r \pm jp_i$ gibi kompleks ise, çemberin merkezi diğer sıfır z' 'de, yarıçapı ise aşağıdaki gibidir [3.8].

$$R = \sqrt{(p_r - z)^2 + p_i^2} \quad (3.51)$$

Eğer açık çevrim sıfırı ve kutupları,

$$p_1 + p_2 \neq z_1 + z_2 \quad (3.52)$$

olmak kaydıyla gerçek eksen üzerinde ise, ayrıca açık çevrim kutupları arasında bir ayrılma noktası, çevrim sıfırları arasında da bir birleşme noktası varsa, çemberin merkezi gerçek eksen üzerinde aşağıdaki noktadadır [3.8].

$$x_c = \frac{p_1 p_2 - z_1 z_2}{p_1 + p_2 - z_1 - z_2} \quad (3.53)$$

Çemberin yarıçapı ise aşağıdaki ifadeden bulunur.

$$R = \frac{\sqrt{(p_1 - z_1)(p_1 - z_2)(p_2 - z_1)(p_2 - z_2)}}{|p_1 + p_2 - z_1 - z_2|} \quad (3.54)$$

Yukarıda denklemler (3.51) - (3.54) ile verilen ifadeler hesaplamalar için kullanışlı olmakla birlikte, yer eğrileri elle çizilirken dairesel kısımların çiziminde geometrik özelliklerden yararlanmak çok daha kolaydır. Açık çevrim sıfırları ve kutupları kompleks eşlenikse, geometrik yöntem özellikle tercih edilmelidir.

3.2 Yer Eğrilerinin MATLAB® Yardımıyla Çizilmesi

MATLAB® yazılımının Control Toolbox'ında yer alan **rlocus** komutu verilen bir açık çevrim transfer fonksiyonu için yer eğrilerini hızla çizer. Bunun için önce açık çevrim transfer fonksiyonunun **tf** komutuyla oluşturulması gerekir. Kullanım şekli aşağıda bir örnekle gösterilmiştir.

$$h = \text{tf}([1 \ 3 \ 2], [1 \ 4 \ 1 \ 0])$$

$$\text{rlocus}(h)$$

Yukarıdaki ilk komut açık çevrim transfer fonksiyonunu, $h = (s^2 + 3s + 2)/(s^3 + 4s^2 + s)$ gibi tanımlar. (K terimini yazmaya gerek yoktur.) İkinci komut ise buna karşılık gelen yer eğrilerini çizer.

3.3 Yer Eğrisi çizim örnekleri

Örnek 3.1:

Bu örnekte açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistemin $0 \leq K \leq \infty$ için yer eğrileri çizilecektir.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Kural 1: Açık çevrim kutupları: $p_1 = -2$, $p_2 = -4$, $p_3 = -6$

Kural 2: Açık çevrim sıfırı yok.

Kural 3: $n = 3$, $m = 0$. Kol sayısı = 3.

Kural 4: Yer eğrileri gerçek eksene göre simetrik.

Kural 5: $n - m = 3 - 0 = 3$ asimptot var. $\theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.

Kural 6: Asimptotların kesişme noktası:

$$\sigma_a = \frac{(-2 - 4 - 6) - (0)}{3 - 0} = -4$$

Kural 7: Gerçek eksen üzerinde $-4 \leq s \leq -2$ ve $s \leq -6$ arasında yer eğrisi var.

Kural 8: Ayrılma ve birleşme noktası.

$$\frac{d}{ds} G(s)H(s) = 0$$

ya da, $3s^2 + 24s + 44 = 0$ ve $s_{1,2} = -3.15, -0.845$

Gerçek eksen üzerinde $-4 \leq s \leq -2$ arasında yer eğrisi olduğundan $s = -3.15$ ayrılma noktasıdır.

Kural 9: Kompleks kutup ya da sıfır olmadığından bu kural uygulanmaz.

Kural 10: Sistemin karakteristik denklemi, $1 + G(s)H(s) = 0$
ya da, $s^3 + 12s^2 + 44s + 48 + K = 0$

Routh Tablosu:

1	44
12	48+K
$(480-K)/12$	0
48+K	0

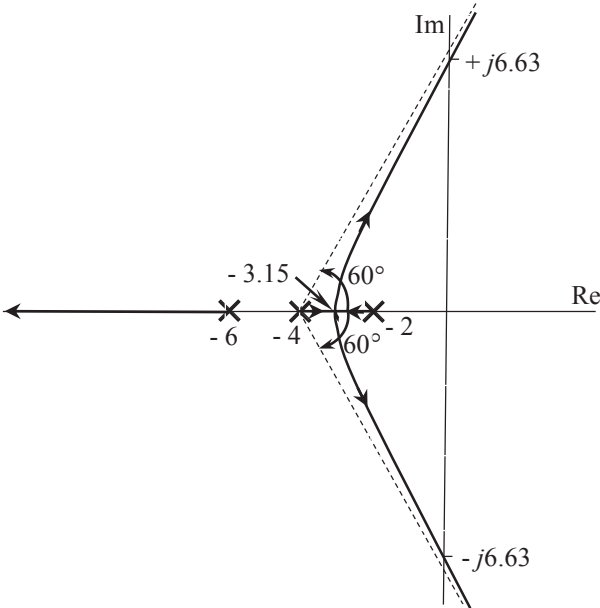
Marjinal kararlılık için: $K = 480$

Yardımcı polinom: $12s^2 + 528 = 0$

Sanal eksenini geçme noktaları $s_{1,2} = \pm j\sqrt{44} = \pm j6.63$

Kural 11: $n - m = 3 \geq 2$ olduğundan kutupların korunumu kuralı geçerlidir.

Yukarıdaki kurallara göre çizilen yer eğrileri Şekil 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.3

Örnek 3.2:

Açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistemin $0 \leq K \leq \infty$ için yer eğrileri çizilsin.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+4)(s^2+2s+2)}$$

Kural 1: Açık çevrim kutupları: $p_1 = -4$, $p_2 = -1 + j$,
 $p_3 = -1 - j$

Kural 2: Açık çevrim sıfırı yok.

Kural 3: $n = 3$, $m = 0$. Kol sayısı = 3.

Kural 4: Yer eğrileri gerçek eksene göre simetriktir.

Kural 5: $n - m = 3 - 0 = 3$ asimptot var. Asimptot açıları, $\theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.

Kural 6: Asimptotların kesişme noktası:

$$\sigma_a = \frac{(-4 - 1 - 1) - (0)}{3 - 0} = -2$$

Kural 7: Gerçek eksen üzerinde $-\infty \leq s \leq -4$ arasında yer eğrisi var.

Kural 8: Ayrılma ve birleşme noktası yok.

$$\text{Not: } \frac{d}{ds} G(s)H(s) = 0$$

$$\text{ya da, } 3s^2 + 12s + 10 = 0 \quad s_{1,2} = \begin{cases} -2.817 \\ -0.845 \end{cases}$$

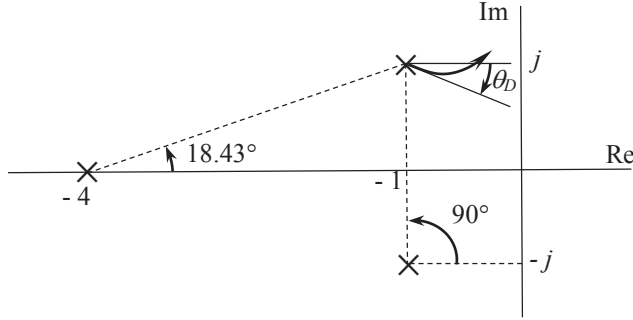
-4 noktasından çıkan kol asimptot üzerinden $-\infty$ 'a gideceğinden ayrılma ve birleşme noktası yok.

Kural 9: Kompleks kutuplardan ayrılma açıları.

Aşağıda verilen şekilden $p_2 = -1 + j$ kutbundan ayrılan kolun ayrılma açısı θ_D aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_D = 180^\circ + (0) - (90 + 18.43) = 71.6^\circ$$

$p_3 = -1 - j$ kutbundan ayrılan kolun ayrılma açısı yer eğrileri gerçek eksene göre simetrik olduğundan -71.52° olur.



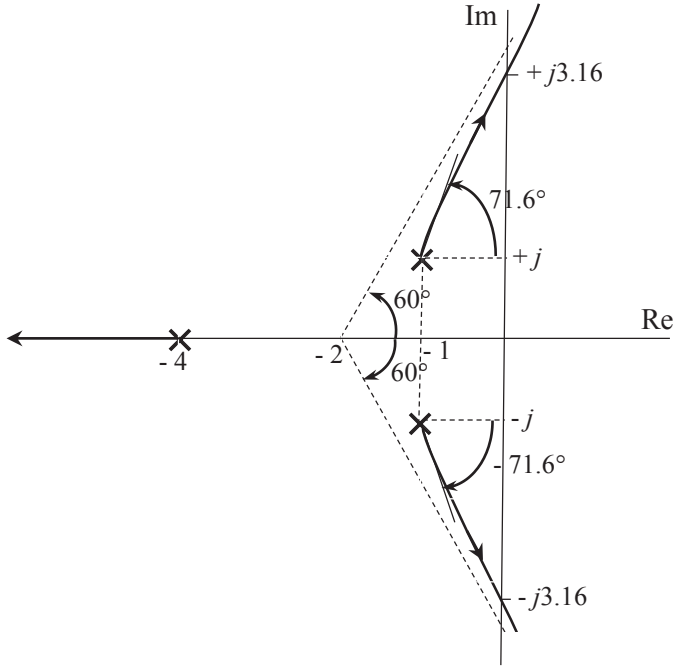
Kural 10: Sistemin karakteristik denklemi, $1 + G(s)H(s) = 0$ ya da, $s^3 + 6s^2 + 10s + 8 + K = 0$ olur. Bir önceki örnekten farklı olarak, karakteristik denklemde $s = j\omega$ koyup, elde edilen ifadenin gerçek ve sanal kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler bulunur.

$$(10\omega - \omega^3)j = 0 \quad 8 + K - 6\omega^2 = 0$$

Birinci denklemden $\omega = \pm \sqrt{10}$ ya da sanal eksen geçme noktaları $\pm j\sqrt{10} = \pm 3.16$ olarak bulunur. Bunlara karşılık gelen K değeri ise ikinci denklemden $K = 52$ olarak elde edilir.

Kural 11: $n - m = 3 \geq 2$ olduğundan kutupların korunumu kuralı geçerlidir.

Yukarıdaki kurallara göre çizilen yer eğrileri Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4

Örnek 3.3:

Açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistemin $0 \leq K \leq \infty$ için yer eğrileri çizilsin.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{(s+1)(s+3)}$$

Kural 1: Açık çevrim kutupları: $p_1 = -1$, $p_2 = -3$

Kural 2: Açık çevrim sıfırları: $z_1 = -5$

Kural 3: $n = 2$, $m = 1$. Kol sayısı = 2.

Kural 4: Yer eğrileri gerçek eksene göre simetriktir.

Kural 5: $n - m = 2 - 1 = 1$ asimptot var.

Kural 6: Sadece bir asimptot olduğundan kesişme noktası yok.

Kural 7: Gerçek eksen üzerinde $-3 \leq s \leq -1$ ve $-\infty \leq s \leq -5$ arasında yer eğrisi var.

Kural 8: Ayrılma ve birleşme noktası.

$-3 \leq s \leq -1$ arasında bir ayrılma noktası $-\infty \leq s \leq -5$ arasında da bir birleşme noktası olması beklenir. Bunlar aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0$$

$$\text{ya da, } s^2 + 10s + 20 = 0 \quad s_{1,2} = -2.76, -7.24$$

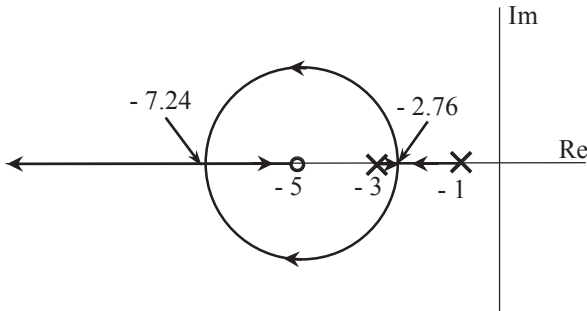
Kural 9: Kompleks kutup ya da sıfır olmadığından bu kural uygulanmaz.

Özel Kural: Sistem özel kurala uygun olduğundan gerçek eksen dışındaki yer eğrileri çember şeklindedir. Çemberin merkezi gerçek eksen üzerinde olup, ayrılma ve birleşme noktalarından geçer.

Kural 10: Kutup ve sıfırların yerleri incelendiğinde, yer eğrilerinin sanal eksenini geçmediği görülür.

Kural 11: $n - m = 2 - 1 = 1 < 2$ olduğundan kutupların korunumu kuralı geçerli değildir.

Yukarıdaki kurallara göre çizilen yer eğrileri Şekil 3.5'de verilmiştir.



Şekil 3.5

3.4 Köklerin Yer Eğrisiyle Kontrol Sistemi Tasarımı

Yer eğrilerini kullanarak kontrol sistemi tasarımında sistemin durağan hatasının azaltılmasına ve geçici davranış özelliklerinin iyileştirilmesine çalışılır. Bunun için durağan hata integral ya da integrale yakın işlemlerle azaltılırken, baskın kutupların kompleks düzlemde, geçici davranış özellikleri tarafından belirlenen kabul edilebilir bölgelerde olması sağlanır. Kabul edilebilir kutup bölgesi; baskın kutbun sönüm oranı, doğal frekansı, geçici davranışının yükselme süresi, ilk tepe noktasına erişme süresi, yerleşme süresi, % aşma oranı gibi özelliklere koyulan sınırlar tarafından belirlenir. Diğer kutupların etkilerinin nisbeten daha küçük ve hızla ortadan kalkmaları için baskın kutuplara göre sanal eksenden daha uzakta olması istenir. Yeterince uzak değilse bunların geçici davranış üzerindeki etkilerini azaltmak için yakınlarında sıfırlar olmasına gayret edilir.

Eğer sistemin tip numarası yeterince büyükse, durağan hatalar basit bir oransal kontrolle yok edilebilir. Böyle bir sistemin yer eğrisi kompleks düzlemde kabul edilebilir kutup bölgesinden geçiyorsa, K değeri bu bölgede kapalı çevrim kutbu verecek bir değerde seçilir. Ancak pek çok durumda basit oransal kontrol yetersiz kalır ve açık çevrim transfer fonksiyonuna dinamik çarpanlar eklenerek açık çevrim kutup veya sıfırları sisteme eklenir ve yer eğrilerinin şeklinin değiştirilmesi yoluna gidilir. Bu işleme *denkleştirme* denir. Sisteme bir denkleştirme elemanı eklenirken bunun kontrol çevriminde düşük güç seyiyeli bir noktaya yerleştirilmesi ve fiziksel elemanların doyma durumuna gelmemesine dikkat edilmelidir.

Yer eğrilerinin çizim kurallarının bilinmesi, denkleştirme işlemi sırasında yerleştirilen çarpanların etkilerinin tahmini ve ön değerlendirilmesi açısından çok önemlidir.

Yer eğrisiyle tasarımda genellikle sistemin geçici davranış özelliklerinin baskın eşlenik kapalı çevrim kutupları tarafında belirlendiği varsayımı vardır. Ancak sistemin diğer kutupları baskın kutuplara göre sanal eksenden yeterince uzak değilse, bu kutuplar da davranışı etkiler. Bu yüzden tasarımdan sonra performans şartlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Gerekirse tasarım parametreleriyle oynayarak istenen sistem davranışı sağlanmalıdır.

Sisteme eklenen açık çevrim transfer fonksiyonu kutup ve sıfırlarının yer eğrisine olan etkileri ($n \geq m$) aşağıdaki gibidir.

- Kutup eklenmesi kol ve asimptot sayısını artırır. Kolların sağa doğru bükülmesine, sistemdeki sönümün ve sistemin kararlılığının azalmasına, yerleşme süresinin artmasına sebep olur. Eğer kapalı çevrim sistem kararlıysa, açık çevrim kutbu eklenmesi durağan hatanın azalmasını sağlayabilir.
- Sıfır eklenmesi asimptot sayısını azaltır. Kolların sola doğru bükülmesine, sistemdeki sönümün ve sistemin kararlılığının artmasına sebep olur. Ancak durağan hata değerleri artabilir.
- Açık çevrim transfer fonksiyonuna birbirine çok yakın bir kutup ve bir sıfır eklenmesi (dipol eklenmesi) yer eğrisi üzerinde bir noktanın açısını çok az değiştireceğinden yer eğrisinin şeklini hemem hemen hiç değiştirmez. Ama bu sıfır ve kutup aşağıda faz-geriletici kontrolde belirtildiği şekilde orijine yakın olarak yerleştirilirse, sistemin durağan davranışı iyileşir ve durağan hatalar azalır.
- Eğer bir açık çevrim kutbunun çok yakınına bir sıfır eklenirse, bu kutbun yer eğrisi şekline ve sistemin dinamik davranışına olan etkisi ortadan kaldırılabilir. Ancak bu durum eğer söz konusu kutup sanal eksenin solunda ise geçerlidir. Eğer kutup sanal eksenin sağında ise, yanına sıfır eklendiğinde kutuptan çıkan kol bu sifıra gideceğinden sistemi kararlı hale getirmek mümkün olmaz. Bu yüzden kararsız açık çevrim kutuplarının sıfır yerleştirerek götürülmesi yoluna gidilmemelidir.
- Eğer sanal eksenin sağında bir açık çevrim sıfırı varsa. Bu tür sistemlere *non-minimum fazlı sistem* denir. Böyle bir sistem, kapalı çevrim kutupları sanal eksenin solunda ise kararlıdır. Ancak kazanç değeri artırıldığında kollardan biri bu sifıra doğru gideceğinden sistem kararsız hale gelir. Bu yüzden non-minimum fazlı sistemlerde kazançla oynayarak tasarım şartlarının sağlanması zor, hatta imkansız hale gelebilir.

3.4.1 Durağan Hataların Azaltılması

Sistemin durağan davranışını iyileştirmek için kullanılan yöntemler aşağıdaki gibidir.

i) Oransal kontrol

Oransal kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna dinamik bir çarpan eklemeyiz. Oransal kazanç artırıldıkça durağan hatalar azalır. Ancak yüksek kazanç değerleri sistem sönümünü azaltarak, geçici davranış kriterlerinin sağlanmasını zorlaştırabilir.

ii) İntegral kontrol

İntegral kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna K/s gibi bir çarpan, yani orijine bir açık çevrim kutbu ekler. Durağan hataların sıfırlanması için etkin bir yöntemdir. Ancak kontrol çıkışı geçmişteki hatalar tarafından belirlendiğinden, anlık hata sıfır olsa bile düzeltme işlemi devam eder ve sistemin geçici davranışını olumsuz etkiler. Ayrıca kontrolcü ve eyleyicilerin doyma durumuna erişmesine yol açabilir. İntegral işlemin uygulanması, aktif fiziksel elemanlar gerektirdiğinden pahalı bir çözümdür.

iii) Oransal + İntegral (PI) kontrol

Oransal + integral kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna

$$K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right) \quad (3.55)$$

şeklinde bir çarpan ekler. Yani, kompleks düzlemin orijinine bir açık çevrim kutbu, $s = -1/T_i$ noktasına da bir açık çevrim sıfırı ekler. İntegral işlem durağan hataları, türevsel işlem ise hatanın değişim yönünü öngördüğünden geçici davranışı iyileştirir. Eğer amaç sistemin geçici davranışını fazla değiştirmeden, sadece durağan hataları azaltmaksa sıfırın yeri kutba mümkün olduğunca yakın seçilir. Ancak bu durumda sistem cevabında yavaşlama görülürse, sıfırın kutuptan uzaklığı artırılır.

Oransal + integral işlemin uygulanması, aktif fiziksel elemanlar gerektirdiğinden pahalı bir çözümdür. Ayrıca integral işlem, kontrolcü ve eyleyicilerin doyma durumuna gelmesine sebep olabilir.

iv) Faz-geriletici kontrol

Faz-geriletici kontrol, Bölüm 4'de ayrıntıları açıklandığı gibi, açık çevrim transfer fonksiyonunun faz açısını negatif yönde kaydırıldığından bu ismi alır. Faz-geriletici kontrol sistemin geçici davranışını fazla etkilemeden, yani yer eğrilerinin şeklini fazla değiştirmeden durağan hataları azaltmak için kullanılır. Diğer yandan, kazancı değiştirerek yer

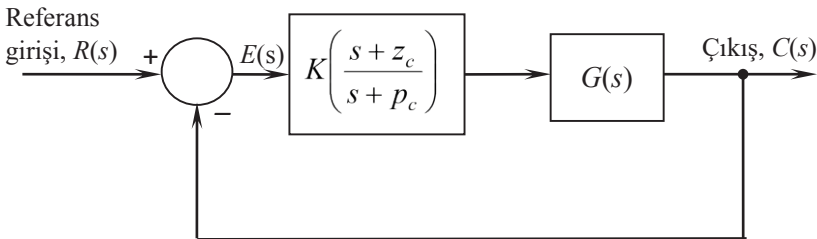
eğrisi boyunca kutupları kaydırarak geçici davranış özelliklerini ayarlayabilme imkanı hala vardır. İntegral işlemin sakıncalarını ortadan kaldırmak için bir alternatiftir. Pasif elektronik devrelerle uygulanabilmesi ve doyma problemini azaltması, I ya da PI kontrole göre üstünlüklerindedir. Bu yüzden PI kontrole göre daha ucuz bir seçenektir.

Bu yöntemde açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$K \left(\frac{s + z_c}{s + p_c} \right) \quad (3.56)$$

şeklinde bir çarpan (denkleştirici transfer fonksiyonu) eklenir. Denkleştirici ileri besleme hattı üzerinde (seri denkleştirici) ya da geri-besleme hattı üzerinde (paralel denkleştirici) olabilir. Denkleştirici kutbu orijininin hemen soluna, denkleştirici sıfırı ise bunun sol tarafına ve yakınına koyulur. Denkleştirici kutbu ve sıfırı birbirine çok yakın olduğu için, denkleştiricinin geçici davranış üzerindeki etkisi ihmal edilecek kadar azdır. Buna karşılık kazancın artması dolayısıyla durağan hata azalır. Faz-geriletici denkleştirici hatayı tamamen sıfıra indirmez, ancak çok azaltabilir. Faz-geriletici kontrolün hatayı azaltma etkisini göstermek için Şekil 3.6'daki gibi birim geri beslemeli bir sistem verilmiş olsun. Bu sistemde sistem girişi ile hata arasındaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG(s) \left(\frac{s + z_c}{s + p_c} \right)} \quad (3.57)$$



Şekil 3.6

Basit bir hesaplama için $G(s)$ 'nin pay ve payda polinomlarının sabit terimleri 1.0 alınırsa, birim basamak giriş için durağan hata aşağıdaki gibi bulunur.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K \frac{z_c}{p_c}} \quad (3.58)$$

Tasarım sırasında p_c 'nin büyüklüğü küçük (orijine daha yakın), z_c 'nin değeri daha büyük alındığından, z_c/p_c 'nin değeri büyüktür. Dolayısıyla, faz-geriletici kontrol, kazancı z_c/p_c oranında artırarak hatayı azaltır. Örneğin $p_c=0.01$ ve $z_c=0.1$ için hata $1/(1+K)$ değerinden $1/(1+10K)$ değerine azalır. Tasarım yaparken denkleştiricinin sıfır ve kutuplarının yerleri, istenen durağan hata değerini sağlayacak olan z_c/p_c değerini elde edecek biçimde seçilir.

Denkleştiricinin ileri besleme hattına ya da geri besleme hattına yerleştirilmesi karakteristik polinomu etkilemediğinden yer eğrileri iki durumda da aynı olur. Ancak bu iki seçenekte, kapalı çevrim sıfırları farklı olacağından durağan hata değerlerinde farklılık olur. İleri besleme hattında kazanç artırımı parametre hassasiyetini azalttığından genellikle seri denkleştirici yapısı tercih edilir.

3.4.2 Geçici Davranışın İyileştirilmesi

Yer eğrilerini kullanarak sistemin yerleşme süresi, aşma, tepe zamanı gibi özelliklerinin azaltılması amacıyla kullanılan yöntemler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

i) Oransal kontrol

Oransal kontrolde K değerinin değiştirilmesi genellikle durağan hatalarla geçici davranış arasında bir uzlaşma noktası belirler. Yani sistemin geçici davranış özellikleri iyileştirilirken (sistemin sönümü artırılırken) durağan hatalar artar. Bu anlayış içinde oransal kazancı ayarlayarak sistemin geçici davranışı ancak belli sınırlar içinde iyileştirilebilir.

ii) PD kontrol

Türevsel kontrol işlemi sabit hataları düzeltme özelliğine sahip olmadığından tek başına kullanılamaz. Bu yüzden PD ya da PID işlemleri içinde kullanılır. PD kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$K(1 + T_d s) \quad (3.59)$$

gibi bir çarpan ekler. Türevsel işlem hatanın hangi yönde değişeceğini öngörerek dinamik davranışı iyileştirirken, K kazancı durağan hataları azaltmak için değiştirilebilir. PD kontrol kompleks düzlemde $s = -1/T_d$ noktasına bir sıfır ilave eder. Bu sıfır yer eğrisi kollarını sola doğru büktüğünden, sistem sönümünün ve kararlılığının artmasına sebep olur.

PD kontrolcünün tasarımı sırasında önce geçici davranış isterlerini karşılayacak baskın kutupların yeri belirlenir. Sonra bu noktada açılı şartını sağlayacak biçimde kontrolcünün sıfırını yerleştirilir.

Türevsel işlem kullanmanın sakıncaları arasında aktif elemanlar kullanılması, sistemdeki gürültünün etkisini artırması ve türevi alınamayan referans girişleri ile kullanılırken özel önlemler alınması gerekliliğidir. (Örneğin, bir basamak girişin uygulanma anında türev değeri belirsizdir.) Bu son sakıncayı ortadan kaldırmak amacıyla türev geribeslemesi (hız geribeslemesi yöntemi) ve oransal kazanç birlikte kullanılabilir.

iii) Faz-ilerletici kontrol

D kontrol işleminin veya PD kontrolün sakıncalarını ortadan kaldırmak için kullanılan yöntemlerden birisi faz-ilerletici kontrol kullanmaktır. Faz-ilerletici kontrol pasif elemanlarla uygulanabilir. Ayrıca, sistemde olabilecek yüksek frekanstaki gürültülere daha az duyarlıdır. Faz-ilerletici kontrol açık çevrim transfer fonksiyonunun fazında pozitif yönde kayma yaratarak (faz payını artırarak) geçici davranışı iyileştirir. Faz ilerletici kontrol yer eğrilerinin şeklinde önemli değişiklikler yapar. Bu tür kontrolün amacı, sistemin durağan davranışını fazla etkilemeden, geçici davranış özelliklerini iyileştirmektir. Faz-ilerletici kontrolde de açık çevrim transfer fonksiyonuna aynı faz-geriletici kontrolde olduğu gibi,

$$K \left(\frac{s + z_c}{s + p_c} \right) \quad (3.60)$$

şeklinde bir çarpan (denkleştirici) eklenir. Ancak bu durumda sıfır orijine daha yakın, kutup sola doğru daha uzaktır. Kutup sanal eksenden çok uzağa yerleştirilirse sistemdeki gürültünün etkisi artar. Eğer kutup sıfıra yakın yerleştirilirse denkleştiricili sistemin yer eğrisi ile denkleştiricisi olmayan sistemin yer eğrisi arasındaki fark azalır. Genel kural, sıfır istenen

sönümsüz sistem doğal frekansı dolayında, kutbu ise bundan 3 - 20 kat daha solda almaktır [3.9]. Denkleştirici kutup ve sıfırının yerleri, yer eğrisi kompleks düzlemde istenen bir noktadan geçecek biçimde seçilir. Bunun için kapalı çevrim kutbunun istenen yeri performans özellikleri kullanılarak belirlenir; bu noktada açılı şartını sağlayacak biçimde denkleştirici sıfır ve kutuplarının yerleri bulunur.

3.4.3 Durağan ve Geçici Davranışların Birlikte İyileştirilmesi

Durağan hataları azaltma ve geçici davranışı iyileştirme işlemlerini nisbeten birbirinden bağımsız olarak yapmak için kontrol sisteminde daha fazla sayıda ve uygun olarak seçilmiş parametreye gerek vardır. Klasik kontrolde bu amaçla kullanılan başlıca iki yöntem, *PID* kontrol ve *faz-ilerletici-geriletici* kontroldür.

i) *PID* kontrol

PID kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K \left(\frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \quad (3.61)$$

şeklinde bir çarpan ekler. Yani sisteme orijinde bir açık çevrim kutbu ve iki adet de açık çevrim sıfırı eklenir. İntegral işlem durağan hataları iyileştirir. Kontrolcü parametreleri ayarlanarak açık çevrim sıfırlarının yerleri ve bu sayede yer eğrilerinin şekli de değiştirilebilir.

PID kontrolcünün açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpanlar aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$K(1 + T_1 s) \left(1 + \frac{1}{T_2 s} \right) \quad (3.62)$$

Burada K_p , T_i ve T_d parametreleri, K , T_1 ve T_2 terimleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$K_p = K \frac{T_1 + T_2}{T_2} \quad T_i = T_1 + T_2 \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (3.63)$$

Görüldüğü gibi *PID* kontrol, seri olarak bağlı *PD* ve *PI* kontrolcülerden oluşmaktadır. Bu yüzden *PID* kontrolcünün tasarımında önce geçici davranış özelliklerini karşılayacak biçimde bir *PD* kontrolcü, sonra da durağan hata isterlerini karşılayacak biçimde bir *PI* kontrolcü tasarlanabilir.

PID kontrolcüler aktif aygıtlar olup, piyasadan teminleri oldukça masraflıdır.

ii) Faz-ilerletici-geriletici kontrol

Faz-ilerletici-geriletici kontrol, geçici davranış özelliklerini iyileştirmek ve bununla beraber durağan hataları azaltmak için *PID* kontrolün bir alternatifi olarak kullanılır. Böyle bir kontrolcü tasarlanırken, sistemin dinamik davranışını iyileştirmek için önce kontrol edilecek sistem (plant) için bir faz-ilerletici kontrolcü tasarlanır. Sonra plant ve faz ilerletici kontrolcü bir arada tek bir sistem gibi ele alınıp, bu sistemin durağan hatalarını azaltmak için bir faz-geriletici kontrolcü tasarlanır.

Faz-ilerletici-geriletici kontrolcü açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$K \left(\frac{s + z_i}{s + p_i} \right) \left(\frac{s + z_g}{s + p_g} \right) \quad (3.64)$$

şeklinde bir çarpan ekler. Yani sisteme iki açık çevrim kutbu ve iki açık çevrim sıfırı eklenir. Bunlardan $-z_i$ ve $-p_i$ 'deki sıfır ve kutuplar faz ilerleticiye ait olup, sıfır orijine daha yakın, kutup sola doğru oldukça daha uzaktır. $-z_g$ ve $-p_g$ 'deki sıfır ve kutuplar ise faz gerileticiye ait olup, sıfır orijine çok yakın, kutup onun solunda ve sıfıra oldukça yakındır.

3.4.4 Tasarım Örnekleri

Yer eğrileriyle kontrol sistemi tasarımında kullanılan performans kriterleri, geçici davranış özelliklerini tanımlayan parametrelerdir. Bunlara ek olarak durağan durum hatalarının (statik ve dinamik hatalar) kabul edilebilir düzeyde olması istenir. Tasarım, sistemin dinamik davranışının

ağırlıklı olarak baskın kutuplar tarafından belirlendiği varsayımıyla yapılır. Tasarım sonrası istenen performans kriterlerinin karşılanıp karşılanmadığı kontrol edilir ve gerekirse tasarım parametreleri değiştirilerek işlem tekrar edilir. Önce dinamik bir denkleştirici kullanmadan sadece kazanç ayarı değişikliğiyle amaca ulaşmaya çalışılır. Zira bu en ucuz çözümdür. Eğer bu yeterli olmazsa durağan davranışı veya dinamik davranışı ya da her ikisini birlikte iyileştirecek dinamik denkleştiriciler kullanılması yoluna gidilir.

Örnek 3.4: Oransal Kontrol

Durağan durum kriterlerinin sağlandığı (örneğin Tip 1 ve üzeri olan) bazı sistemlerde dinamik bir denkleştirme yapmadan sadece oransal kontrol uygulayarak sistem tasarımını gerçekleştirmek mümkün olabilir. Buna örnek olarak, kontrol edilmek istenen bir sistemin (plant) transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibi olsun.

$$G_p(s) = \frac{(s+2)}{s(s+4)} \quad (3.65)$$

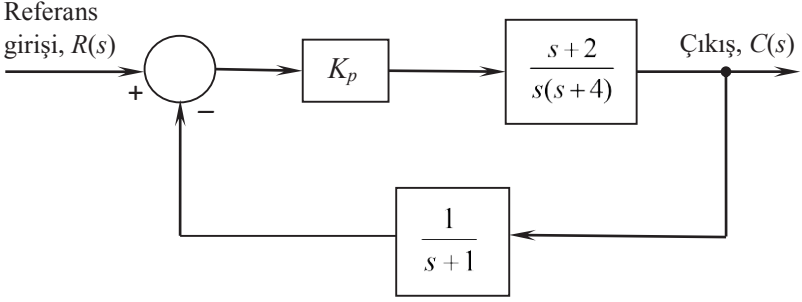
$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.66)$$

Birim basamak referans giriş uygulandığında bu sistemin aşağıdaki tasarım şartlarını sağlaması ve çıkışın durağan değerinin 1.0 olması için kontrolcü tasarımı yapılması istensin.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 5 \text{ s} \\ t_s &\leq 8 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Bu sistem için oransal kontrol denenirse, sistemin blok diyagramı Şekil 3.7'deki gibi olur. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(s+2)(s+1)}{s(s+4)(s+1) + K_p(s+2)} \quad (3.68)$$



Şekil 3.7

Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri c_{ss} ise aşağıda hesaplandığı gibi 1 olduğundan, oransal kontrol durağan davranış kriterini sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} c_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_p(s+2)(s+1)}{s(s+4)(s+1) + K_p(s+2)} \left(\frac{1}{s} \right) = 1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Sistemin geçici davranışını incelemek için yer eğrileri aşağıdaki aşamalarla çizilir.

Açık çevrim transfer fonksiyonu:

$$G(s)H(s) = \frac{K_p(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad (3.70)$$

Kural 1: Açık çevrim kutupları: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -4$

Kural 2: Açık çevrim sıfırı: $z = -2$

Kural 3: $n = 3$, $m = 1$. Kol sayısı = 3

Kural 4: Yer eğrileri gerçekte eksene göre simetriktir.

Kural 5: $n - m = 3 - 1 = 2$ asimptot var. Asimptot açıları, $\theta_a = 90^\circ, 270^\circ$

Kural 6: Asemptotların kesişme noktası:

$$\sigma_a = \frac{(0 - 1 - 4) - (-2)}{3 - 1} = -1.5$$

Kural 7: Gerçek eksen üzerinde $-1 \leq s \leq 0$ ve $-4 \leq s \leq -2$ arasında yer eğrisi var.

Kural 8: $-1 \leq s \leq 0$ arasında en az bir ayrılma noktası vardır.

$$\frac{d}{ds} [G(s)H(s)] = \frac{K_p + K_p(s+2) \frac{d}{ds} [s(s+1)(s+4)]}{[s(s+1)(s+4)]^2} = 0$$

$$\text{ya da } 3s^3 + 16s^2 + 24s + 9 = 0$$

$$s_{1,2,3} = -3, -1.76, -0.57$$

Ayrılma noktası $s = -0.57$ 'dir.

Kural 9: Kompleks kutup olmadığından bu kural uygulanamaz.

Kural 10: Sistemin karakteristik denklemi, $1 + G(s)H(s) = 0$

$$\text{ya da, } s^3 + 5s^2 + (4 + K_p)s + 2K_p = 0 \text{ olur. Routh-}$$

Hurwitz kriterinden kararlılık şartları $K_p > 0$ ve

$$5(4 + K_p) > 2K_p \text{ olarak bulunur. } K_p > 0 \text{ olduğundan}$$

sistem kararlıdır ve yer eğrileri sanal eksenini kesmez.

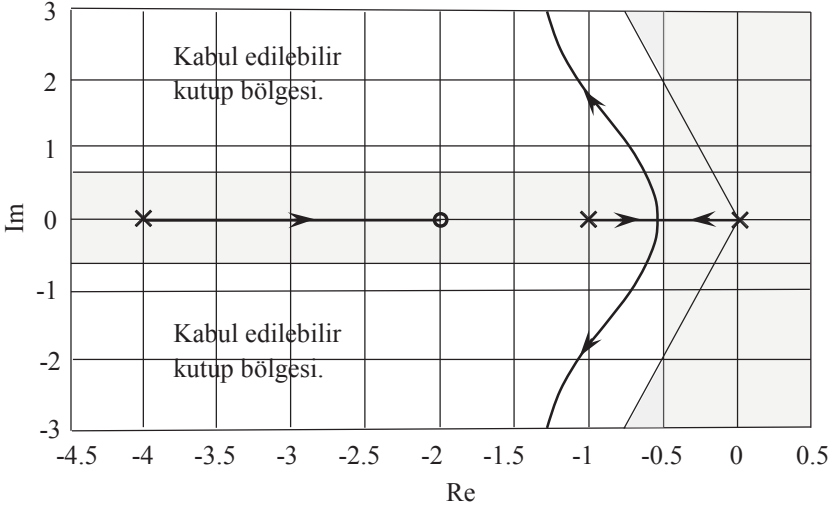
Kural 11: $n - m = 2 \geq 2$ olduğundan kutupların korunumu kuralı geçerlidir.

Sistemin yer eğrileri Şekil 3.8'de görülmektedir. Şekil 3.8 üzerinde ayrıca (3.67) ile verilen ikinci mertebe sistem performans kriterlerinin getirdiği kutup bölgesi sınırlamaları aşağıdaki gibi belirlenmiş ve işaretlenmiştir.

$$M_p \leq 0.2: \text{ Denklem (2.66)'dan } \beta < \beta^* = 62.9^\circ$$

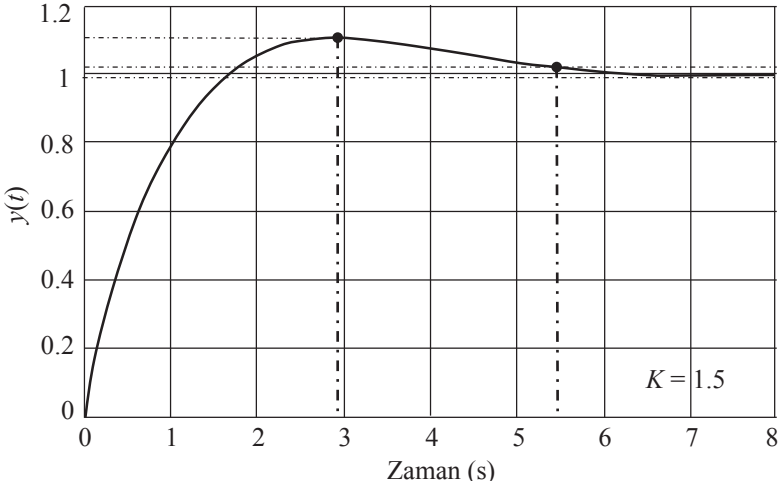
$$t_p \leq 5 \text{ sec: Denklem (2.62)'den } \omega_d \geq 0.628$$

$$t_s \leq 8 \text{ sec: Denklem (2.71)'den } \zeta\omega_n \geq 0.5$$



Şekil 3.8

Örnek olarak kabul edilebilir kutup bölgesinde yer alan ve $K_p = 1.5$ noktasına karşılık gelen bir çalışma noktası seçilirse, kapalı çevrim kutupları $p_{1,2} = -0.63 \pm j0.64$ ve $p_3 = -3.74$ olur. Bu sistemin, birim basamak cevabı Şekil 3.9'da görülmektedir. Sistemin tepe zamanı $t_p = 2.93$ s, maksimum aşması $M_p = 1.11$, yerleşme zamanı $t_s = 5.46$ s'dir. Yani sistem geçici davranış performans kriterlerinin hepsini sağlamaktadır.



Şekil 3.9

Örnek 3.5: PD Kontrol

Kontrol edilmek istenen bir sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$G_p(s) = \frac{s+3}{s(s^2+1)} \quad (3.71)$$

$$H(s) = 1 \quad (3.72)$$

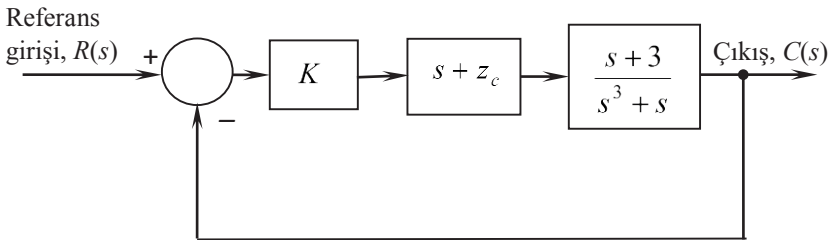
Birim basamak referans giriş uygulandığında bu sistemin aşağıdaki tasarım şartlarını sağlaması ve çıkışın durağan değerinin 1.0 olması için kontrolcü tasarımı yapılması isteniyor.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 1 \text{ s} \\ t_s &\leq 2 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Bu sistem Tip-1 olduğundan, eğer kararlıysa oransal kontrol için durağan durum şartı sağlanacaktır. Ancak sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+3)}{s^3 + (K+1)s + 3K} \quad (3.74)$$

şeklinde olup, karakteristik polinomun yapısı incelendiğinde bu sistemin kararsız olduğu açıktır. Sistemin geçici davranışını düzenlemek için *PD* kontrol uygulanırsa, sistemin blok diyagramı Şekil 3.10'daki hali alır.

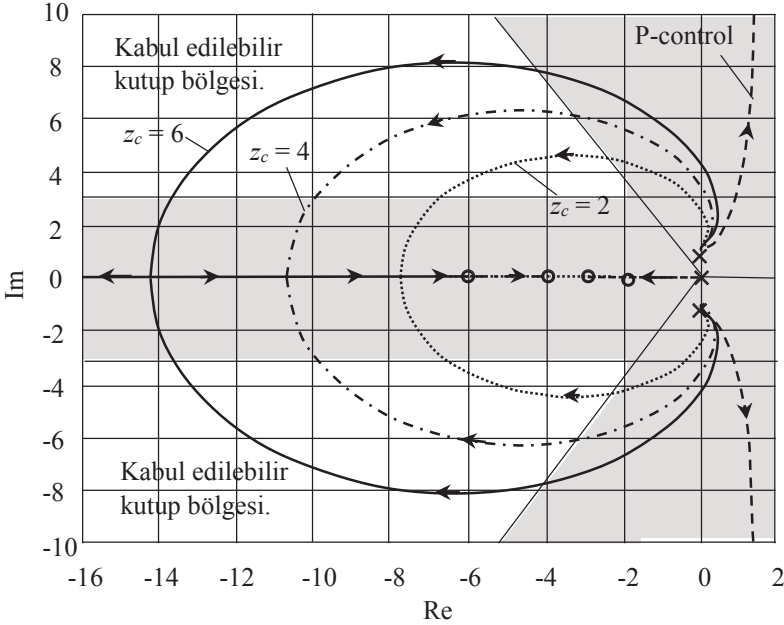


Şekil 3.10

PD kontrol, sisteme $-z_c$ noktasında bir açık çevrim kutbu ekler ve açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki hali alır.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_c)(s + 3)}{s(s^2 + 1)} \quad (3.75)$$

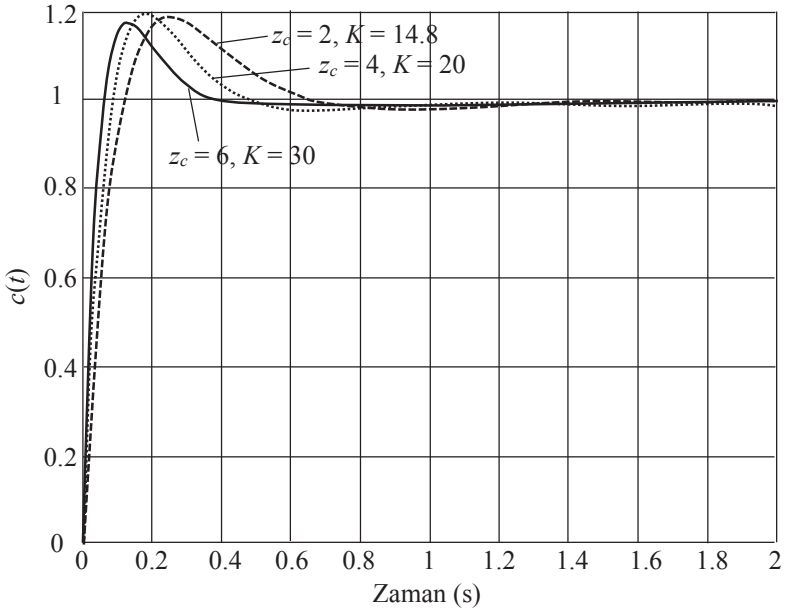
Bu örnekte ayrıntılardan kaçınmak için çizim kuralları verilmeyecek, sadece sonuçta elde edilen yer eğrileri verilecektir. Şekil 3.11'de üç farklı z_c değeri için PD kontrol ve ayrıca oransal kontrol uygulandığında elde edilen yer eğrileri görülmektedir. Aynı şekil üzerinde (3.72) ile tanımlanan şartlarının tanımladığı kabul edilebilir ikinci mertebe kutup bölgeleri de verilmiştir. Eğriler incelendiğinde, bütün durumlarda eşlenik kutuplar sola doğru kaydıçça, gerçek eksen üzerindeki kutup onların sağında kaldığı ve eşlenik kutupların baskınlığının ortadan kalktığı görülmektedir. Eğriler üzerinde gerçek eksene yakın çalışma noktaları seçilmesi sistem sönümünü artıracaktır. Bunu dikkate alarak, z_c 'nin farklı değerleri için Çizelge 3.1'deki gibi K değerleri ve bunlara karşılık gelen kapalı çevrim kutup değerleri seçelim. Görüldüğü gibi, her üç z_c değeri için de tasarım şartlarını sağlayan uygun K değerleri vardır. Çizelgede verilen üç sisteme ait birim basamak cevaplar Şekil 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.11

Çizelge 3.1

PD sıfırı $-z_c$	K	Kapalı Çevrim Kutupları			M_p	t_p (s)	t_s (s)
$z_c = 2$	14.8	$-6.56 + 3.15j$	$-6.56 - 3.15j$	-1.67	0.19	0.26	0.99
$z_c = 4$	20	$-8.78 + 4.58j$	$-8.78 - 4.58j$	-2.45	0.20	0.18	0.44
$z_c = 6$	30	$-13.62 + 3.22j$	$-13.62 - 3.22j$	-2.76	0.18	0.13	0.33



Şekil 3.12

Örnek 3.6: PI Control

Kontrol edilmek istenen bir sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$G_p(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+17} \quad (3.76)$$

$$H(s)=1 \quad (3.77)$$

Birim basamak referans giriş uygulandığında bu sistemin aşağıdaki tasarım şartlarını sağlaması ve çıkışın durağan değerinin 1.0 olması için kontrolcü tasarımı yapılması isteniyor.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 1 \text{ s} \\ t_s &\leq 2 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Bu sistemin durağan davranışı önce oransal kontrol için incelenirse, sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+5)}{s^2 + (K+2)s + 17 + 5K} \quad (3.79)$$

olarak bulunur. Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} c_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s+5)}{s^2 + (K+2)s + 17 + 5K} \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{5K}{17 + 5K} \end{aligned} \quad (3.80)$$

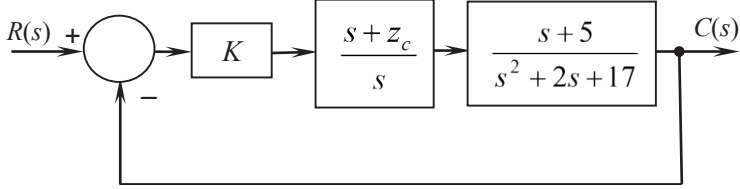
Sistemin durağan durum davranışını iyileştirmek için *PI* kontrolden yararlanılabilir. *PI* kontroldeki integral işlem durağan hatayı yok ederken, açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenen kutup sistemin geçici davranışını sınırlı da olsa düzenlemek için kullanılabilir. *PI* kontrolün açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpan aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right) = K \left(\frac{s + z_c}{s} \right) \quad (3.81)$$

Yukarıdaki ifadede geçen z_c ve K terimleri, *PI* kontrolcü parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$z_c = \frac{1}{T_i} \quad K = K_p \quad (3.82)$$

Sistemin blok diyagramı Şekil 3.13’de görülmektedir.



Şekil 3.13

PI kontrol uygulanan sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

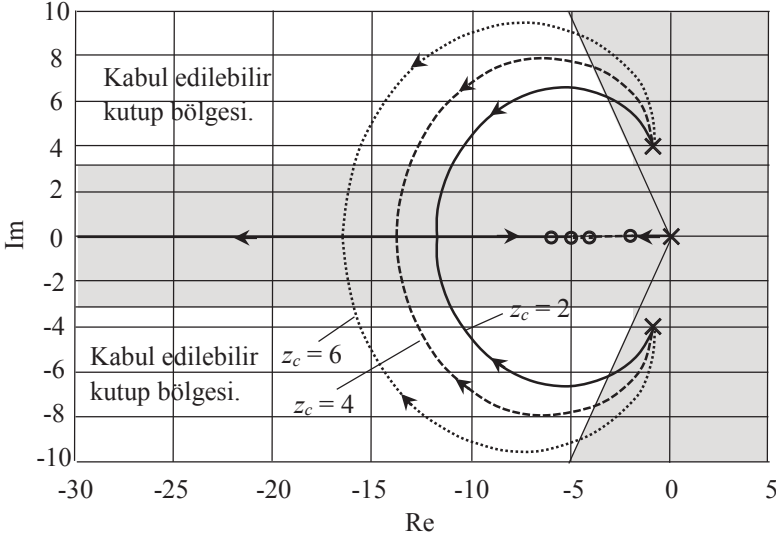
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_c)(s + 5)}{s^3 + (2 + K)s^2 + (17 + 5K + Kz_c)s + 5Kz_c} \quad (3.83)$$

şeklinde olup, birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri $c_{ss} = 1$ ’dir. İntegral kontrol beklendiği gibi durağan hatayı sıfır yapmıştır. Şimdi *PI* kontrolün sisteme eklediği açık çevrim sıfırının yerini değiştirerek geçici davranış kriterlerinin sağlanıp sağlanamayacağını inceleyelim. Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_c)(s + 5)}{s(s^2 + 2s + 17)} \quad (3.84)$$

Ayrıntıdan kaçınmak için yer eğrilerinin çizim aşamaları burada verilmemiştir. z_c ’nin üç değeri için çizilen yer eğrileri, denklem (3.78)’de verilen şartlar tarafından tanımlanan eşlenik kutup bölgeleriyle birlikte Şekil 3.14’de görülmektedir. Eğriler incelendiğinde, bütün durumlarda K değeri artırıldıkça, eşlenik kutuplar sola doğru kaymakta, gerçek eksen üzerindeki kutup onların sağında kalmakta ve eşlenik kutupların baskınlığı ortadan kalkmaktadır.

Gerçek eksene yakın çalışma noktalarının sistem sönümünü artıracaklarını dikkate alarak, incelenen üç z_c değeri için Çizelge 3.2’deki K değerlerini ve bunlara karşılık gelen kapalı çevrim kutupları seçelim. Her üç z_c değeri için de tasarım şartlarını sağlayan uygun K değerleri vardır. Çizelgede verilen üç sisteme ait birim basamak cevaplar Şekil 3.15’de verilmiştir.



Şekil 3.14

Çizelge 3.2

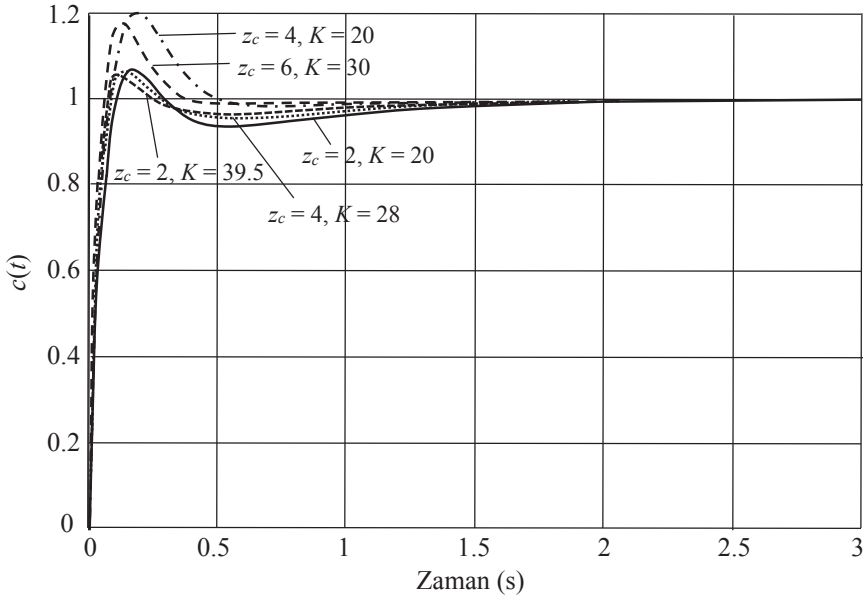
PI sıfırı $-z_c$	K	Kapalı Çevrim Kutupları			M_p	t_p (s)	t_s (s)
$z_c = 2$	20	$-10.2 + 4.50j$	$-10.2 - 4.50j$	-1.61	0.07	0.17	1.34
$z_c = 2$	28	-20.09	-8.21	-1.70	0.07	0.14	1.13
$z_c = 2$	39.5	-32.96	-6.77	-1.77	0.06	0.11	0.92
$z_c = 4$	20	$-8.78 + 4.58j$	$-8.78 - 4.58j$	-2.45	0.20	0.18	0.44
$z_c = 6$	30	$-13.62 + 3.22j$	$-13.62 - 3.22j$	-2.76	0.18	0.13	0.33

Örnek 3.7: PID Kontrol

Kontrol edilmek istenen bir sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad (3.85)$$

$$H(s) = \frac{4}{s + 4} \quad (3.86)$$



Şekil 3.15

Birim basamak referans giriş uygulandığında bu sistemin aşağıdaki tasarım şartlarını sağlaması ve çıkışın durağan değerinin 1.0 olması için kontrolcü tasarımı yapılması isteniyor.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 2 \text{ s} \\ t_s &\leq 4 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.87)$$

En basit kontrol olduğu için önce oransal kontrol denenerek tasarım isterlerini karşılayıp karşılamadığı belirlenecektir.

Referans girişi ve sistem çıkışının Laplace transformları sırasıyla $R(s)$ ve $C(s)$ olsun. Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+4)}{(s+4)(s^2+2s+2)+4K} \quad (3.88)$$

Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri c_{ss} ise aşağıdaki gibidir.

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s+4)}{(s+4)(s^2+2s+2)+4K} \frac{1}{s} \quad (3.89)$$

$$= \frac{4K}{8+4K}$$

Bu ifadeden görüldüğü gibi çıkışın istenen durağan değeri sağlanması ancak K 'nin değeri sonsuz olduğunda mümkündür. Dolayısıyla, oransal kontrol durağan davranış kriterini sağlayamamaktadır.

Sistemin geçici davranışını incelemek için yer eğrileri aşağıdaki aşamalarla çizilebilir.

Açık çevrim transfer fonksiyonu:

$$G(s)H(s) = \frac{K'}{(s+4)(s^2+2s+2)} \quad (K' = 4K)$$

Kural 1: Açık çevrim kutupları: $p_1 = -4$, $p_2 = -1 + j$,
 $p_3 = -1 - j$

Kural 2: Açık çevrim sıfırı yok.

Kural 3: $n = 3$, $m = 0$. Kol sayısı = 3.

Kural 4: Yer eğrileri gerçek eksene göre simetriktir.

Kural 5: $n - m = 3 - 0 = 3$ asemptot var. Asemptot açıları,
 $\theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

Kural 6: Asemptotların kesişme noktası:

$$\sigma_a = \frac{(-4 - 1 - 1) - (0)}{3 - 0} = -2$$

Kural 7: Gerçek eksen üzerinde $-\infty \leq s \leq -4$ arasında yer eğrisi var.

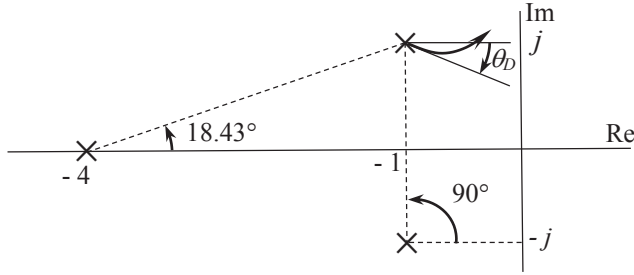
Kural 8: Ayrılma noktası yok.

Kural 9: Kompleks kutuplardan ayrılma açıları.

Aşağıda verilen şekilden $p_2 = -1 + j$ kutbundan ayrılan kolun ayrılma açısı θ_D aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_D = 180^\circ + (0) - (90 + 18.43) = +71.6^\circ$$

$p_3 = -1 - j$ kutbundan ayrılma açısı ise -71.6° olur.



Kural 10: Sistemin karakteristik denklemini, $1 + G(s)H(s) = 0$ ya da, $s^3 + 6s^2 + 10s + 8 + 4K' = 0$ olur. Denkleminde $s = j\omega$ koyup, elde edilen ifadenin gerçekte ve sanal kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler bulunur.

$$(10\omega - \omega^3)j = 0 \quad 4K' + 8 - 6\omega^2 = 0$$

Birinci denklemden sanal eksenini geçme noktaları $\omega = \pm \sqrt{10} = \pm 3.16$ olarak bulunur. Bunlara karşılık gelen K değeri ise ikinci denklemden $K' = 13$ olarak elde edilir.

Kural 11: $n - m = 3 \geq 2$ olduğundan kutupların korunumu kuralı geçerlidir.

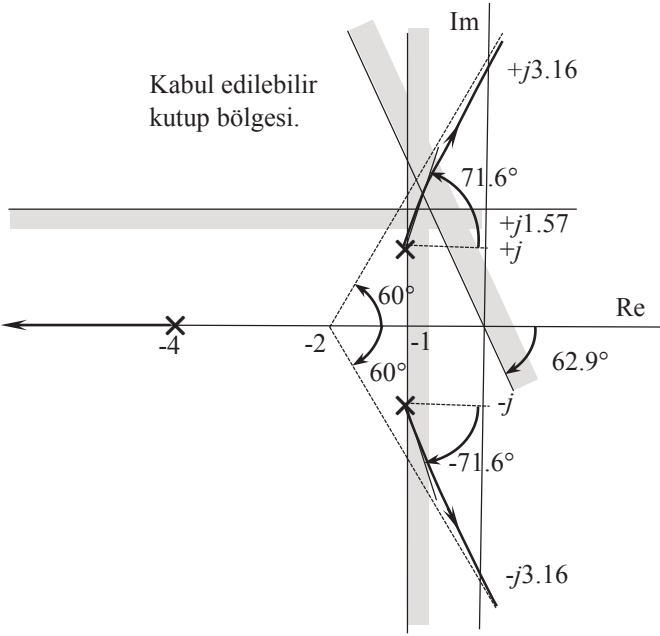
Sistemin yer eğrileri Şekil 3.16'da görülmektedir. Şekil 3.16 üzerinde ayrıca (3.53) ile verilen ikinci mertebe sistem performans kriterlerinin getirdiği kutup bölgesi sınırlamaları aşağıdaki gibi belirlenmiş ve işaretlenmiştir. (Sadece gerçekte eksenin üst kısmı gösterilmiştir.)

$$M_p \leq 0.2 : \text{Denklem (2.66)'den } \beta < \beta^* = 62.9^\circ$$

$$t_p \leq 2 \text{ s} : \text{Denklem (2.62)'den } \omega_d \geq 1.57$$

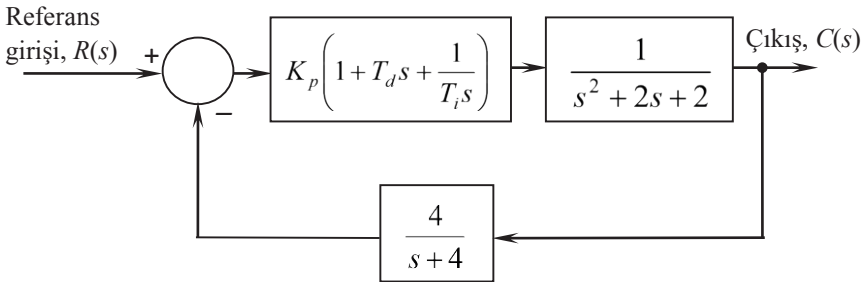
$$t_s \leq 4 \text{ s} : \text{Denklem (2.71)'den } \zeta\omega_n \geq 1$$

Bu şekilde tanımlanan bölgeler ve yer eğrileri karşılaştırıldığında, ikinci mertebe baskın kutupların kompleks kutuplardan çıkan kolların kabul edilebilir kutup bölgeleri içinden geçmediği görülmektedir. Yani oransal kontrol geçici davranış isteklerini de sağlayamamaktadır.



Şekil 3.16

Bu durumda istenirse, daha önce Bölüm 3.4.1’de verilen durağan davranışı iyileştiren önlemler ile Bölüm 3.4.2’de verilen geçici davranışı iyileştiren önlemler ayrı ayrı ele alınabilir. Ancak bunların yerine Bölüm 3.4.3’de verilen ve bu davranışların her ikisini birlikte iyileştiren *PID* ya da faz-ilerletici-geriletici kontrolün kullanılması da mümkündür. Burada örnek olarak *PID* kontrol işlemi uygulanacaktır. *PID* kontrol uygulanmış sistemin blok diyagramı Şekil 3.17’de verilmiştir.



Şekil 3.17

Daha önce Bölüm 3.4.3’de belirtildiği gibi, *PID* kontrolcünün açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpanlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = K(1 + T_1 s) \left(\frac{1 + T_2 s}{T_2 s} \right) \quad (3.90)$$

Yani bir *PD* işlemine ve bir de *PI* işlemine ayrıştırılabilir. Burada K_p , T_d , ve T_i terimleri, K , T_1 ve T_2 cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$K_p = \frac{K(T_1 + T_2)}{T_2} \quad T_i = T_1 + T_2 \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (3.91)$$

PID kontrolcünün tasarımı sırasında önce sistemin dinamik davranışını iyileştirecek bir *PD* tasarımı yapılır. Daha sonra bir *PI* kontrolcü ile dinamik davranışı fazla etkilemeden durağan davranış iyileştirilir.

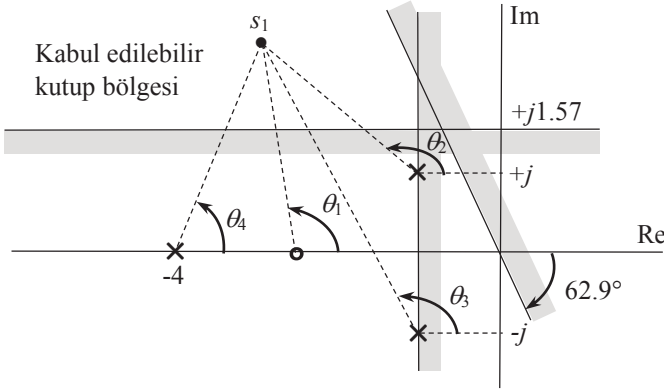
Şekil 3.18’de kontrol edilmemiş sistemin açık çevrim kutupları, geçici davranış tasarım kriterlerinin tanımladığı kabul edilebilir kutup bölgeleri ile birlikte gösterilmiştir. (Sadece gerçek eksenin üst kısmı gösterilmiştir.) *PD* kontrol bu diyagramda gerçek eksen üzerinde bir yere şekilde gösterildiği gibi bir sıfır ekleyecektir. Bu sıfırın yeri, sistemin kapalı çevrim kutbunun kabul edilebilir kutup bölgesinde s_1 gibi bir noktada olmasını sağlayacak şekilde belirlenmelidir. s_1 yer eğrisi üzerinde olduğuna göre açı şartını sağlaması gerekir. Yani şekilde görülen açılar cinsinden aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

$$\theta_1 - (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \pm(2k + 1) 180^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

İncelenen sistem için kabul edilebilir kutup bölgesi içinde örnek olarak $s_1 = -2 + 1.6j$ noktası seçilsin. Bu durumda $\theta_2 = 149.04^\circ$, $\theta_3 = 111.04^\circ$, $\theta_4 = 38.66^\circ$ olur. s_1 ’in yer eğrisi üzerinde olması için θ_1 ’in değeri aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$\theta_1 = \pm(2k + 1)180^\circ + 149.04^\circ + 111.04^\circ + 38.66^\circ = 118.74^\circ$$

Bu açıyı sağlamak için sıfır $z = -1.12$ noktasına yerleştirilmelidir. Kapalı çevrim kutbunun bu noktada olmasını sağlayan kazanç değeri $K = 1.14$ olarak bulunur. Bu sistemin birim basamak cevabı Şekil 3.19’da verilmiştir. Sistemin tepe zamanı 0.99 s, aşması % 22.2, yerleşme zamanı 2.37 s kadardır. Sistem maksimum aşama kriterini sağlayamamaktadır.

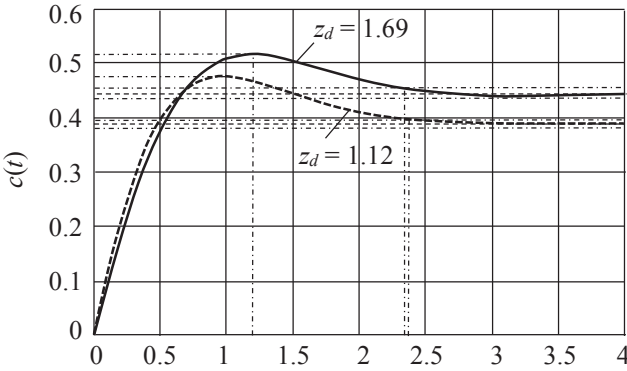


Şekil 3.18

Şimdi de kapalı çevrim kutbunu $s_1 = -1.5 + 1.6j$ noktasında seçelim. Bu durumda $\theta_2 = 129.8^\circ$, $\theta_3 = 100.9^\circ$, $\theta_4 = 32.6^\circ$ olur. s_1 'in yer eğrisi üzerinde olması için θ_1 'in değeri aşağıdaki gibi olmalıdır.

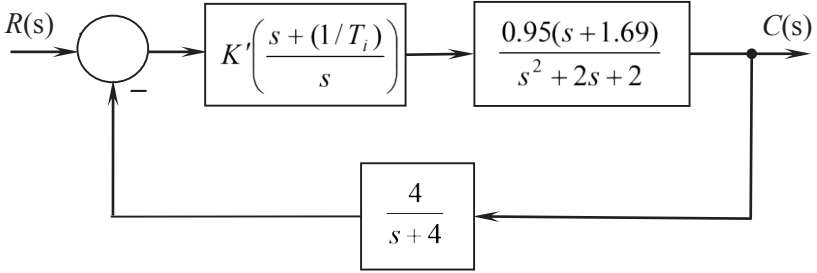
$$\theta_1 = \pm(2k + 1)180^\circ + 129.8^\circ + 100.9^\circ + 32.6^\circ = 83.3^\circ$$

Bu açığı sağlamak için $z = -1.69$ olarak seçilmelidir. Bu şekilde tasarlanan sistemde kapalı çevrim kutbunun $s_1 = -1.5 + 1.6j$ noktasında olmasını sağlayan kazanç değeri $K = 0.95$ ($T_d = 1.69$ ve $K_p = 1.61$) olarak bulunur. Bu sistemin birim basamak cevabı da Şekil 3.19'da verilmiştir. Sistemin tepe zamanı 1.2 s, aşması % 16.3, yerleşme zamanı 2.34 s kadardır. Yani geçici davranış kriterlerinin hepsi sağlanmaktadır. Sistemin durağan değeri ise 0.445 olup, istenen 1.0 değerinin çok altındadır.



Şekil 3.19

Tasarımın ikinci aşamasında *PD* işlem uygulanan sisteme ek olarak *PI* kontrol uygulansın. Bu sistemin blok diyagramı Şekil 3.20'deki gibidir.



Şekil 3.20

PI kontrol sisteme orijinde bir açık çevrim kutbu ve bir de sıfır eklemektedir. Önce çevrim kazancını değiştirilmesin, yani $K' = 1$ alınsın. Sıfırın yeri orijinden çok uzak olmayacak biçimde $z_i = -1.2$, $z_i = -1.4$, $z_i = -1.6$, $z_i = -1.8$, $z_i = -2$ noktalarında seçildiğinde, bunlara karşılık gelen kapalı çevrim kutupları, aşma, tepe zamanı ve yerleşme zamanı değerleri Çizelge 3.3'deki gibi elde edilir. Görüldüğü gibi bütün cevaplar istenen durağan değer 1.0 'a gitmekte ve geçici davranış isterlerini, yerleşme süresi dışında karşılamaktadır. $z_i = -2$ seçildiğinde yerleşme zamanı hedeflenen 4 s süreyi sadece 0.08 s aşmaktadır. (Denklem 3.53'de verilen yerleşme zamanı değeri zarf eğrisi bazlıdır. Çizelge 3.3'deki değer ise Matlab ile belirlenmiştir ve gerçek zaman cevabı bazlıdır.) Çizelge 3.3'deki kapalı çevrim kökleri incelendiğinde eşlenik köklerden çoğunun Şekil 3.16'daki kabul edilebilir kutup bölgesinin dışında (sağında) olduğu dikkati çekmektedir. Bunun sebebi orijinle $-z_i$ arasında kalan gerçek kutbun sistem cevabını etkilemesi ve baskın olacağı düşünülen eşlenik kutupların bu özelliklerini zayıflatmalarıdır.

Şimdi de K' değerini bir miktar değiştirerek, $K' = 1.4$ alınsın. Sıfırın yeri yine $z_i = -1.2$, $z_i = -1.4$, $z_i = -1.6$, $z_i = -1.8$, $z_i = -2$ noktalarında seçilirse, kapalı çevrim kutupları, aşma, tepe zamanı ve yerleşme zamanı değerleri Çizelge 3.4'deki gibi bulunur.

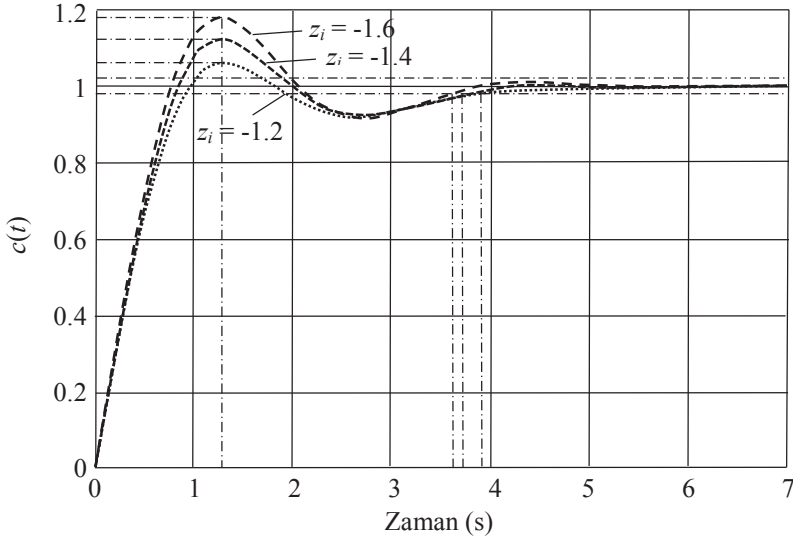
Çizelge 3.4'deki sonuçlar incelendiğinde, z_i için -1.2 , -1.4 veya -1.6 değerleri kullanıldığında bütün geçici davranış isterlerinin karşılandığı görülmektedir. Şekil 3.21'de bu sistemlerin birim basamak cevapları, Şekil 3.22'de ise örnek olarak $z_i = -1.2$ için yer eğrileri verilmiştir.

Çizelge 3.3

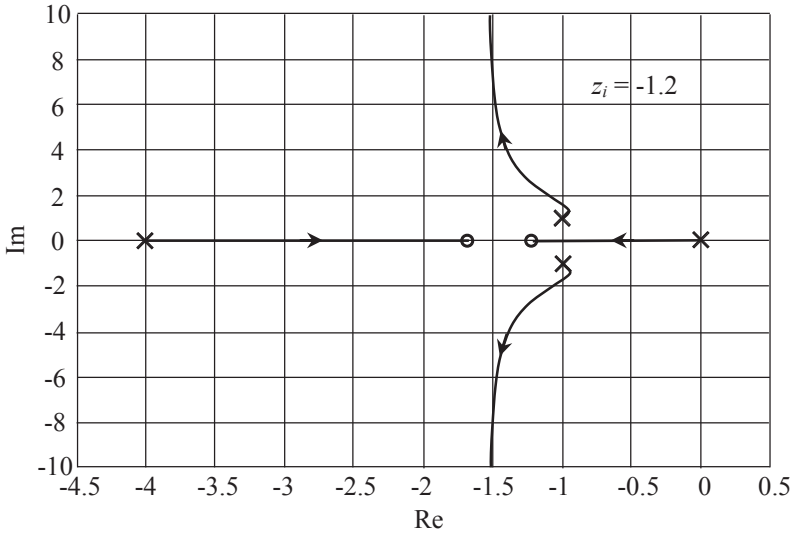
$K' = 1$	Kapalı Çevrim Kutupları				M_p	t_p (s)	t_s (s)
PI sıfırı (z_i)							
$z_i = -1.2$	$-1 + 1.65j$	$-1 - 1.65j$	-0.62	-3.38	Aşma yok.	Aşma yok.	4.83
$z_i = -1.4$	$-0.93 + 1.68j$	$-0.93 - 1.68j$	-0.72	-3.43	0.023	1.67	4.39
$z_i = -1.6$	$-0.85 + 1.71j$	$-0.85 - 1.71j$	-0.81	-3.48	0.077	1.60	4.22
$z_i = -1.8$	$-0.79 + 1.75j$	$-0.79 - 1.75j$	-0.89	-3.54	0.13	1.58	4.14
$z_i = -2$	$-0.73 + 1.80j$	$-0.73 - 1.80j$	-0.96	-3.58	0.18	1.52	4.08

Çizelge 3.4

$K' = 1.4$	Kapalı Çevrim Kutupları				M_p	t_p (s)	t_s (s)
PI sıfırı (z_i)							
$z_i = -1.2$	$-1.07 + 1.92j$	$-1.07 - 1.92j$	-0.71	-3.14	0.06	1.29	3.90
$z_i = -1.4$	$-0.98 + 1.95j$	$-0.98 - 1.95j$	-0.82	-3.22	0.12	1.29	3.70
$z_i = -1.6$	$-0.89 + 2.00j$	$-0.89 - 2.00j$	-0.91	-3.30	0.17	1.29	3.61
$z_i = -1.8$	$-0.82 + 2.04j$	$-0.82 - 2.04j$	-0.99	-3.37	0.23	1.24	4.40
$z_i = -2$	$-0.75 + 2.09j$	$-0.75 - 2.09j$	-1.06	-3.44	0.28	1.23	4.65



Şekil 3.21



Şekil 3.22

Örnek 3.8: Faz-İlerletici-Geriletici Kontrol

Kontrol edilmek istenen bir sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibi olsun.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4.25} \quad (3.92)$$

$$H(s) = 1 \quad (3.93)$$

Birim basamak referans giriş uygulandığında bu sistemin aşağıdaki tasarım şartlarını sağlaması ve çıkışın durağan değerinin en fazla % 1 hatayla 1.0 olması için kontrolcü tasarımı yapılması isteniyor.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 2 \text{ s} \\ t_s &\leq 4 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Önce sisteme oransal kontrol uygulandığında performansı incelensin. Bu sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G_p(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + s + 4.25} \quad (3.95)$$

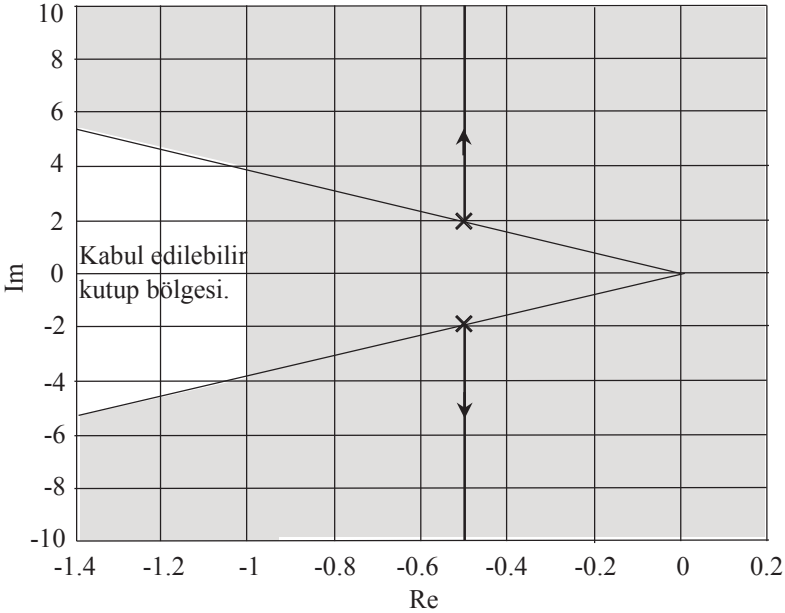
şeklinde olup, yer eğrileri Şekil 3.23'deki gibidir. Yer eğrileri incelendiğinde eşlenik kutuplardan çıkan kolların sanal eksene paralel olarak sonsuza gittiği ve kapalı çevrim kutuplarının denklemler (3.94) ile tanımlanan kabul edilebilir kutup bölgesi dışında olduğu görülmektedir. Ayrıca sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + s + 4.25 + K} \quad (3.96)$$

olup, birim basamak referans girişi için çıkışın durağan değeri aşağıdaki gibidir.

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{K}{s^2 + s + 4.25 + K} \right) \frac{1}{s} = \frac{K}{4.25 + K} \quad (3.97)$$

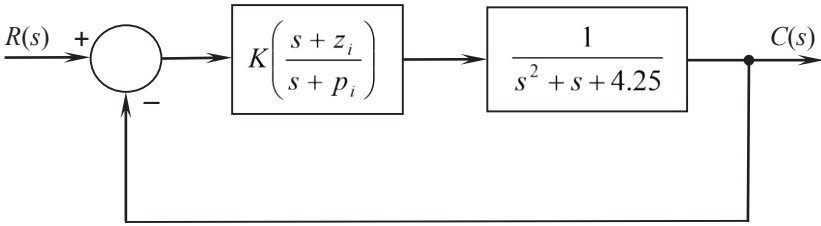
Oransal kontrol uygulanan sistem, ne geçici davranış, ne de durağan davranış performans kriterlerini sağlamaktadır.



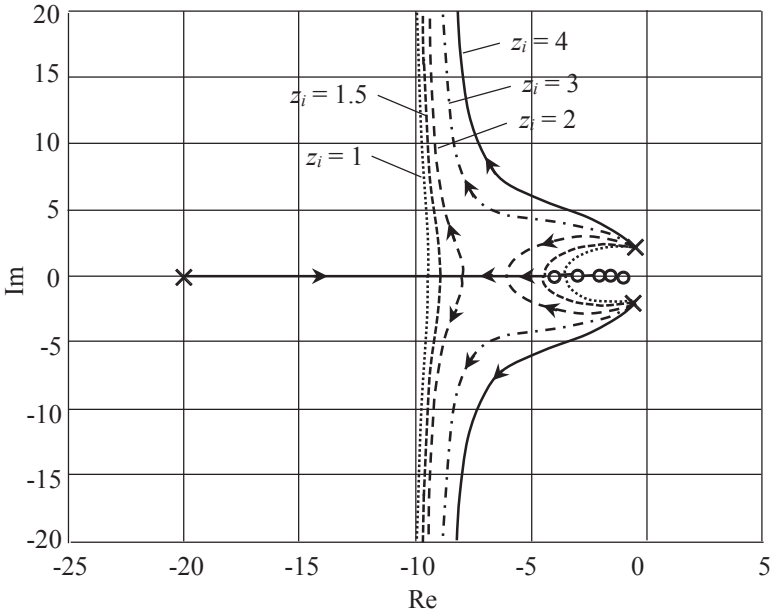
Şekil 3.23

Bu sistemin davranışını iyileştirmek için faz-ilerletici-geriletici kontrol işlemini kullanalım. Faz-gerileticili kısım sistemin durağan davranışını, faz ilerleticili kısım ise geçici davranışını iyileştirmek içindir.

Önce sisteme faz-ilerletici işlem uygulansın. Bu sistemin blok diyagramı Şekil 3.24'deki gibidir. $p_i = 20$ olarak kutbu orijinden oldukça uzağa yerleştirip farklı sıfır değerleri için yer eğrilerini çizelim. Şekil 3.25'de z_i 'nin değerlerini 1, 1.5, 2, 3, ve 4 olarak çizilen yer eğrileri görülmektedir.



Şekil 3.24



Şekil 3.25

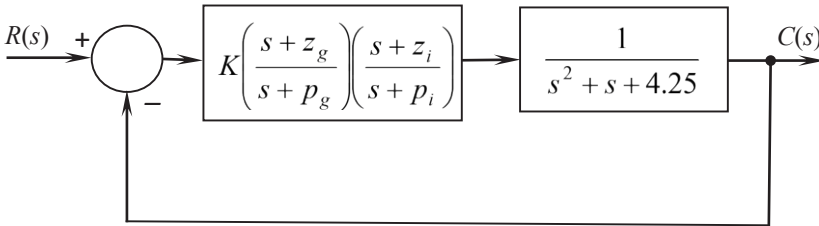
Şekil 3.25'deki eğriler üzerinde K değerleri değiştirilerek sistem sönümünün büyük olduğu kökler seçilmiş, M_p değerini minimum yapan K değerleri bulunmuştur. Bu şekilde bulunan sistemlerin özellikleri Çizelge 3.5'de verilmiştir. Çizelgedeki sistemlerin hepsi tepe zamanı ve yerleşme zamanı tasarım kriterlerini karşılamaktadır. Ancak aşma kriteri hiç birisi tarafından sağlanamamaktadır.

Çizelge 3.5

$p_i = 20$	K	Kapalı Çevrim Kutupları			M_p	t_p (s)	t_s (s)
z_i							
1	300	$-9.86 + 14.2j$	$-9.86 - 14.2j$	-1.29	0.39	0.22	2.14
1.5	250	$-9.53 + 12.1j$	$-9.53 - 12.1j$	-1.94	0.32	0.24	1.46
2	200	$-9.10 + 9.51j$	$-9.10 - 9.51j$	-2.80	0.30	0.28	1.17
3	180	$-7.97 + 7.75j$	$-7.97 - 7.75j$	-5.05	0.31	0.31	0.78
4	170	$-6.10 + 7.05j$	$-6.10 - 7.05j$	-8.81	0.35	0.32	0.64

Bir sonraki faz-geriletici işlem aşamasında sisteme orijin yakınında bir açık çevrim kutbu eklenecektir. Bu kutup yaklaşık bir integrator gibi davranıp sistemin durağan davranışının iyileşmesine katkıda bulunacaktır. Bunun yanısıra bir de açık çevrim sıfırı eklenecektir. Eğer bu sıfır kutbun çok yakınında ise yer eğrilerinin şekli fazla etkilenmez. Ama bu sıfırın yerini değiştirilerek davranış özelliklerini değiştirebilme imkanı vardır.

Faz-geriletici işlem ek olarak sisteme uygulanırsa, sistemin blok diyagramı Şekil 3.26'daki hali alır. Burada örnek olarak Çizelge 3.5'de en küçük aşma değerine sahip iki sistem ($z_i=2$ ve $z_i=3$ olan sistemler) ele alınacak, ve bunların durağan davranışları iyileştirilirken, geçici davranışlarının da tasarım şartlarını sağlamasına çalışılacaktır.

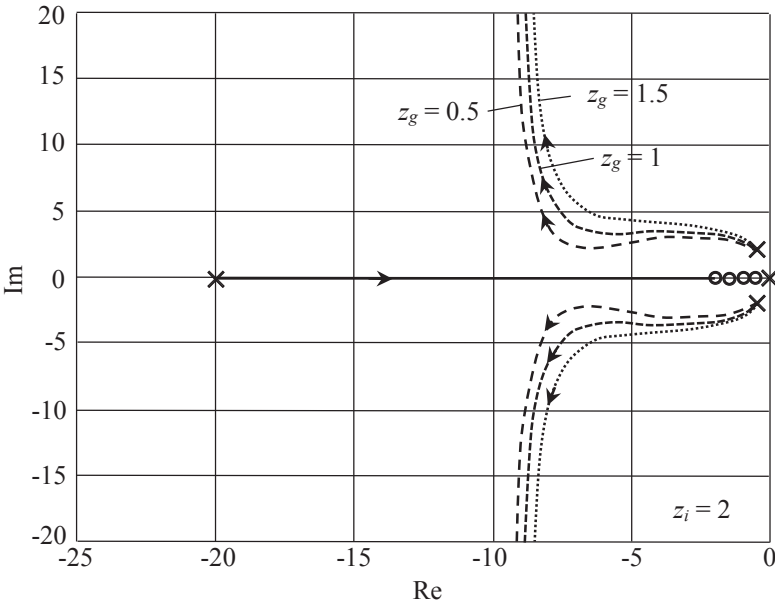


Şekil 3.26

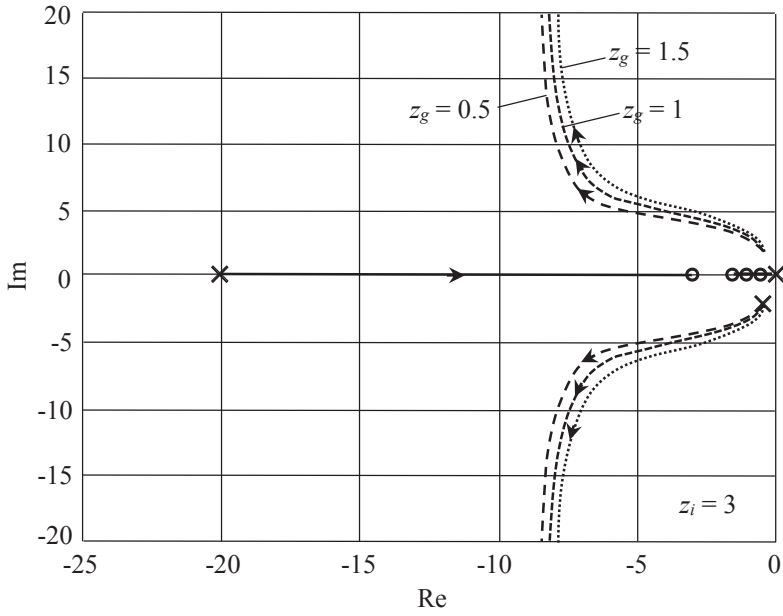
Faz-gerileticinin kutbu orijinin çok yakınına (-0.01 noktasına) koyulacak, sıfırı için ise örnek olarak üç farklı değer (-0.5 , -1 , -1.5) denecektir. Bu şekilde elde edilen sistemlerin yer eğrileri Şekil 3.27 ve 3.28'de verilmiştir. M_p değerini azaltmak amacıyla bu eğriler üzerinde K değerleri değiştirilerek bazı örnek çalışma noktaları seçilmiş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 3.6'da verilmiştir. Çizelgede sağlanamayan tasarım değerleri karartılmıştır. Görüldüğü gibi, seçilen sistemlerden üç tanesi bütün tasarım şartlarını sağlamaktadır. Bu sistemlerin birim basamak cevapları Şekil 3.29'da görülmektedir. Sistemlerin durağan değerleri ise $0.993-0.995$ arasındadır.

Çizelge 3.6

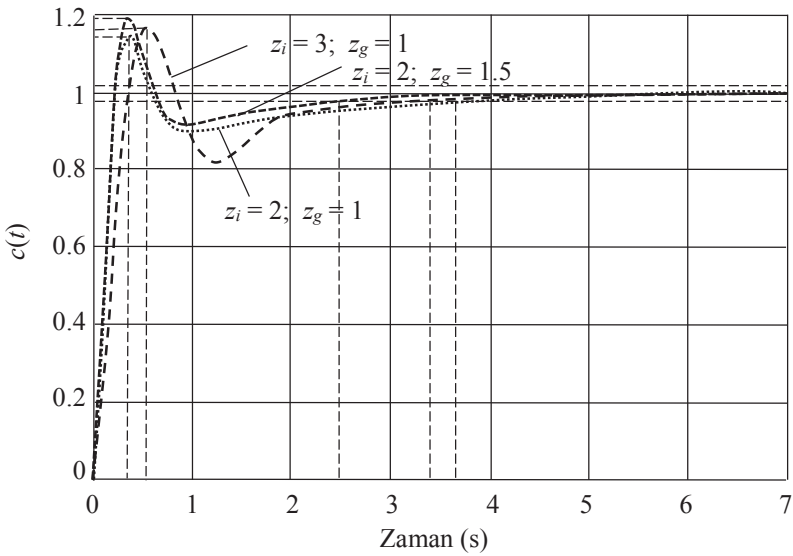
$p_i = 20$		K	Kapalı Çevrim Kutupları				M_p	t_p (s)	t_s (s)
z_i	z_g								
2	1.5	160	$-7.03 + 5.60j$	$-7.03 - 5.60j$	-5.95	-1.00	0.10	0.35	2.48
	1	160	$-7.91 + 6.05j$	$-7.91 - 6.05j$	-4.46	-0.73	0.15	0.35	3.39
	0.5	160	$-8.49 + 6.53j$	$-8.49 - 6.53j$	-3.64	-0.39	0.30	0.28	6.21
3	1.5	80	$-1.92 + 4.32j$	$-1.92 - 4.32j$	-16.1	-1.00	0.23	0.54	2.86
	1	80	$-2.15 + 4.09j$	$-2.15 - 4.09j$	-16.0	-0.70	0.16	0.54	3.65
	0.5	80	$-2.40 + 3.88j$	$-2.40 - 3.88j$	-15.8	-0.37	0.09	0.54	7.00



Şekil 3.27



Şekil 3.28



Şekil 3.29

Örnek 3.9: I ve PI Kontrol

Kontrol edilmek istenen bir sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ ve geri besleme için kullanılan ölçüm sisteminin transfer fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$G_p(s) = \frac{1}{s+4} \quad (3.98)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.99)$$

Kontrol sonucunda çıkışın basamak referans girişlerini hatasız olarak izlemesi ve aşağıdaki şartları sağlaması istenmektedir.

$$\begin{aligned} M_p &\leq 0.2 \\ t_p &\leq 2 \text{ s} \\ t_s &\leq 4 \text{ s} \quad (\% 2 \text{ kriteri}) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Bu şartların kompleks düzlemde tanımladığı eşlenik kapalı çevrim kutup bölgesi aşağıdaki şartları verir.

$$M_p \leq 0.2: \quad \text{Denklem (2.66)'den } \beta < \beta^* = 62.9^\circ$$

$$t_p \leq 2 \text{ sec}: \quad \text{Denklem (2.62)'den } \omega_d \geq 1.57$$

$$t_s \leq 4 \text{ sec}: \quad \text{Denklem (2.71)'den } \zeta\omega_n \geq 1$$

Önce oransal kontrolle yukarıdaki şartların sağlanıp sağlanmadığını araştırılacaktır. Bu sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 5s + 4 + K} \quad (3.101)$$

şeklinde olup, birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri,

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s+1)}{s^2 + 5s + 4 + K} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{K}{4 + K} \quad (3.102)$$

olduğundan K 'nin değeri sonsuz olmadıkça c_{ss} 'nin değeri 1.0 olmamakta ve durağan davranış şartı sağlanmamaktadır.

i) *İntegral kontrol*

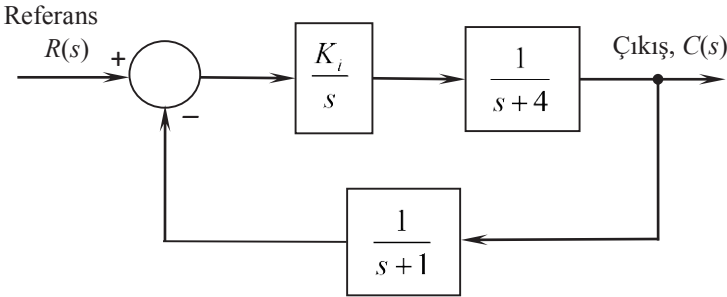
İntegral kontrol işlemi durağan hatayı sıfırlamak için etkin bir yol olduğundan, sisteme integral kontrol uygulanırsa, sistemin blok diyagramı Şekil 3.30'daki gibi olur.

İntegral kontrol uygulanan sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 4s + K} \quad (3.103)$$

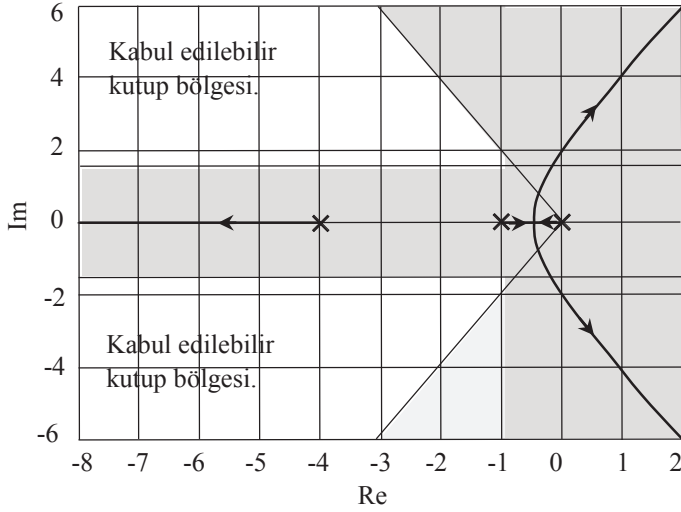
olup, birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri için aranan şart aşağıda görüldüğü gibi sağlanmaktadır.

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 4s + K} \left(\frac{1}{s} \right) = 1 \quad (3.104)$$

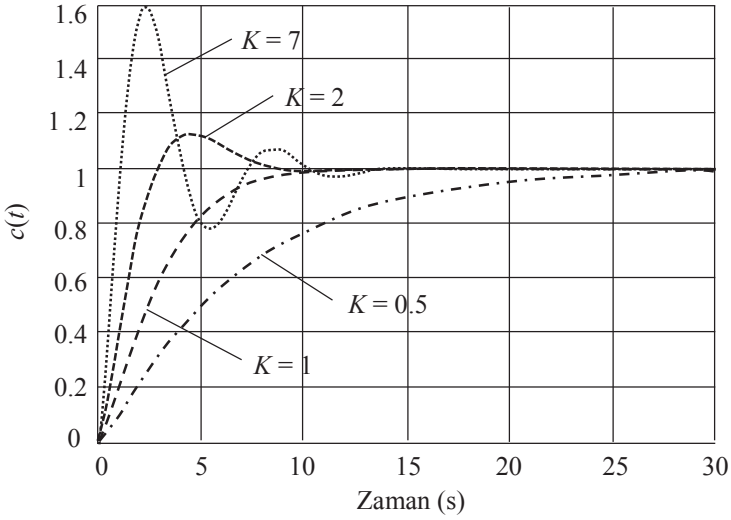


Şekil 3.30

Ayrıntıya girmemek için yer eğrilerinin çizim aşamaları burada verilmeyecektir. Bu sistemin yer eğrileri Şekil 3.31'de, denklemler (3.100) ile tanımlanan kabul edilebilir eşlenik kutup bölgeleriyle birlikte verilmiştir. Görüldüğü gibi kazanç değeri yeterince artırıldığında sistem kararsız hale gelmektedir. Eşlenik kutuplar baskındır ve kabul edilebilir kutup bölgesi içinde değildir. Tasarım şartlarının hepsinin birlikte sağlanmadığı Şekil 3.32'de görülen birim basamak cevaplarda açıkça görülmektedir.



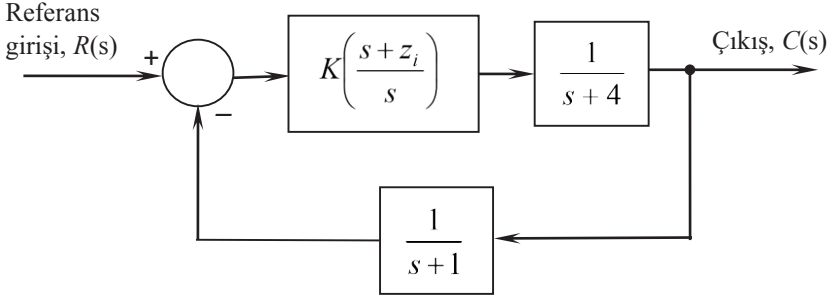
Şekil 3.31



Şekil 3.32

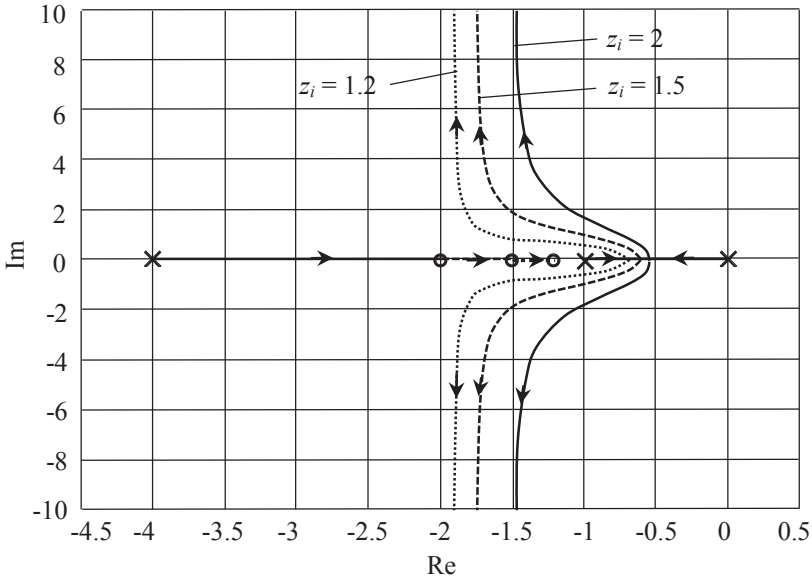
ii) *PI kontrol*

PI kontrol integral işlem dolayısıyla durağan hatayı sıfır yapar. Buna karşılık sisteme ilave bir kapalı çevrim sıfırı eklediğinden geçici davranışın iyileştirilmesine de olanak sağlar. *PI* kontrol uygulanan sistemin blok diyagramı Şekil 3.33'de verilmiştir.



Şekil 3.33

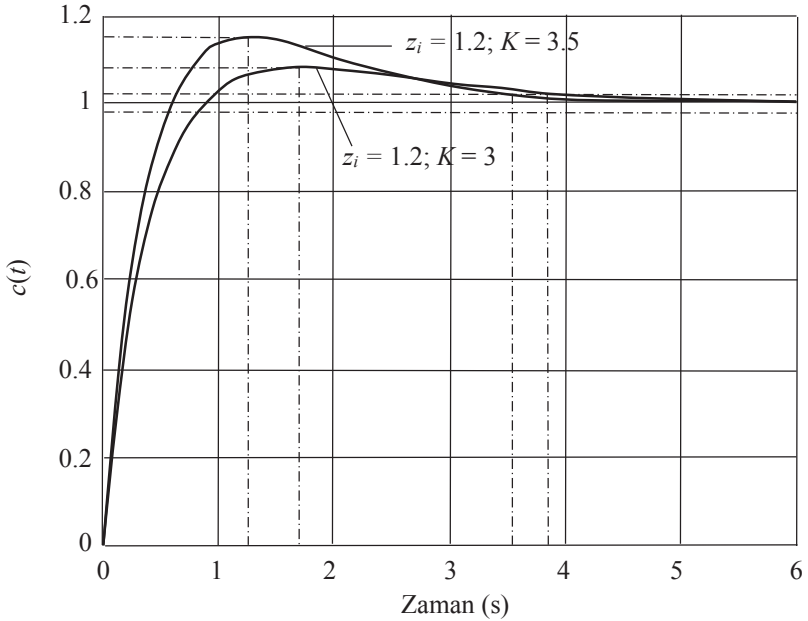
Şekil 3.34’de kontrolcü tarafından eklenen sıfırın farklı değerleri için çizilmiş olan yer eğrileri görülmektedir. Eğrilerden görüldüğü gibi, kazanç değerleri artarken eşlenik kutuplar sola doğru, gerçek kutup ise sağa doğru kaymakta ve eşlenik kutupların baskınlığı azalmaktadır. Bu eğriler üzerinde sistem sönümünü artırmak amacıyla gerçek eksene nisbeten yakın kısımlarda çalışma noktaları seçilerek sistem performansları incelenmiştir. Sonuçlar Çizelge 3.7’de özetlenmiştir. Çizelgede en iyi sonuçların $z_i = 1.2$ alındığında, 3-3.5 dolayındaki K değerleri için elde edildiği görülmektedir. Bu sistemlerin birim basamak cevapları Şekil 3.35’de verilmiştir.



Şekil 3.34

Çizelge 3.7

z_i	K	Kapalı Çevrim Kutupları			M_p	t_p (s)	t_s (s)
1.2	2	-0.76+0.33j	-0.76-0.33j	-3.47	0.05	5.12	2.91
	2.5	-0.85+0.44j	-0.85-0.44j	-3.31	0.03	2.73	3.85
	3	-0.93+0.53j	-0.93-0.53j	-3.13	0.08	1.71	3.85
	3.5	-1.03+0.60j	-1.03-0.60j	-2.93	0.15	1.26	3.53
1.5	1.5	-0.67+0.41j	-0.67-0.41j	-3.66	0.02	4.7	2.90
	2	-0.73+0.56j	-0.73-0.56j	-3.55	0.06	2.83	5.01
	2.5	-0.79+0.69j	-0.79-0.69j	-3.42	0.13	1.99	4.37
	3	-0.86+0.80j	-0.86-0.80j	-3.29	0.20	1.51	3.81
2	1	-0.58+0.42j	-0.58-0.42j	-3.83	0.03	5.14	6.28
	1.5	-0.63+0.64j	-0.63-0.64j	-3.75	0.11	2.93	5.46
	2	-0.67+0.80j	-0.67-0.80j	-3.66	0.20	2.09	4.44
	2.5	-0.71+0.94j	-0.71-0.94j	-3.57	0.29	1.65	5.7



Şekil 3.35

KAYNAKLAR

- [3.1] Evans, W.R., *Graphical Analysis of Control Systems*, AIEE Transactions, v. 67, pp. 547-551, 1948.
- [3.2] Evans, W.R., *Control System Synthesis by Root Locus Method*, AIEE Transactions, v. 69, pp. 66-69, 1950.
- [3.3] Chever, E.W., *Derivation of Root Locus Rules*, 2019
https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/DeriveRootLocusRules.html###section33.
- [3.4] Murray, E.W., *Root Locus*, 2019
https://cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa03/caltech/pph02_ch29.pdf.
- [3.5] D’Azzo, J.J., Houpis, C.H., *Linear Control System Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [3.6] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 2d ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1991.
- [3.7] Grant, A.J., *Conservation of the Sum of the System Roots as Applied to the Root Locus Method*, unpublished paper, North American Aviation, Inc., Apr. 10, 1953.
- [3.8] Neuman, C.P., *The Two-Pole Two-Zero Root Locus*, IEEE Transactions, v.37, No.4, 1994.
- [3.9] Yang, Z., *MM11 Root Locus Design Method*,
<http://homes.et.aau.dk/yang/DE5/CC/mm11.pdf>, 2011.

PROBLEMLER

Not: Problemlerin çözümünde MATLAB’den yararlanın.

- 3.1 i) Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s + 5}$$

olan bir sisteme sırasıyla -4 ve -2 'de açık çevrim kutupları eklerseniz, yer eğrileri nasıl değişikliğe uğrar. Gözlemlerinizi tartışın.

ii) Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+5)(s+4)(s+2)}$$

olan sisteme sırasıyla -7 ve -3 'de açık çevrim sıfırları eklerseniz, yer eğrileri nasıl değişikliğe uğrar. Gözlemlerinizi tartışın.

3.2 Açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistem birim geribeslemelidir.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+4)}$$

Sistemin yer eğrilerini çizin ve $K = 10$ için sistemin birim basamak cevabını bulun. Açık çevrim transfer fonksiyonuna, $z = -6.1$ gibi bir sıfır ve $p = -6$ gibi bir kutup ilave edilirse, yer eğrisi ve birim basamak cevap bundan nasıl etkilenir.

3.3 Açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistem birim geribeslemelidir.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+4)}$$

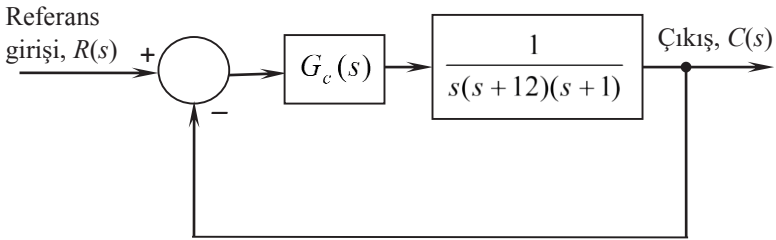
Sistemin yer eğrilerini çizin ve $K = 10$ için birim basamak cevabını bulun. Açık çevrim transfer fonksiyonuna $z = -0.1$ gibi bir sıfır ve $p = -0.01$ gibi bir kutup ilave edilirse, sistemin yer eğrisi ve birim basamak cevabı bundan nasıl etkilenir. Sistemin statik ve dinamik davranışı hakkında ne söyleyebilirsiniz. Uygulanan işlem nedir?

3.4 Aşağıda birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+8)}$$

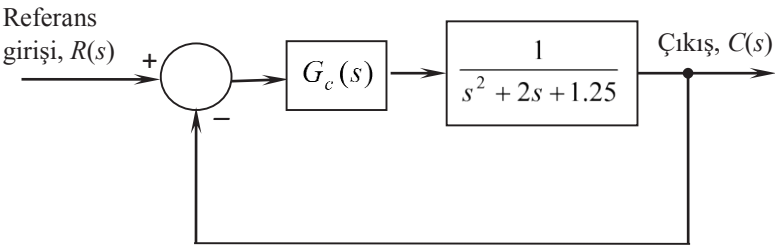
$0 \leq K \leq \infty$ için yer eğrilerini çizin. $K = 300$ olduğuna göre sistemin baskın kapalı çevrim kutuplarını bulun. Baskın kutupların özelliklerinden yararlanarak % 2 kriterine göre yerleşme zamanı ve maksimum aşmayı belirleyin. Maksimum aşmayı en çok % 20, yerleşme süresini ise 1 s yapmak için faz ilerletici bir denkleştirici tasarlayın. K değeri ne olmalıdır? İstenen kriterlerin sağlandığını gösterin.

3.5 Bir sistemin blok diyagramı şekildeki gibidir.



Başlangıçta $G_c(s) = 1$ 'dir. Bu durumda birim basamak cevabın aşması ve % 2 kriterine göre yerleşme zamanı nedir? Bu sistemin baskın kökleri için maksimum aşmanın en çok % 10 ve yerleşme zamanının 1 s olması istenirse baskın kökleri nereye yerleştirmek gerekir. Şimdi baskın kökleri bu yere taşıyacak bir faz ilerletici denkleştirici tasarlayın. Sonuç ne kadar başarılı? Tartışın.

3.6 Bir sistemin blok diyagramı şekildeki gibidir.



- i) Oransal kontrol kullanılırsa birim basamak giriş için durağan hatanın 0.01'den az olmasını sağlayacak kontrolcü kazancı nasıl seçilmelidir?

ii) Şimdi de,

$$G_c(s) = K \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

arak, kontrolcü kazancını 10 kat artırıcı etki sağlayacak bir faz-geriletici denkleştirici tasarlayın. Bu durumda durağan hatanın 0.01'den az olmasını sağlayacak K değeri nedir?

iii) Yukarıda bulunan iki sistemin birim basamak cevaplarını elde ederek karşılaştırın ve yorumlayın.

3.7 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = K \frac{s + 6}{(s + 12)(s^2 + 2s + 2)}$$

i) $K = K_p$ için durağan hata nedir?

ii) Yüzde aşmanın % 10'dan küçük, % 2 kriterine göre yerleşme zamanının 4 s'den küçük olması için K 'nin değeri hangi sınırlar içinde olmalıdır?

iii) Bu sistem için bir PI kontrolcü tasarlayarak, hatanın durağan değeri sıfır yapılmak isteniyor. Yüzde aşmanın 0.1'e eşit, yerleşme zamanının 4 s'den az olması için bir PI kontrolcü tasarlayın.

3.8 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = K \frac{s + 6}{s(s + 12)(s^2 + 2s + 2)}$$

i) $K = 5$ için kapalı çevrim kutuplarını bulun. Baskın kutupların yerlerini dikkate alarak yüzde aşma ve %2 kriterine göre yerleşme zamanını bulun. Birim basamak giriş için durağan hata nedir? Birim rampa giriş için durağan dinamik hata nedir?

ii) Uygun bir faz-geriletici denkleştirici tasarlayarak dinamik hatayı 0.05'in altına azaltın.

- 3.9** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$K = 2$ için sistemin birim basamak cevabını bulun. M_p ve t_s değerleri nedir?

Bu sistem için bir *PD* kontrolcü tasarlayarak birim basamak cevabın maksimum aşmasının % 20'den küçük ve % 2 kriterine göre yerleşme zamanının 1 s'den küçük olmasını sağlayın.

- 3.10** Problem 3.9'daki sistem için, verilen şartları sağlayacak bir faz ilerletici denkleştirici tasarlayın.
- 3.11** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+8)}$$

Bu sistemin birim basamak cevabının aşağıdaki şartları sağlaması için bir *PID* kontrolcü tasarlayın.

Yüzde aşma \leq % 20
 %2 kriterine göre yerleşme zamanı \leq 1.5 s
 Birim basamak durağan hata = 0

- 3.12** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K(s+8)}{(s^2 + 2s + 2)(s+12)}$$

Bu sistemin birim basamak cevabının aşağıdaki şartları sağlaması için bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlayın.

Yüzde aşma \leq % 10
 %2 kriterine göre yerleşme zamanı \leq 1 s
 Durağan hata \leq 0.01

- 3.13** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

Bu sistemin birim basamak cevabının aşağıdaki şartları sağlaması için bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlayın.

$$\text{Yüzde aşma} \leq \% 10$$

$$\%2 \text{ kriterine göre yerleşme zamanı} \leq 2 \text{ s}$$

$$\text{Durağan hata} \leq 0.01$$

- 3.14** Problem 3.13'de verilen sistemin, aşağıdaki şartları sağlaması için bir *PID* kontrolcü tasarlayın.

$$\text{Yüzde aşma} \leq \% 10$$

$$\%2 \text{ kriterine göre yerleşme zamanı} \leq 2 \text{ s}$$

- 3.15** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+12)}$$

- i) Birim basamak giriş için maksimum aşamanın 0.10 olması istenirse, baskın kutupların yeri, K ve % 2-yerleşme zamanı değerleri nedir?
- ii) Bir *PD* kontrolcü tasarlayarak maksimum aşmayı 0.10 değerinde tutarak yerleşme zamanını yarıdan fazla indirin.

- 3.16** Problem 3.15'de verilen sistemi bu defa faz-ilerletici bir denkleştirici tasarlayarak çözün.

- 3.17** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+12)}$$

- i) Birim basamak giriş için maksimum aşamanın 0.20 olması istenirse, baskın kutupların yeri, K ve % 2 kriterine göre yerleşme zamanı değerleri nedir?
- ii) Faz ilerletici bir denkleştirici tasarlayarak maksimum aşmayı 0.20 değerinde tutarak yerleşme zamanını 2 s'nin altına azaltın.

3.18 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Faz ilerletici bir denkleştirici tasarlayarak aşağıdaki kriterleri sağlayın. Bu durumda durağan hata ne olur?

Maksimum aşma = % 16
Tepe zamanı < 0.5 s

BODE DİYAGRAMIYLA KONTROL SİSTEMİ TASARIMI

Klasik kontrolde sistem tasarımı için kullanılan başlıca iki yaklaşım vardır. Bunlardan birisi daha önce Bölüm 3’de incelenen yer eğrisi yöntemidir. Bu yöntemle tasarım yapılırken yerleşme zamanı, tepe zamanı, yüzde aşma gibi geçici davranış kriterleri karşılanmaya çalışılır. Yer eğrisi yöntemi düşük mertebeli sistemlerde oldukça kullanışlıdır. Ancak sistem mertebesi yüksekse baskın bir kutup eldesi oldukça zor olabilir ve sistem cevabı diğer kutuplar ve sıfırlar tarafından da kuvvetle etkilenebilir. İkinci yaklaşım ise frekans cevabına dayanır. Yüksek mertebeli sistemler için bu yaklaşım daha kullanışlıdır. Frekans cevabı yöntemlerinde, sisteme sinüsoidal bir giriş uygulandığında $t \rightarrow \infty$ iken elde edilen durağan sinüsoidal cevabın genlik ve fazının frekansla değişimi kullanılır. Bu yöntemlerde kazanç payı, faz payı, bant genişliği, rezonans tepesi yüksekliği gibi performans kriterleri esas alınır. Daha önce Bölüm 2’de tanımları yapılan bu kriterler burada daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Frekans cevabı yöntemlerinde kullanılan tasarım kriterlerinin zaman bölgesinde kullanılan tasarım kriterleriyle bire bir ilişkilendirmesi ikinci mertebeli sistemler dışında mümkün değildir. Ancak yine de kabaca bir ilişki kurulabilir. Frekans cevabı yöntemlerinin önemli bir üstünlüğü, sistemdeki gürültünün, özellikle de ölçüm sisteminden kaynaklanan gürültünün yok edilmesi için önlemler alınmasına imkan vermesidir. Bir diğer üstünlük ise, transfer fonksiyonu bilinmeyen sistemlerin frekans cevabının nisbeten kolaylıkla deneysel olarak belirlenebilmesi ve buna dayanarak kontrol sistemi tasarımının yapılabilmesidir. Frekans cevabı yöntemleriyle tasarım yapılırken, açık çevrim transfer fonksiyonunun yapısı, tasarım kriterlerini sağlayacak biçimde çeşitli denkleştirici elemanlarla değiştirilir ve buna dayanarak kapalı çevrim sistemin cevabının özelliklerinin iyileştirilmesi sağlanır. Bu bölümde frekans cevabı yöntemleri arasında en yaygın olarak kullanılan, Bode diyagramları yöntemi incelenecektir.

4.1 Durağan Sinüsoidal Cevap

Bir sistemin girişi $x(t)$, çıkışı da $y(t)$ olsun. Giriş ve çıkış arasındaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.1)$$

Burada $N(s)$ transfer fonksiyonunun pay polinomu, $D(s)$ ise sistemin karakteristik polinomu olup, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$D(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (4.2)$$

Bu sisteme genliği X_0 ve frekansı ω olan sinüsoidal bir giriş uygulansın. Girişin Laplace transformu,

$$X(s) = \frac{\omega X_0}{s^2 + \omega^2} \quad (4.3)$$

olduğundan, çıkışın Laplace tranformu için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \frac{\omega X_0}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_n)} \left(\frac{\omega X_0}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Bu ifadede $D(s)$ çarpanlarına ayrılmıştır. p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sistemin kutuplarıdır. Burada konunun kolay anlaşılması için sistem kutuplarının birbirinden farklı olduğu kabul edilmiştir. (Bu varsayım elde edilecek sonuçların genelliğini bozacak nitelikte değildir.) Transfer fonksiyonu kısmi kesirlerine ayrılırsa, denklem (4.4) a_1 , a_2 ve b_i ($i = 1, \dots, n$) kısmi kesir katsayıları cinsinden aşağıdaki hale dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} \\ &+ \frac{b_1}{s - p_1} + \frac{b_2}{s - p_2} + \dots + \frac{b_n}{s - p_n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Yukarıdaki denklemin ters Laplace transform alınır, sistem cevabı $y(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + b_1 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t} + \dots + b_n e^{p_n t} \quad (4.6)$$

Eğer sistem kararlıysa bütün kapalı çevrim kutuplarının gerçekte kısımları negatif olacağından denklem (4.6)'daki $b_i e^{p_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) terimlerinin hepsi $t \rightarrow \infty$ iken sifra gider. Bu yüzden zaman sonsuza giderken sistem cevabı aşağıdaki hali alır.

$$y(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} \quad (4.7)$$

Bu denklemde a_1 ve a_2 katsayıları kalıntı (residue) teoreminden aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$a_1 = \left[G(s) \left(\frac{\omega X_0}{s^2 + \omega^2} \right) (s + j\omega) \right]_{s=-j\omega} = -\frac{X_0}{2j} G(-j\omega) \quad (4.8)$$

$$a_2 = \left[G(s) \left(\frac{\omega X_0}{s^2 + \omega^2} \right) (s - j\omega) \right]_{s=j\omega} = \frac{X_0}{2j} G(j\omega) \quad (4.9)$$

$G(j\omega)$ ve $G(-j\omega)$ kompleks sayıları eksponansiyel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (4.10)$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} \quad (4.11)$$

Yukarıdaki eşitliklerde $|G(j\omega)|$ ve $\phi(\omega)$ sırasıyla $G(j\omega)$ kompleks sayısının büyüklük ve faz açısı olup, aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{[\text{Re } G(j\omega)]^2 + [\text{Im}(G(j\omega))]^2} \quad (4.12)$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} [\text{Im}(G(j\omega)) / \text{Re } G(j\omega)] \quad (4.13)$$

Denklemler (4.10) ve (4.11), önce deklemler (4.8) ve (4.9)'da yerine koyulur, bu şekilde bulunan a_1 ve a_2 'nin çözümleri denklem (4.7)'de yerine koyulursa aşağıdaki ifade bulunur.

$$y(t) = X_0 |G(j\omega)| \left[\frac{e^{j[\omega t + \phi(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \phi(\omega)]}}{2j} \right] \quad (4.14)$$

Diğer yandan Euler formülünden,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (4.15)$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (4.16)$$

ya da,

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (4.17)$$

olduğu dikkate alınır, $y(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = X_0 |G(j\omega)| \sin [\omega t + \phi(\omega)] = Y_0 \sin [\omega t + \phi(\omega)] \quad (4.18)$$

O halde sistemin sinüsoidal girişe olan durağan cevabı, zorlama frekansıyla aynı frekansa sahip, ama girişe göre $\phi(\omega)$ kadar faz farkı olan, Y_0 genlikli bir sinüs fonksiyonu biçimindedir. Çıkış ve giriş genliklerinin oranı ve faz farkı aşağıdaki denklemlerle tanımlanmıştır.

$$\frac{Y_0}{X_0} = |G(j\omega)| \quad (4.19)$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) \quad (4.20)$$

Denklemler (4.19) ve (4.20) ile verilen genlik oranı ve faz açısının ω frekansıyla değişim biçimine sistemin frekans cevabı denir. Faz açısı negatifse bu duruma faz gerilemesi, pozitifse faz ilerlemesi denir. Bir sistemin frekans cevabı özellikleri o sistemin dinamiğine ilişkin tüm bilgileri içerir. Hatırlanacağı gibi herhangi bir periyodik fonksiyon Fourier serisi halinde sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile ifade edilebilir. Periyodik olmayan fonksiyonlar ise Fourier integraliyle yine harmonic bileşenlere ayrıştırılabilir. Dolayısıyla sistemin sinüs fonksiyonuna olan cevabı biliniyorsa, herhangi bir girişe olan cevabı da süperpozisyon prensibini kullanarak bulunabilir.

4.2 Frekans Cevabı Analizinde ve Tasarımında Kullanılan Yöntemler

Frekans cevabı analizinde açık çevrim transfer fonksiyonunun durağan sinüsoidal davranışı kullanılır. Denklem (4.19) ile verilen genlik oranının ve denklem (4.20) ile verilen faz açısının ω freansı ile değişimi incelenir. Bu değişimlerin gösterimi için aşağıdaki üç grafikten birisi kullanılır.

- i) Nyquist diyagramı
- ii) Nichols diyagramı
- iii) Bode diyagramları

Bu diyagramların hepsi aynı bilgiyi içerir. Sadece sunum ve kullanım şekilleri farklıdır.

Nyquist diyagramı $G(j\omega)$ 'nın büyüklük ve faz açısının polar grafiğidir. Tek bir grafikten oluşur. ω freansı 0'dan ∞ 'a kadar değiştirilirken yatay eksen $\text{Re}[G(j\omega)]$, dikey eksen ise $\text{Im}[G(j\omega)]$ çizilir. Dolayısıyla orijinden eğri üzerinde herhangi bir ω değerine karşılık gelen noktaya bir vektör çizildiğinde, bunun boyu $G(j\omega)$ 'nın büyüklüğünü, gerçek eksenle yaptığı açı ise $G(j\omega)$ 'nın faz açısını verir.

Nichols diyagramı ise $G(j\omega)$ 'nın büyüklüğünün dB olarak dikey eksen, faz açısının ise derece olarak yatay eksen üzerinde gösterildiği tek bir grafik.

Yukarıdaki grafiklerden en yaygın olarak kullanılan ve kontrol sistemleri ders kitaplarında en çok yer alanı ise Bode diyagramlarıdır. Bode diyagramları iki diyagramdan oluşur. Diyagramlardan birisi logaritmik bir ıskala olan dB cinsinden ifade edilen genlik oranına karşı, frekans ω 'nın 10 tabanına göre logaritmasının çizildiği *büyüklik diyagramı*'dır. Faz diyagramı denilen ikinci grafikte ise faz açısına karşı ω 'nın 10 tabanına göre logaritması çizilir. Büyüklüğün dB olarak tanımı aşağıdaki gibidir.

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \text{ dB} \quad (4.21)$$

Bode diyagramları bir sonraki bölümde verilen kuralları kullanarak kabaca elle çizilebileceği gibi, MATLAB gibi yazılımları kullanarak hesaplama yoluyla da çizilebilir. Elle çizim kurallarının bilinmesi tasarım aşamasında alınacak önlemlerin etkilerinin tahmini açısından çok önemlidir.

Bode diyagramlarıyla analiz ve tasarım yapmanın üstünlükleri aşağıdaki gibi sayılabilir.

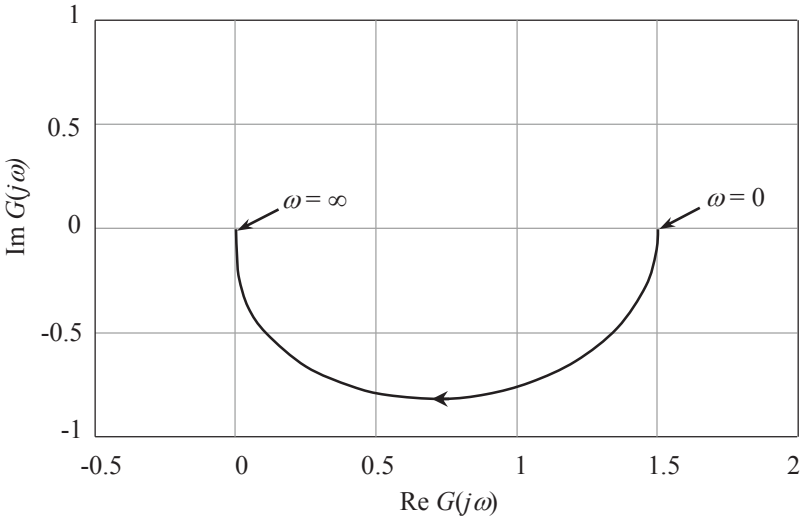
- a) Bode büyüklük diyagramında logaritmik eksenler kullanıldığından transfer fonksiyonundaki çarpanların grafikleri bağımsız olarak çizilebilir ve bunlar toplanarak tüm transfer fonksiyonunun büyüklük diyagramı kolaylıkla elde edilir. Bu yüzden yüksek mertebeli sistemlerle kullanımı kolaydır. Bu özellikten dolayı ardışık sistemlerin Bode diyagramları, bunların diyagramlarını toplayarak elde edilir.
- b) Transfer fonksiyonunun faz diyagramı da çarpanların grafiğini ayrı ayrı çizilerek ve bunları toplayarak elde edilir.
- c) Bode diyagramları yaklaşık olarak asimptotik doğrular kullanarak elle çizilebilir. Çizim kuralları çarpanların etkilerini ortaya koyduğundan, tasarım sırasında transfer fonksiyonuna eklenen denkleştirici çarpanlarının, büyüklük ve faz diyagramlarının şekillerini nasıl etkileyeceği öngörülebilir.
- d) Bode diyagramları deneysel olarak bulunabilir. Asimptotik Bode diyagramlarının eğim ve köşe frekans özelliklerinden yararlanarak, deneysel olarak elde edilmiş frekans cevabı eğrilerinden sistem tanımlaması yapılabilir, sistemlerin transfer fonksiyonları elde edilebilir ve kontrolcü tasarımı yapılabilir.
- e) Kullanılan logaritmik ıskala dolayısıyla Bode diyagramları çok düşük frekanslardan çok yüksek frekanslara kadar geniş bir frekans aralığını kapsayabilir.
- f) Kazanç payı, faz payı, geçme frekansı, kesme frekansı gibi frekans cevabı analiz ve tasarımında kullanılan kriterler, açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramlarından kolayca bulunabilir.
- g) Rezonans frekansları, rezonans tepe yüksekliği, bant genişliği, herhangi bir zorlama frekansına sistemin duyarlılığı gibi özellikler, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramlarından elde edilebilir.

- h) Bode diyagramları kullanıldığında kontrol sisteminde olabilecek yüksek frekanslı gürültüyü filtrelemek için alınması gereken önlemler kolaylıkla belirlenebilir.
- i) Çevrim kazancının değiştirilmesi Bode büyüklük diyagramının şeklini değiştirmeden sadece düşey yönde kaymasına sebep olur. Kazanç değişikliği faz diyagramını ise etkilemez.
- j) Yukarıda sayılan özellikler dolayısıyla, Bode diyagramları kullanarak kontrol sistemi tasarımı oldukça kolaydır.

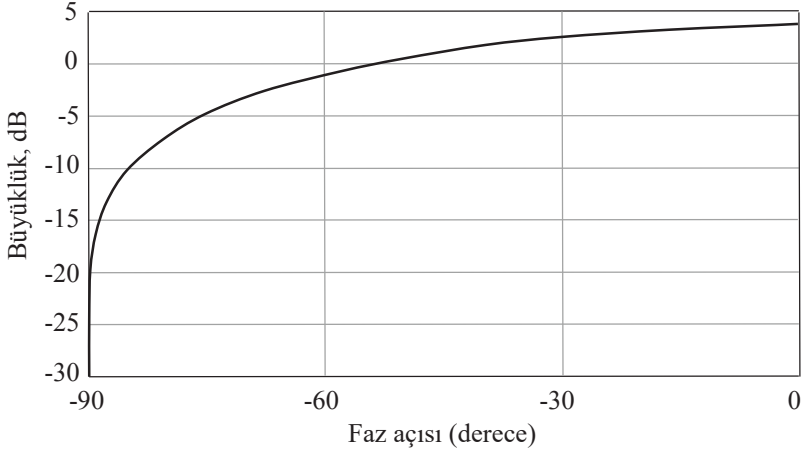
Şekil 4.1 - Şekil 4.3'de, yukarıda sözü edilen diyagramların görünümü hakkında fikir vermek amacıyla, transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

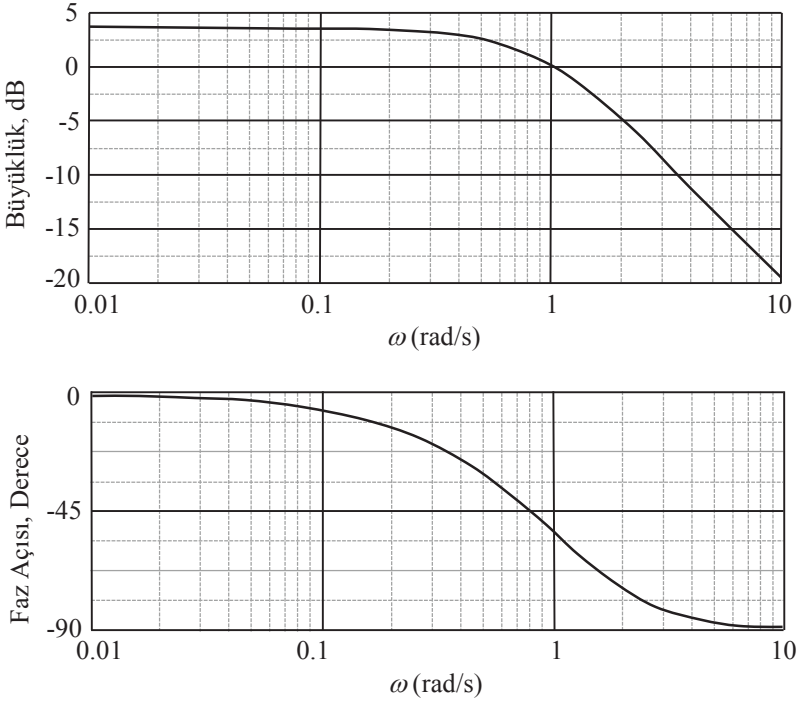
olan bir sistemin MATLAB yazılımıyla çizilen Nyquist, Nichols ve Bode diyagramları sırasıyla verilmiştir.



Şekil 4.1



Şekil 4.2



Şekil 4.3

4.3 Bode Diyagramlarının Elle Çizilmesi

Bode diyagramlarının elle çizilme kurallarının bilinmesi, kullanılacak denkleştiricilerin etkilerini bilgisayara gerek kalmadan önceden tahmin ve değerlendirme açısından önemlidir. Deneysel yollarla elde edilmiş olan Bode diyagramlarından transfer fonksiyonlarının çıkarılması için de bu kuralların bilinmesine gerek vardır. Aşağıda ayrıntıları verilecek olan asimptotik eğriler kısa sürede kolaylıkla çizilebilir, bunlardan sistemlerin marjinal kararlılık durumları, durağan ve geçici davranışlarının iyileştirilmesi için kullanılması gereken denkleştiriciler kolaylıkla belirlenebilir.

Lineer bir sistemin açık ya da kapalı transfer fonksiyonu iki polinom oranı biçiminde olup, bu polinomların kökleri cinsinden aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılabilir.

$$T(s) = \frac{A_1(s)A_2(s)..A_m(s)}{B_1(s)B_2(s)..B_n(s)} \quad (4.22)$$

Frekans cevabı transfer fonksiyonu ise bu ifadede s yerine $j\omega$ koyarak elde edilir.

$$T(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)A_2(j\omega)..A_m(j\omega)}{B_1(j\omega)B_2(j\omega)..B_n(j\omega)} \quad (4.23)$$

Yukarıdaki ifadede $T(j\omega)$ ve eşitliğin sağındaki çarpanların her biri birer kompleks sayıdır. $T(j\omega)$ kompleks sayısının büyüklüğü çarpanların büyüklükleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$|T(j\omega)| = \frac{|A_1(j\omega)||A_2(j\omega)|..|A_m(j\omega)|}{|B_1(j\omega)||B_2(j\omega)|..|B_n(j\omega)|} \quad (4.24)$$

Denklem (4.24)'ün 10 tabanına göre logaritması alınıp, denklemin iki tarafı 20 ile çarpılırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$20 \log_{10}|T(j\omega)| = 20 \log_{10}|A_1(j\omega)| + 20 \log_{10}|A_2(j\omega)| + \dots + 20 \log_{10}|A_m(j\omega)| \\ + 20 \log_{10}\left|\frac{1}{B_1(j\omega)}\right| + 20 \log_{10}\left|\frac{1}{B_2(j\omega)}\right| + \dots + 20 \log_{10}\left|\frac{1}{B_n(j\omega)}\right| \quad (4.25)$$

Bu denklemde bütün büyüklükler dB cinsinden ifade edilmiştir. O halde $T(j\omega)$ 'nın dB cinsinden büyüklüğünün ω ile değişim grafiğini elde etmek için her bir çarpanın dB cinsinden büyüklüğünün ω ile değişim grafiğini çizmek ve bunları toplamak yeterlidir. Uygulamada ω ekseninde (yatay eksen) lineer değil, 10 tabanına göre logaritmik ıskala kullanılır. Bu ıskalada herhangi bir frekansla bunun 10 katı olan frekans arasında kalan frekans aralığına *onluk* denir. Logaritmik ıskalada bir onluğun uzunluğu başlangıç ve bitiş frekanslarından bağımsız ve aynıdır. Yatay olan ω ekseninde her onluk artışında frekans 10 kat artar. Büyüklük 10 kat arttığında ise büyüklük diyagramındaki dB değeri 20 dB artar.

Denklem (4.23) ile verilen $T(j\omega)$ kompleks sayısının faz açısı çarpanların açıları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \angle T(j\omega) = & \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) + \dots + \angle A_m(j\omega) \\ & - \angle B_1(j\omega) - \angle B_2(j\omega) - \dots - \angle B_n(j\omega) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Denklem (4.26)'dan görüldüğü gibi, $T(j\omega)$ 'nın faz açısı, transfer fonksiyonunun payındaki çarpanların faz açılarını "+" işaretiyle, paydasındaki çarpanların faz açılarını ise "-" işaretiyle toplayarak elde edilir.

Denklem (4.26), $T(j\omega)$ 'nın çarpanları cinsinden aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \angle T(j\omega) = & \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) + \dots + \angle A_m(j\omega) \\ & + \angle \frac{1}{B_1(j\omega)} + \angle \frac{1}{B_2(j\omega)} + \dots + \angle \frac{1}{B_n(j\omega)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

O halde $T(j\omega)$ 'nın açısının ω ile değişim grafiğini elde etmek için her bir çarpanın açısının ω ile değişim grafiğini çizmek ve bunları toplamak yeterlidir.

Herhangi bir transfer fonksiyonunun çarpanları aşağıdaki dört formdan biri gibi olabilir.

- Sabit kazanç, K
- Orijinde, katlı veya katsız sıfır veya kutuplar, $s^{\pm m}$
- Gerçek, katlı veya katsız sıfır veya kutuplar, $(Ts + 1)^{\pm n}$

- d) Kompleks, katlı veya katsız sıfır veya kutuplar,
 $(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)^{\pm r}$

Eğer bu çarpanların büyüklük ve faz grafikleri çizilirse, herhangi bir transfer fonksiyonunun büyüklük ve faz grafikleri bunlar cinsinden oluşturulabilir. Aşağıda her bir tip çarpanın büyüklük ve faz grafikleri çizilecek ve özellikleri ortaya koyulacaktır.

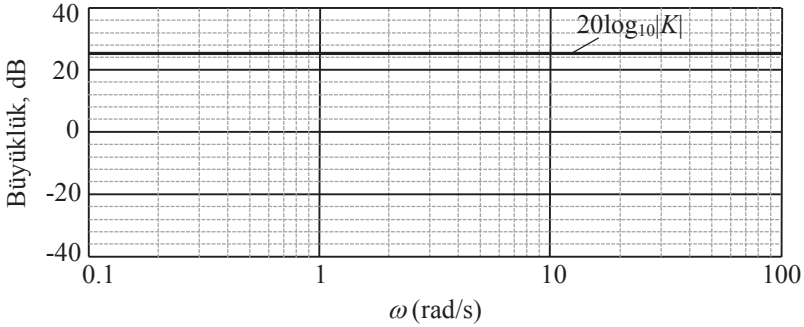
- i) Sabit kazanç, K

Transfer fonksiyonunda K gibi bir kazanç çarpanı varsa, bunun dB cinsinden büyüklüğü ve derece büyüklüğünden faz açısı aşağıdaki gibidir.

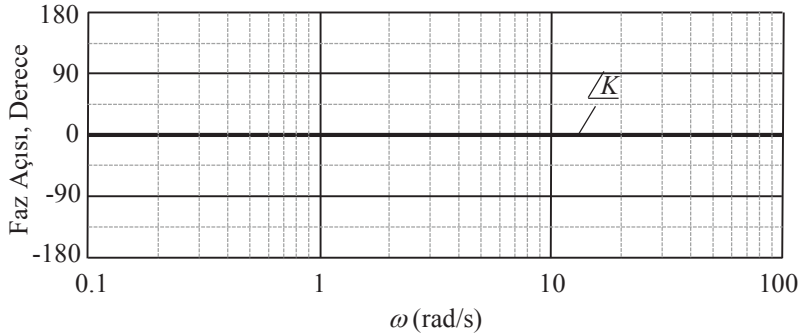
$$\text{dB cinsinden } |K| = 20 \log_{10} K \quad (4.28)$$

$$\text{Derece cinsinden } \angle K = 0^\circ \quad (4.29)$$

K çarpanı için Bode diyagramları Şekiller 4.4 ve 4.5’de verilmiştir.



Şekil 4.4



Şekil.4.5

ii) Orijinde sıfır veya kutuplar, $s^{\pm m}$

Eğer transfer fonksiyonunda $s^{\pm m}$ gibi bir çarpan varsa, bunun dB cinsinden büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

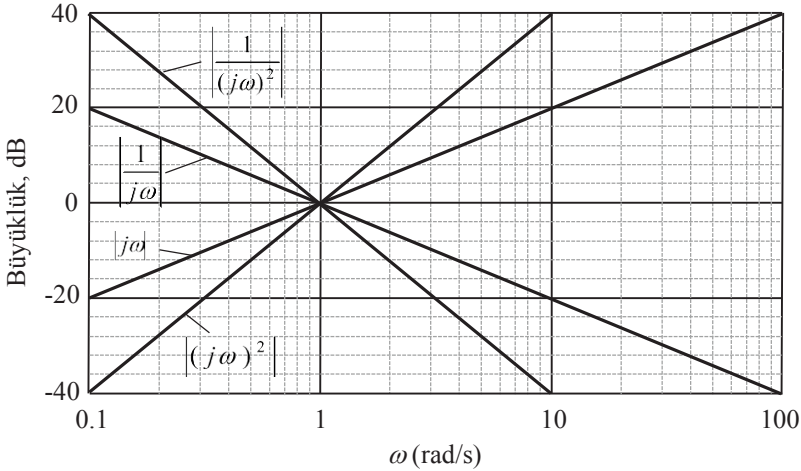
$$\begin{aligned} \text{dB cinsinden } |(j\omega)^{\pm m}| &= 20 \log_{10} |(j\omega)^{\pm m}| \\ &= \pm 20m \log_{10} |j\omega| = \pm 20m \log_{10} \omega \end{aligned} \quad (4.30)$$

Bu ifadeden görüldüğü gibi, eğer ω -ekseni için logaritmik ıskala kullanılırsa, dB cinsinden büyüklüğe karşı ω eğrileri $\pm 20m$ dB/onluk eğimli doğrulardır. $\omega = 1$ olduğunda bu doğruların hepsi 0 dB noktasından geçer. Şekil 4.6'da s 'nin üssünün ± 1 ve ± 2 olduğu durumlar için büyüklük eğrileri verilmiştir.

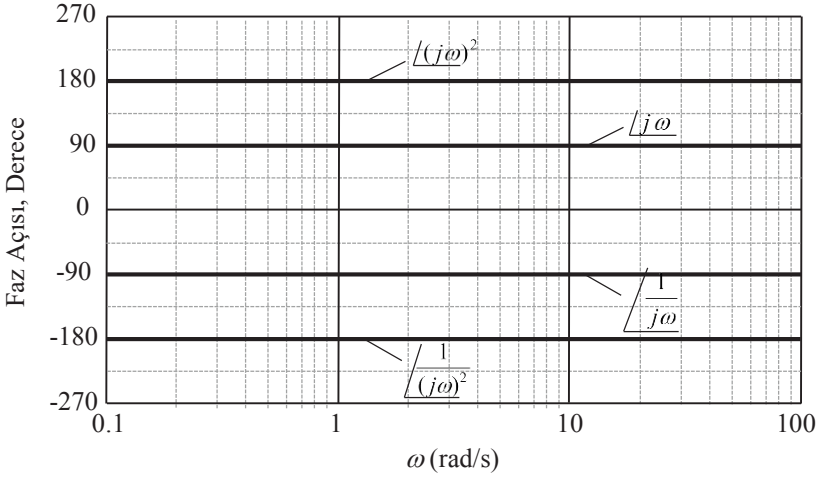
$s^{\pm m}$ çarpanının derece cinsinden faz açısı aşağıdaki gibidir.

$$\angle (j\omega)^{\pm m} = \pm m 90^\circ \quad (4.31)$$

Bu çarpanın faz eğrileri yatay olup, üssün ± 1 ve ± 2 değerleri için Şekil 4.7'de görülmektedir.



Şekil 4.6



Şekil 4.7

iii) Gerçek sıfır veya kutuplar, $(Ts + 1)^{\pm q}$

Eğer transfer fonksiyonunda $(Ts + 1)^{\pm q}$ gibi bir çarpan varsa, bunun dB cinsinden büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

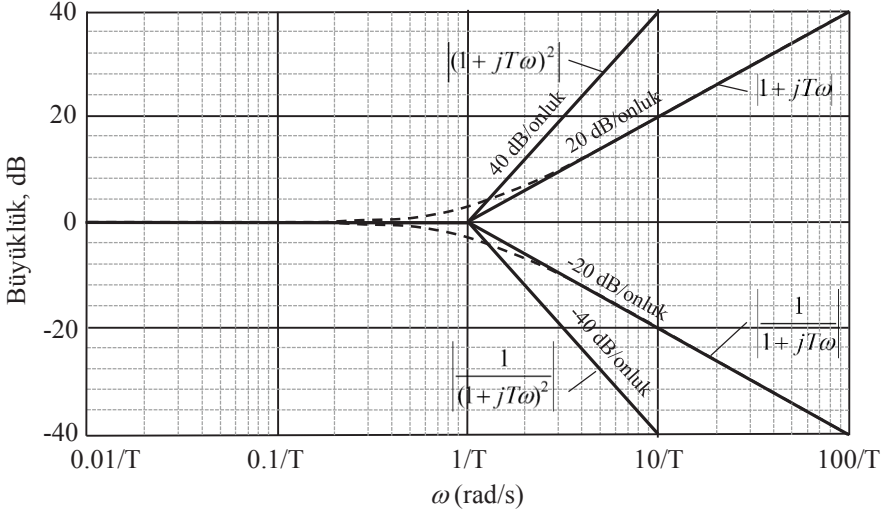
$$\text{dB cinsinden } |(jT\omega + 1)^{\pm q}| = \pm 20q \log_{10} \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \quad (4.32)$$

Bu ifade ωT 'nin 1'den çok küçük ve çok büyük olduğu hallerde aşağıdaki asimptotlara yaklaşır.

$$\pm 20q \log_{10} \sqrt{1 + T^2 \omega^2} = 0 \text{ dB} \quad (\omega T \ll 1) \quad (4.33)$$

$$\pm 20q \log_{10} \sqrt{1 + T^2 \omega^2} = \pm 20q \log_{10}(\omega T) \text{ dB} \quad (\omega T \gg 1) \quad (4.34)$$

Bu asimptotlar üssün ± 1 ve ± 2 olduğu haller için Şekil 4.8'de verilmiştir. Asimptotik eğriler üssün bütün değerleri için $\omega = 1/T$ değerine kadar 0 dB olarak gelmekte, oradan itibaren $\pm 20q$ dB/onluk eğimle, üs '+' işaretliyse yukarı doğru, '-' işaretliyse aşağı doğru devam etmektedir. Bode diyagramları elle çizilirken denklem (4.32) ile tanımlanan gerçek eğriler



Şekil 4.8

değil, asemptotlar kullanılır. Bunun sonucu maksimum hata $\omega = 1/T$ 'de aşağıdaki gibidir.

$$\pm 20q \log_{10} \sqrt{1+1} = \pm 3q \text{ dB} \quad (4.35)$$

$(Ts + 1)^{\pm q}$ çarpanının faz açısı ise aşağıdaki gibidir.

$$\angle (1 + j\omega T)^{\pm q} = \pm q \tan^{-1}(\omega T) \quad (4.36)$$

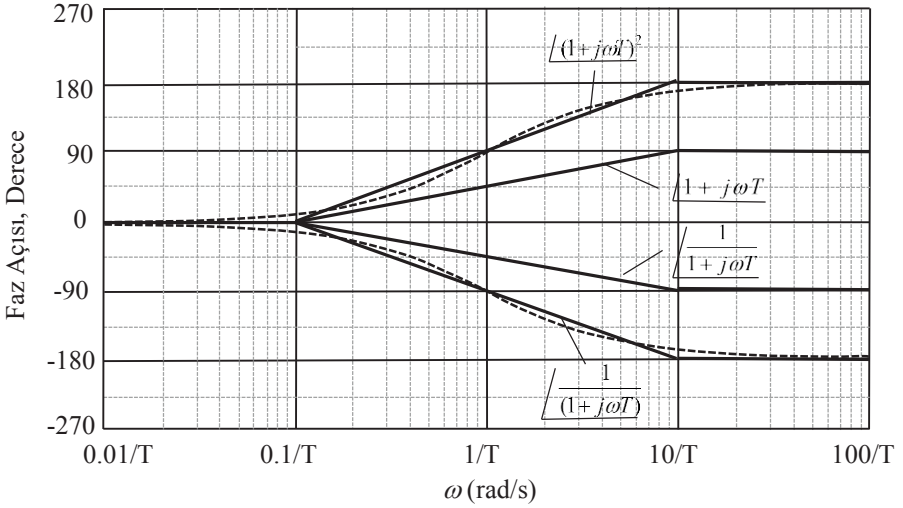
Bu açının değeri $\omega = 1/T$ iken $\pm q 45^\circ$, ωT 'nin değeri 1'den çok küçük ve çok büyükken ise aşağıdaki asemptotlara yaklaşır.

$$\angle (1 + j\omega T)^{\pm q} = 0^\circ \quad (\omega \ll 1/T) \quad (4.37)$$

$$\angle (1 + j\omega T)^{\pm q} = \pm q 90^\circ \quad (\omega \gg 1/T) \quad (4.38)$$

Şekil 4.9'da üssün ± 1 ve ± 2 değerleri için asemptotik faz açısı eğrileri görülmektedir. Ayrıca fikir vermek amacıyla ± 2 için gerçek eğriler de verilmiştir.

Şekil 4.8 ve 4.9'da asemptotların kesiştiği frekanslara köşe frekansları denir.



Şekil 4.9

iv) Kompleks sıfır veya kutuplar, $(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)^{\pm r}$

Frekans ω_n ,

$$\omega_n = \frac{1}{T} \quad (4.39)$$

olarak tanımlanır ve $s = j\omega$ yerine koyulursa bu çarpan aşağıdaki standart forma dönüşür. Burada karesel kısım yazım kolaylığı için “KF” olarak tanımlanmıştır.

$$\left[1 + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm r} = (KF)^{\pm r} \quad (4.40)$$

Bu terimin dB cinsinden büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$\text{dB cinsinden} \quad |(KF)^{\pm r}| = \pm 20r \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (4.41)$$

Bu ifade $\omega \ll \omega_n$ ve $\omega \gg \omega_n$ olduğu durumlarda aşağıdaki asimptotlara yaklaşır.

$\omega \ll \omega_n$ için:

$$\pm 20r \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} = \pm 20r \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (4.42)$$

$\omega \gg \omega_n$ için:

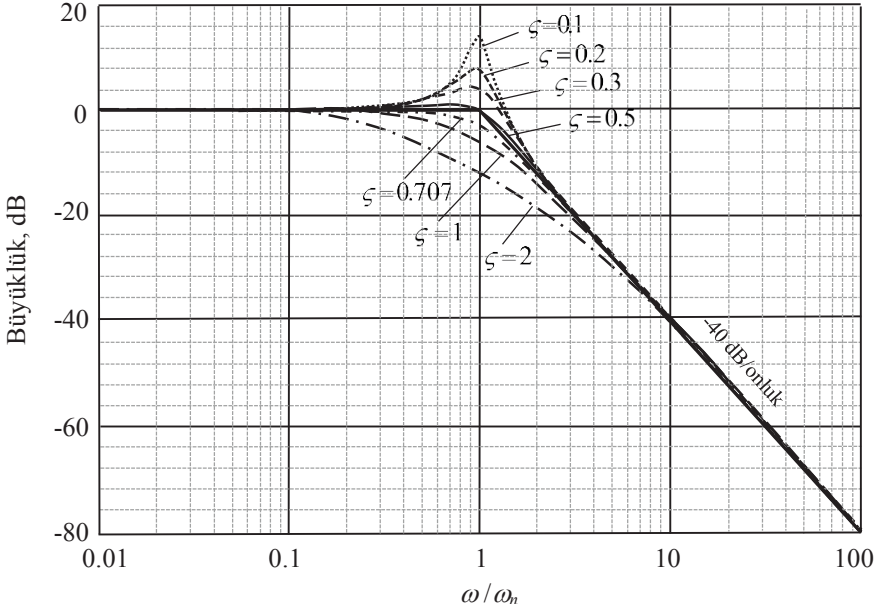
$$\pm 20r \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} = \pm 40r \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ dB} \quad (4.43)$$

Bu eşitliklerden anlaşılacağı gibi, bütün r değerleri için eğriler 0 dB değerinden başlayarak sağa doğru gelir. Eğer yatay eksen (ω/ω_n) olarak değiştirilirse, $\omega/\omega_n = 1$ 'de 0 dB noktasından geçen $\pm 40r$ eğimli asimptotlara giderler. Şekil 4.10'da denklem (4.41) kullanılarak çizilen gerçek eğriler üssün -1 olması hali için verilmiştir. Aynı grafikte asimptotlar da görülmektedir. Sönüm oranı ζ 'nin değerine bağlı olarak özellikle $\omega/\omega_n = 1$ dolayında aseptomlarla gerçek eğriler arasında büyük farklar vardır. Ancak kontrol sistemlerinin tasarımında rezonans tepelerinden kaçınmak için sönüm oranı 0.5-0.8 gibi değerlerde tutulur. (Örneğin, ikinci mertebe sistemde $\zeta = 1/\sqrt{2}$ 'den büyükse rezonans tepesi oluşmaz.) Böyle bir çalışma durumunda ise asimptotlar gerçek eğriler yerine kullanılabilir. Bu yüzden elle çizilen Bode diyagramlarıyla kontrol sistemi tasarlanırken aseptom eğrilerinin kullanılması yeterlidir. Şekil 4.11'de üssün ± 1 ve ± 2 değerleri için çizilmiş aseptomatik büyüklük eğrileri görülmektedir.

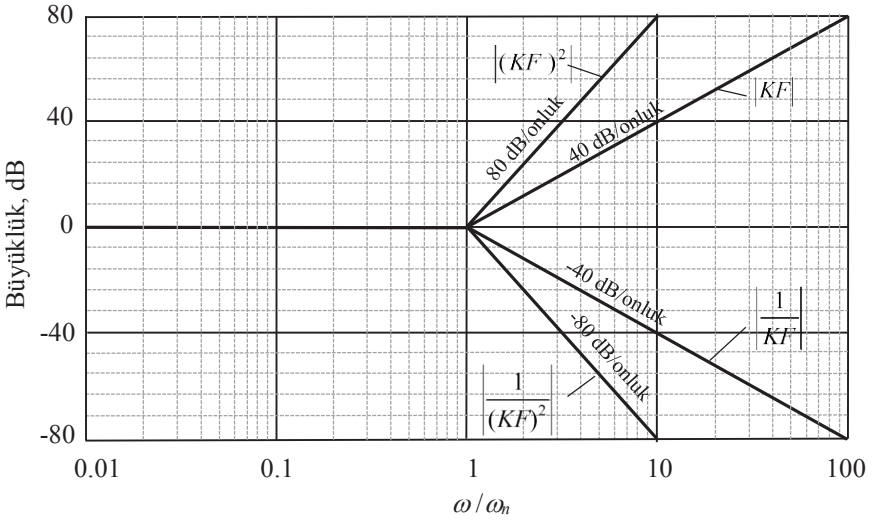
Denklem 4.40 ile verilen karesel formun faz açısı aşağıdaki gibidir.

$$(KF)^{\pm r} = \pm r \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad (4.44)$$

Şekil 4.12'de bu denklem kullanılarak çizilen gerçek eğriler üssün -1 olduğu durum için görülmektedir. Uygulamalarda ζ 'nin değeri 0.5 - 0.7 dolayında tutulduğundan, elle yapılan çizimlerde bu eğriler yerine yaklaşık aseptomatik eğriler çizilir. Denklem (4.44)'den,



Şekil 4.10



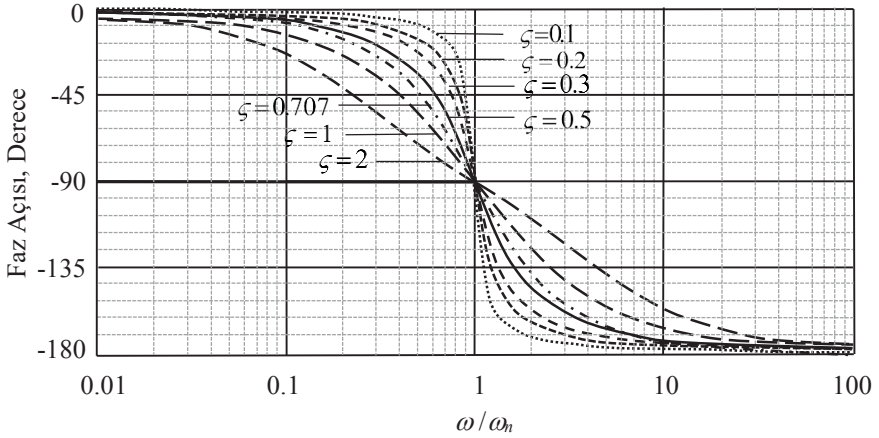
Şekil 4.11

$$\omega = 0 \text{ için } \angle(KF)^{\pm r} = 0^\circ \quad (4.45)$$

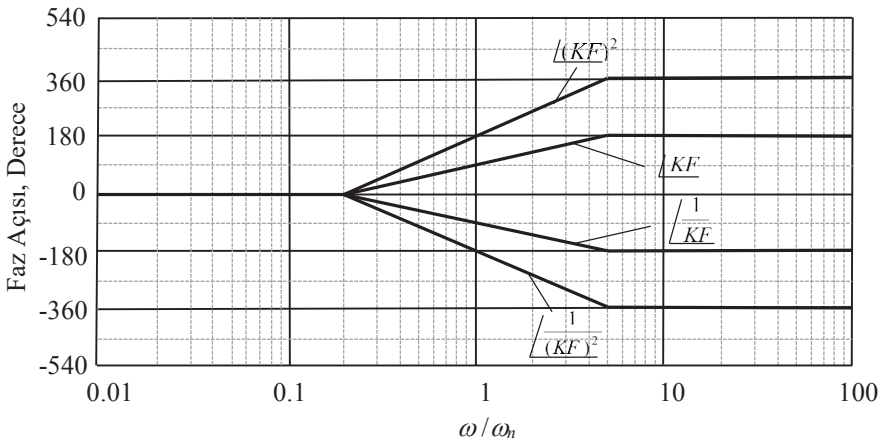
$$\omega = \omega_n \text{ için } \angle(KF)^{\pm r} = \pm r 90^\circ \quad (4.46)$$

$$\omega = \infty \text{ için } \angle(KF)^{\pm r} = \pm r 180^\circ \quad (4.47)$$

olduğu görülmektedir. Asemptotik eğriler çizilirken kural, ω/ω_n 'nin 1/5'inin sol tarafında 0° değerinde yatay bir asemptot, ω/ω_n 'nin 5 katının sağ tarafında ise $\pm 180^\circ$ değerinde yatay bir asemptot kullanılır. İkisinin arası ise bir doğru ile birleştirilir. Şekil 4.13'de karesel formun üssünün ± 1 ve ± 2 değerleri için çizilmiş asemptotik faz eğrileri verilmiştir.



Şekil 4.12



Şekil 4.13

Örnek 4.1:

Transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistemin Bode diyagramları çizilsin.

$$G(s) = \frac{40(s+2)}{s(s+4)(s^2+7s+49)} \quad (4.48)$$

Bu bölümde verilen çizim kurallarından yararlanabilmek için önce verilen transfer fonksiyonunun çarpanlarının bu bölümde kabul edilen standart çarpan formatlarına dönüştürülmesi gereklidir. Yani gerçek ve kompleks sıfır ve kutuplara ait çarpanlar, sabit terimleri "1" olacak biçimde yazılmalıdır. Bunu sağlamak için transfer fonksiyonunun payı 2, paydası 4×49 parantezine alınırsa, denklem (4.48) aşağıdaki hale dönüşür.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{40 \times 2 \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{4 \times 49 s \left(\frac{s}{4} + 1 \right) \left[\left(\frac{s}{7} \right)^2 + \frac{s}{7} + 1 \right]} \\ &= \frac{0.408 \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{4} + 1 \right) \left[\left(\frac{s}{7} \right)^2 + \frac{s}{7} + 1 \right]} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Şimdi çarpanlar ayrı ayrı incelenip büyüklük eğrilerinin asemptot özellikleri belirlenebilir.

Sabit kazanç, K :

$$K = 0.408 \quad 20 \log 0.408 = -7.79 \text{ dB}$$

Orijinde kutup, s^{-1} :

$$\omega = 1 \text{ iken } 0 \text{ dB} \quad \text{Eğim} = -20 \text{ dB/onluk}$$

Gerçek sıfır, $[(s/2)+1]$:

$$\text{Köşe frekansı} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\omega \leq 2 \text{ iken } 0 \text{ dB} \quad \omega \geq 2 \text{ iken eğim} = 20 \text{ dB/onluk}$$

Gerçek kutup, $[(s/4)+1]$:

$$\text{Köşe frekansı} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega \leq 4 \text{ iken } 0 \text{ dB}$$

$$\omega \geq 4 \text{ iken eğim} = -20 \text{ dB/onluk}$$

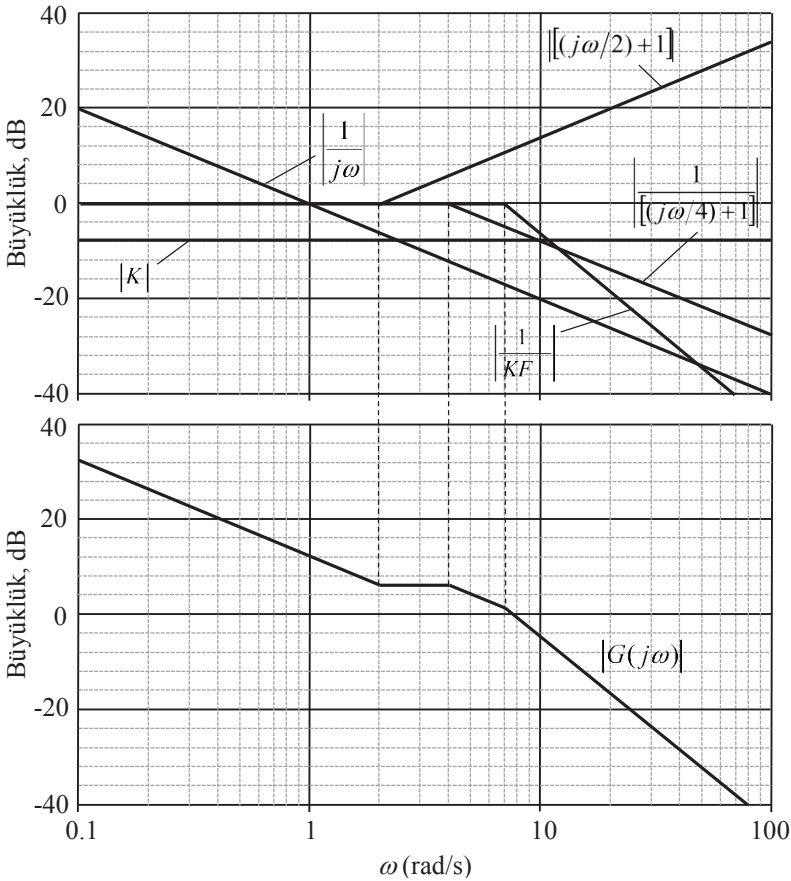
Kompleks kutup, $[(s/7)^2 + (s/7) + 1]$:

$$\text{Köşe frekansı} = 7 \text{ rad/s}$$

$$\omega \leq 7 \text{ iken } 0 \text{ dB}$$

$$\omega \geq 7 \text{ iken eğim} = -40 \text{ dB/onluk}$$

Çarpanlara ait büyüklük eğrileri Şekil 3.14'ün üst yarısında bir arada görülmektedir. Şeklin alt yarısında ise bunların toplamı, yani $|G(j\omega)|$ verilmiştir.



Şekil 4.14

Şekil 4.14'de üst yarıdaki eğrilerin toplamını alırken, çarpan grafiklerinin sol taraflarındaki başlangıç değerlerini toplayarak toplam eğrinin başlangıç değerini bulmak, bir sonraki köşe (kırılma) frekansına kadar eğimlerin toplamına eşit bir eğimle sağa doğru gitmek, bu işlemi her köşe frekansına geldikçe tekrarlayarak toplam eğrinin sağ ucuna varmak en kolay yoldur.

Şimdi de transfer fonksiyonundaki çarpanların faz eğrilerinin asemptot özellikleri belirlensin.

Sabit kazanç, K :

$$\angle K = 0^\circ$$

Orijinde kutup, s^{-1} :

Faz açısı sabit ve -90°

Gerçek sıfır, $[(s/2) + 1]$:

Köşe frekansları = 0.2 ve 20 rad/s

$$\omega \leq 0.2 \text{ iken } 0^\circ \quad \omega \geq 20 \text{ iken } 90^\circ$$

Gerçek kutup, $[(s/4) + 1]$:

Köşe frekansları = 0.4 ve 40 rad/s

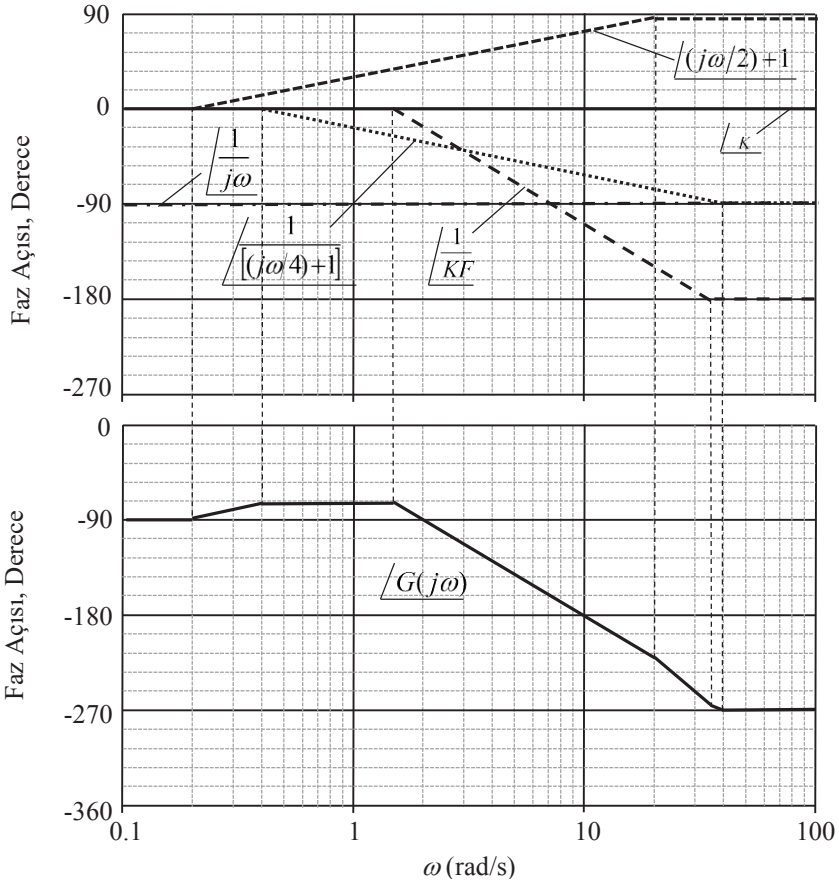
$$\omega \leq 0.4 \text{ iken } 0^\circ \quad \omega \geq 40 \text{ iken } -90^\circ$$

Kompleks kutup, $[(s/7)^2 + (s/7) + 1]$:

Köşe frekansları = 1.4 ve 35 rad/s

$$\omega \leq 1.4 \text{ iken } 0^\circ \quad \omega \geq 35 \text{ iken } -180^\circ$$

Şekil 4.15'in üst kısmında her bir çarpanın faz eğrisi, alt kısmında ise bunların toplamı, yani $\angle G(j\omega)$ verilmiştir.



Şekil 4.15

4.4 Bode Diyagramlarının MATLAB Yardımıyla Çizilmesi

MATLAB yazılımının Control Toolbox'ında yer alan **bode** komutu verilen transfer fonksiyonu için Bode diyagramlarını çizer. Bunun için önce transfer fonksiyonunun **tf** komutuyla oluşturulması gerekir. Kullanım şekli aşağıda bir örnekle gösterilmiştir.

```
g = tf([1 2], [1 5 2 1])
bode(g)
```

Bu iki komut **g**'yi aşağıdaki gibi tanımlar ve Bode diyagramlarını çizer.

$$g = \frac{s + 2}{s^3 + 5s^2 + 2s + 1} \quad (4.50)$$

4.5 Bode Diyagramları ve Kararlılık

Şekil 4.16'daki gibi bir kapalı çevrim kontrol sistemi olsun. Bu sistemin karakteristik polinomu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (4.51)$$

ya da,

$$G(s)H(s) = -1 \quad (4.52)$$

Eğer karakteristik polinomun kökü sanal eksen üzerindeyse, yani sistem marjinal kararlıysa, denklem (4.52) aşağıdaki hali alır.

$$G(j\omega)H(j\omega) = -1 \quad (4.53)$$

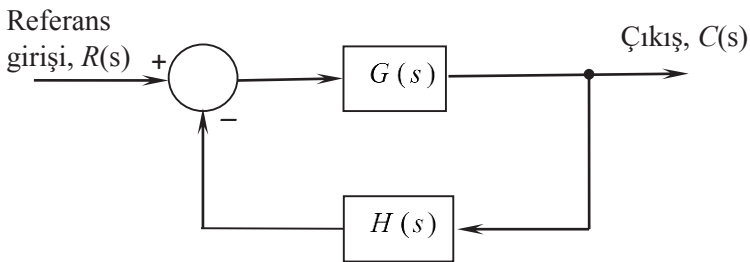
Yukarıdaki denklemin sol tarafı kompleks bir sayı olduğundan, büyüklük ve faz açısı için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \quad (4.54)$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)| = 0 \text{ dB} \quad (4.55)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ \quad (4.56)$$

Denklemler (4.55) ve (4.56) marjinal kararlı bir sistemin sanal eksenindeki kökü için ($s = j\omega$) açık çevrim transfer fonksiyonunun büyüklüğünün 0 dB, faz açısının ise -180° olduğunu göstermektedir. Böyle bir sistemin *açık çevrim* transfer fonksiyonunun Bode diyagramları örnek

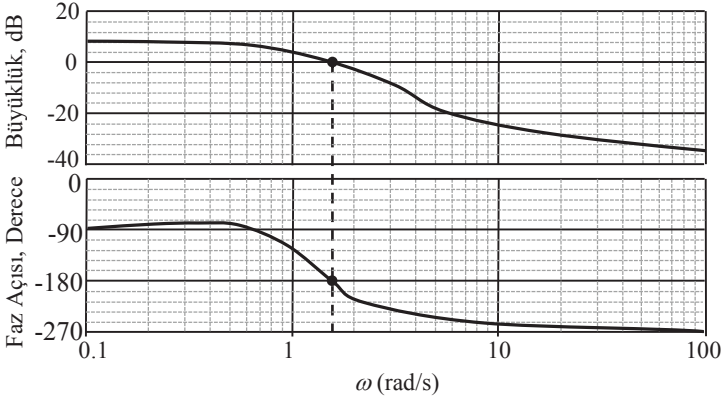


Şekil 4.16

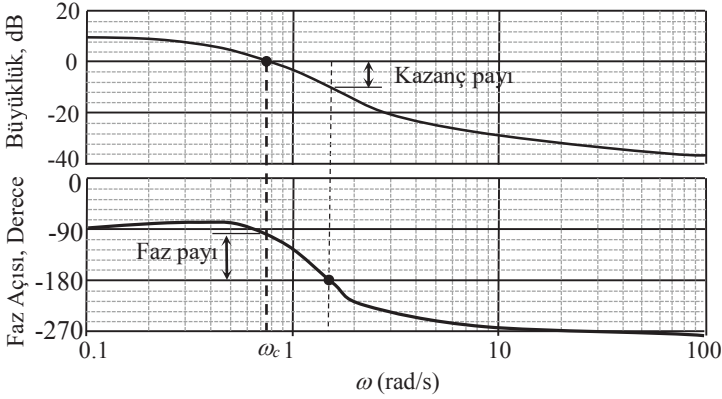
olarak Şekil 4.17 (a)'da verilmiştir. Bu şekilde, büyüklük eğrisinin 0 dB değerini geçtiği frekansta faz eğrisi -180° değerine sahiptir.

Kararlı bir sistemde ise büyüklük eğrisinin 0 dB değerini kestiği frekans, faz eğrisinin -180° olduğu frekansın solundadır. Bu durum Şekil 4.17 (b)'de gösterilmiştir.

Şekil 4.17 (c)'de ise kararsız bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramı görülmektedir. Bu durumda büyüklük eğrisinin 0 dB değerini kestiği frekans, faz eğrisinin -180° olduğu frekansın sağındadır.

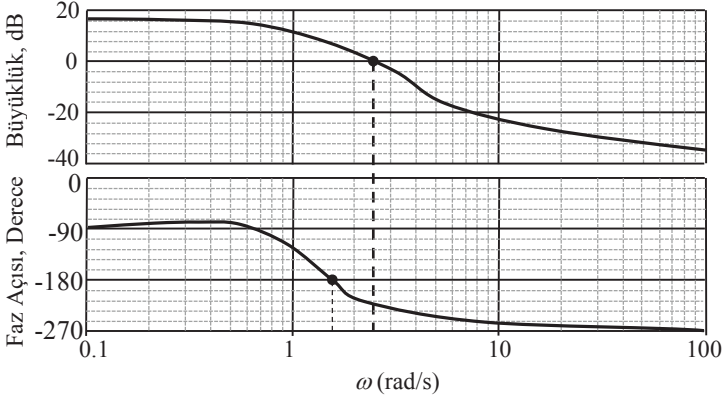


(a)



(b)

Şekil 4.17-1



(c)

Şekil 4.17-2

4.6 Durağan Davranış ve Bode Diyagramları

Bu kısımda önce kontrol sistemleriyle ilgili temel kitaplarda yer alan hata katsayıları konusu çok kısaca özetlenecektir. Şekil 4.16'daki gibi bir kontrol sistemi verilmiş olsun. Bu sistemin durağan hatası aşağıdaki gibidir.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G(s)H(s)} \right) R(s) \quad (4.57)$$

Basamak, rampa ve parabolic girişlerin Laplace transformları sırasıyla $R(s) = R/s$, $R(s) = \alpha/s^2$, $R(s) = \beta/s^2$ olduğuna göre, durağan hata değerleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

Basamak giriş:

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{R}{1 + K_p} \quad (4.58)$$

Rampa giriş:

$$e_{ss} = \frac{\alpha}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{\alpha}{K_v} \quad (4.59)$$

Parabolik giriş:

$$e_{ss} = \frac{\beta}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{\beta}{K_a} \quad (4.60)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen K_p , K_v ve K_a terimleri sırasıyla pozisyon hata katsayısı, hız hata katsayısı ve ivme hata katsayısı olarak anılır. Bu denklemlerdeki durağan hataların sıfır olması için sırasıyla K_p , K_v ve K_a katsayılarının sonsuz olması gereklidir.

Açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılarak yazılabilir.

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^N (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (4.61)$$

Bu ifadede de N sistemin tipini belirleyen tip numarasıdır. Yukarıdaki girişler için durağan hatanın sıfır olması N değerinin aşağıdaki şartları sağlamasına bağlıdır.

Basamak giriş için: $N \geq 1$

Rampa giriş için: $N \geq 2$

Parabolik giriş için: $N \geq 3$

O halde basamak giriş için durağan hatanın sıfır olması isteniyorsa, açık çevrim transfer fonksiyonunun paydasında en az bir s çarpanı olmalı, yani açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük diyagramı sol taraftan -20 dB/onluk ya da daha dik bir eğimle gelmelidir. Rampa giriş için bu eğim en az -40 dB/onluk, parabolic giriş için ise en az -60 dB/onluk olmalıdır.

Tip 1 sistemlerde açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük diyagramı düşük frekanslarda -20 dB/onluk eğimle gelir. Bunun asimptotunun 0 dB değerini kestiği frekans değeri K_v 'ye eşittir. Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispat edilebilir. K_v 'nin değeri $s \rightarrow 0$ iken, yani ω çok küçük değerlere giderken $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ ifadesiyle verildiğine göre, $s = j\omega$ olarak yerine koyulursa,

$$\frac{K_v}{j\omega} = G(j\omega)H(j\omega) \quad (\omega \text{ çok küçük}) \quad (4.62)$$

ya da,

$$20 \log_{10} \left(\frac{K_v}{j\omega} \right) = 20 \log_{10} G(j\omega)H(j\omega) \quad (\omega \text{ çok küçük}) \quad (4.63)$$

Bu denklem küçük ω değerleri varsayımıyla yani sol taraftan gelen -20 dB/onluk asimptot üzerinde geçerlidir. $\omega = 1$ alındığında,

$$20 \log_{10} K_v = 20 \log_{10} G(j\omega)H(j\omega) \quad (4.64)$$

elde edilir. O halde açık çevrim transfer fonksiyonunun $\omega = 1$ frekansından geçtiği noktadaki büyüklük değeri $20 \log_{10} K_v$ kadardır. Bu noktada aseptom eğimi -20 dB/onluk olduğuna göre, aseptomun 0 dB değerini kestiği yerdeki frekans ω_v ise, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\frac{0 \text{ dB} - 20 \log_{10} K_v}{\log_{10} \omega_v - \log_{10} 1} = -20 \quad (4.65)$$

ya da, $20 \log_{10} K_v = 20 \log_{10} \omega_v$ olduğundan aşağıdaki sonuç bulunur.

$$K_v = \omega_v \quad (4.66)$$

Tip 2 sistemlerde ise büyüklük eğrisi sol taraftan -40 dB/onluk eğimle gelir. Bu eğrinin aseptomunun 0 dB değerini kestiği frekans K_a değerini verir. Bu özellik yukarıdakine benzer bir yol izleyerek ispat edilebilir.

4.7 Bode Diyagramlarında Büyüklük ve Faz Arasındaki İlişki

Kompleks düzlemin sağ tarafında sıfırı ya da kutbu olmayan sistemlere *minimum fazlı* denir. Bir sistemin kompleks düzlemin sağ tarafında sıfır ya da kutbu varsa o sisteme non-minimum fazlı denir. Non-minimum fazlı bir sistemin bütün kutupları kompleks düzlemin sol tarafında, yani sadece bazı sıfırlar düzlemin sağ tarafında ise, bu sistem hala kararlıdır. Ancak yer eğrisi yönteminde bahsedildiği gibi, açık çevrim kazancı artırıldığına yer eğrisinin bazı kolları sağ taraftaki sıfırlara doğru gideceğinden böyle bir sistem kolaylıkla kararsız hale gelebilir. Bu yüzden kontrol sistemlerinde non-minimum fazlı sistemlerden kaçınılır.

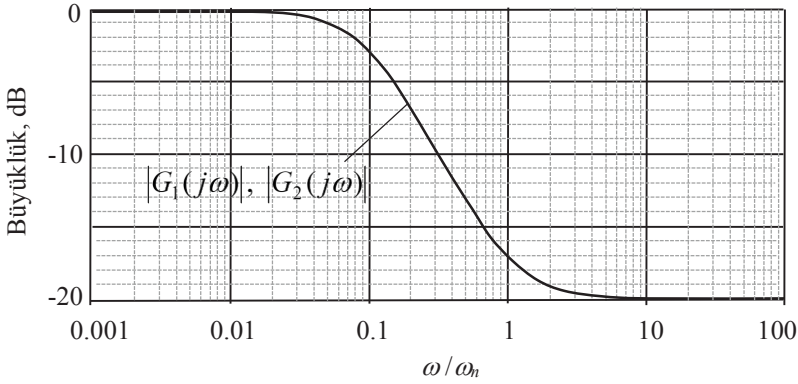
Biri minimum fazlı, diğeri non-minimum fazlı iki sistem olsun. Bunların kutupları aynı, sıfırlarından bazıları ise birinde kompleks düzlemin solunda iken diğesinde bunların sanal eksene göre simetriği olacak şekilde

düzlemin sağ tarafında olsun. Bu iki sistemin büyüklük Bode diyagramları birbirinin aynıdır. Faz diyagramında ise herhangi bir frekansta minimum fazlı sistemin faz açısı, non-minimum fazlı sistemin faz açısından daha azdır. Örnek olarak aşağıdaki iki sistemi ele alalım.

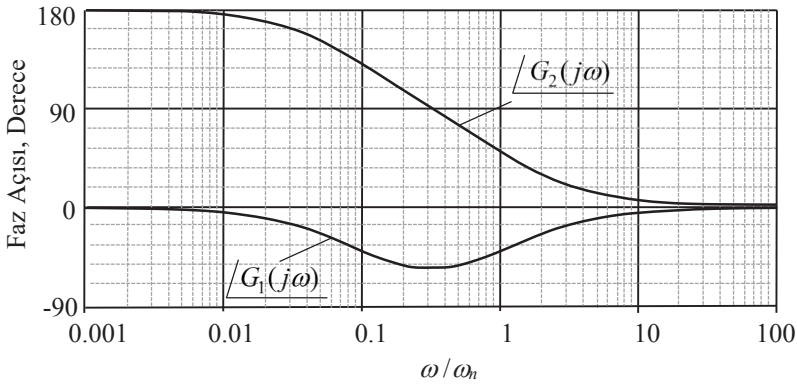
$$G_1(s) = \frac{s+1}{10s+1} \quad (4.67)$$

$$G_2(s) = \frac{s-1}{10s+1} \quad (4.68)$$

Bu sistemlerin büyüklük diyagramları bir birinin aynı olup Şekil 4.18'deki gibidir. Faz diyagramları ise Şekil 4.19'daki gibi bir birinden farklıdır. Minimum fazlı sistemin faz diyagramı, non-minimum fazlı sistemin altındadır.



Şekil 4.18



Şekil 4.19

Minimum fazlı sistemlerde büyüklük ve faz birbiriyle ilişkilidir. Bode diyagramı eğrilerinden birisi verilmişse diğeri ondan elde edilebilir. Bu nedenle deneysel olarak elde edilmiş bir Bode büyüklük diyagramından minimum fazlı sistemlerin transfer fonksiyonlarının çıkarılması mümkündür.

Transfer fonksiyonları aşağıda verilen iki kararlı sistem olsun.

$$G_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j) \prod_{k=1}^r (s + z_r)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (n \geq m + r) \quad (4.69)$$

$$G_2(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j) \prod_{k=1}^r (s - z_r)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (n \geq m + r) \quad (4.70)$$

Yukarıdaki denklemlerde p_i , z_j ve z_r pozitif değerlerdir. Birinci sistem minimum fazlıdır. Sanal eksenin sol tarafında i sayıda kutbu ve $j + r$ sayıda sıfırı vardır. İkinci sistem ise non-minimum fazlıdır; sanal eksenin sol tarafında i sayıda kutbu ve j sayıda sıfırı, sanal eksenin sağında ise r sayıda sıfırı vardır. $\omega \rightarrow \infty$ iken asimptot eğimleri paydaki çarpanlar için +20 dB/onluk paydadaki çarpanlar için ise -20 dB/onluk olduğundan, $\omega \rightarrow \infty$ iken her iki sistemin büyüklük diyagramının asimptot eğimi $-20(n - m - r)$ dB/onluktur.

Denklem (4.69)'daki minimum fazlı sistemin bütün çarpanlarının faz eğrileri sol taraftan köşe frekansına kadar 0° faz açısıyla gelir. Buna karşılık denklem (4.70) ile verilen non-minimum fazlı sistemde kökleri negative olan kutup ve sıfırlar köşe frekansına kadar 0° açıyla gelirken, kökü pozitif olan sıfırlar ise köşe frekansına doğru 180° açıyla gelir. Dolayısıyla $\omega \rightarrow 0$ iken toplam faz açısının değeri $r \times 180^\circ$ olur.

Minimum fazlı ve non-minimum fazlı sistemlerin büyüklük ve faz değerlerinin $\omega \rightarrow 0$ iken gösterdiği bu farklılık, Bode diyagramları deneysel olarak belirlenen sistemlerin minimum fazlı olup olmadığını belirlemek için kullanılabilir.

Minimum fazlı sistemlerde Bode büyüklük diyagramından faz diyagramını elde etmenin bir yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- i) Deneysel olarak elde edilen büyüklük diyagramını yaklaşık olarak asimptotlar biçiminde ifade edin.
- ii) 0 dB'deki değeri, köşe frekanslarını ve asimptot eğimlerini dikkate alarak sistemi tanımlayın ve transfer fonksiyonunu bulun.
- iii) Bulunan transfer fonksiyonundan faz eğrisini çıkarın.

Asemptotik Bode büyüklük diyagramından faz diyagramını elde etmenin diğer bir yöntemi de şöyle özetlenebilir. Diyagramın sol tarafından başlayın. Büyüklük diyagramının eğimi ± 20 dB/onluk ise bir sonraki köşe frekansına kadar, yani eğim değişimine kadar faz değeri $\pm 90^\circ$ olur. Bu şekilde diyagramın sağ ucuna erişinceye kadar devam edin.

Non-minimum fazlı sistemlerin cevabı yavaştır. Bunun esas sebebi cevabın içinde zıt işaretli bir bileşen olmasıdır. Bunu kabaca açıklamak için aşağıdaki gibi iki sistem verilmiş olsun.

$$G_1(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)(s + z_r)}{D(s)} \quad (4.71)$$

$$G_2(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)(s - z_r)}{D(s)} \quad (4.72)$$

Birim basamak giriş için birinci sistemin cevabı aşağıdaki gibi bulunur.

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{N(s)z_r}{sD(s)} \quad (4.73)$$

ya da,

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{N(s)}{D(s)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{N(s)z_r}{sD(s)} \right) \quad (4.74)$$

İkinci sistemin birim basamak cevabı ise aşağıdaki gibidir.

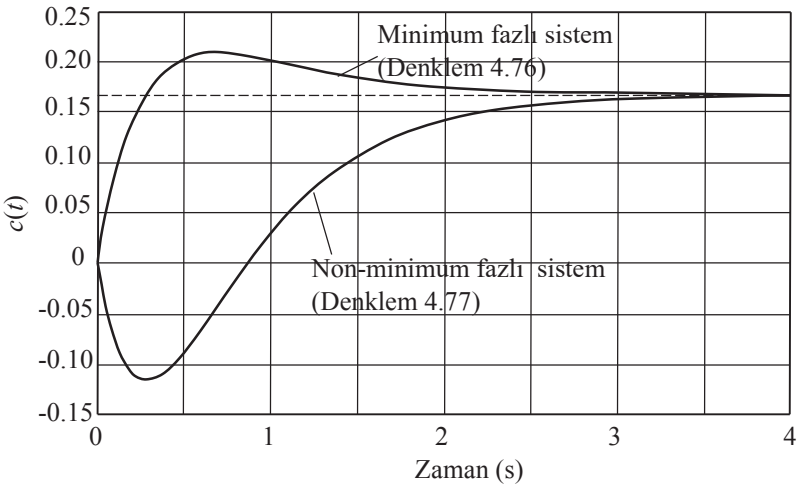
$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{N(s)}{D(s)} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{N(s)z_r}{sD(s)} \right) \quad (4.75)$$

Bu denklemde ikinci terimin işareti negatif olduğundan cevabı ters yönde etkiler ve yavaşlatır. Bu durum aşağıdaki iki transfer fonksiyonunun basamak cevaplarında da açıkça görülebilir. (Durağan değerlerin aynı olması için $G_2(s)$ 'nin sıfır veren çarpanının işareti değiştirilmiştir.)

$$G_1(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (4.76)$$

$$G_2(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{-s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (4.77)$$

Bu sistemlerin birim basamak cevapları şekil Şekil 4.20'de görülmektedir.



Şekil 4.20

4.8 Frekans Cevabıyla Sistem Tasarımında Kullanılan Performans Parametreleri

Frekans cevabıyla tasarım yapılırken kullanılan performans parametreleri yer eğrileri yönteminde kullanılan geçici davranış özelliklerini tanımlayan performans parametreleriyle genel olarak doğrudan ilişkili değildir. Buna rağmen frekans cevabı yöntemlerinde kullanılan tasarım parametreleri geçici cevap özellikleriyle kabaca ilişkilendirilebilir ve bu parametreler kullanılarak tasarımlardan iyi sonuçlar elde edilebilir. Aşağıda

bu parametreler Bölüm 2’de verilen bilgilere göre daha ayrıntılı olarak incelenmiştir.

4.8.1 Kazanç Payı

Şekil 4.17(b)’de verilen *açık çevrim* transfer fonksiyonunun Bode diyagramında kazanç, şekilde *kazanç payı* olarak gösterilen miktarda artırılırsa büyüklük eğrisi yukarıya doğru kayar ve marjinal kararlılık şartları oluşur. Kazanç payı, frekans cevabı yöntemiyle kontrol sistemi tasarımında önemli bir parametredir. Sistemin kararsızlık sınırlarından yeterince uzak olması ve sistem tanımında olabilecek belirsizliklerin olumsuz etkilerini karşılayabilmek için kazanç payının en az 6 dB olması istenir.

4.8.2 Faz Payı

Şekil 4.17 (b)’deki *açık çevrim* transfer fonksiyonunun faz eğrisi aşağı doğru *faz payı* olarak işaretlenen miktarda kaydırılırsa, yine marjinal kararlılık şartları oluşur. Faz payı da önemli bir tasarım parametresidir. Sistemin marjinal kararlılık şartlarından yeterince uzak olması için faz payının 30° - 60° arasında olması istenir. Faz payı sistemin sönümüyle ilişkilidir. Faz payı ne kadar büyükse, aşma yüksekliği o kadar azalır; sistemin sönümü ve dolayısıyla marjinal kararlılığı o kadar artar. Örneğin, açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (4.78)$$

olan birim geri beslemeli sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.79)$$

Bu sistemin faz payı ϕ_p ile sönüm oranı ζ arasındaki ilişkinin aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir [4.1].

$$\phi_p = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (4.80)$$

Bu denklem küçük faz açıları için yaklaşık olarak aşağıdaki ifadeye indirgenir. (ϕ_p derece cinsinden.)

$$\zeta = \frac{\phi_p}{100} \quad (\phi_p < 70^\circ \text{ için}) \quad (4.81)$$

Sistemin yeterince kararlı olması için kazanç payının 6 dB'den büyük olması, faz payının ise 30° ile 60° arasında olması şartları birlikte sağlanmalıdır.

4.8.3 Büyüklük Geçme Frekansı

Açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük eğrisinin 0 dB değerini geçtiği frekansa büyüklük geçme frekansı ya da kısaca geçme (crossover) frekansı denir. Şekil 4.17(b)'de geçme frekansı ω_c ile gösterilmiştir.

Geçme frekansı, büyüklüğü 0 dB'in karşılığı olan 1'e eşitleyip frekansı çözerek kolayca bulunabilir. Açık çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.78) ile tanımlanan ikinci mertebe sistemin geçme frekansı aşağıdaki denklemde verildiği gibidir.

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^2 + 1} - 2\zeta^2} \quad (4.82)$$

4.8.4 Bant Genişliği ve Kesme frekansı (ω_b)

Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük eğrisinin, sıfır frekans değerinin 3 dB altına indiği frekans aralığına *bant genişliği* denir. Bu değere karşılık gelen frekansa *kesme* (cutoff) *frekansı* (ω_b) denir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T(s)$ ise, kesme frekansında aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$20 \log_{10} |T(j0)| - 20 \log_{10} |T(j\omega_b)| = 3 \text{ dB}$$

ya da,

$$|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |T(j0)| = 0.707 |T(j0)| \quad (4.83)$$

Bant genişliği sistem çıkışının, referans girişini kayda değer bir genlik azalması olmadan izleyebileceği frekans bölgesini belirler. Bant genişliği cevap hızıyla da ilişkilidir. Bant genişliği ne kadar büyükse sistem cevabı o kadar hızlıdır. Bant genişliği arttıkça, tepe zamanı, yükselme zamanı, yerleşme zamanı gibi sistem hızının göstergesi olan parametreler de

kabaca azalır. Bu hususların geçerliği aşağıda birinci ve ikinci mertebeye sistemlerde gösterilmiştir.

Birinci mertebeye sistemin bant genişliği:

Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan bir birinci mertebeye sistem verilmiş olsun.

$$T(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (4.84)$$

Denklem (4.83)'den,

$$\left| \frac{1}{j\omega_b T + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega_b^2 T^2 + 1}} = 0.707 \quad (4.85)$$

$$\frac{1}{\omega_b^2 T^2 + 1} = 0.5 \quad (4.86)$$

$$\omega_b = \frac{1}{T} \quad (4.87)$$

O halde birinci mertebeye sistemin bant genişliği zaman sabiti kısaldıkça artar. Bant genişliği ne kadar büyükse sistemin cevap hızı da o kadar büyüktür.

İkinci mertebeye sistemin bant genişliği:

Kontrol sistemi tasarımı çoklukla sistemde baskın köklerin olduğu varsayımıyla yürütüldüğünden ikinci mertebeye sistemlerin iyi bilinmesi özel öneme sahiptir.

İkinci mertebeye bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.88)$$

Denklem (4.83)'den,

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707 \quad (4.89)$$

$$\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2} = 0.5 \quad (4.90)$$

Eğer,

$$y = \left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2 \quad (4.91)$$

olarak tanımlanırsa,

$$y^2 - (2 - 4\zeta^2)y - 1 = 0 \quad (4.92)$$

$$y_{1,2} = (1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \quad (4.93)$$

ve pozitif y değerini veren kök kullanılarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\omega_b = \omega_n \left[1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}\right]^{1/2} \quad (4.94)$$

Bu denklemden $\zeta = 0$ olduğunda $\omega_b = 1.55\omega_n$ rad/s, $\zeta = 1$ olduğunda $\omega_b = 0.64\omega_n$ rad/s elde edilir. $\zeta = 1/\sqrt{2}$ olduğunda ise $\omega_b = \omega_n$ olur.

Denklem (4.94)'den görüldüğü gibi verilen bir sönüm oranı değeri için ω_n arttıkça, ω_b de artar. Diğer yandan Bölüm 2'de elde edilen denklemler (2.56), (2.60), (2.69) ve (2.70) incelenirse verilen bir sönüm oranı değeri için ω_n arttıkça, geçme zamanı, tepe zamanı ve yerleşme zamanının azaldığı yani sistem hızının arttığı görülür. Dolayısıyla bant genişliğinin artırılması sistemin cevap hızını artırır. Verilen bir ζ değeri için ω_b artarken, ω_n 'nin yani sistemin cevap hızının arttığı Denklem (4.94)'den açıkça görülmektedir. Burada bu özellik ikinci mertebe bir sistem için gösterilmiş olmasına karşın, diğer sistemlerde de kabaca buna benzer bir ilişki vardır.

Diğer yandan bant genişliğinin aşırı artırılması Bode diyagramının yüksek kazançlı kısmını yüksek frekans bölgesine doğru kaydırduğundan, sistemin gürültüden etkilenmesi artabilir.

Denklem (4.82) ve denklem (4.94)'den ikinci merteye sistemin bant genişliği ile geçme frekansı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega_c = \omega_b \sqrt{\frac{\sqrt{4\zeta^2 + 1} - 2\zeta^2}{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}} \quad (4.95)$$

Küçük ζ ($\zeta < 0.5$) değerleri için bu ifade yaklaşık olarak aşağıdaki hali alır.

$$\omega_c = \omega_b \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 0.64\omega_b \quad (4.96)$$

Bu denklemden elde edilen değer, denklem (4.95)'e göre $\zeta = 0.5$ için % 17, $\zeta = 0.3$ için % 6 daha küçüktür.

4.8.5 Rezonans Tepe Yüksekliği ve Rezonans Frekansı

Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun frekans cevabında büyüklük değerinin en yüksek olduğu frekansa rezonans frekansı (ω_r), bu frekanstaki büyüklük değerine de rezonans tepe yüksekliği (M_r) denir. Tepe yüksekliğinin büyük olması sistem sönümünün az olduğunun ve sistem salınımlarındaki aşmanın yüksek olduğunun, yani göreceli kararlılığın az olduğunun göstergesidir. Tasarım çalışmalarında genellikle aşmanın en fazla %30 olmasına çalışılır. Eğer kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T(s)$ ise, tepe yüksekliği ve tepenin oluştuğu frekans aşağıdaki denklemlerden bulunabilir.

$$\frac{d}{d\omega_r} |T(j\omega_r)| = 0 \quad (4.97)$$

$$M_r = |T(j\omega_r)| \quad (4.98)$$

İkinci merteye sistemin rezonans frekansı ve rezonans tepe yüksekliği:

İkinci merteye bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.99)$$

Bu denklemden aşağıdaki büyüklük ifadesi elde edilir.

$$|T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n^2\omega)^2}} \quad (4.100)$$

Rezonans frekansı bu denklemin paydasını minimum yapan frekanstır.

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n^2\omega)^2 \right] = 0 \quad (4.101)$$

ya da

$$2(\omega_n^2 - \omega_r^2)(-2\omega_r) + 8\zeta^2\omega_n^2\omega_r = 0 \quad (4.102)$$

ya da,

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (4.103)$$

Bu ifadeden görüldüğü gibi rezonans frekansının oluşması için,

$$1 - 2\zeta^2 > 0 \text{ ya da } \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.104)$$

olmalıdır. ω_n 'nin yüksek olması sistemin cevap hızının göstergesi olduğuna göre, ω_r 'nin yüksek olması da cevap hızının yüksek olduğunun göstergesidir.

Rezonans tepe yüksekliği ise aşağıdaki gibi bulunur

$$M_r = |T(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.105)$$

Sönüm oranını ζ 'nin küçük değerleri için yaklaşık olarak aşağıdaki ifade kullanılabilir.

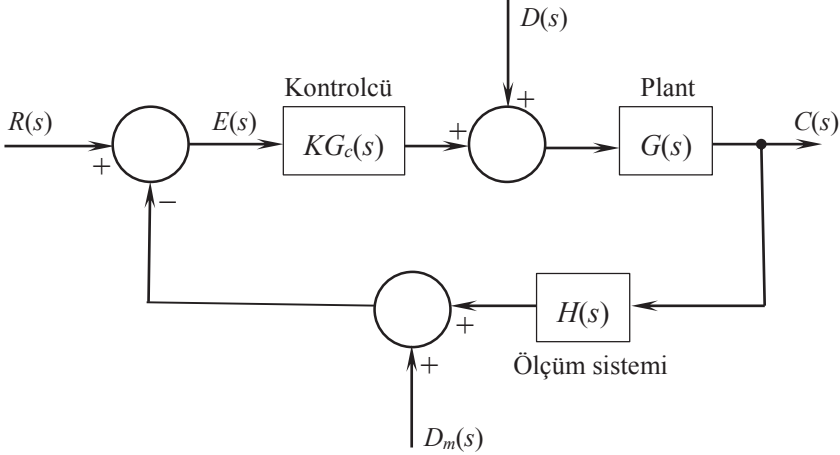
$$M_r = \frac{1}{2\zeta} \quad (4.106)$$

Rezonans frekansında ikinci mertebe sistemin faz açısı ϕ_r ise aşağıdaki gibidir.

$$\phi_r = \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (4.107)$$

4.9 Açık Çevrim ve Kapalı Çevrim Frekans Cevapları

Bir sistemin blok diyagramı Şekil 4.21'deki gibi verilmiş olsun.



Şekil 4.21

Girişlerle çıkış $C(s)$ arasındaki transfer fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG_c(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (4.108)$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (4.109)$$

$$\frac{C(s)}{D_m(s)} = -\frac{KG_c(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \quad (4.110)$$

Bu sistemin performansı açısından üç frekans bölgesi önemlidir. Bunlardan birincisi çok düşük frekanslardır. Sistemin durağan davranışı frekans sıfıra doğru götürüldüğünde elde edilir. Birim basamak referans giriş için durağan cevap, son değer teoreminden aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KG_c(s)G(s)}{1 + KG_c(s)G(s)H(s)} \frac{1}{s} \quad (4.111)$$

O halde basamak giriş uygulandığında durağan hatanın sıfır olması için sistemin en az Tip-1 olması gereklidir. Yani açık çevrim transfer fonksiyonunun orijininde en az bir kutup olmalıdır. Rampa ve parabolic girişler uygulandığında ise sistem tipi sırasıyla en az 2 ve 3 olmalıdır. Sonuç olarak, durağan hatanın sıfır olması için sistemin tipi en az girişin tipi kadar olmalıdır. Girişin tipi q ise, durağan hatanın sıfır olması için açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diagramı düşük frekans bölgesinden (soldan) orta frekans bölgesine (sağa) doğru $-20q$ dB/onluk veya daha dik bir eğimle gelmelidir.

Denklem (4.111)'e göre, K kazancı çok büyütülerek de durağan hata azaltılabilir. Ancak bu sistemin kazanç payını da azaltacağından, yani sistemin salınımlarını artırabileceğinden pek tercih edilmez.

Durağan hatayı azaltmanın bir diğer yolu ise integral işlemine yakın bir işlem yapacak biçimde faz geriletici denkleştirme yapmaktır. Daha sonra ayrıntılı olarak incelenecek olan bu tür denkleştirme, orijin yakınına bir açık çevrim kutbu, bunun yakınına ve soluna da bir sıfır yerleştirmek yoluyla yapılır. Bu yöntem sistemin kazanç payını artırdığından, daha yüksek K kazancı değerleri kullanılmasına ve böylelikle durağan hatanın azaltılmasına olanak sağlar.

Frekans cevabı eğrisinin orta frekans bölgesi sistemin kontrol edildiği bölgedir. Uygulamalarda bu bölge genellikle 10 Hz'e kadar, nadir durumlarda ise 30–40 Hz'e kadar çıkabilir. Bu bölgede kazanç payı ve faz payı ayarlanarak sistemin geçici davranışının istenen kriterlere uyumu sağlanır. Genellikle kazanç payının en az 6 dB, faz payının 30° – 60° arasında olması istenir. Bu bölgede açık çevrim transfer fonksiyonunun frekans cevabı eğrisinin şekli, denkleştirici çarpanlar ekleyerek değiştirilir. Örneğin, PD ve faz-ilerletici denkleştirici gibi çarpanlar kullanılabilir.

Hem düşük frekans bölgesi hem de orta frekans bölgesinde performansı birlikte iyileştirmek için daha sonra incelenecek olan PID veya faz-ilerletici-geriletici türden denkleştiriciler de kullanılabilir.

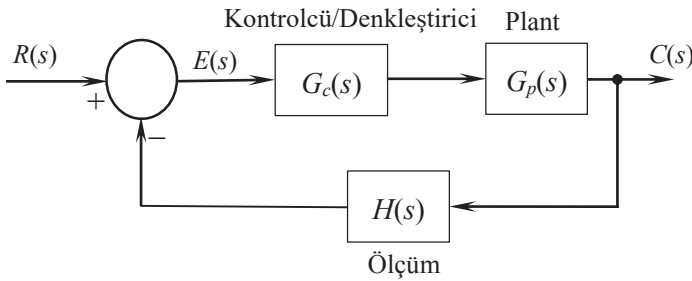
Sistemlerde yüksek frekanstaki girişlerin kaynağı öncelikle ölçüm sisteminden kaynaklanan gürültüdür. Denklem (4.110) incelendiğinde K kazancı sonsuz bile yapılsa, bu gürültünün sistem üzerindeki etkisinin yok edilemediği, $K \rightarrow \infty$ iken,

$$\frac{C(s)}{D_m(s)} = -\frac{1}{H(s)} \quad (4.112)$$

olduğu görülür. Yani ölçüm sistemindeki hatalar kazanç artırma yoluyla yok edilemez. Gürültünün sistem üzerindeki etkisini azaltmanın yolu, yüksek frekanslarda denklem (4.110)'un büyüklüğünü azaltmaktır. Bu ise $G_c(s)$ 'nin büyüklüğünü, ya da açık çevrim transfer fonksiyonu $G_c(s)G(s)H(s)$ 'nin yüksek frekanslarda büyüklüğünü azaltarak sağlanabilir. Yani açık çevrim transfer fonksiyonuna uygun çarpanlar eklenerek, Bode diyagramının yüksek frekans bölgesindeki büyüklükler düşük dB değerlerine indirilmelidir.

4.10 Açık Çevrim Bode Diyagramının Şekillendirilmesinde Kullanılan Çarpanlar

Teorik olarak açık çevrim transfer fonksiyonuna köşe frekansları uygun olarak seçilmiş sıfır ve kutuplar ekleyerek Bode diyagramlarına istenen şeklin verilmesi mümkündür. Ancak uygulamada tasarım kolaylığı sağlamak için sıfır ve kutbun uygun kombinezonları tercih edilir. Çarpanların büyüklük ve faz eğrileri, sistemin büyüklük ve faz eğrileriyle toplanarak süreci etkiler. Kabul edilen sistem yapısı Şekil 4.22'deki gibidir. Burada $G_c(s)$ terimi kontrolcü ya da denkleştiricinin transfer fonksiyonu, yani açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenen çarpandır. Aşağıda açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenebilecek çarpanlar önce geniş anlamda incelenecek, sonra bunlardan frekans cevabı yoluyla sistem tasarımında kullanılanlar daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.



Şekil 4.22

i) Kazanç Artırılması

Oransal kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna dinamik bir çarpan eklemeyiz. Birim kazanç yerine K kazancının sisteme uygulanması

büyüklik eğrisini düşey yönde $20 \log_{10} K$ kadar kaydırır. K 'nın faz açısı 0° olduğundan açık çevrim transfer fonksiyonunun faz eğrisi değişmez. K kazancının Bode diyagramlarına katkısı daha önce Şekil 4.4 ve 4.5'de verildiği gibidir.

ii) İntegral Kontrol

İntegral kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna $G_c(s) = 1/s$ gibi bir çarpan, yani orijine bir açık çevrim kutbu ekler. Durağan hataların sıfırlanması için etkin bir yöntemdir. Ancak orta frekans bölgesinde istenen faz payı ve kazanç payı değerlerinin sağlanabilmesi için genellikle ilave denkleştirici çarpanların açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenmesini gerektirir. $1/s$ çarpanının Bode diyagramlarına olan katkısı daha önce Şekil 4.6 ve 4.7'de verilmişti.

iii) Açık Çevrim Transfer Fonksiyonuna Kutup Eklenmesi

Frekans cevabı ile tasarımlarda açık çevrim transfer fonksiyonuna, gerektiğinde yüksek frekanslarda gürültünün etkisini azaltmak için kullanılır. Bu çarpanın Bode diyagramları Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da verilmişti. Bu çarpan köşe frekansından büyük frekanslarda eğime -20 dB/onluk, faz açısına ise -90° ekler.

iv) Oransal + Türevsel (PD) Kontrol

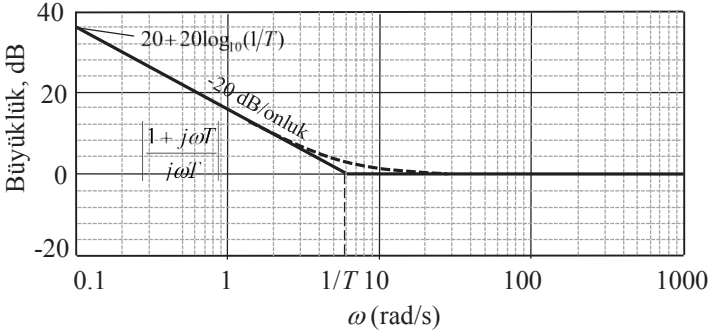
Oransal + türevsel kontrolde açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenen çarpan $G_c(s) = K_p(1 + T_D s)$ gibidir. Bu tür çarpan normal olarak açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramını orta frekans bölgesinde, yani geçme frekansı dolayında fazı artırmak ve bu şekilde faz payını artırarak sistemin geçici davranışını iyileştirmek için kullanılır. Ancak yüksek frekanslarda büyüklüğü artırdığından sistemin yüksek frekanslı gürültülerden etkilenmesini de artırır. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için PD kontrol yerine aşağıda incelenecek olan faz-ilerletici denkleştirici kullanılabilir. Bu çarpanının Bode diyagramlarına olan katkısı daha önce Şekil 4.8 ve 4.9'da verilmişti.

v) Oransal + İntegral (PI) Kontrol

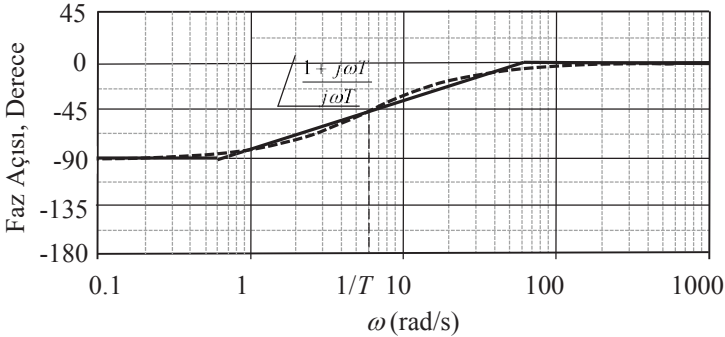
Oransal + integral kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna aşağıdaki çarpanı ekler. Bu çarpanın açık çevrim Bode diyagramına eklediği büyüklük ve faz eğrileri Şekil 4.23 ve Şekil 4.24'de verilmiştir.

$$\left(1 + \frac{1}{Ts}\right) = \frac{1}{T} \left(\frac{Ts + 1}{s}\right) \quad (4.113)$$

Orijindeki kutup integrator işlevi gördüğünden sistemin durağan davranışını iyileştirir. Sistemin tipini bir artırır. Köşe frekansı $\omega = 1/T$ 'nin yeterince üzerindeki frekanslarda büyüklük eğrisini değiştirmez. $\omega = 10/T$ frekansının üzerindeki frekanslarda sistemin faz açısını ihmal edilebilecek kadar az etkiler. Bu yüzden kazanç payının olumsuz yönde fazla etkilenmemesi için köşe frekansı geçme frekansının oldukça aşağısında seçilir. Saf bir integrator içerdiğinden uygulama için kullanılan donanımda doyma durumu yaratabilir. Bu sakıncanın ortadan kaldırılması için *PI* kontrol yerine faz-geriletici denkleştirici kullanılabilir.



Şekil 4.23



Şekil 4.24

vi) Faz-Geriletici Denkleştirici

Faz-geriletici denkleştirici yaklaşık PI işlemi yapar ve açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$\left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \quad (T_2 > T_1) \quad (4.114)$$

şeklinde bir çarpan ekler. $-1/T_2$ 'deki kutup sanal eksene oldukça yakın, $-1/T_1$ 'deki sıfır ise kutba yakın ve onun solundadır. Bu çarpanın açık çevrim Bode diyagramına eklediği hem asemptotik hem de gerçek büyüklük ve faz eğrileri Şekil 4.25 ve Şekil 4.26'da verilmiştir.

Denklem (4.113)'den faz açısı ϕ aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\tan \phi = \frac{(T_1 - T_2)\omega}{1 + T_1 T_2 \omega^2} \quad (4.115)$$

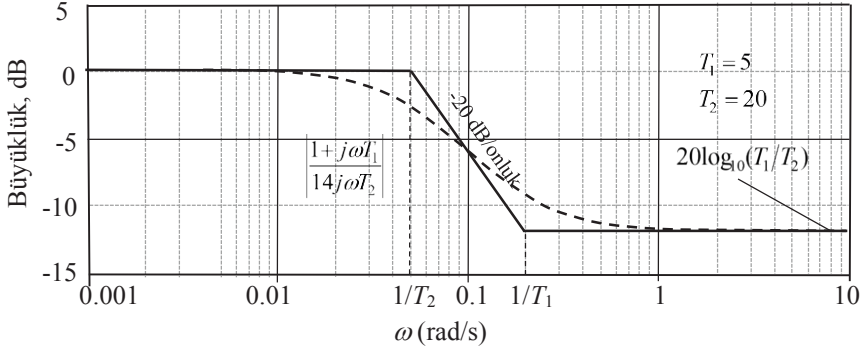
Bu ifadeden faz açısının minimum değeri ve bu değer oluştuğu frekans aşağıdaki denklemlerden elde edilir.

$$\tan \phi_{\min} = \frac{T_1 - T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \quad (4.116)$$

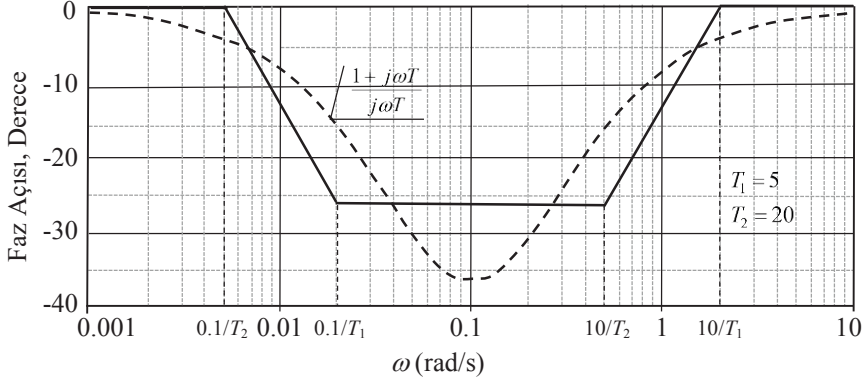
$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (4.117)$$

Bu denklemler denkleştirme işlemi sırasında istenen faz açısı azalma miktarı ve frekansı için kullanılması gereken T_1 ve T_2 değerlerini bulmakta kullanışlıdır. Amaç faz payını fazla azaltmadan düşük frekanslardaki kazancı artırarak durağan davranışı iyileştirmektir. Bu yüzden hem $1/T_2$ 'deki hem de $1/T_1$ 'deki köşe frekansı, geçme frekansının oldukça altında seçilir. Uygulamada ya açık çevrim kazanç durağan davranışa göre ayarlanır ve denkleştiriciyle faz açısı düzenlenir, ya da açık çevrim kazancıyla faz payı ayarlanır ve denkleştirici tasarımıyla düşük frekanslardaki kazanç artırılır.

Şekil 4.25 ve Şekil 4.26'da $T_1 = 5$ ve $T_2 = 20$ olarak alındığından, $\omega_{\min} = 0.1$ rad/s, $\phi_{\min} = 36.9^\circ$ olarak bulunmuştur.



Şekil 4.25



Şekil 4.26

vii) Faz-İlerletici Denkleştirici

Faz-ilerletici denkleştirici, faz payını artırarak sistemin sönüm oranını artırmak için kullanılır. Yani esas amacı sistemin geçici davranış özelliklerini iyileştirmektir. Faz-ilerletici denkleştiricinin açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpan faz-geriletici denkleştiricinin çarpanıyla aynıdır. Tek fark $-1/T_1$ 'deki sıfırın sağ tarafta, $-1/T_2$ 'deki kutbun ise sol tarafta olmasıdır. Çarpan aşağıdaki gibidir.

$$G_c(s) = \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \quad (T_1 > T_2) \quad (4.118)$$

Faz-ilerletici denkleştiricinin Bode diyagramına eklediği hem asemptotik hem de gerçek büyüklük ve faz eğrileri Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'de verilmiştir.

Denklem (4.118)'den faz açısı ϕ analitik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tan \phi = \frac{(T_1 - T_2)\omega}{1 + T_1 T_2 \omega^2} \quad (4.119)$$

Bu ifadeden faz açısının maksimum değeri ve bu değer in oluştuğu frekans için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\tan \phi_{mak} = \frac{T_1 - T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (4.120)$$

ya da gerekli düzenlemeler yapılrırsa,

$$\sin \phi_{mak} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (4.121)$$

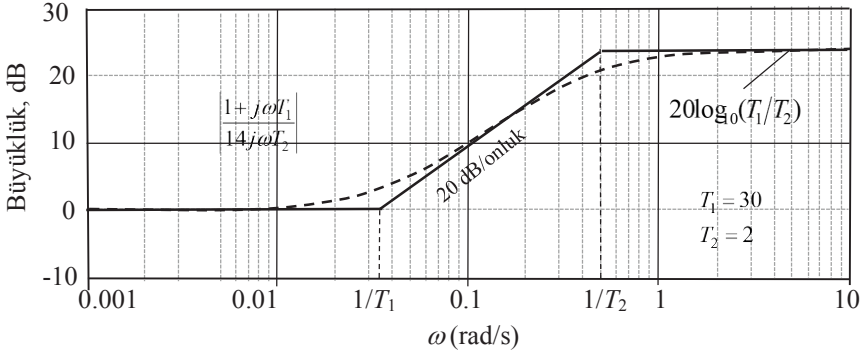
$$\omega_{mak} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{\alpha}} \quad (4.122)$$

Yukarıdaki denklemlerde $\alpha = T_1/T_2$ olarak tanımlanmış olup, önemli bir tasarım parametresidir. Maksimum faz artışı sadece bu parametrenin fonksiyonudur.

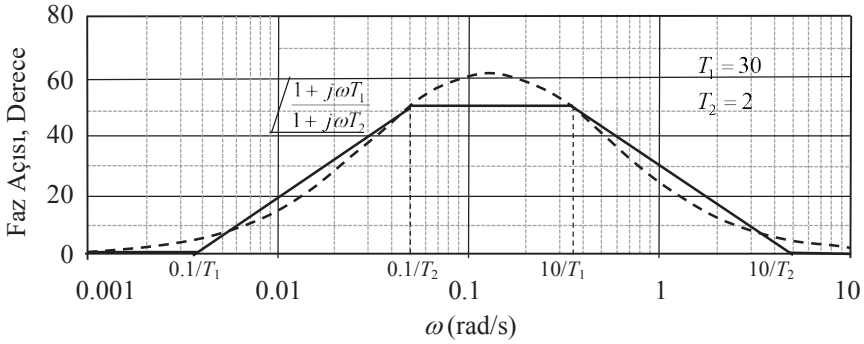
ω_{mak} frekansında denkleştiricinin kazanç artırımı miktarı ise aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$|G_c(j\omega_{mak})| = \left| \frac{jT_1\omega_{mak} + 1}{jT_2\omega_{mak} + 1} \right| = \sqrt{\frac{\alpha + 1}{(1/\alpha) + 1}} = \sqrt{\alpha} \quad (4.123)$$

Bu denklemler, denkleştirme işlemi sırasında istenen en büyük faz açısı artma miktarını ve frekansını verecek T_1 ve T_2 değerlerini bulmak için kullanışlıdır. Şekil 4.28'de $T_1 = 30$ ve $T_2 = 2$ olarak alındığından, $\omega_{mak} = 0.13$ rad/s, $\phi_{mak} = 61^\circ$ değerlerindedir. Uygulamalarda, T_1 ve T_2 değerleri, en büyük faz açısı artışı geçme frekansı dolayında olacak biçimde seçilir.



Şekil 4.27



Şekil 4.28

viii) Faz-İlerletici-Geriletici Denkleştirici

Faz-ilerletici-geriletici denkleştiricinin açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpan faz-ilerletici ve faz-geriletici bileşenlerden oluşur ve aşağıdaki gibidir.

$$G_c(s) = \left(\frac{T_{1g}s + 1}{T_{2g}s + 1} \right) \left(\frac{T_{1i}s + 1}{T_{2i}s + 1} \right) \quad \begin{array}{l} (T_{1i} < T_{2i} < T_{2g} < T_{1g}) \\ (T_{2g}T_{2i} = T_{1g}T_{1i}) \end{array} \quad (4.124)$$

Burada faz geriletici kısım açık çevrim transfer fonksiyonu Bode diyagramının düşük frekans bölgesini, faz-ilerletici kısım ise orta ve yüksek frekans bölgesini şekillendirmek için kullanılır. Faz-geriletici kısımda $-1/T_{2g}$ 'deki kutup, $-1/T_{1g}$ 'deki sıfırın sağ tarafındadır. Kutup orijine

yakın olarak seçilir. Faz iletici kısım ise faz payını en fazla artıracak biçimde yerleştirilir. $-1/T_{2g}$ 'deki kutup, $-1/T_{1g}$ 'deki sıfırın sol tarafındadır. Zorunlu olmamakla birlikte, çarpan kazancının "1" olması için $T_{2g}T_{2i} = T_{1g}T_{1i}$ olarak seçilir.

Faz-ilerletici-geriletici denkleştiricinin Bode diyagramına eklediği hem asemptotik hem de gerçek büyüklük ve faz eğrileri $T_{i2} = 100$, $T_{i1} = 10$, $T_{g1} = 0.5$ ve $T_{g2} = 0.05$ için Şekil 4.29 ve Şekil 4.30'da verilmiştir.

Faz açısı ϕ 'nin maksimum ve minimum olduğu frekanslar ω_{mak} ve ω_{min} aşağıdaki gibi bulunabilir. Denklem (4.124)'den faz açısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi &= \angle G_c(j\omega) = \angle T_{1g}j\omega + 1 + \angle T_{1i}j\omega + 1 - \angle T_{2g}j\omega + 1 - \angle T_{2i}j\omega + 1 \\ &= \tan^{-1} T_{1g}\omega + \tan^{-1} T_{1i}\omega - \tan^{-1} T_{2g}\omega - \tan^{-1} T_{2i}\omega \end{aligned} \quad (4.125)$$

ϕ 'nin ω 'ya göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{T_{1g}}{1+T_{1g}^2\omega^2} + \frac{T_{1i}}{1+T_{1i}^2\omega^2} - \frac{T_{2g}}{1+T_{2g}^2\omega^2} - \frac{T_{2i}}{1+T_{2i}^2\omega^2} = 0 \quad (4.126)$$

olur. Bu denklemde $y = \omega^2$ olarak tanımlanırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 + \xi y + \gamma = 0 \quad (4.127)$$

Burada katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmış olup, ω 'nın pozitif çözümleri kullanılır.

$$\alpha = T_{1i}^2 T_{2g}^2 T_{2i}^2 T_{1g} + T_{2i}^2 T_{1g}^2 T_{2g}^2 T_{1i} - T_{2i}^2 T_{1g}^2 T_{1i}^2 T_{2g} - T_{2g}^2 T_{1g}^2 T_{1i}^2 T_{2i}$$

$$\begin{aligned} \beta &= T_{1g}(T_{1i}^2 T_{2g}^2 + T_{2g}^2 T_{2i}^2 + T_{1i}^2 T_{2i}^2) + T_{1i}(T_{1g}^2 T_{2g}^2 + T_{2i}^2 T_{2g}^2 + T_{2i}^2 T_{1g}^2) \\ &\quad - T_{2g}(T_{1g}^2 T_{1i}^2 + T_{2i}^2 T_{1i}^2 + T_{2i}^2 T_{1g}^2) - T_{2i}(T_{1g}^2 T_{1i}^2 + T_{2g}^2 T_{1i}^2 + T_{2g}^2 T_{1g}^2) \end{aligned}$$

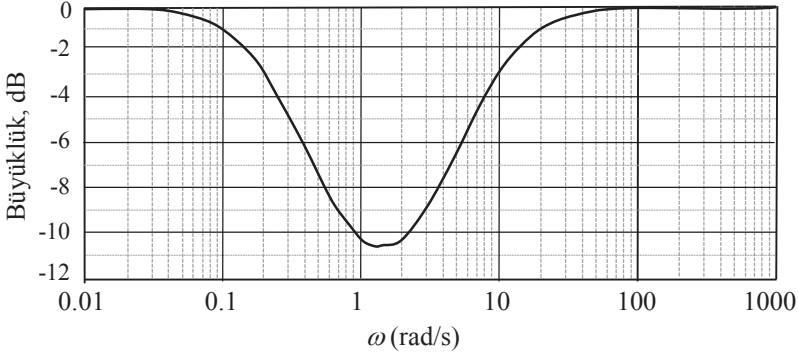
$$\begin{aligned} \xi &= T_{1g}(T_{2g}^2 + T_{1i}^2 + T_{2i}^2) + T_{1i}(T_{2g}^2 + T_{1g}^2 + T_{2i}^2) \\ &\quad - T_{2g}(T_{1i}^2 + T_{1g}^2 + T_{2i}^2) - T_{2i}(T_{1i}^2 + T_{1g}^2 + T_{2g}^2) \end{aligned}$$

$$\gamma = T_{1g} + T_{1i} - T_{2g} - T_{2i}$$

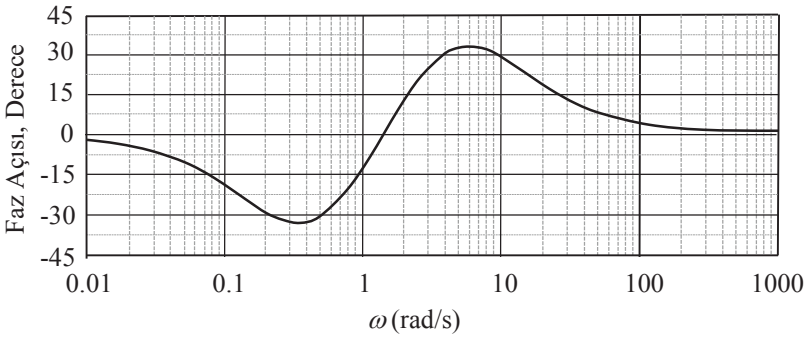
Maksimum ve minimum faz farkları ise denklem (4.125)'de ω yerine ω_{mak} ve ω_{min} kullanarak bulunur.

Denklem (4.126) ve denklem (4.125) denkleştirici tasarımı sırasında seçilen zaman sabitlerine karşılık gelen maksimum ve minimum faz açısı artma miktarlarını ve frekanslarını elde etmek için kullanılabilir.

Şekil 4.29 ve Şekil 4.30'da $T_{1i} = 1$, $T_{1g} = 0.5$, $T_{2i} = 5$, $T_{2g} = 0.1$ için çizilen büyüklük ve faz eğrileri görülmektedir. Şekil 4.30'da $\omega_{mak} = 5.87$ rad/s, $\omega_{min} = 0.34$ rad/s, $\phi_{mak} = 33.1^\circ$ ve $\phi_{min} = -33.1^\circ$ değerlerindedir.



Şekil 4.29



Şekil 4.30

ix) *PID* Kontrol

PID kontrolün açık çevrim transfer fonksiyonunda eklediği çarpan, aşağıdaki gibidir.

$$G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \left(\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right) \quad (4.128)$$

PID kontrol açık çevrim transfer fonksiyonuna orijinde bir kutup ve aşağıdaki gibi iki sıfır ekler.

$$z_{c1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i(T_i - 4T_d)}}{2T_i T_d} \quad (4.129)$$

Böyle bir çarpanın Bode diyagramları, Şekil 4.31 ve Şekil 4.32’de verilenleri andırır. Düşük frekanslarda büyüklük grafiğinin eğimi -20 dB/onluk, faz açısı ise -90° ’dir. Bu eğim dolayısıyla (integral işlem) sistemin hatalarını sıfırlar. Buna karşılık yüksek frekanslarda büyüklük $+20$ dB/onluk eğimle artmaya devam eder. Bu özellik dolayısıyla *PID* kontrol, sistemdeki gürültünün performans üzerine olan etkisini artırır.

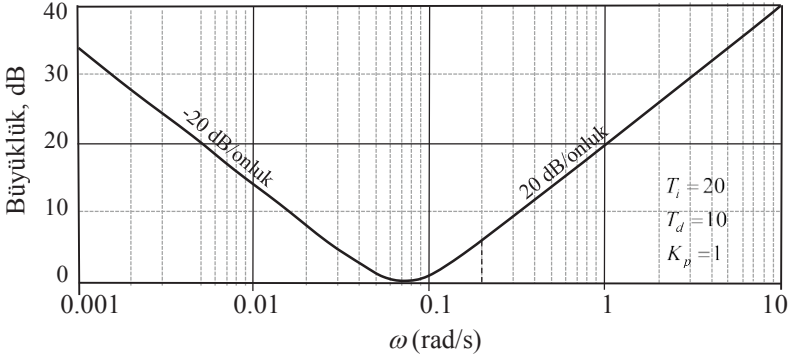
4.11 Bode Diyagramıyla Kontrol Sistemi Tasarımı

4.11.1 Genel Tasarım Prensipleri

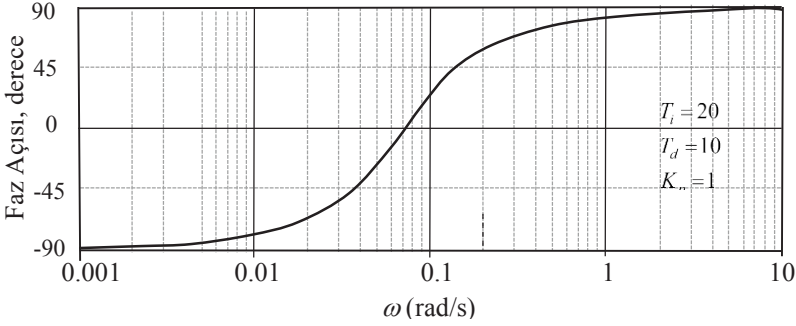
Tasarım sırasında sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunun önemli üç bölgesi göz önünde bulundurulmalıdır. Bunlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- i) Alçak frekans bölgesi
- ii) Orta frekans bölgesi
- iii) Yüksek frekans bölgesi

Alçak frekans bölgesi durağan hataları azaltmak amacıyla tasarlanır. İdeal olan, alçak frekanslarda kapalı çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük eğrisinin 0 dB değere sahip olmasıdır. Bu durum açık çevrim transfer fonksiyonunda saf bir integrator, yani $1/s$ çarpanı olması demektir. Ancak saf integrator kullanımı donanım doymasına sebep olabileceğinden bunun alternatifi, faz-geriletilici denkleştirme yapmak ve bununla birlikte çevrim kazancı K ’yı artırmaktır. Böylece açık çevrim transfer fonksiyonunun büyüklük eğrisi orta frekans bölgesine -20 dB/onluk eğimle yaklaşmalıdır. Açık çevrim sistemin geçme frekansı alçak frekans bölgesinin üzerinde olmalıdır.



Şekil 4.31



Şekil 4.32

Orta frekans bölgesi, kontrol sisteminin referans girişini takip etmesi ve bozucu etkileri azaltması istenen bölgedir. Geçme frekansı bu bölge içindedir ve denkleştirme işlemleri geçme frekansı çevresinde yapılır. Orta frekans bölgesi genellikle 0.1-10 Hz aralığındadır. Uygulamanın özelliğine göre bu aralığın içinde daha dar bir bölgede olabilir. Orta frekans bölgesi nadir durumlarda 30 Hz dolayına kadar yükselebilir. Bu bölge sistemin marjinal kararlılığının düzenlendiği bölgedir. Bu bölgenin tasarımında öncelikle faz payı değiştirilerek tasarım şartlarının sağlanmasına çalışılır. Bu amaçla *PD* kontrol kullanılabilirse de, bu tür kontrol sistemde gürültü varsa bunun etkisini artıracığından frekans cevabı tasarımı yönteminde tercih edilmez. Bunun yerine açık çevrim transfer fonksiyonunun faz açısını sadece istenen bölgede artırarak faz-ilerletici denkleştirici kullanılması yoluna gidilir.

Sistemlerdeki gürültü genellikle 50 Hz'in üzerindedir. Gürültünün sistem üzerindeki etkisini ortadan kaldırmak için bu frekansın üzerindeki

frekanslarda açık çevrim Bode büyüklük diyagramı düşük dB değerlerine sahip olmalıdır. Bunu sağlamak için eğim olduğunca negative yönde artırılmalıdır. Eğer bu şart sağlanamıyorsa açık çevrim transfer fonksiyonuna köşe frekansı yüksek frekanslarda olan $1/(Ts+1)$ gibi bir denkleştirme elemanı eklenebilir.

Tasarım şartları çoğunlukla sistemin geçici davranış özellikleri cinsinden, ya da kapalı çevrim sistemin frekans cevabı özellikleri cinsinden verilir. Kapalı çevrim davranış özellikleriyle açık çevrim transfer fonksiyonunun frekans cevabı arasındaki ilişki bire bir kurulamasa da, açık çevrim frekans cevabını tanımlayan parametreler uygun biçimde tanımlanarak istenen şartlar sağlanabilir. Tasarım şartlarını açık çevrim frekans cevabı özellikleri cinsinden yorumlamak için aşağıdaki hususlar dikkate alınır.

- i) Faz payı, kazanç payı ve rezonans tepe yüksekliği sistem sönümüyle ilişkilidir. Faz payı ve kazanç payının artırılması kararlılığı iyileştirir. Marjinal kararlılığı artırır. Faz payının artırılması sistemin geçici davranışındaki aşmayı azaltır.
- ii) Geçme frekansı ve bant genişliği sistemin cevap hızıyla ilişkilidir. Bant genişliğinin, dolayısıyla geçme frekansının artırılması sistemin cevap hızını artırır. Yani yükselme zamanı, tepe zamanı, geçme zamanı gibi cevap hızının ölçütü olan parametrelerin değerlerini azaltır.
- iii) Çevrim kazancının artırılması durağan hataları azaltır.
- iv) Statik hata katsayıları durağan davranışla ilişkilidir. Sistemin basamak referans girişi hatasız izleyebilmesi için açık çevrim transfer fonksiyonunun büyüklük eğrisinin düşük frekans bölgesindeki eğimi en az -20 dB/onluk, rampa girişi izleyebilmesi için ise en az -40 dB/onluk olmalıdır.
- v) Eğer ileri besleme yolundaki transfer fonksiyonuna $G(s)$, geri besleme yolundaki transfer fonksiyonuna $H(s)$ denirse, Denklem (2.4) ve denklem (2.5)'e göre, referans girişini hatasız izleyebilmek ve bozucuların etkisini azaltmak için $|G(j\omega)H(j\omega)|$ büyük olmalıdır. Yani durağan hataları azaltmak için düşük frekans bölgesinde bu değer büyük olmalıdır.
- vi) Denklem (2.5)'e göre, gürültünün sistem üzerindeki etkisini azaltmak için yüksek frekanslarda $|G(j\omega)H(j\omega)|$ küçük olmalıdır.

Geçici davranış özellikleri ve kapalı çevrim transfer fonksiyonunun özellikleri, özel haller dışında açık çevrim transfer fonksiyonunun frekans cevabı özellikleriyle bire bir ilişkilendirilemediğinden, açık çevrim frekans cevabını kullanan Bode diyagramı tasarım yöntemi ilk tasarımın değerlendirilmesinden sonra başa dönülüp bazı parametrelerin değiştirilmesini ve tasarımın tekrar edilmesini gerektirebilir.

Kontrol sisteminin tasarımında durağan davranışla göreceli kararlılık arasında bir uzlaşma söz konusudur. Tasarım sırasında kabaca aşağıdaki aşamalar izlenir.

- i) Tasarım istenirse önce alçak frekans bölgesinde sonra orta frekans bölgesinde yapılabilir. İstenirse bu işlemlerin sırası değiştirilebilir.
- ii) Alçak frekans bölgesinde ($\omega \ll \omega_c$) önce durağan hatanın basamak ya da rampa giriş için mi azaltılması gerektiğini dikkate alarak aşağıdaki üç yöntemden uygun olanını izleyin. Bu aşamada amaç açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode büyüklük eğrisinin 0 dB değerini geçtiği noktadaki eğimini ayarlamaktır.
 - a) Çevrim kazancını artırın
Bu yöntem tek başına genellikle yetersizdir. Diğer denkleştiricilerle birlikte kullanılır.
 - b) Açık çevrim transfer fonksiyonuna yeterli sayıda integrator ekleyerek Bode büyüklük diyagramının alçak frekanstan orta frekans bölgesine geliş eğimini ayarlayın.
Basamak giriş için durağan hatanın (statik hata) sıfırlanması için bu eğim -20 dB/onluk, rampa giriş için dinamik hatanın sıfırlanması için ise -40 dB/onluk olmalıdır.
Bu yöntem durağan hataları tamamen yok eder. Ancak kullanılan saf integratörler dolayısıyla kontrol donanımında doyma yaratabilir. Bu yüzden frekans cevabına dayalı tasarımda tercih edilmez.
 - c) Faz-geriletici kontrol uygulayın ve çevrim kazancını ayarlayın.
Bu yöntemde hatalar tamamen sıfırlanamazsa da çok azaltılabilir. Frekans cevabı tasarımlarında kullanılan standart uygulamadır. 0 dB noktasında eğim değerleri yukarıda madde (b)'de verildiği gibi olmalıdır.

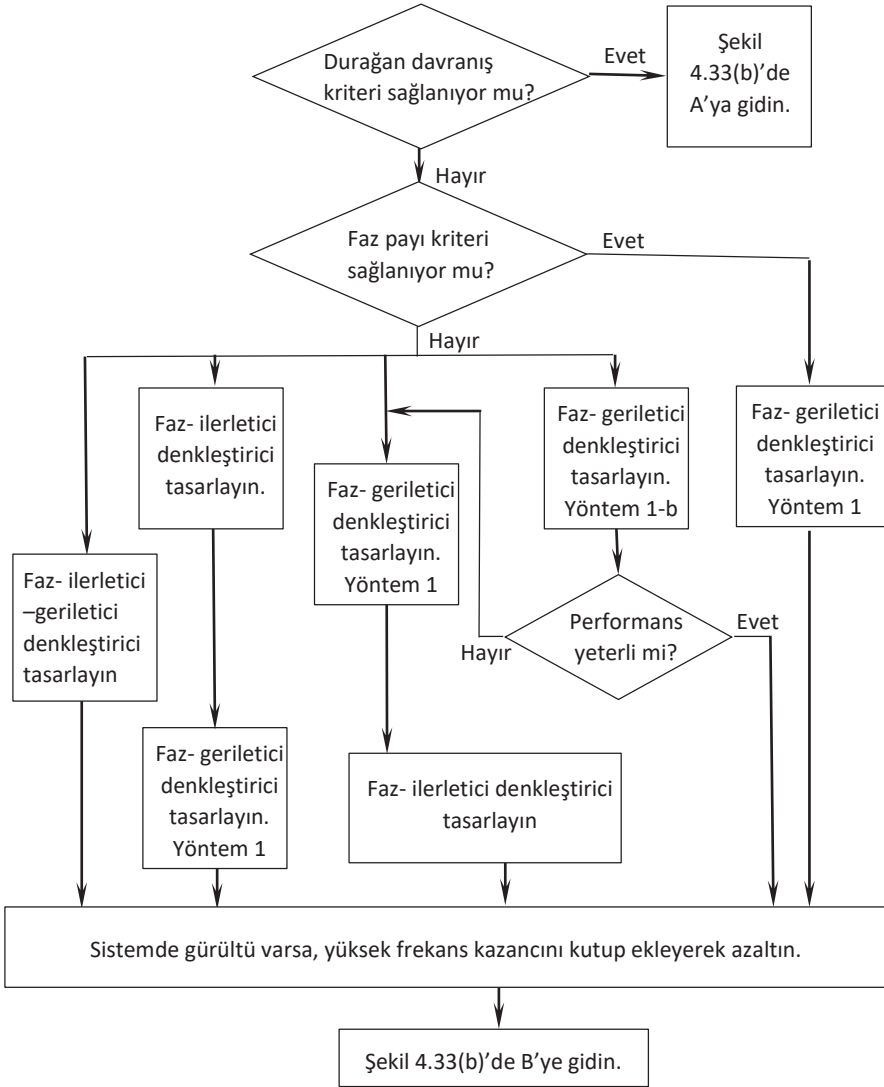
- iii) Bode diyagramlarını çizin. Sistemin faz ve büyüklük paylarını kontrol edin. Uygun bir denkleştirici kullanarak faz payının istenen değerde olmasını sağlayın. Bu aşamada başlıca iki seçenek kullanılabilir.
 - a) *PD* denkleştirici kullanmak.
Bu yöntem faz açısını artırır. Ancak bu artış yüksek frekanslarda da olacağından, sistemin gürültüden etkilenmesini de artırır. Bu yüzden frekans cevabına dayalı tasarımda tercih edilmez.
 - b) Faz-ilerletici denkleştirici kullanmak.
Bu yöntem frekans cevabı tasarımında kullanılan standart uygulamadır.
- iv) Yukarıda madde (ii) ve madde (iii)'de kullanılan yöntemler yerine, tek aşamada faz-ilerletici-geriletici denkleştirici de kullanılabilir.
- v) Bu aşamada kapalı çevrim sisteminin geçici davranış kriterleri de dahil sistemin tüm tasarım şartlarını karşılama durumu kontrol edilmeli ve gerekirse başa dönülerek yeni ayarlarla tasarım tekrarlanmalıdır.
- vi) Tasarımın son aşamasında yüksek frekans bölgesinde büyüklük değerinin gürültüyü azaltacak kadar düştüğü kontrol edilmeli, gerekirse sisteme yüksek köşe frekansına sahip bir açık çevrim kutbu ekleyerek büyüklük eğrisi aşağı değerlere doğru çekilmelidir. Yüksek frekanslarda istenen bu azalma, sistem modellemesi sırasında baskın olmadığı için ihmal edilen ve diğer kutuplara göre sanal eksenden çok uzaktaki kutupların etkisini de azaltır. 50-100 Hz üzerindeki frekanslarda büyüklük azalma miktarının tipik olarak 40 dB dolayında olması istenir.

Frekans cevabı analiziyle, açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenen herhangi bir çarpanın sistem üzerindeki etkisini incelemek mümkündür. Örneğin bir *PD*, *PI* ya da *PID* kontrolcü tasarlanabilir ya da sisteme uygun bir açık çevrim kutbu veya sıfırı eklenebilir. Ancak aktif elemanlar gerektiren, integral alan elemanlarda doyma yaratabilen veya sistemdeki gürültünün etkisini artırabilen işlemler yerine, frekans cevabı tasarım yönteminde Kısım 4.11'de listelenen çarpanlardan aşağıdakilerin kullanılması tercih edilir.

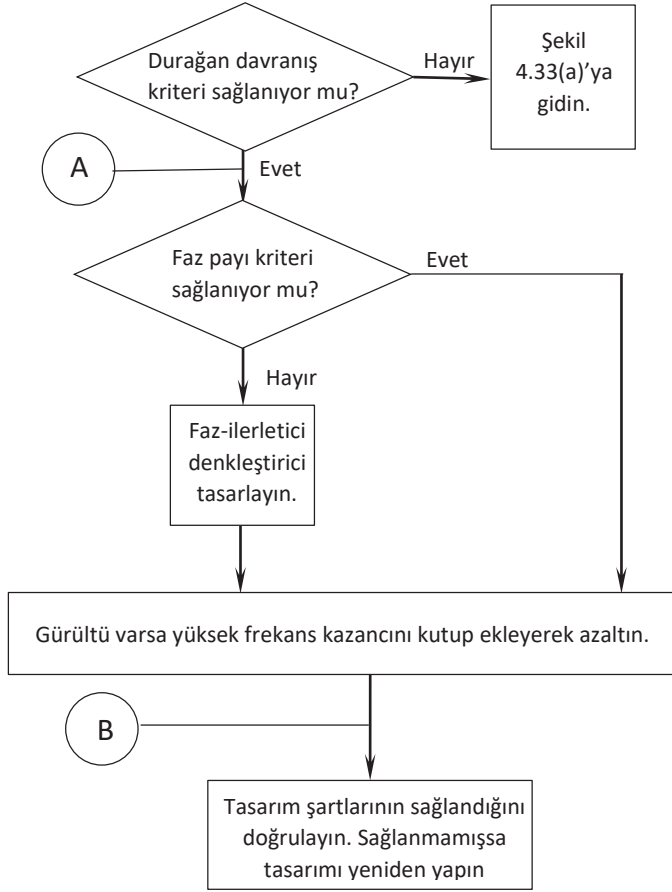
- i) Sabit kazanç
- ii) Faz-geriletici denkleştirici

- iii) Faz-ilerletici denkleştirici
- iv) Faz-ilerletici-geriletici denkleştirici
- v) Yüksek frekans bölgesine kutup eklenmesi

Tasarım sırasında izlenecek yol ve kullanılacak yöntemler Şekil 4.33'de şematik olarak özetlenmiştir.



Şekil 4.33(a)



Şekil 4.33(b)

4.11.2 Faz-Geriletici Denkleştirici

Faz geriletici denkleştiricinin esas amacı sistemin durağan hatalarını azaltmak, yani referans girişini izleyebilme yetkinliğini artırmaktır. Faz-geriletici denkleştirici alçak frekanslarda çevrim kazancını azaltmadan yüksek frekanslarda kazanç azaltır. Yüksek frekanslarda kazanç azalması yarattığından, çevrim kazancının artırılabilmesine imkan verir ve böylelikle durağan hataların azaltılmasına katkıda bulunur. Artış oranı durağan hatanın istenen değerde olmasını sağlayacak biçimde ayarlanır. Ancak işlem sonunda orta frekans bölgesinde bir miktar faz ve genlik azalması olur. Bunun sonucunda, sistemin doğal frekansı, geçme frekansı ve dolayısıyla bant genişliğini belirleyen ω_b frekansının bir miktar azalmasına, geçici

davranışın yerleşme zamanının artmasına sebep olur. Bu etkilerin azaltılması için faz geriletilicili denkleştiricinin köşe frekansları geçme frekansına göre oldukça daha düşük değerlerde seçilir.

Faz geriletilici denkleştirici yüksek frekanslarda kazanç artmasına sebep olmadığından gürültünün sistem üzerindeki etkisini artırmaz.

Faz geriletilici denkleştirici, orta frekans bölgesini fazla değiştirmeden, yani faz ve kazanç paylarını fazla etkilemeden aşağıda verilen *Yöntem 1*'i izleyerek tasarlanabilir.

Yöntem 1: Orta frekans bölgesini fazla etkilemeden faz-geriletilici denkleştirici tasarımı

1. Denkleştirici uygulanmamış sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramlarını çizin. Geçme frekansını, faz geçme frekansını, faz payını ve kazanç payını bulun.
2. Fazın $-180^\circ + (\text{mevcut faz payı}) + (5^\circ-12^\circ)$ olduğu frekansı bulun ve bunu yeni geçme frekansı olarak kabul edin. Burada fazladan eklenen $5^\circ-12^\circ$ faz-geriletilici denkleştiricinin yaratacağı tahmini faz azalmasını karşılamak içindir [4.2]. Bu değer $1/T_1$ değerinin geçme frekansından ne kadar uzak olduğuna bağlıdır. Eğer $1/T_1$ değeri geçme frekansının bir onluktan fazla altında ise daha küçük değerler, geçme frekansına daha yakınsa daha büyük değerler kullanılması uygun olur.
3. Açık çevrim transfer fonksiyonuna uygun bir K' kazanç çarpanı ekleyerek büyüklük eğrisinin geçme frekansını yeni belirlenen geçme frekansına getirin.
4. Faz geriletilici denkleştiricinin geçme frekansı dolayında faz payına olan etkisinin az olması için, denkleştirici sıfır ve kutbu bu frekansın oldukça altında olmalıdır. Bunu sağlamak için denkleştirici sıfırını, yani $1/T_1$ değerini yeni geçme frekansının yaklaşık bir onluk altında seçin.
5. Denkleştiricili sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunu bilinmeyen T_2 cinsinden yazın. Bunu yaparken açık çevrim kazancını $K' \times (T_2/T_1)$ kadar artırın. Birim basamak (ya da duruma göre rampa) cevabı T_2 cinsinden bulup, durağan cevapla ilgili tasarım şartını uygulayın ve T_2 'nin değerini bulun.

6. Böylelikle elde edilen sistemin açık çevrim Bode diyagramını ve kapalı çevrim birim basamak cevabını çizip tasarım kriterlerinin sağlanıp, sağlanmadığını kontrol edin. Sağlanmıyorsa tasarımı belirlenen parametreleri değiştirerek tasarımı tekrarlayın.

Örnek 4.2: Yöntem 1

Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 16} \quad (4.130)$$

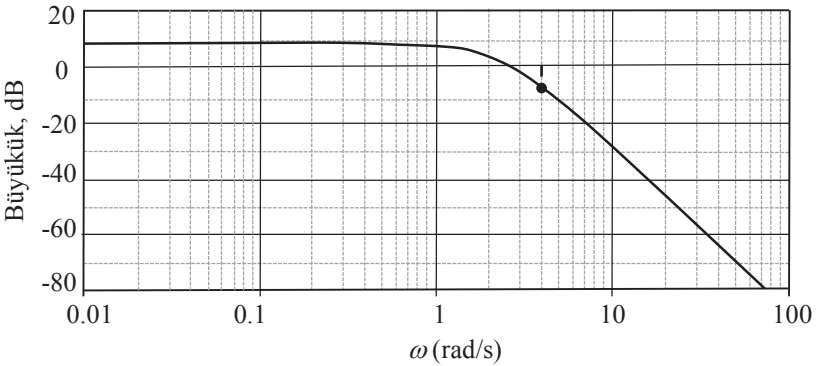
Bu sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 56} \quad (4.131)$$

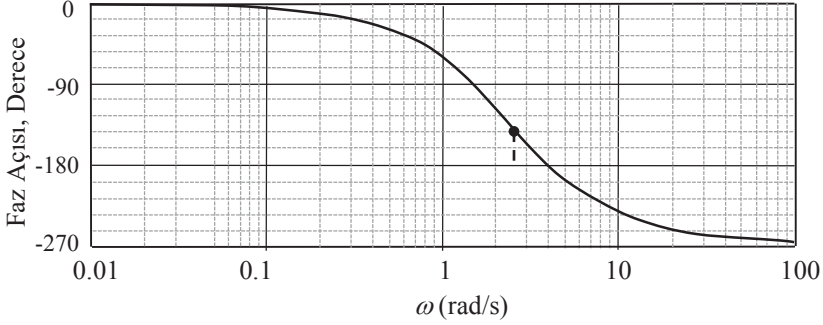
şeklinde. O halde bu sistemde birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri $c_{ss} = 0.714$ kadardır. Bu sistemin birim basamak giriş için durağan cevabını $c_{ss} \geq 0.99$ yapmak için faz-geriletici bir denkleştirici tasarlanması istenmektedir.

Tasarım için sırasıyla aşağıdaki aşamalar izlensin.

- 1) Denkleştirici uygulanmamış sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.34 ve Şekil 4.35’de verilmiştir. Faz payı 36.8° , kazanç payı ise 7.6 dB kadardır.



Şekil 4.34



Şekil 4.35

- 2) Denkleştirici uygulandığında faz payının 6° azaldığını kabul edelim. Mevcut faz açısının aynı kalması isteniyorsa, yeni geçme frekansı faz açısının $-180^\circ + 36.8^\circ + 6^\circ \cong -137^\circ$ olduğu frekans olacaktır. Bu frekansın değeri Şekil 4.35'deki faz eğrisinden 2.45 rad/s olarak bulunur. Şekil 4.34'deki büyüklük eğrisinde bu frekansa karşılık gelen değer 0.913 dB'dir. O halde geçme frekansını yeni değerine getirmek için büyüklük eğrisi 0.913 dB kadar aşağı doğru indirilmeli, yani açık çevrim transfer fonksiyonuna $K' = 0.9$ büyüklüğünde bir çarpan eklenmelidir. ($20\log_{10}K' = -0.913$)
- 3) Denkleştiricinin üst köşe frekansı ($1/T_1$) yeni geçme frekansının bir onluk altında, yani $1/T_1 = 2.45/10 = 0.245$ rad/s olarak alınsın. O zaman denkleştirici sıfırının zaman sabiti $T_1 = 4.08$ s olarak bulunur.
- 4) Şimdi durağan durum için istenen şartı sağlayacak biçimde T_2 değeri bulunabilir. Bunun için önce denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$G(s) = K' \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \left(\frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 16} \right) \quad (4.132)$$

Bu denklemde K' terimi Madde 2'den gelmekte, T_2/T_1 çarpanı ise denkleştiricinin yüksek frekanslardaki büyüklük azalmasını 0 dB değerine çıkarmak için, yani düşük frekansta kazancı artırarak durağan davranışı iyileştirmek için ilave edilen çarpandır.

Birim geribeslemeli sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.132)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

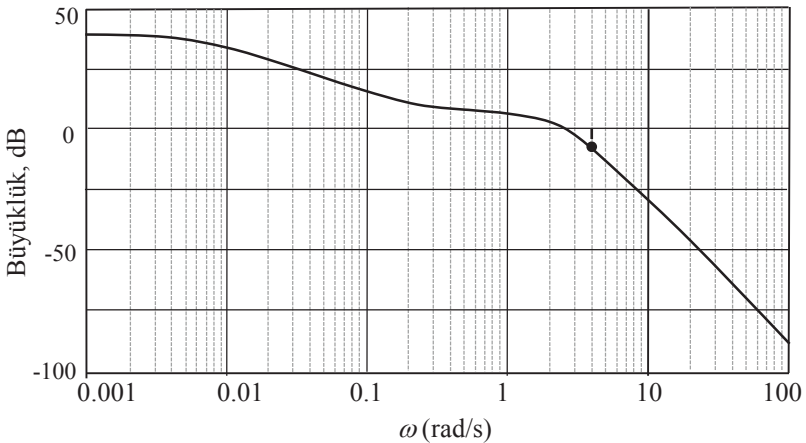
$$T(s) = \frac{40K'T_2(T_1s + 1)}{\left[T_1T_2s^4 + (7T_1T_2 + T_1)s^3 + (16T_1T_2 + 7T_1)s^2 + (16T_1T_2 + 16T_1 + 40K'T_1T_2)s + 16T_1 + 40K'T_2 \right]} \quad (4.133)$$

Sistemin birim basamak girişe durağan cevabının 0.99'dan büyük olması istendiğinden, aşağıdaki şart yazılabilir.

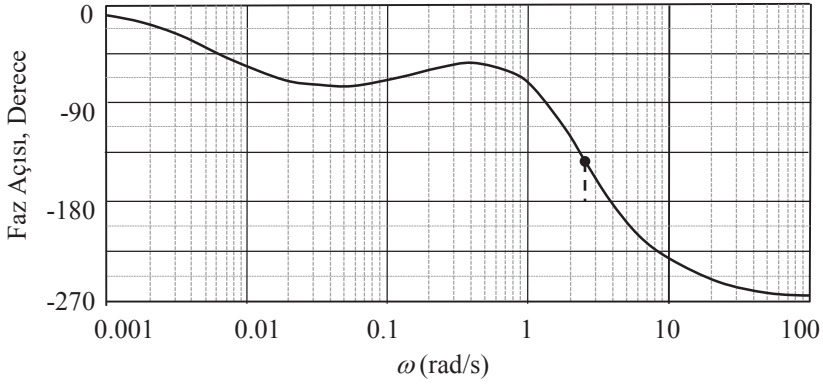
$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \frac{1}{s} = \frac{40K'T_2}{16T_1 + 40K'T_2} > 0.99 \quad (4.134)$$

Bu eşitsizlikten T_2 zaman sabiti için şart $T_2 > 180$ olarak elde edilir. Burada sınır değeri olarak $T_2 = 180$ kabul edilsin.

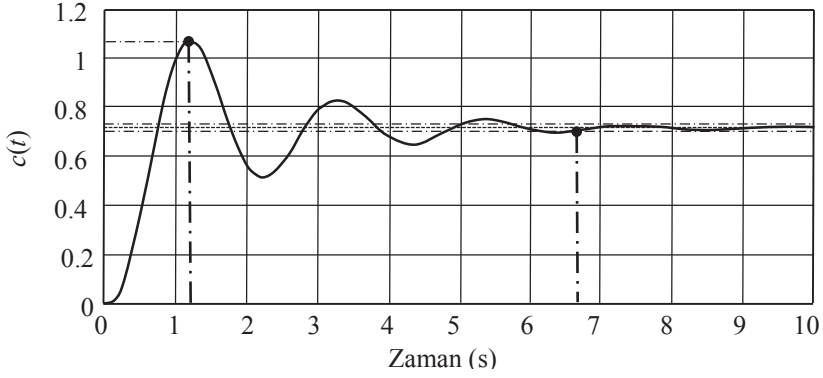
- 5) Tasarlanan denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.36 ve Şekil 4.37'de, denkleştiricisiz ve denkleştiricili sistemlerin birim basamak cevapları ise Şekil 4.38 ve Şekil 4.39'da verilmiştir.



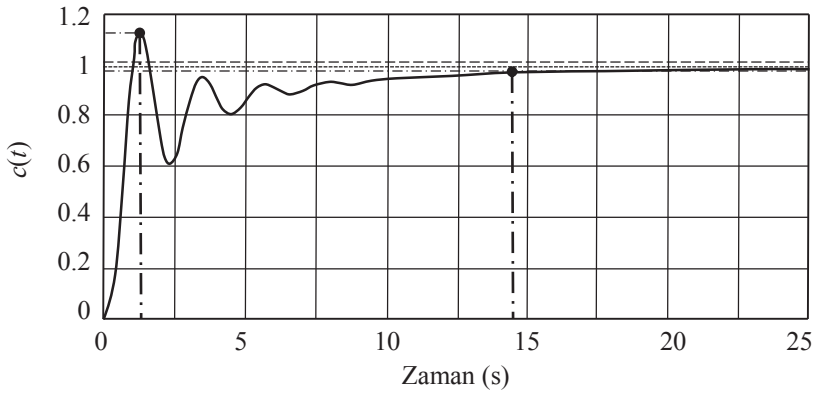
Şekil 4.36



Şekil 4.37



Şekil 4.38



Şekil 4.39

Şekiller 4.36-4.39'daki eğrilerden alınan önemli parametreler aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir. Denkleştirici, faz ve kazanç paylarını neredeyse hiç değiştirmemiş, durağan değeri beklendiği gibi 0.714'den 0.99'a çıkarmış, aşmayı azaltmış, buna karşılık yerleşme zamanını beklendiği gibi uzatmıştır.

Çizelge 4.1

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	36.8°	37°
Kazanç Payı	7.6 dB	7.6 dB
Durağan değer	0.714	0.99
Aşma	% 49	% 13.5
Tepe zamanı	1.20 s	1.28 s
Yerleşme zamanı	6.66 s	14.5 s

Bazı durumlarında faz geriletici denkleştiricinin, sistemin durağan davranışının iyileştirmenin yanı sıra faz payını da istenen bir değere getirmesi arzu edilebilir. Bunun için ödenen bedel yerleşme zamanının daha da uzamasıdır. Böyle bir tasarım için *Yöntem 1*'in ikinci maddesi aşağıdaki gibi değiştirilir. Yöntemin bu hali *Yöntem 1-b* olsun.

Yöntem 1-b için değişik Madde 2:

2. Fazın $-180^\circ + (\text{olması istenen faz payı}) + (5^\circ-12^\circ)$ olduğu frekansı bulun ve bunu yeni geçme frekansı olarak kabul edin. Burada fazladan eklenen $5^\circ-12^\circ$ faz geriletici denkleştiricinin yaratacağı tahmini faz azalmasını karşılamak içindir [4.2].

Örnek 4.3: Yöntem 1-b

Bu örnekte daha önce Yöntem 1 için verilen örnekteki birim geribelemeli sistem için faz-geriletici bir denkleştirici bu sefer aşağıdaki performans şartlarıyla tasarlanacaktır.

$$c_{ss} \geq 0.99$$

$$\text{Faz payı} = 50^\circ$$

Sistemin açık çevrim ve kapalı çevrim transfer fonksiyonları sırasıyla denklem (4.130) ve denklem (4.131)'de verildiği gibidir.

Yöntemin aşamalarını izleyerek tasarım aşağıdaki sırayla yürütülebilir.

- 1) Denkleştirici uygulanmamış sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları daha önce Şekil 4.34 ve Şekil 4.35'de verilmişti. Faz payı 36.8° , kazanç payı ise 7.6 dB kadardır.
- 2) Denkleştirici uygulandığında faz payının 6° azaldığını kabul edilsin. Yeni faz açısının 50° olması isteniyorsa, yeni geçme frekansı faz açısının $-180^\circ + 50^\circ + 6^\circ \cong -124^\circ$ olduğu frekans olacaktır. Bu frekansın değeri Şekil 4.35'deki faz eğrisinden 2.15 rad/s olarak bulunur. Şekil 4.34'deki büyüklük eğrisinde bu frekansa karşılık gelen değer 2.6 dB'dir. O halde geçme frekansını yeni değerine getirmek için büyüklük eğrisi 2.6 dB aşağı doğru indirilmeli, bunu sağlamak için açık çevrim transfer fonksiyonuna $K' = 0.74$ büyüklüğünde bir çarpan eklenmelidir. ($20\log_{10}K = -2.6$)
- 3) Denkleştiricinin üst köşe frekansı ($1/T_1$) yeni geçme frekansının bir onluk altında, yani $1/T_1 = 2.15/10 = 0.215$ rad/s olarak alınsın. Bu değerden denkleştirici sıfırının zaman sabiti $T_1 = 4.65$ s olarak bulunur.
- 4) Şimdi durağan durum için istenen şartı sağlayacak biçimde T_2 değeri bulunabilir. Bunun için önce denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu yazılsın.

$$G(s) = K' \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \left(\frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 16} \right) \quad (4.135)$$

Bu denklemde K' terimi Madde 2'den gelmekte, T_2/T_1 çarpanı ise denkleştiricinin yüksek frekanslardaki büyüklük azalmasını 0 dB değerine çıkarmak, yani düşük frekansta kazancı artırarak durağan davranışı iyileştirmek için ilave edilen çarpandır.

Birim geribeslemeli sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.135)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

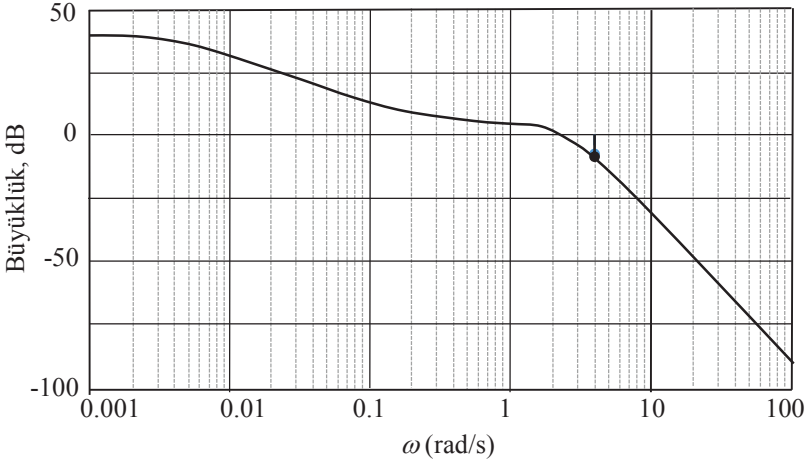
$$T(s) = \frac{40K'T_2(T_1s + 1)}{\left[\begin{array}{l} T_1T_2s^4 + (7T_1T_2 + T_1)s^3 + (16T_1T_2 + 7T_1)s^2 \\ + (16T_1T_2 + 16T_1 + 40K'T_1T_2)s + 16T_1 + 40K'T_2 \end{array} \right]} \quad (4.136)$$

Sistemin birim basamak girişe durağan cevabının ise 0.99 ile 1 arasında olaması istendiğinden, aşağıdaki şart yazılabilir.

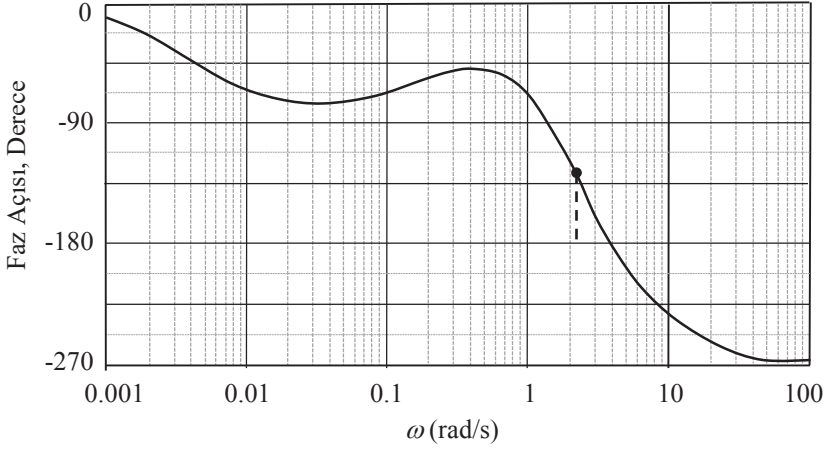
$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \frac{1}{s} = \frac{40K'T_2}{16T_1 + 40K'T_2} > 0.99 \quad (4.137)$$

Bu eşitsizlikte değerler yerine koyulursa T_2 zaman sabiti için şart $T_2 > 249$ olarak elde edilir. Burada sınır değer olan $T_2 = 249$ değerini kabul edilsin.

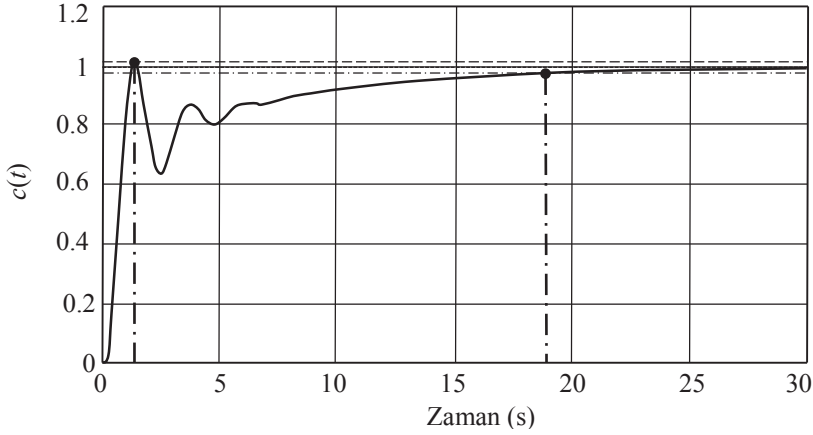
- 5) Tasarlanan denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.40 ve Şekil 4.41'de verilmiştir.
- 6) Denkleştiricili sistemin birim basamak cevabı Şekil 4.42'de verilmiştir.



Şekil 4.40



Şekil 4.41



Şekil 4.42

Şekiller 4.40-4.42'deki eğrilerden bulunan önemli parametreler aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Bu değerlerden görüldüğü gibi denkleştirici faz payını istenen değerin çok yakınına 49.9° 'ye getirmiş, kazanç payını bir miktar artırarak 9.5 dB yapmış, durağan değeri istendiği gibi 0.714'den 0.99'a çıkarmış, aşmayı azaltmıştır. Buna karşılık yerleşme zamanı çok uzamış ve 18.9 s olmuştur.

Çizelge 4.2

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	36.8°	49.9°
Kazanç Payı	7.6 dB	9.4 dB
Durağan değer	0.714	0.99
Aşma	% 49	% 1.5
Tepe zamanı	1.20 s	1.37 s
Yerleşme zamanı	6.66 s	18.9 s

Sonuç olarak, faz-geriletici denkleştiricinin esas amacı dışında kullanılarak faz açısını değiştirmek için kullanılması, yerleşme zamanında aşırı artmalara sebep olabilmektedir. Bunu önlemenin yolu faz-geriletici denkleştiricinin, bir faz-ilerletici denkleştiriciyle birlikte kullanılması; böylelikle alçak frekans bölgesindeki tasarımıyla, orta frekans bölgesindeki tasarımın ayrı ayrı yapılmasıdır. Bir diğer seçenek ise bu iki denkleştirici yerine bir tane faz-ilerletici-geriletici denkleştirici kullanmaktır.

4.11.3 Faz-İlerletici Denkleştirici

Faz-ilerletici denkleştirici Bode faz diyagramının orta frekans bölgesine faz ekleyerek faz payını artırır. Büyüklük eğrisinde geçme frekansını ve dolayısıyla sistemin bant genişliğini artırır. Bunların sonucunda sistem kararlılığını iyileştirir, sistemdeki sönümü artırır ve yerleşme zamanını kısaltır. Yüksek frekanslarda kazancı artırdığından, sistemin gürültüden etkilenmesi de artabilir. Bu yüzden faz payının tasarım değeri ile sistemin gürültüden etkilenmesi arasında bir uzlaşma sağlanması gerekebilir.

Faz-ilerletici denkleştiricinin esas amacı Bode diyagramının düşük frekans bölgesini fazlaca değiştirmeden orta frekans bölgesinin şeklini değiştirmek ve geçici davranış özelliklerini iyileştirmektir. Tasarım sırasında maksimum faz artışının geçme frekansında olmasına çalışılır. Bunu sağlamak için aşağıda verilen *Yöntem 2* izlenebilir.

Yöntem 2: Alçak frekans bölgesini fazla etkilemeden faz-ilerletici denkleştirici tasarımı

- 1) Faz-ilerletici denkleştiriciyi tasarlamadan önce sistemin durağan davranış şartlarını sağlayın. Bunun için öncelikle kazanç artırımı yapın. Eğer bu yeterli değilse faz-geriletici denkleştirici kullanın. Faz-ilerletici denkleştirici tasarımını bu işlemlerin sonucunda elde edilecek sistem için yürütün. Bu sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)$ olsun.
- 2) Eğer faz payının ne olması gerektiği verilmişse bir sonraki maddeye geçin. Faz payı verilmemişse, sistemin sönüm oranı, aşma değeri gibi kriterlere dayanarak istenilen faz payı değerini (ϕ_r) belirleyin.
- 3) Faz-ilerletici denkleştiricinin artırması gereken faz miktarını (ϕ_d) aşağıdaki gibi belirleyin.

$$\phi_d = \phi_r - \phi_m + \phi_p \quad (4.138)$$

Burada ϕ_m denkleştiricisiz sistemin faz payı, ϕ_p ise faz-ilerletici denkleştirici geçme frekansını sağa kaydıracağı için faz eğrisinin aşağı doğru olan eğimi dolayısıyla azalacak faz miktarını karşılamak için eklenen faz azalma payıdır. Denkleştiricisiz sistemin faz eğrisinin eğimi geçme frekansı dolayında az ise ϕ_p 'nin değeri genellikle 5° - 12° arasındadır [4.2]. Ancak bu eğimin değerine göre daha büyük ϕ_p değerleri de gerekebilir.

- 4) $G(s)$ 'nin Bode diyagramlarını çizin.
- 5) Denklem (4.121)'den α 'nın değerini $\phi_{mak} = \phi_d$ olarak aşağıdaki gibi elde edin.

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} \quad (4.139)$$

- 6) Faz-ilerletici denkleştiricinin yaratacağı maksimum faz artışının büyüklük geçme frekansında olması arzu edilir. Ancak denkleştirici

aynı zamanda denklem (4.123)'de belirtildiği kadar bir genlik artışı yapar. Bu yüzden denkleştiricisiz sistemin büyüklük geçiş frekansını sağ tarafa doğru kaydırır. Bu frekansı (ω_c) yeni geçme frekansı olarak kabul edin. ω_c 'nin değeri denklem (4.123) kullanılarak aşağıdaki ifadeden bulunabilir. MATLAB yazılımınız varsa ω_c 'nin bulunması çok daha kolaylıkla yapılabilir.

$$|G(j\omega_c)| = -20 \log_{10} \sqrt{\alpha} \text{ dB} \quad (4.140)$$

- 7) Denkleştiricinin maksimum faz artırımının yeni geçme frekansında olması istenir. Bunu sağlamak için T_2 ve T_1 zaman sabitlerini denklem (4.122) ve $\alpha = T_1/T_2$ tanımını kullanarak aşağıdaki gibi bulun.

$$T_2 = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \quad T_1 = \alpha T_2 \quad (4.141)$$

Ancak denkleştiricili sistemin faz eğrisi eğiminin geçme frekansı dolayında çok büyük olduğu bazı durumlarda maksimum faz artırımının geçme frekansının biraz daha solunda oluşması gerekebilir. (Bakınız Örnek 4.5)

- 8) Denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramlarını çizin. Faz payı ve kazanç payını kontrol edin.
- 9) Denkleştiricili sistemin durağan davranışını kontrol edin.
- 10) Gerekirse tasarım parametrelerini değiştirip tasarımı tekrar edin.

Örnek 4.4: Yöntem 2

Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Bu sistemin birim rampa girişi için dinamik hatasını 0.03'den az yapacak K 'nın değerinin bulunması ve faz payının 40° 'den büyük olması için faz-ilerletici bir denkleştirici tasarlanması istenmektedir.

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+3)} \quad (4.142)$$

Önce durağan davranış şartını karşılamak için K 'nın değeri belirlensin. Kapalı çevrim sistemde referans girişle hata arasındaki transfer fonksiyonu,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + K} \quad (4.143)$$

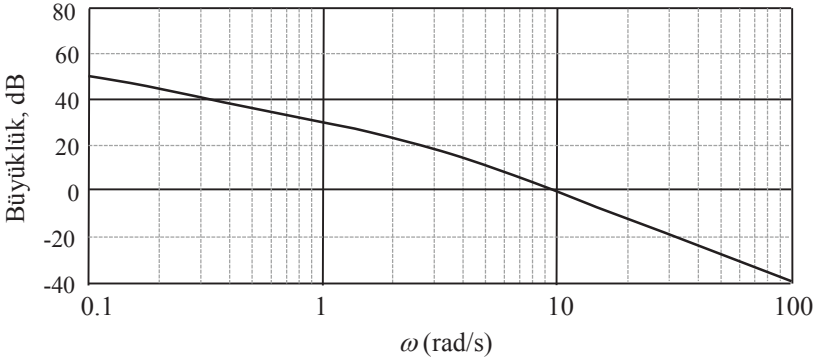
olduğundan, birim rampa girişi için dinamik hata aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + K} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = \frac{3}{K} \leq 0.03 \quad (4.144)$$

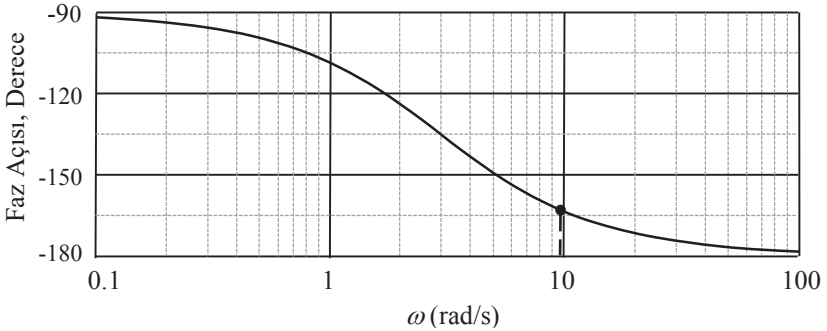
ya da, $K \geq 100$ bulunur. Burada $K = 100$ alınsın.

Bundan sonra Yöntem 2'nin aşamalarını uygulayarak faz-ilerletici denkleştiricinin tasarımı aşağıdaki gibi yürütülür.

- 1) Faz-ilerletici denkleştirici uygulanmamış sistemin Bode diyagramları Şekil 4.43 ve Şekil 4.44'de verilmiştir. Sistemin geçme frekansı 9.78 rad/s, faz payı 17° , kazanç payı ise sonsuzdur.



Şekil 4.43



Şekil 4.44

- 2) 40° 'den büyük olması istenen yeni faz payını elde etmek için en az 23° faz artışı sağlanmalıdır. Denkleştirici uygulaması sonucunda geçme frekansı sağa doğru kayacağından, Şekil 4.44'deki eğrinin mevcut geçme frekansı dolayındaki eğimini dikkate alarak bu artışa 5° gibi bir ilave yaparak $\phi_{mak} = 28^\circ$ alınsın.
- 3) Denklem (4.139)'dan α bulunur.

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} = \frac{1 + \sin 28^\circ}{1 - \sin 28^\circ} = 2.77 \quad (4.145)$$

- 4) Denkleştiricinin yaratacağı dB cinsinden genlik artışı denklem (4.140)'dan aşağıdaki gibi bulunur.

$$20 \log_{10} \sqrt{\alpha} = 4.42 \text{ dB} \quad (4.146)$$

Şekil 4.43'deki eğride büyüklüğün -4.42 dB olduğu noktada yeni geçme frekansı $\omega_c = 12.7$ rad/s olarak bulunur. Bu noktada Şekil 4.44'deki eğrinin faz kaybına bakıp, kabul edilen 5° faz kaybı payının doğruluğunu kontrol edilsin. Bu frekansta Şekil 4.44'den okunan faz açısı -167° 'dir. Yani eğrinin eğimi dolayısıyla 4° faz azalması olmuştur. O halde 5° faz payı fazlasıyla yeterlidir.

- 5) T_2 ve T_1 zaman sabitleri denklem (4.141)'den aşağıdaki gibi bulunur.

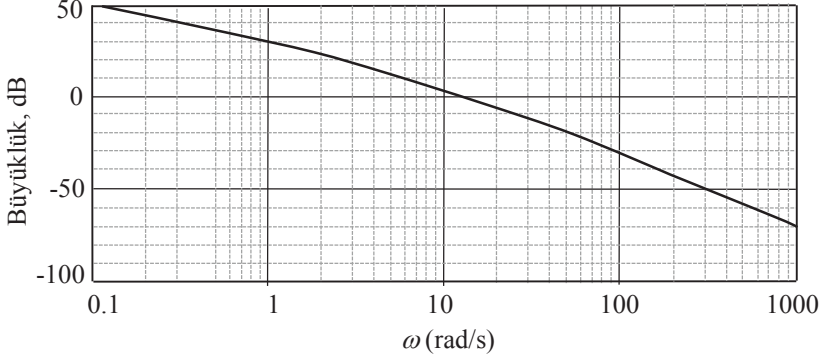
$$T_{2i} = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{12.7 \sqrt{2.77}} = 0.0473 \text{ s} \quad (4.147)$$

$$T_{1i} = \alpha T_2 = 0.131 \text{ s} \quad (4.148)$$

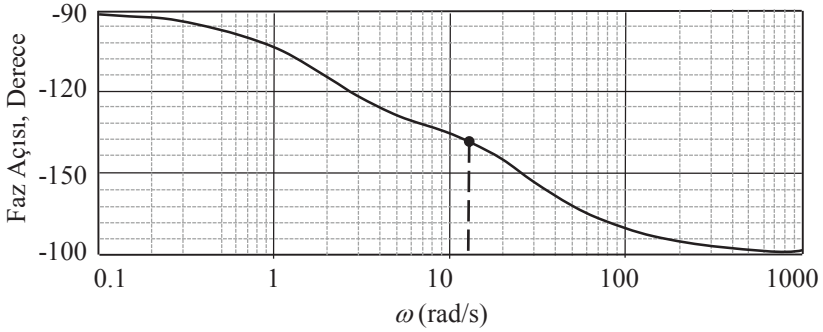
- 6) Faz-ilerletici denkleştirici uygulanmış sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \left(\frac{0.131s + 1}{0.0473s + 1} \right) \frac{K}{s(s + 3)} \quad (4.149)$$

şeklindedir. Açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.45 ve Şekil 4.46'da verilmiştir. Yeni tasarlanan sistem istenen şartları sağlamakta olup, faz payı 41.3° , kazanç payı sonsuz, geçme frekansı ise 12.7 rad/s kadardır.



Şekil 4.45

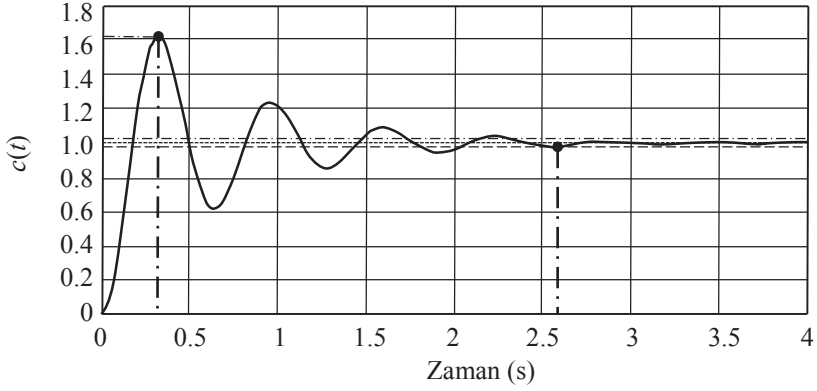


Şekil 4.46

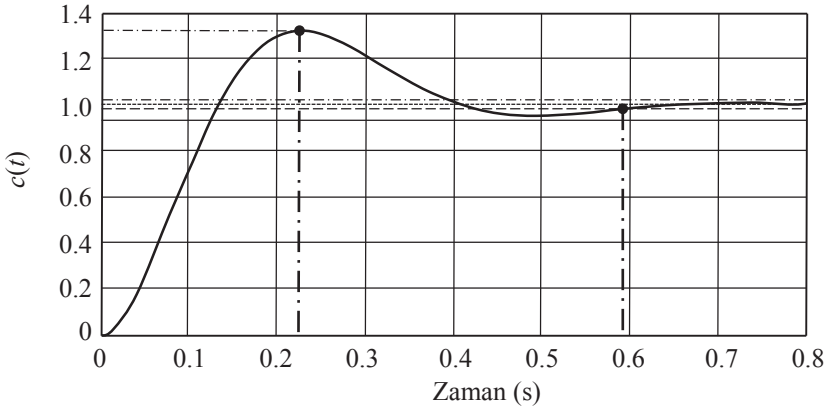
- 7) Faz-ilerletici denkleştiricisi olmayan sistemin birim basamak cevabı Şekil 4.47'de, denkleştiricili sistemin birim basamak cevabı ise Şekil 4.48'de görülmektedir. İki sistemin önemli özellikleri aşağıdaki çizelgede karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Görüldüğü gibi, denkleştirici faz payını 41.3° 'ye çıkartarak, aşma ve yerleşme zamanı değerlerini çok önemli oranda azaltmıştır.

Çizelge 4.3

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	17.1°	41.3°
Kazanç Payı	Sonsuz	Sonsuz
Durağan değer	1.0	1.0
Aşma	% 61.7	% 31.8
Tepe zamanı	0.31 s	0.23 s
Yerleşme zamanı	2.59 s	0.59 s



Şekil 4.47



Şekil 4.48

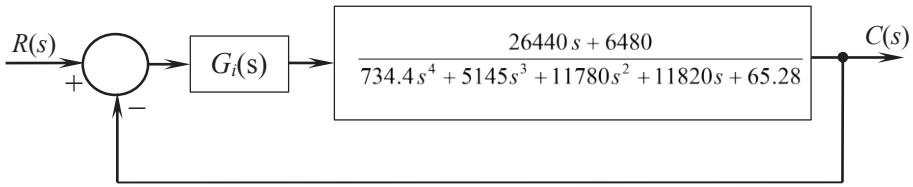
Örnek 4.5: Yöntem 2

Çeşitli kaynaklarda 5° - 12° kadar bir faz azalma payı kullanılması önerilmektedir [4.2]. Denkleştirmesiz sistemin faz diyagramının eğimi geçme frekansı dolayında fazla değilse bu aralıkta bir değer kullanılması genellikle yeterlidir. Ancak denkleştirmesiz sistemin faz diyagramının eğimi geçme frekansı dolayında fazlaysa bu değerler yeterli olmayabilir. Bu örnekte böyle bir sistem incelenecektir.

Örnek olarak daha önce Yöntem 1 için ele alınan sistemin faz-ilerleticili denkleştirici uygulanmış halini ele alalım. Bu sistemin faz payı 37° , kazanç payı 7.6 dB, geçme frekansı 2.45 rad/s, yerleşme zamanı ise 14.5 s olarak bulunmuştu. Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s) = K' \left(\frac{T_{2g}}{T_{1g}} \right) \left(\frac{T_{1g}s + 1}{T_{2g}s + 1} \right) \left(\frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 16} \right) \quad (4.150)$$

şeklinde olup, bu ifadedeki parametreler $K' = 0.9$, $T_{1g} = 4.08$ s, $T_{2g} = 180$ s olarak elde edilmişti. Bu değerler denklem (4.150)'de yerine koyulursa, faz-ilerletici denkleştirici uygulanacak sistemin blok diyagramı Şekil 4.49'daki hali alır. Bu diyagramda $G_i(s)$ terimi faz-ilerletici denkleştiricinin transfer fonksiyonunu göstermektedir. Örneğin amacı sistemin durağan davranış özelliklerini fazla etkilemeden, faz-ilerletici denkleştiriciyle faz payını en az 45° yapmaktır.



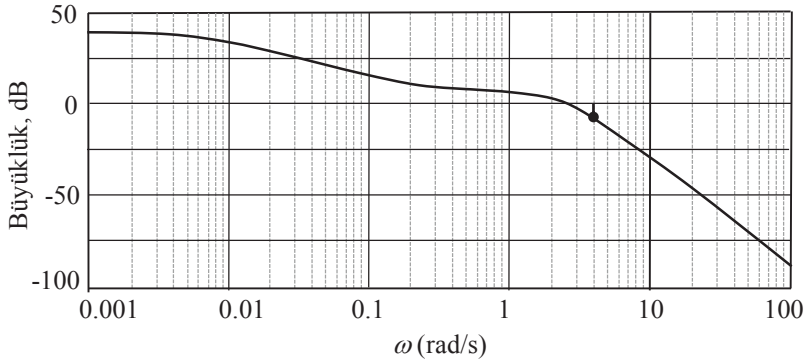
Şekil 4.49

Şimdi Yöntem 2'nin aşamalarını uygulayarak faz-ilerletici denkleştiricinin tasarımını yapalım.

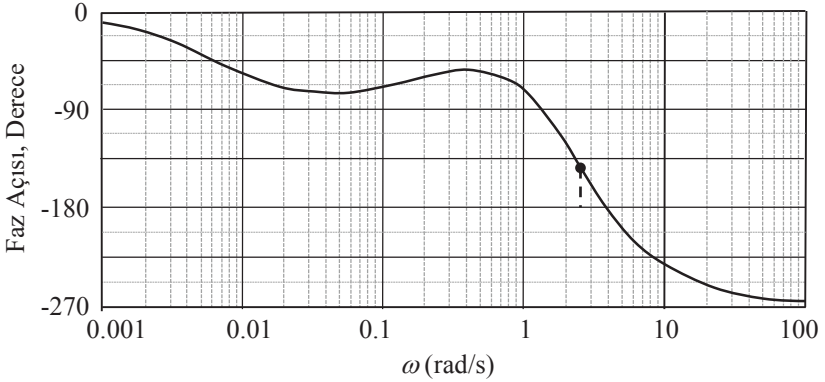
- 1) Faz-ilerletici denkleştirici uygulanmamış sistemin Bode diyagramları Şekil 4.36 ve Şekil 4.37'de verilmişti. Örneği

takip etmeyi kolaylaştırmak için bu diyagramlar Şekil 4.50 ve Şekil 4.51’de tekrardan verilmiştir.

- 2) Mevcut geçme frekansında faz payı 37° (geçme frekansında faz değeri -143°) olduğuna göre, 45° olan yeni faz payını elde etmek için 8° faz artışı sağlanmalıdır. Geçme frekansı sağa doğru kayacağından, Şekil 4.51’deki eğrinin mevcut geçme frekansı dolayındaki eğimini dikkate alarak 8° artışa 5° gibi bir ilave yaparak $\phi_{mak} = 13^\circ$ alınsın.



Şekil 4.50



Şekil 4.51

3) Denklem (4.139)'dan α aşağıdaki gibidir.

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} = \frac{1 + \sin 13^\circ}{1 - \sin 13^\circ} = 1.58 \quad (4.151)$$

4) Denkleştiricinin yaratacağı dB cinsinden genlik artışı denklem (4.140)'dan aşağıdaki gibi bulunur.

$$20 \log_{10} \sqrt{\alpha} = 1.99 \text{ dB} \quad (4.152)$$

Şekil 4.50'deki eğride büyüklüğün -1.99 dB olduğu noktada yeni geçme frekansı $\omega_c = 2.8$ rad/s olarak bulunur. Bu noktada Şekil 4.51'deki eğrinin faz kaybına bakıp, kabul edilen 5° faz kaybı payının doğruluğunu kontrol edilsin. Bu frekansta Şekil 4.44'den okunan faz açısı -155° 'dir. Yani eğrinin eğimi dolayısıyla 12° faz azalması olmuştur.

5) Azalma payını 30 derece alarak Madde 3 ve Madde 4'deki hesaplar tekrar edilsin.

Varsayılan faz azalması: 30°

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} = \frac{1 + \sin 38^\circ}{1 - \sin 38^\circ} = 4.21 \quad (4.153)$$

$$20 \log_{10} \sqrt{\alpha} = 6.24 \text{ dB}$$

$$\omega_c = 3.57 \text{ rad/s}$$

Yeni geçme frekansında faz azalması = 32°

Faz azalma payını artırarak hesaplar tekrar edilsin:

Varsayılan faz azalması: 55°

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} = \frac{1 + \sin 63^\circ}{1 - \sin 63^\circ} = 17.35 \quad (4.154)$$

$$20 \log_{10} \sqrt{\alpha} = 12.39 \text{ dB}$$

$$\omega_c = 4.81 \text{ rad/s}$$

Yeni geçme frekansında faz azalması = 53°

Bu son durumda yeni geçme frekansındaki faz azalması varsayılan 55° 'den az olduğu için faz azalma payını 55° almak uygundur.

- 6) 55° faz azalma payını kullanarak T_2 zaman sabiti denklem (4.140)'dan, T_1 ise α 'nın tanımından aşağıdaki gibi bulunur.

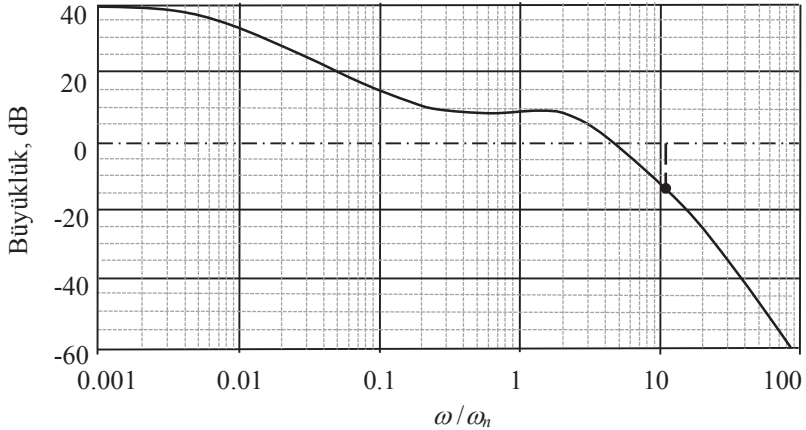
$$T_{2i} = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{4.81 \sqrt{17.35}} = 0.050 \text{ s} \quad (4.155)$$

$$T_{1i} = \alpha T_2 = 0.866 \text{ s} \quad (4.156)$$

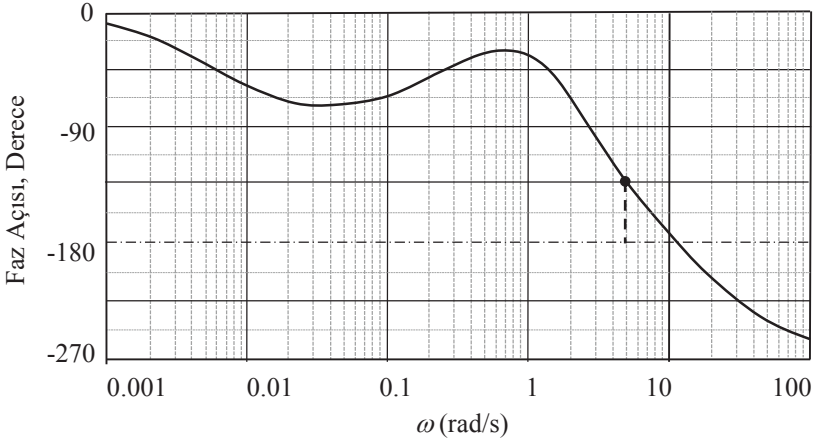
- 7) Bu işlemlerden sonra denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu, bulunan parametre değerlerini aşağıdaki ifadede yerine koyarak bulunur.

$$G(s) = \left(\frac{T_{1i}s + 1}{T_{2i}s + 1} \right) K' \left(\frac{T_{2g}}{T_{1g}} \right) \left(\frac{T_{1g}s + 1}{T_{2g}s + 1} \right) \left(\frac{40}{s^3 + 7s^2 + 16s + 16} \right) \quad (4.157)$$

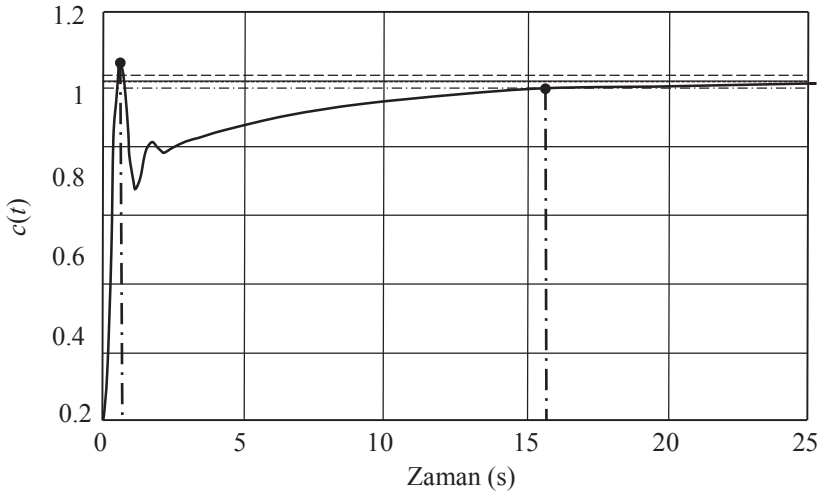
Tasarlanan yeni sistemin Bode diyagramları Şekil 4.52 ve Şekil 4.53'de verilmiştir. Sistemin faz payı 46.8° , kazanç payı 13.3 dB kadardır.



Şekil 4.52



Şekil 4.53



Şekil 4.54

Tasarlanan sistemin birim basamak cevabı Şekil 4.54’de görülmektedir. Denkleştiricili sistemin ve denkleştiricisiz sistemin temel performans parametreleri aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir. Sistemin basamak cevabı, Şekil 4.39’da verilen, denkleştiricisiz sistemin basamak cevabıyla karşılaştırıldığında salınımların çok daha hızla sönümlendiği dikkati çekmektedir. Bu durum artırılan faz payının sonucudur. Aşma miktarı azalmış, kazanç payı artmıştır. Bunlara karşılık yerleşme zamanının az da olsa uzamıştır. Sonuçlar Çizelge 4.4’de özetlenmiştir.

Çizelge 4.4

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	37°	46.8°
Kazanç Payı	7.6 dB	13.3 dB
Durağan değer	0.99	0.99
Aşma	% 13.5	% 6
Tepe zamanı	1.28	0.59 s
Yerleşme zamanı	14.5 s	15.6 s

4.11.4 Faz-İlerletici-Geriletici Denkleştirici Tasarımı

Hem faz-ilerletici ve hem de faz-geriletici denkleştirici kullanılmasını gerektiren durumlarda, bunların ayrı ayrı kullanılması yerine bu ikisinin görevini tek başına gerçekleştiren pasif bir denkleştirici kullanılması daha ekonomik bir çözümdür.

Faz-ilerletici-geriletici denkleştiriciyle durağan davranış iyileştirilirken, bunun yanı sıra sistem hızının, bant genişliğinin ve marjinal kararlılığın artırılması mümkündür. Diğer bir deyişle, bu denkleştirici hem faz-geriletici hem de faz-ilerletici denkleştiricilerin özelliklerini bir arada barındırır.

Daha önce denklem (4.124)'de verildiği gibi, faz-ilerletici-geriletici denkleştiricinin açık çevrim transfer fonksiyonuna eklediği çarpan aşağıdaki gibidir.

$$G_c(s) = \begin{pmatrix} \frac{T_{1g}s + 1}{T_{2g}s + 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T_{1i}s + 1}{T_{2i}s + 1} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (T_{2i} < T_{1i} < T_{1g} < T_{2g}) \\ (T_{2g}T_{2i} = T_{1g}T_{1i}) \end{matrix} \quad (4.158)$$

Burada kazancın “1” olması için $T_{2g}T_{2i} = T_{1g}T_{1i}$ şartı koyulmuştur.

Bu şart zorunlu olmamakla beraber, tasarım sürecinde basitlik sağlar. Faz-ilerletici-geriletici denkleştiricinin tasarım süreci, faz-ilerletici ve faz-geriletici denkleştiricilerin tasarımlarının birleşimi biçimindedir. Denkleştiricinin faz-geriletici kısmı yüksek frekanslarda genlik azalması sağladığından, çevrim kazancının artırılmasını ve böylelikle yüksek frekans bölgesinde net bir kazanç artışı olmadan durağan hataların azalmasını sağlar.

Denkleştiricinin faz-ilerletici kısmı ise geçme frekansını artırır ve yeni geçme frekansında istenen faz açısı artışını sağlar.

Tasarım sırasında istenirse faz-geriletici ve faz-ilerletici kısımlar ayrı ayrı tasarlanabilir ve daha sonra bunlar seri olarak bağlanarak faz-ilerletici-geriletici denkleştirici elde edilebilir. Kısımların ayrı ayrı tasarlanması sırasında daha önce Kısım 4.12.2 ve Kısım 4.12.3’de verilen yöntemler birbirinden bağımsız olarak kullanılır. Kısımlardan hangisinin önce tasarlanacağı önemli değildir. Diğer bir yaklaşım ise faz-ilerletici-geriletici denkleştiriciyi tek aşamada aşağıda verilen Yöntem 3’ü kullanarak tasarlamaktır.

Yöntem 3: Faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarımı

- 1) Denkleştiricisiz sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)$ olsun. Denkleştiriciyi tasarlamadan önce, çevrim kazancını artırarak durağan davranış şartlarını sağlamaya çalışın. Ancak kazanç payını 6 dB değerinin ya da verilmiş bir kazanç payı şartı varsa onun altına düşürmeyin. Bu kazanç artırımı çarpanı K' olsun.
- 2) Eğer faz payının ne olması gerektiği verilmişse bir sonraki maddeye geçin. Faz payı verilmemişse, sönüm oranı, aşma değeri gibi kriterlere dayanarak istenilen faz payı değerini (ϕ) belirleyin.
- 3) Denkleştiricisiz sistemin Bode diyagramlarını çizin. Faz payını ve kazanç payını bulun. Denkleştiricinin faz-ilerletici kısmının artırması gereken faz miktarını (ϕ_d) aşağıdaki gibi belirleyin.

$$\phi_d = \phi_r - \phi_m + \phi_{pi} + \phi_{pg} \quad (4.159)$$

Burada ϕ_m denkleştiricisiz sistemin faz payı; ϕ_{pi} ise faz ilerletici kısım geçme frekansını sağa kaydıracağı için faz eğrisinin aşağı doğru olan eğimi dolayısıyla azalacak faz miktarını karşılamak için eklenen *faz azalma payı*’dır. Denkleştiricisiz sistem faz eğrisinin eğimi geçme frekansı dolayında az ise ϕ_{pi} ’nin değeri genellikle 5° - 12° arasındadır [4.2]. (Eğer geçme frekansı dolayında faz eğrisinin aşağı doğru eğimi fazlaysa, ϕ_{pi} ’nin değerinin daha büyük olması

gerekebilir. Ayrıntılar için Örnek 4.5'e bakın.) ϕ_{pg} terimi faz-geriletici kısmın yaratacağı tahmini faz azalmasını karşılamak içindir. ϕ_{pg} 'nin değeri de 5° - 12° aralığında olup, faz-gerileticinin sıfırı geçme frekansının en az bir onluk altında ise küçük değere daha yakındır.

- 4) Denklem (4.121)'den α 'nın değerini $\phi_{mak} = \phi_d$ kabul ederek aşağıdaki gibi elde edin.

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{mak}}{1 - \sin \phi_{mak}} \quad (4.160)$$

- 5) Faz-ilerletici denkleştiricinin yaratacağı maksimum faz artışının büyüklük geçme frekansında olması arzu edilir. Ancak denkleştirici aynı zamanda denklem (4.123)'de belirtildiği kadar bir büyüklük artışı yapar. Bu yüzden denkleştiricisiz sistemin büyüklük geçiş frekansını sağ tarafa doğru kaydırır. Bu frekansı (ω_c) yeni geçme frekansı olarak kabul edin. ω_c 'nin değeri denklem (4.123) kullanılarak aşağıdaki ifadeden bulunabilir. MATLAB yazılımınız varsa ω_c 'nin bulunması çok daha kolaylıkla yapılabilir.

$$|G(j\omega_c)| = -20 \log_{10} \sqrt{\alpha} \text{ dB} \quad (4.161)$$

- 6) Denkleştiricinin maksimum faz artırımının yeni geçme frekansında olmasını sağlamak için T_{2i} ve T_{1i} zaman sabitlerini denklem (4.122) ve α 'nın tanımı kullanarak aşağıdaki gibi bulun.

$$T_{2i} = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \quad (4.162)$$

$$T_{1i} = \alpha T_{2i} \quad (4.163)$$

- 7) $T_{2g} T_{2i} = T_{1g} T_{1i}$ ifadesinden,

$$\frac{T_{2g}}{T_{1g}} = \frac{T_{1i}}{T_{2i}} = \alpha \quad (4.164)$$

olarak verilmiştir. $1/T_{1g}$ değerini yeni geçme frekansının bir onluk altında, T_{2g} 'yi ise denklem (4.164)'e göre, aşağıdaki gibi seçin.

$$T_{1g} = \frac{10}{\omega_c} \quad (4.165)$$

$$T_{2g} = \alpha T_{1g} \quad (4.166)$$

- 8) Denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi yeniden düzenleyin.

$$G_d(s) = K' \left(\frac{T_{2g}}{T_{1g}} \right) \left(\frac{T_{1g}s + 1}{T_{2g}s + 1} \right) \left(\frac{T_{1i}s + 1}{T_{2i}s + 1} \right) G(s) \quad (4.167)$$

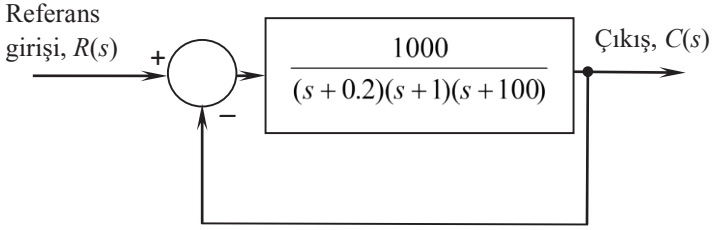
Denkleştiricili sistemin Bode diyagramlarını çizin.

- 9) Denkleştiricili sistemin faz payı ve kazanç payı değerlerini kontrol edin. Durağan davranış özelliklerini inceleyin. Birim basamak cevabını elde ederek % aşma oranı, yerleşme zamanı, tepe zamanı gibi geçici davranışı tanımlayan parametreleri bulun. Gerekiyorsa tasarım parametrelerini değiştirerek tasarımı tekrar edin.

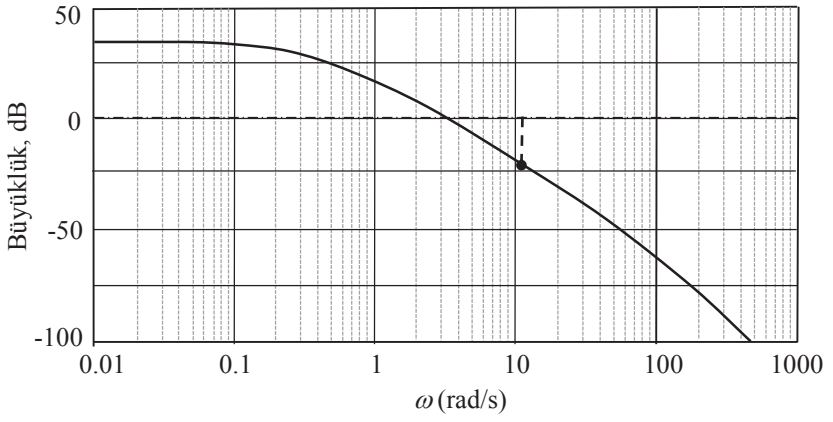
Örnek 4.6: Yöntem 3

Blok diyagramı Şekil 4.55'deki gibi bir sistem verilmiş olsun. Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.56 ve Şekil 4.57'de, kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabı ise Şekil 4.58'de görülmektedir. Bu haliyle sistemin faz payı 19.9° , kazanç payı 21.7 dB, geçme frekansı 3.08 rad/s, birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri $c_{ss} = 0.98$, yerleşme zamanı 7.1 s, aşma değeri % 57.7 ve tepe zamanı 1.01 s kadardır. Bu sisteme bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlanması ve aşağıdaki performans parametrelerinin sağlanması istenmektedir.

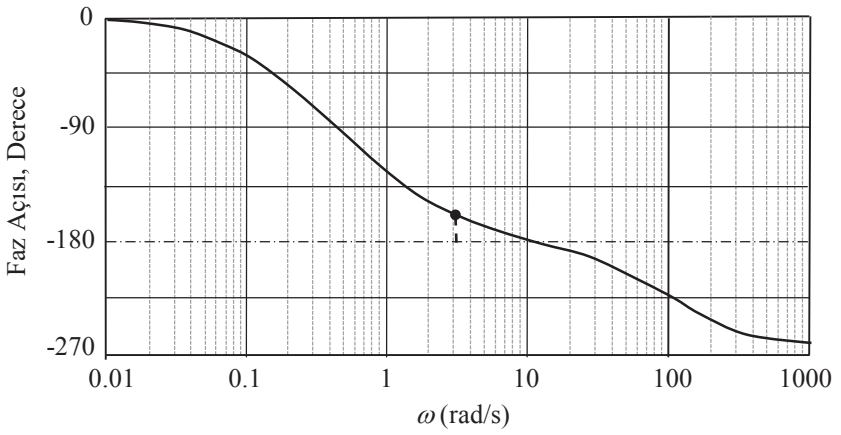
$$\text{Faz payı} : >45^\circ \quad \text{ve} \quad 1.0 > c_{ss} > 0.995$$



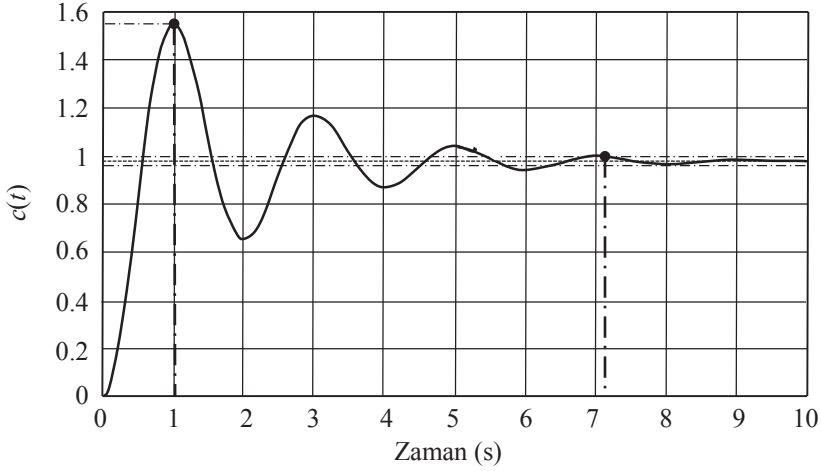
Şekil 4.55



Şekil 4.56



Şekil 4.57



Şekil 4.58

Yöntem 3'e göre sistemin tasarım aşamaları aşağıda özetlenmiştir.

1. K' gibi bir çevrim kazancını sisteme dahil edilirse, kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T(s) = \frac{1000 K'}{(s + 0.2)(s + 1)(s + 100) + 1000 K'}$$

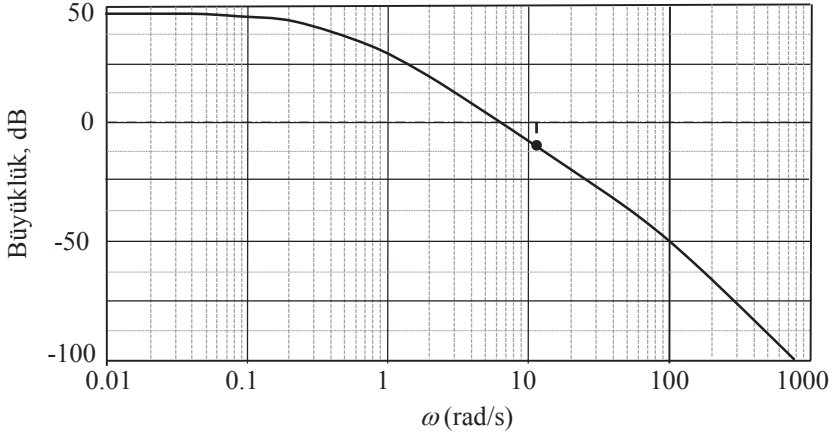
olacağından, birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_{ss} = \frac{1000 K'}{20 + 1000 K'}$$

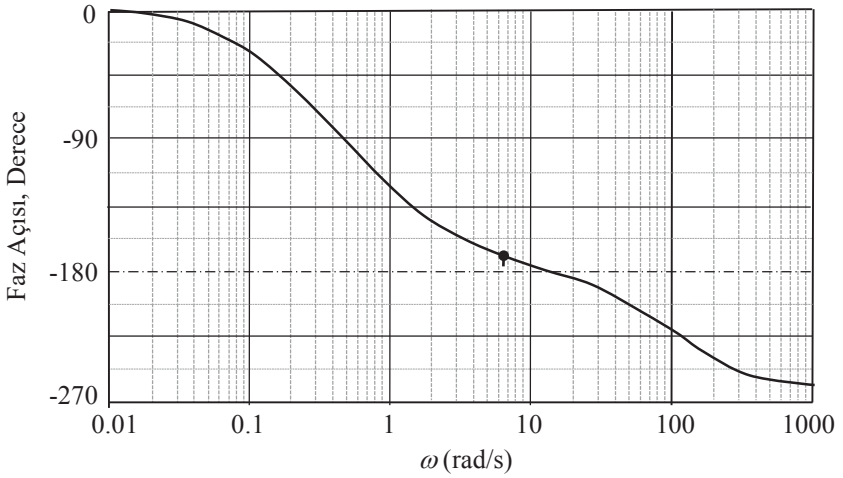
Bu ifadeden çıkışın durağan değerinin 0.995 olmasını sağlayan K' değeri 3.98 olur.

2. Kazancı bu şekilde artırılmış sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.59 ve 4.60'da, kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabı ise Şekil 4.61'de verilmiştir. Denkleştiricisiz olan bu sistemin faz payı 7.32° , kazanç payı 9.69 dB, geçme frekansı 6.26 rad/s, yerleşme zamanı 9.56 s, yüzde aşması % 81.5 ve tepe zamanı 0.50 s

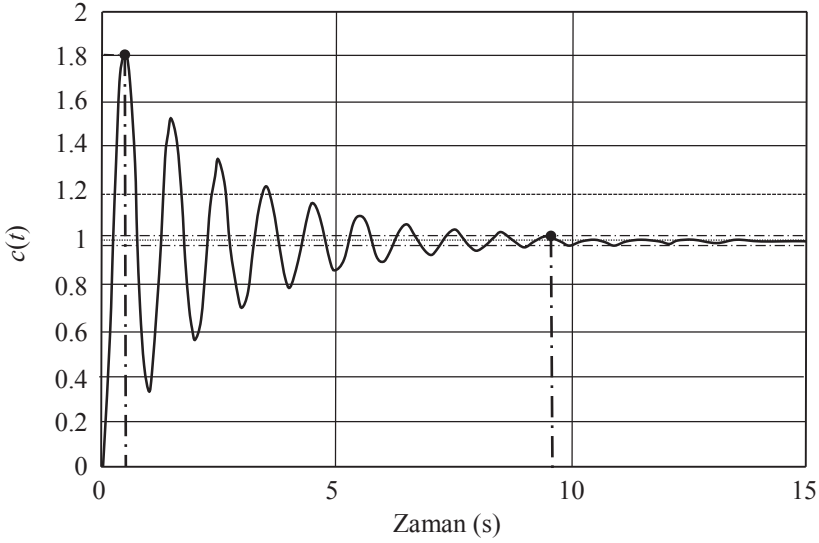
kadardır. Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri beklendiği gibi 0.995'dir. Tasarımın bundan sonraki aşamalarında, denkleştiricinin faz geriletili kısmının düşük frekanslarda sağlayacağı kazanç artışı sayesinde durağan değer 1.0'a daha da yaklaşacaktır.



Şekil 4.59



Şekil 4.60



Şekil 4.61

3. Denkleştiricinin faz-ilerletici kısmının artırması gereken faz miktarını (ϕ_d), denklem (4.159)'da $\phi_r = 45^\circ$, $\phi_m = 7.32^\circ$, $\phi_{pi} = 6^\circ$ ve $\phi_{pg} = 6^\circ$ alarak aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\phi_d = 45 - 7.32 + 6 + 6 = 49.7^\circ$$

4. Denklem (4.160)'dan α 'nın değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha = \frac{1 + \sin 49.7^\circ}{1 - \sin 49.7^\circ} = 7.439$$

5. Denklem (4.161)'den $-20 \log_{10} \sqrt{7.439} = -8.715$ dB olarak bulunur. Denkleştiricisiz sistemin Şekil 4.59'da verilen Bode büyüklük diyagramından bu değere karşılık gelen frekans 10.4 rad/s olup, bu frekans yeni geçme frekansı ω_c 'dir.

6. Denklem (4.162) ve denklem (4.163)'den

$$T_{2i} = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0.0353 \text{ s ve } T_{1i} = \alpha T_{2i} = 0.262 \text{ s}$$

olarak bulunur.

7. Denklem (4.165) ve denklem (4.166)'dan $T_{1g} = \frac{10}{\omega_c} = 0.962$ s,

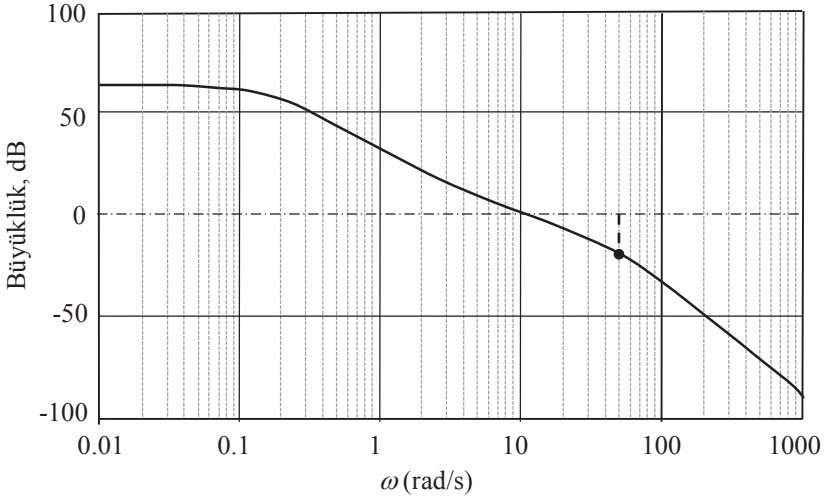
$$T_{2g} = \alpha T_{1g} = 7.153 \text{ s olarak bulunur.}$$

8. Denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.167)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

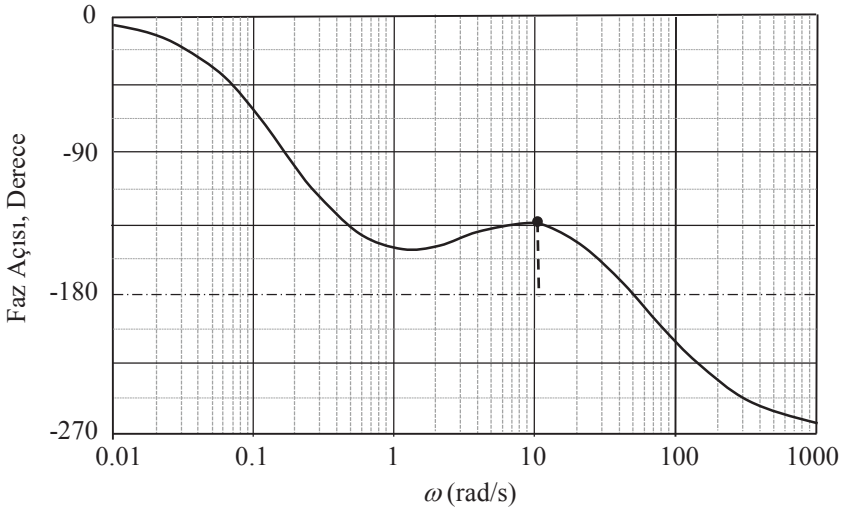
$$G_d(s) = 3.98 \left(\frac{7.153}{0.962} \right) \left(\frac{0.962s + 1}{7.153s + 1} \right) \left(\frac{0.262s + 1}{0.0353s + 1} \right) G(s)$$

Burada $G(s)$ denkleştiricisiz sistemin açık çevrim transfer fonksiyonudur.

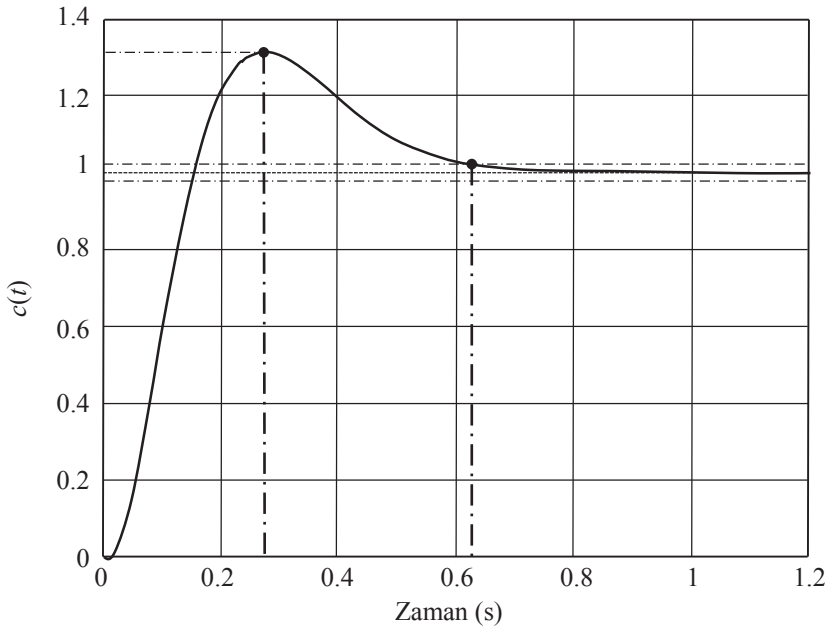
9. Faz-ilerletici-geriletici denkleştirici uygulanan sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.62 ve Şekil 4.63'de, birim basamak cevabı ise Şekil 4.64'de verilmiştir. Tasarlanan yeni sistemin faz payı 45.4° , kazanç payı 20.3 dB, birim basamak referans giriş için çıkışın durağan değeri $c_{ss} = 0.999$, aşması % 31.4, tepe zamanı 0.27 s, yerleşme zamanı 0.63 s kadardır.



Şekil 4.62



Şekil 4.63



Şekil 4.64

Aşağıdaki çizelgede denkleştiricisiz ve denkleştirici uygulanan sistemlerin performans parametreleri birlikte verilmiştir. Çevrim kazancının artırılması ve denkleştiricinin faz geriletici kısmının düşük frekanslarda sağladığı kazanç artışı sayesinde çıkışın durağan değeri 0.999'a çıkmış, sistemin sönümü artarken sistemin cevap hızı önemli oranda artmıştır.

Çizelge 4.5

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	19.9°	45.4°
Kazanç Payı	21.7 dB	20.3 dB
Geçme frekansı	3.08 rad/s	10.4 rad/s
Durağan değer	0.98	0.999
Aşma	% 57.7	% 31.4
Tepe zamanı	1.01 s	0.27 s
Yerleşme zamanı	7.1 s	0.63 s

Yöntem 3'ün ilk maddesinde belirtildiği gibi, durağan davranışı iyileştirmek için çevrim kazancının denkleştirici tasarımı öncesinde artırılması bazı durumlarda atlanabilir ve durağan davranışın iyileştirilmesi için faz geriletici kısmın düşük frekanslarda sağlayacağı kazanç artışı yeterli olabilir. Örneğin yukarıda incelenen örnek için böyle bir yol izlenirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. Başlangıçta sistemin açık çevrim kazancını değiştirmesin. Bu yüzden $K' = 1$ alınsın.
2. Denkleştiricinin faz-ilerletici kısmının artırması gereken faz miktarı, (ϕ_d) denklem (4.159)'da $\phi_r = 45^\circ$, $\phi_m = 19.9^\circ$, $\phi_{pi} = 6^\circ$, $\phi_{pg} = 6^\circ$ olarak aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\phi_d = 45 - 19.9 + 6 + 6 = 37.1^\circ$$

3. Denklem (4.160)'dan α 'nın değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha = \frac{1 + \sin 37.1^\circ}{1 - \sin 37.1^\circ} = 4.038$$

4. Denklem (4.161)'den $-20 \log_{10} \sqrt{4.038} = -6.06$ dB olarak bulunur. Denkleştiricisiz sistemin Bode büyüklük diyagramından bu değere karşılık gelen frekans 4.42 rad/s olup, bu frekans yeni geçme frekansı ω_c 'dir.

5. Denklem (4.162), denklem (4.163)'den $T_{2i} = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0.113$ s ve $T_{1i} = \alpha T_{2i} = 0.455$ s olarak bulunur.

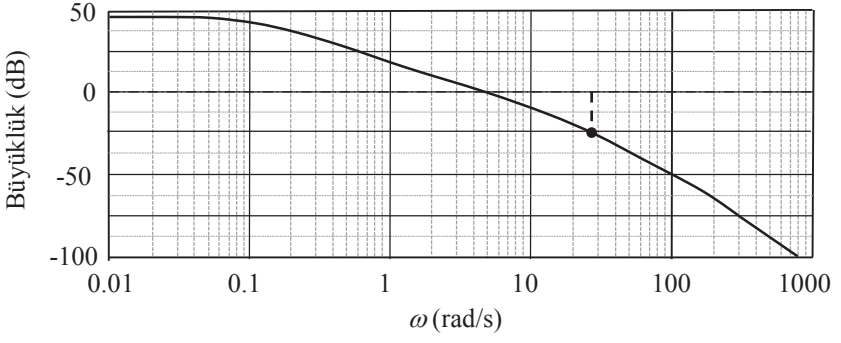
6. Denklem (4.165) ve denklem (4.166)'dan $T_{1g} = \frac{10}{\omega_c} = 2.262$ s, $T_{2g} = \alpha T_{1g} = 9.135$ s olarak bulunur.

7. Denkleştiricili sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.167)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

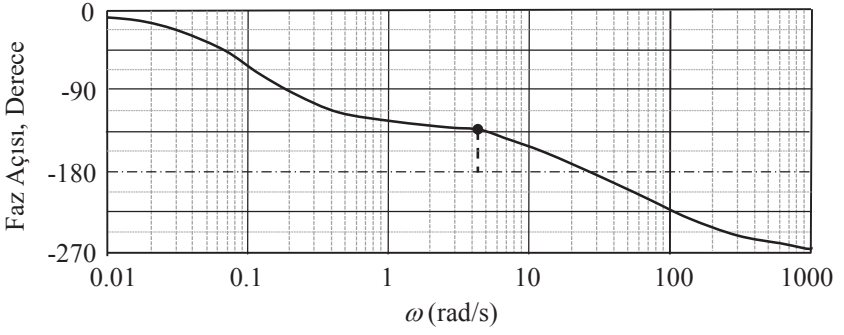
$$G_d(s) = \left(\frac{9.135}{2.262} \right) \left(\frac{2.262s + 1}{9.135s + 1} \right) \left(\frac{0.455s + 1}{0.113s + 1} \right) G(s)$$

Burada $G(s)$ denkleştiricisiz sistemin açık çevrim transfer fonksiyonudur.

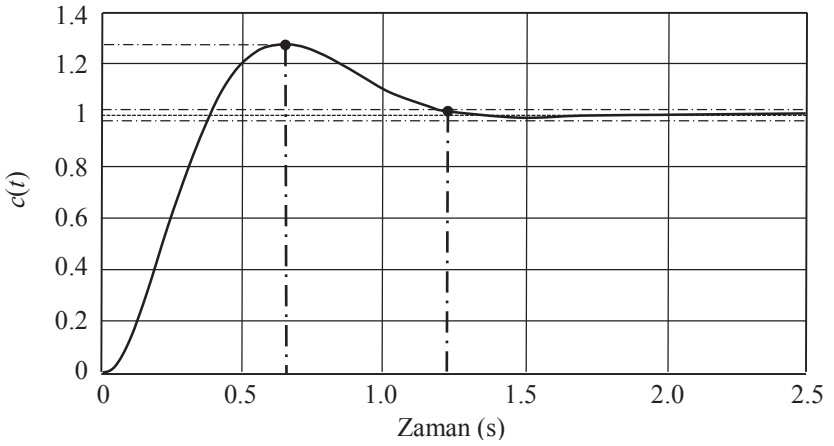
8. Faz-ilerletici-geriletici denkleştirici uygulanan sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramları Şekil 4.65 ve Şekil 4.66'da, birim basamak cevabı ise Şekil 4.67'de verilmiştir. Tasarlanan yeni sistemin faz payı 45.5° , kazanç payı 26.0 dB, geçme frekansı 4.44 rad/s, birim basamak referans giriş için çıkışın durağan değeri $c_{ss} = 0.995$, aşması % 28.2, tepe zamanı 0.65 s, yerleşme zamanı 1.22 s kadardır.



Şekil 4.65



Şekil 4.66



Şekil 4.67

Aşağıdaki çizelgede denkleştiricisiz ve denkleştirici uygulanan sistemlerin performans parametreleri birlikte verilmiştir. Denkleştirici tasarımı öncesinde kazanç artırılan sisteme göre kazanç payı daha büyük, aşma daha küçük, buna karşılık yerleşme zamanı daha uzundur. Ancak bu sonuçlara dayanarak bir genelleme yapmanın mümkün olmadığı unutulmamalıdır.

Çizelge 4.6

Parametre	Denkleştiricisiz Sistem	Denkleştiricili Sistem
Faz Payı	19.9°	45.5°
Kazanç Payı	21.7 dB	26 dB
Geçme frekansı	3.08 rad/s	4.44 rad/s
Durağan değer	0.98	0.995
Aşma	% 57.7	% 28.2
Tepe zamanı	1.01 s	0.65 s
Yerleşme zamanı	7.1 s	1.22 s

KAYNAKLAR

- [4.1] Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems, 4th Ed.*, ISBN: 0-13-032393-4, Prentice-Hall, New Jersey, 2002.
- [4.2] http://engineering.nyu.edu/mechatronics/Control_Lab/Craig/Craig_RPI/2001/FreqResponse_Analysis_Design.pdf.

PROBLEMLER

Not: Problemlerin çözümlerinde MATLAB'den yararlanın.

- 4.1** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

- Sistemin faz payı ve kazanç payı ne kadardır? Bu değerler uygun mudur?
- Birim rampa giriş için sistemin durağan hatası ne kadardır? Durağan dinamik hatayı 0.01'in altına azaltmak için uygun bir faz-geriletici denkleştirici tasarlayın.

- 4.2** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{20}{s(s^2 + 5s + 7)}$$

- Sistemin faz payı ve kazanç payı ne kadardır? Bu değerler uygun mudur?
- Birim basamak giriş için sistemin durağan hatası ne kadardır?
- Faz payını 30°'den büyük, kazanç payını 6 dB'den büyük yapmak için bir faz-ilerletici denkleştirici tasarlayın. Denkleştiricili sistemin tasarım kriterlerine uygunluğunu kontrol edin.

- 4.3** Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2 + 2s + 10)}$$

- Sistemin faz payı ve kazanç payı ne kadardır? Bu değerler uygun mudur?
- Birim basamak giriş için sistem çıkışının durağan değeri nedir? Durağan değerini 0.995-1.0 arasında olmasını sağlamak için faz-geriletici bir denkleştirici tasarlayın. Denkleştiricili sistemin istenen kritere uygunluğunu kontrol edin.

- 4.4 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{40}{s^2 - 1}$$

- Bu sistemin kararlılığı hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlayın.

$$\text{Faz payı} \geq 45^\circ$$

Bu şekilde tasarlanan sistemin kazanç payı nedir? Sistemin birim basamak cevabının aşması, tepe zamanı, yerleşme zamanı ve durağan değeri nedir?

- 4.5 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{10(s + 4)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 6)}$$

Bu sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici denkleştirici tasarlayın.

$$\text{Faz payı} \geq 40^\circ$$

$$\text{Kazanç payı} \geq 8 \text{ dB}$$

Tasarladığınız sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

- 4.6 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{40(s + 10)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 2)}$$

Bu sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici denkleştirici tasarlayın.

Faz payı $\geq 45^\circ$

Kazanç payı $\geq 6\text{dB}$

Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri = 0.99-1.0

Tasarladığınız sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

- 4.7 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{60}{(s^2 + 2s + 10)(s + 5)}$$

Bu sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlayın.

Faz payı $\geq 30^\circ$

Kazanç payı $\geq 10\text{ dB}$

Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri = 0.98-1.0

Tasarladığınız sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

- 4.8 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$G(s) = \frac{20}{s(s + 2)(s + 4)}$$

Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici denkleştirici tasarlayın.

Faz payı $\geq 40^\circ$, Kazanç payı $\geq 10\text{ dB}$

Tasarladığınız sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

4.9 Açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{40}{s(s+3)(s+4)}$$

olan birim geribeslemeli sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir faz-ilerletici-geriletici denkleştirici tasarlayın.

$$\text{Faz payı} \geq 30^\circ$$

$$\text{Kazanç payı} \geq 6 \text{ dB}$$

$$\text{Birim rampa giriş için durağan dinamik hata} \leq 0.10$$

4.10 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2+10s+26)}$$

- Sistemin faz payı ve kazanç payı ne kadardır? Bu değerler uygun mudur?
- Birim basamak giriş için sistem çıkışının durağan değeri nedir? Durağan değerin 0.995-1.0 arasında olmasını sağlamak için faz-geriletici bir denkleştirici tasarlayın. Denkleştiricili sistemin istenen kritere uygunluğunu kontrol edin.

4.11 Birim geribeslemeli bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{40(s+10)}{(s^2+6s+25)(s+2)}$$

Bu sistemin kazanç payı ve faz payı ne kadardır? Birim basamak cevabının M_p , t_p , t_s ve c_{ss} değerleri nedir?

Bu sistem için aşağıdaki tasarım şartlarını sağlayacak bir PID kontrolcü tasarlayın.

$$\text{Faz payı} \geq 45^\circ$$

$$\text{Kazanç payı} \geq 6 \text{ dB}$$

$$\text{Birim basamak giriş için çıkışın durağan değeri} = 0.99-1.0$$

KONTROL SİSTEMİ TASARIMINDA DENEYSEL YÖNTEMLER

Bazı durumlarda kontrol sisteminin matematiksel tanımı yeterince yapılmamıştır. Bu durumlarda sistemi tehlikeye atmayacak biçimde yapılan basit deneylerden elde edilen verilere dayanarak kontrol sistemi tasarlanması mümkündür. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için kontrol edilecek olan sistemin kararlı olması gereklidir. Aşağıda Kısım 5.1’de verilen yöntem sistemin deneysel olarak elde edilen frekans cevabı özelliklerinden yararlanır. Bu özelliklere dayanarak sistem tanımlanır ve transfer fonksiyonu bulunur. Daha sonra bilinen tasarım yöntemleriyle kontrol sistemi tasarlanır. Kısım 5.2’de verilen yöntemlerde ise sisteme uygulanan bir test girişine sistemin verdiği zaman cevabının özelliklerine dayanarak ampirik algoritmalara göre *PID* kontrol parametreleri belirlenir.

5.1 Deneysel Frekans Cevabı Eğrilerinden Sistem Tanımlanması

Bu yöntemde kontrol edilecek sisteme (açık çevrim sistem) bir dizi sinusoidal giriş uygulanır. Giriş frekansı yeterince alçak frekanslardan yeterince yüksek frekanslara kadar değiştirilerek elde edilen durağan sinusoidal cevapların çıkış/giriş genlik oranları ve girişe göre faz farkları kaydedilir. Sonra çıkış/giriş genlik oranları dB olarak ve faz açıları ise derece olarak yarı logaritmik grafik kağıdına Bode diyagramı formatında işlenir. Kullanılan frekans bölgesi seçilirken en alt frekansın altındaki ve en üst frekansın üzerindeki frekanslarda faz açısının ve büyüklük diyagramında eğimlerin değişmemesine dikkat edilir. Daha sonra işlenen bu noktalara bir eğri uydurulur. Büyüklük ve faz eğrilerindeki köşe frekansları (kırılma olan frekanslar) belirlenir. Birbirine komşu köşeler arasına aşağı doğru eğimlerde en az eğime sahip, yukarı doğru eğimlerde ise en büyük eğime sahip teğetler çizilerek asimptotik büyüklük ve faz eğrileri elde edilir. Daha sonra Kısım 4.3’de verilen transfer fonksiyonu çarpanlarının Bode diyagramı özellikleri dikkate alınarak alçak frekanstan yüksek frekansa doğru bir tarama yapılıp ve sistemin transfer fonksiyonunun çarpanları aşağıdaki gibi bulunur.

- i) Asemptotik Bode büyüklük diyagramı sol taraftan (düşük frekanslardan) $\pm n20$ dB eğimle geliyorsa transfer fonksiyonunun $\pm s^n$ gibi bir çarpanı vardır. Bu frekanslara karşılık gelen faz farkı $\pm n90^\circ$ kadardır. $n = 0$ ise transfer fonksiyonunun orijininde kutup veya sıfır yoktur.
- ii) Bode büyüklük diyagramında sol taraftan gelen asemptotun $\omega = 1$ rad/s frekansındaki değeri q dB olsun. Bu durumda, $20 \log_{10} K = q$ dB olacağından transfer fonksiyonunda, $K = 10^{q/20}$ gibi bir kazanç çarpanı vardır.
- iii) Bode büyüklük diyagramından sağa doğru daha yüksek frekanslara devam edin. Her köşe frekansı geldikçe, yani eğim değişikliğiyle karşılaştıkça transfer fonksiyonunun diğer çarpanlarını aşağıdaki gibi bulun.
- Köşenin oluştuğu frekans ω_k olsun. Eğer eğim ± 20 dB değişmişse transfer fonksiyonunun aşağıdaki gibi bir çarpanı vardır.

$$\left(\frac{1}{\omega_k} s + 1 \right)^{\pm 1}$$

- Eğer ω_k frekansında eğim ± 40 dB değişmişse transfer fonksiyonunun,

$$\left[1 + \frac{2\zeta s}{\omega_k} + \frac{s^2}{\omega_k^2} \right]^{\pm 1}$$

gibi bir çarpanı vardır. Bu ifadede ζ 'nın değerini ölçüm noktalarının köşe frekansında asemptotlardan olan uzaklıkları belirler. Eğer bu noktalar asemptotlara oldukça yakınsa $\zeta = 0.5-0.7$ gibi bir değer uygundur. Genellikle karşılaşılan durum budur. Eğer noktalar kesişen asemptotların kutuplar için epeyce altında, sıfırlar için epeyce üstünde ise aşırı sönümlü karesel bir çarpan söz konusu olup, daha yüksek ζ değerleri kullanılabilir. Aksi yönde bir tepe oluşmuşsa az sönümlü karesel bir çarpan olduğundan ζ 'nın değeri 0.5'den daha

düşük alınır. ζ değerinin belirlenmesi için Bölüm 4’de verilen Şekil 4.10’dan yararlanılabilir.

- iv) Yukarıdaki gibi belirlenen transfer fonksiyonunun paydasının derecesi n , payının derecesi m ise, yüksek frekanslardaki faz değeri $-(n-m)90^\circ$ olacaktır.

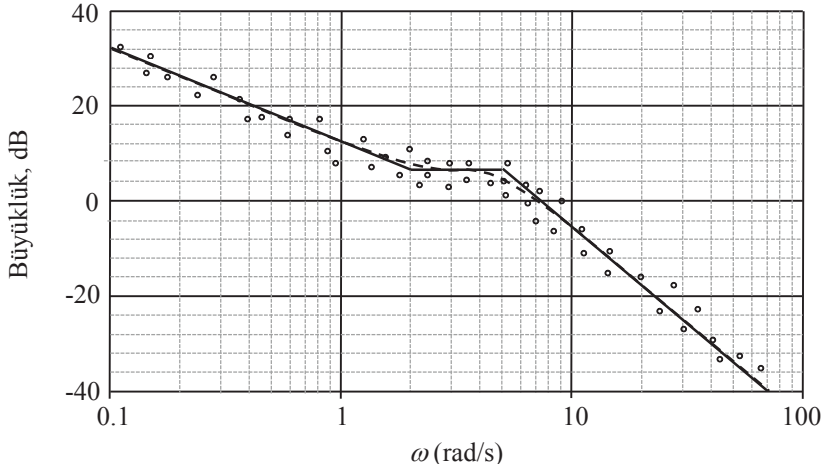
Örnek 5.1:

Bir sistem üzerinde yapılan deneyler sonucunda elde edilen büyüklük ve faz değerleri Şekil 5.1 ve Şekil 5.2’de dairelerle gösterilmiştir. Bu verilerden sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir.

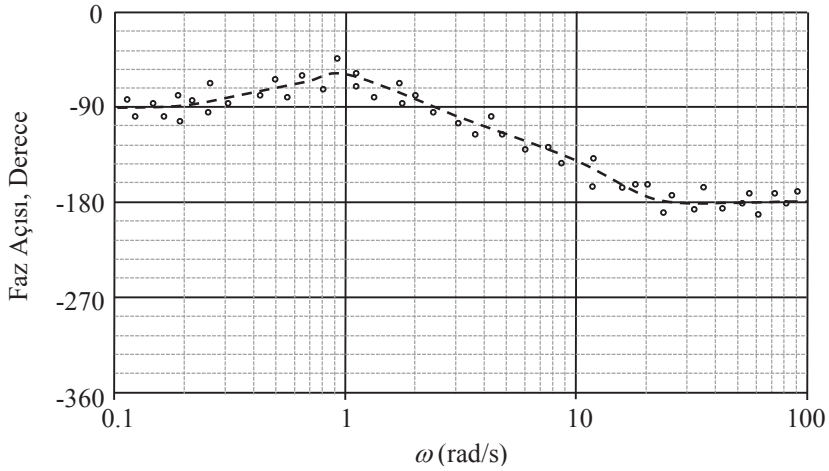
Şekillerdeki verilere uydurulan temsili eğriler noktalı olarak gösterilmiştir. Şekil 5.1’de ayrıca noktalı eğriye dayanarak çizilen asimptotik eğri de yine temsili olarak katı çizgi ile görülmektedir. Asimptotik eğriden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

- Eğri şeklin sol tarafından -20 dB/onluk eğimle gelmektedir. O halde transfer fonksiyonunda $1/s$ gibi bir çarpan vardır.
- Sol taraftan gelen asimptot 1 radyan/s frekansta yaklaşık 12 dB değere sahiptir. Bu durumda, $20 \log_{10} K = 12$ dB olacağından, transfer fonksiyonunda, $K = 10^{12/20} = 3.98$ gibi bir çarpan vardır.
- Asimptotik eğrinin eğimi 2 radyan/s frekansında $+20$ dB/onluk artmakta ve eğri yatay hale gelmektedir. O halde köşe frekansı 2 radyan/s olan, $[(s/2) + 1]$ gibi gerçek bir sıfır vardır.
- 5 radyan/s frekansında eğrinin eğimi 0 dB/onluk iken -40 dB/onluk değerine azalmaktadır. O halde transfer fonksiyonunun payında köşe frekansı 5 radyan/s olan ikinci mertebe bir çarpan vardır. Köşe noktasında uydurulmuş eğri ile asimptotik eğri birbirine oldukça yakın olduğundan, sönüm oranını yaklaşık olarak $\zeta = 0.5$ kabul edilirse, paydadaki çarpan aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left[1 + \frac{2 \times 0.5s}{5} + \frac{s^2}{5^2} \right] = \left[1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{25} \right]$$



Şekil 5.1



Şekil 5.2

- Yukarıda bulunan çarpanlara göre transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G(s) = \frac{3.98[(s/2) + 1]}{s \left[1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{25} \right]} = \frac{49.75(s + 2)}{s(s^2 + 5s + 25)}$$

Bulunan transfer fonksiyonunun faz diyagramı $1/s$ çarpanı dolayısıyla sol tarafta -90° değere sahiptir. Diyagramın en sağında ise faz değeri $-(n-m)90^\circ = -180^\circ$ kadardır. Bu değerler Şekil 5.2'de verilen faz değerleriyle uyum içindedir.

5.2 Deneysel Zaman Cevabından PID Kontrolcü Parametrelerinin Belirlenmesi

Deneysel olarak elde edilen zaman cevabından PID kontrolcü parametrelerinin belirlenmesinin en önemli avantajı sistemin transfer fonksiyonunun bilinmesine gerek olmamasıdır. Kullanılan belirleme yönteminin gerektirdiği özellikte bir cevap eğrisi elde edildiği takdirde sistem mertebesinin önemi de yoktur. Bu gruba giren yöntemler arasında en önemlisi ve yaygın olarak kullanılan Ziegler ve Nichols tarafından önerilen iki yöntemdir [5.1]. Ziegler ve Nichols yöntemlerini daha sonra onlardan esinlenerek geliştirilen diğer yöntemler izlemiştir. Aşağıda bu yöntemler açıklanmaktadır.

5.2.1 Ziegler ve Nichols Yöntemleri

Ziegler ve Nichols tarafından önerilen yöntemler pek çok sistem üzerinde yapılan deneylere dayanarak, uygun bir sistem davranışı verecek *PID* kontrolcü parametrelerini belirlemeye yarar [5.1]. Burada uygun davranıştan kasıt, bir birini izleyen salınım genliklerinin $1/4$ oranında azalmasıdır. Yani, bir salınımın genliği bir önceki genliğin dörtte biri kadardır. Ziegler ve Nichols tarafından, *Proses Reaksiyon Eğrisi Yöntemi* ve *Sürekli Titreşim Yöntemi* diye iki yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler sırasıyla *Ziegler ve Nichols'un Birinci Yöntemi* ve *Ziegler ve Nichols'un İkinci Yöntemi* olarak da adlandırılır.

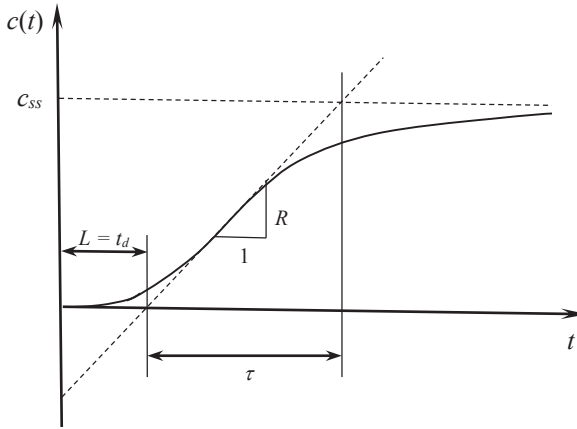
i) Ziegler ve Nichols'un Proses Reaksiyon Eğrisi Yöntemi

Bu yöntemde açık çevrim sisteme, yani kontrol edilecek sisteme bir basamak giriş uygulanır. Bu yöntem, sistemin basamak girişe olan cevabı Şekil 5.3'deki gibi bir *S* harfi şeklindeyse kullanılabilir. Yani, transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan, t_d zamanı kadar gecikmeli bir birinci mertbe sistemin kontrol edildiği kabul edilmektedir.

$$G(s) = \frac{Ke^{-st_d}}{\tau s + 1} \quad (5.1)$$

Ziegler ve Nichols'ün original çalışmasında bu eğriden maksimum eğim ve gecikme zamanı değerleri ile birim referans girişe karşılık gelen durağan çıkış değeri bulunur. Bu değerler cinsinden *PID* kontrolcü

parametreleri ifade edilir. Bu değerlerin şeklin geometrisinden bulunması için farklı kaynaklarda çeşitli yaklaşımlar yer almaktadır. Burada *PID* kontrolcü parametrelerini belirlemek için, basamak cevabın büyüklüğünün kullanılmasını gerektirmeyen bir yöntem kullanılacaktır. Şekil 5.3'deki basamak cevabı eğrisi üzerindeki maksimum eğim R olsun. Eğimin maksimum olduğu noktada çizilen teğet zaman eksenini L noktasında kessin. L uzaklığı sistemin gecikme zamanı t_d 'yi verir. Teğetin durağan değeri kestiği zamanla t_d arasındaki uzaklık ise τ olsun.



Şekil 5.3

Sisteme *P*, *PI* ve *PID* kontrol uygulandığında, kontrol edilmiş sistemin basamak cevabının yaklaşık olarak 1/4 – genlik kriterini sağlaması için Ziegler ve Nichols tarafından önerilen kontrolcü parametreleri bu değerler cinsinden Çizelge 5.1'deki gibidir.

Çizelge 5.1

Kontrolcü	K_p	T_i	T_d
<i>P</i>	τ/t_d	-	-
<i>PI</i>	$0.9\tau/t_d$	$t_d/0.3$	-
<i>PID</i>	$1.2\tau/t_d$	$t_d/0.5$	$0.5t_d$

Bu yöntemin en önemli üstünlüğü sisteme fazlaca müdahale etmeden, basit bir deneye dayanmasıdır. Ancak sonuçların başarı derecesi, sistemin denklem (5.1)'i ne kadar doğrulukla sağladığına bağlıdır.

ii) Ziegler ve Nichols'un Sürekli Titreşim Yöntemi

Bu yöntemde deney, sadece oransal kontrol uygulanan kapalı çevrim sistem üzerinde yapılır. Kontrolcü kazancı küçük bir değerden başlayarak kademeli olarak sistemin basmak cevabı sabit genlikli bir titreşim haline gelinceye kadar artırılır. Bu duruma karşılık gelen oransal kazanç K_m ve cevabın salınım periyodu P_m ise, 1/4-genlik kriterini yaklaşık olarak sağlayacak kontrolcü parametreleri bu değerler cinsinden Çizelge 5.2'deki gibi seçilir.

Deney sırasında kapalı çevrim sistem kullanıldığından sistemin daha doğru olarak tanımlanmış olması, bu yöntemin ve kapalı çevrim sistem deney sonuçlarını kullanan diğer yöntemlerin üstünlüğüdür. Ancak deney sırasında sistem marjinal kararlılık durumuna getirildiğinden, kararsızlık sınırının kazayla aşılabilme riski olması pek çok endüstriyel uygulama için sakıncalı olabilir.

Çizelge 5.2

Kontrolcü	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_m$	-	-
PI	$0.45K_m$	$P_m/1.2$	-
PD	$0.6K_m$	-	$P_m/8$
PID	$0.6K_m$	$P_m/2$	$P_m/8$

5.2.2 Sönümlü Titreşim Yöntemi

Bazı uygulamalarda sürekli titreşim elde edilmesi, yani sistemin marjinal kararlı hale getirilmesi sakıncalı olabilir. Bu durumda Harriott tarafından önerilen sönümlü titreşim yöntemi kullanılabilir [5.2]. Yapılan deney sürekli titreşim metodundakine benzerdir. Oransal kontrolcü uygulanan sisteme bir basamak giriş uygulanır ve sistem kazancı küçük bir değerden başlayarak 1/4-genlik kriteri sağlanıncaya kadar artırılır. Böylece elde edilen sönümlü sistem cevabının periyodu (P_m) cinsinden integral ve türev zaman sabitleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} T_i &= P_m / 6 \\ T_d &= P_m / 1.5 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Daha sonra bu iki değer PID kontrol organına girilerek kontrolcü kazancı 1/4-genlik kriteri sağlanıncaya kadar değiştirilerek kazanç değeri yeniden saptanır.

5.2.3 Cohen-Coon Yöntemi

Cohen-Coon yöntemi özellikle gecikme zamanı uzun olan ve yaklaşık birinci mertbe sistem davranışı sergileyen sistemler için önerilmiştir [5.3, 5.4]. Yani sistem cevabı gecikmesi uzun olan bir S şeklindedir. Amaç hala yaklaşık olarak 1/4 genlik oranı kriterini sağlamaktır. Kontrol edilmiş sistemin cevap hızı Ziegler-Nichols yöntemiyle elde edilen sisteme göre daha hızlıdır. Ancak gecikme süresi yeterince uzun değilse yöntem aşırı yüksek kazanç değerleri verebilir. Yapılan deney Ziegler-Nichols'un proses reaksiyon eğrisi yöntemindeki gibidir. Sisteme $t = 0$ anında h yüksekliğinde bir basamak giriş uygulandığında Şekil 5.3'deki gibi bir basamak cevap eğrisi elde edilmiş olsun. Bu eğriden alınan c_{ss} , t_d ve τ değerlerinden önce aşağıdaki terimler hesaplanır.

$$K = \frac{c_{ss}}{h} \quad a = \frac{Kt_d}{\tau} \quad \gamma = \frac{\tau_d}{\tau_d + \tau} \quad (5.3)$$

P , PI ve PID kontrolcü parametreleri ise Çizelge 5.3'de verildiği gibi belirlenir.

Çizelge 5.3

Kontrolcü	K	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{0.35\gamma}{1-\gamma} \right)$	-	-
PI	$\frac{0.9}{a} \left(1 + \frac{0.92\gamma}{1-\gamma} \right)$	$\tau_d \left(\frac{3.3-3\gamma}{1+1.2\gamma} \right)$	-
PD	$\frac{1.24}{a} \left(1 + \frac{0.13\gamma}{1-\gamma} \right)$	-	$\tau_d \left(\frac{0.27-0.36\gamma}{1-0.87\gamma} \right)$
PID	$\frac{1.35}{a} \left(1 + \frac{0.18\gamma}{1-\gamma} \right)$	$\tau_d \left(\frac{2.5-2\gamma}{1-0.39\gamma} \right)$	$\tau_d \left(\frac{0.37-0.37\gamma}{1-0.81\gamma} \right)$

5.2.4 Tyreus-Luyben Yöntemi

Tyreus ve Luyben tarafından önerilen bu yöntemde Ziegler-Nichols'ün sürekli titreşim deneyi aynen yapılarak K_m ve P_m değerleri belirlenir [5.5, 5.6]. Buna dayanarak PI ve PID kontrol parametreleri Çizelge 5.4'deki gibi seçilir.

Çizelge 5.4

Kontrolcü	K_p	T_i	T_d
PI	$K_m/3.2$	$2.2 P_m$	-
PID	$K_m/2.2$	$2.2 P_m$	$P_m/6.3$

5.2.5 Kapalı Çevrim Bang-Bang Test Yöntemi

Aström ve Hagglund tarafından önerilen bu yöntem, yüksek frekanslarda en az π rad/s kadar faz gecikmesine sahip sistemlerin röleyle kontrolü sırasında P_m gibi bir periyotla sürekli titreşim yapması gözlemine dayanır [5.7]. Önce kapalı çevrim sisteme sabit bir referans giriş uygulanır ve sistemin durağan duruma erişmesi beklenir. Daha sonra sisteme hatanın (e) işaretine göre aşağıdaki gibi çalışan bir *bang-bang* kontrolcü eklenerek sistem çalıştırılır. (Proses kazancı negatif ise d 'nin işaretleri ters alınır.)

$$\begin{aligned} u &= d & (e \leq 0) \\ u &= -d & (e > 0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bu deney belli bir süre sürdürüldükten sonra sabit genlikli sürekli salınımlar elde edilir. Bu salınımların periyodu P_m olarak alınır. Salınımların genliği a ise, K_m değeri,

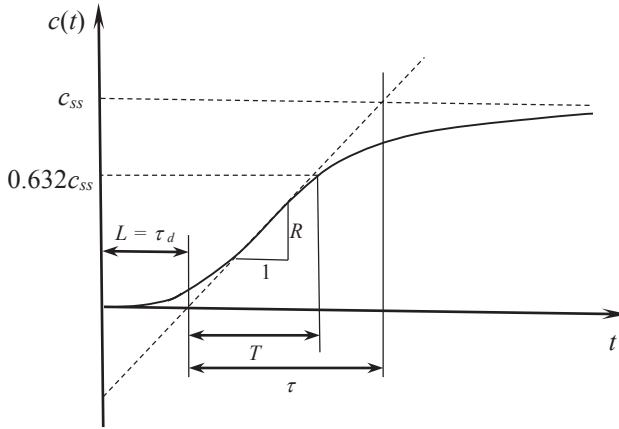
$$K_m = \frac{4d}{\pi a} \quad (5.5)$$

olarak bulunur. Daha sonra Ziegler-Nichols sürekli titreşim yöntemi ya da Tyreus-Luyben yöntemindeki gibi kontrolcü parametreleri seçilir.

5.2.6 Chien-Hrones-Reswick Yöntemi

Chien-Hrones-Reswick yönteminde Ziegler-Nichols yönteminde kullanılan proses reaksiyon eğrisi kullanılır [5.8, 5.9]. Yöntemin Ziegler-Nichols yönteminden farkı, “sıfır aşma ve en hızlı cevap” ve “% 20 aşma ve

en hızlı cevap” kriterlerine göre farklı kontrolcü parametreleri tanımlanmasıdır. Diğer bir fark ise sisteme referans girişi ve bozucu giriş uygulandığında kullanılan parametrelerin birbirinden farklı olmasıdır. Yöntemin uygulanmasında önce Ziegler-Nichols yöntemindekine benzer biçimde proses reaksiyon eğrisi Şekil 5.4’deki gibi elde edilir. Cevap eğrisinin maksimum eğime (R) sahip olduğu noktada bir teğet çizilir ve şekilde gösterildiği gibi τ ve τ_d değerleri bulunur. Bozucu giriş için kontrolcü parametreleri bu değerler cinsinden Çizelge 5.5’deki gibi saptanır [5.8].



Şekil 5.4

Referans giriş için kontrol parametrelerinin belirlenmesi, ayrıca birinci mertbe sistemin zaman sabiti T 'nin bulunmasını da gerektirir. Bunu belirlemek için sistem cevabının $0.632c_{ss}$ değerine eriştiği zaman belirlenir ve bu zamandan τ_d çıkarılarak T 'nin değeri Şekil 5.4’de gösterildiği gibi bulunur. Kontrolcü parametreleri τ_d , τ ve T cinsinden Çizelge 5.6’daki gibi seçilir [5.8].

Çizelge 5.5

Bozucu Giriş için Kontrolcü Parametreleri						
Aşma	% 0			% 20		
Parametre	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3 \tau / \tau_d$	-	-	$0.7 \tau / t_d$	-	-
PI	$0.6 \tau / \tau_d$	$4 \tau_d$	-	$0.7 \tau / t_d$	$2.3 \tau_d$	-
PID	$0.95 \tau / t_d$	$2.4 \tau_d$	$0.42 \tau_d$	$1.2 \tau / t_d$	$2 \tau_d$	$0.42 \tau_d$

Çizelge 5.6

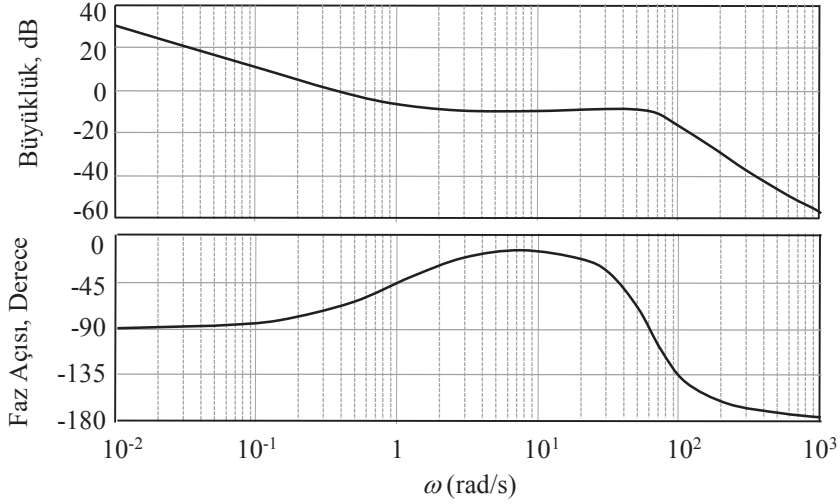
Referans Giriş için Kontrolcü Parametreleri						
Aşma	% 0			% 20		
Parametre	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3 \tau / \tau_d$	-	-	$0.7 \tau / t_d$	-	-
PI	$0.35 \tau / \tau_d$	$1.2T$	-	$0.6 \tau / t_d$	T	-
PID	$0.6 \tau / t_d$	T	$0.5 \tau_d$	$0.95 \tau / t_d$	$1.4T$	$0.47 \tau_d$

KAYNAKLAR

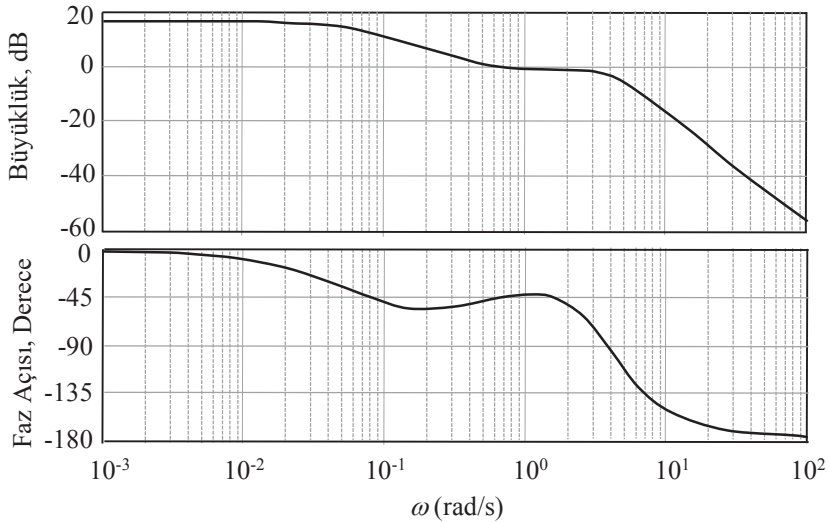
- [5.1] Ziegler, J.G., Nichols, N.B., *Optimum Settings for Automatic Controllers*, Transactions of the A.S.M.E., 64, 759-768, 1942.
- [5.2] Harriott, P., *Process Control*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [5.3] Cohen G.H., Coon G.A., *Theoretical Considerations of Retarded Control*, Transactions of the ASME, pp. 827–834, 1953.
- [5.4] Xue, D., Chen, Y.Q., Atherton, D.P., *Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB*, ISBN 978-0-898716-38-2, SIAM, 2007.
- [5.5] Tyreus B.D., Luyben W.L. *Tuning PI Controllers for Integrator/Dead Time Processes*, Ind. Eng. Chem. Res, 31, 11, pp. 2625-2628, 1992.
- [5.6] Luyben, M.L., Luyben W.L. *Essentials of Process Control*, McGraw-Hill, 1997.
- [5.7] Aström, K.J., Hagglund, T., *Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins*, Automatica, Vol. 20, No. 5, pp. 645-651, 1984.
- [5.8] Aström, K., Hagglund, T., *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, ISBN 1-55617-516-7, Instrument Society of America, 1995.
- [5.9] Chien, K.L., Hrones, J.A., Reswick, J.B., *On the Automatic Control of Generalized Passive Systems*, Trans. ASME, 74, pp. 175-185, 1952.

PROBLEMLER

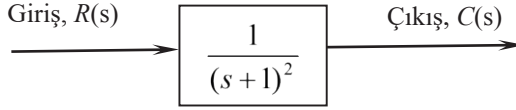
5.1 Aşağıdaki şekilde bir sistemin deneysel olarak elde edilmiş Bode diyagramları verilmiştir.. Sistemin transfer fonksiyonunu bulun.



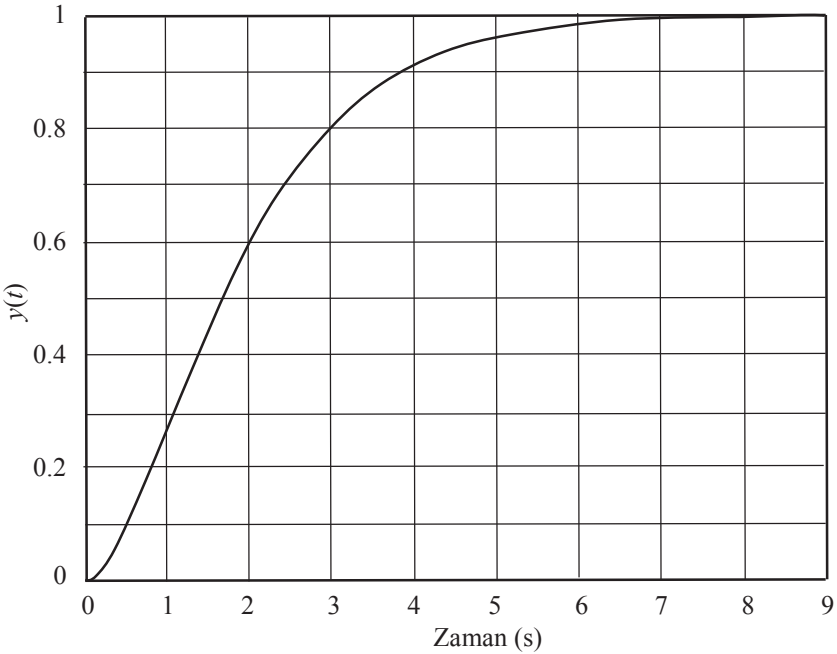
5.2 Aşağıdaki şekilde bir sistemin deneysel olarak elde edilmiş Bode diyagramları verilmiştir. Sistemin transfer fonksiyonunu bulun.



5.3 Blok diyagramı aşağıda verilen açık çevrim sistemin transfer fonksiyonunun bilinmediğini ve birim basamak giriş için proses reaksiyon eğrisinin deneysel olarak şekildeki gibi elde edildiğini varsayın. Aşağıdaki yöntemleri kullanarak *P*, *PI*, *PID* kontrolcü parametrelerini belirleyin.

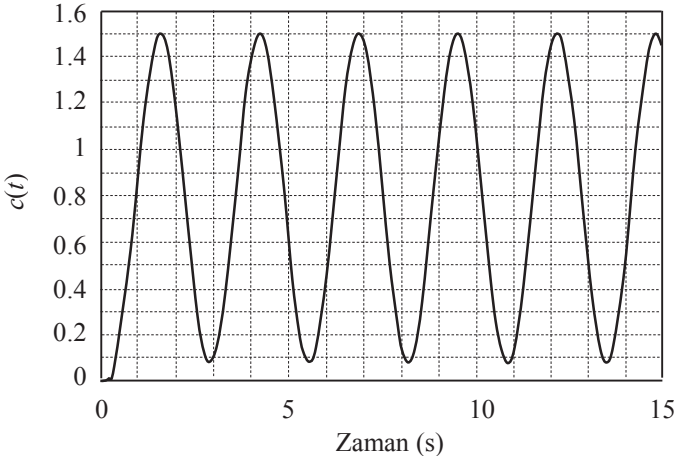
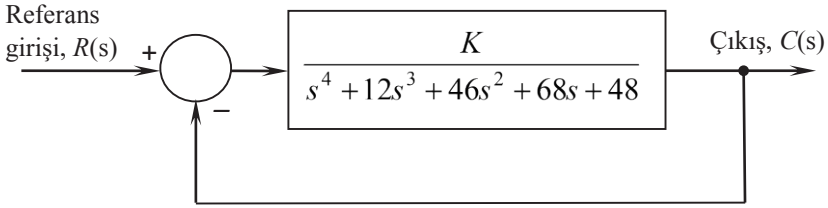


- Ziegler ve Nichols'un Proses Reaksiyon Eğrisi Metodu
- Cohen-Coon Yöntemi
- Chien-Hrones-Reswick Yöntemi (%20 aşma için)



Bu parametreleri birim geribeslemeli sisteme uygulayarak her bir kontrol işlemi için elde edeceğimiz birim basamak cevapları karşılaştırın. Bu metotlar verilen sistem için ne kadar başarılı? Sonuçları ve sebeplerini tartışın. (MATLAB'dan yararlanın.)

- 5.4 Aşağıda blok diyagramı verilen sistemin transfer fonksiyonunun bilinmediğini varsayın. Bu sisteme oransal kontrol uygulanmış ve $K = 35.5$ olduğunda $1/4$ genlik kriterine uygun bir basamak cevap elde edilmiştir. $K = 180.5$ olduğunda ise şekilde verilen sürekli titreşimler elde edilmiştir. Aşağıdaki yöntemleri kullanarak P , PI , PID kontrolcü parametrelerini belirleyin.

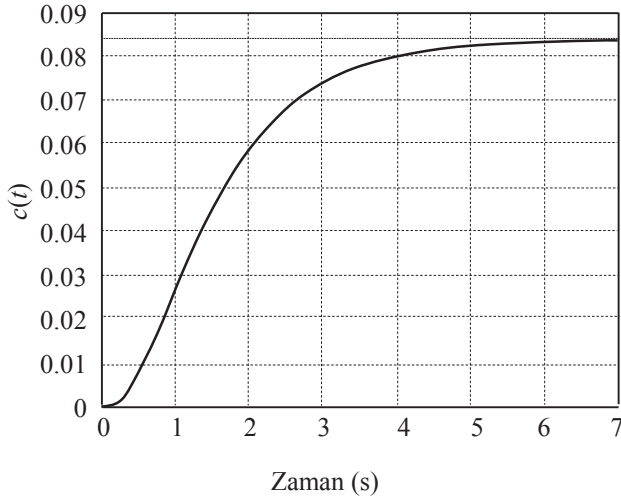
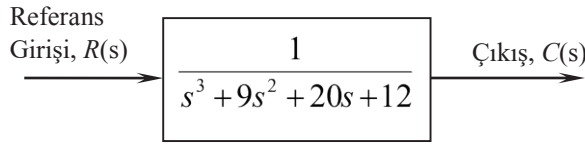


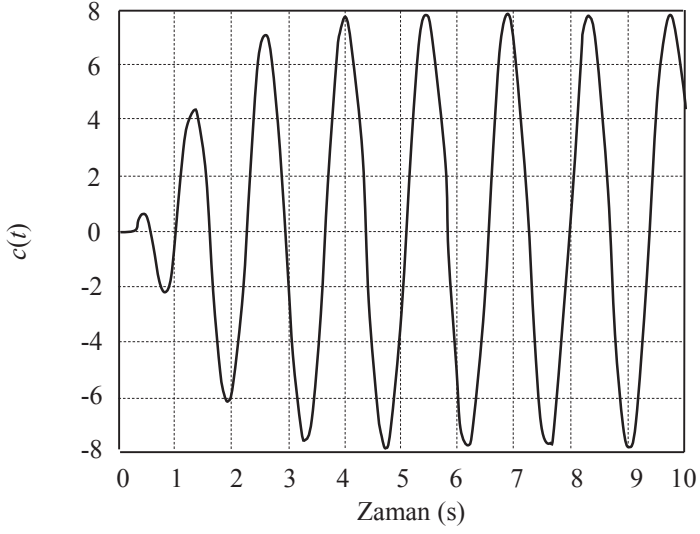
- Ziegler ve Nichols'un Sürekli Titreşim Yöntemi
- Sönümlü Titreşim Yöntemi (K_p 'nin son değerini bulmak için, verilen açık çevrim transfer fonksiyonunu kullanın.)
- Tyreus-Luyben Yöntemi

Bu parametreleri birim geribeslemeli sisteme uygulayarak elde edeceğiniz birim basamak cevapları karşılaştırın. Sonuçları yorumlayın. (MATLAB kullanabilirsiniz.)

5.5 Aşağıda blok diyagramı verilen sistemin transfer fonksiyonunun bilinmediğini varsayın. Açık çevrim sistem için deneysel olarak elde edilen proses reaksiyon eğrisi aşağıdaki ilk şekilde verilmiştir. Birim geribeslemeli sisteme ± 1 büyüklüğünde giriş kullanılarak (denklem 5.4'de $d = 1$) *Kapalı Çevrim Bang-Bang Test'i* uygulanmış ve ikinci şekilde verilen sonuçlar bulunmuştur. Aşağıdaki yöntemleri kullanarak *P, PI, PID* kontrolcü parametrelerini belirleyin.

- Ziegler ve Nichols'un Proses Reaksiyon Eğrisi Yöntemi
- Kapalı Çevrim Bang-Bang Test Yöntemi (Ziegler ve Nichols Yöntemine uygulayarak.)





Bu parametreleri birim geribeslemeli sisteme uygulayarak her bir kontrol işlemi için elde edeceğimiz birim basamak cevapları karşılaştırın. Sonuçları yorumlayın. (MATLAB kullanabilirsiniz.)

DURUM DENKLEMLERİ VE MODERN KONTROL

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında iki temel yaklaşım vardır. *Klasik kontrol* denilen birinci yaklaşımın temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- i) Sistemin tek girişi ve tek çıkışı vardır. Sistemin dinamiği bu girişle çıkış arasındaki ilişkiyi veren n 'inci mertebeye tek bir diferansiyel denklem cinsinden ifade edilir.
- ii) Kapalı çevrim kontrol için sadece çıkış ölçülerek geri beslenir.
- iii) Kontrol sisteminin tasarımında herhangi bir optimizasyon yoktur.
- iv) Çıkış cinsinden ifade edilen sistemin dinamik denkleminin Laplace transformu alınır; sistem, girişle çıkış arasındaki transfer fonksiyonu cinsinden ifade edilir. Analiz ve tasarım Laplace bölgesinde yürütülür.
- v) Amaç sadece çıkışı kontrol etmektir. Sistemde diğer iç değişkenlerin davranış biçimleri dikkate alınmaz.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısından itibaren hızla gelişen ve ileri kontrol uygulamalarına damgasını vuran ikinci yaklaşıma ise *modern kontrol* denir. Bu yaklaşımın belirgin özellikleri aşağıdaki gibi listelenebilir.

- i) Sistemde birden fazla giriş ve birden fazla çıkış olabilir.
- ii) Sistemin dinamik davranışı, *durum değişkeni* adı verilen n sayıda bağımsız değişken cinsinden yazılan n sayıda birinci mertebeye diferansiyel denklemle ifade edilir. Bu denklemlere *durum denklemleri* denir.
- iii) Kapalı çevrim kontrol için n sayıda durum değişkeni geri beslenir.
- iv) Kontrol işlemi sırasında belli bir performans kriteri minimum yapılır.

- v) Sadece çıkışın değil, sistemin iç dinamiğinin de kontrol edilmesi mümkündür.

Mühendislik öğrencilerine öğretilen ilk temel kontrol dersinin içeriği genellikle klasik kontrol konularını içerir. Durum denklemleri ve modern kontrolle ilgili konular ise bu temel dersi izleyen daha ileri düzeyde bir derste işlenir. Bu kitap, okuyucunun durum denklemlerine daha önce aşına olduğu varsayımıyla hazırlanmıştır. Bu bölümde temel konuları tazelemek amacıyla konunun olduğunca kısa bir özeti verilecektir.

6.1 Durum Değişkenleri ve Durum Denklemleri

Bir sistemin herhangi bir andaki durumunu eksiksiz olarak tanımlayan tam ve bağımsız değişken takımına *durum değişkenleri* denir. Bu değişkenler x_i ($i = 1, \dots, n$) olarak gösterilsin. Durum değişkenlerinin sayısı (n) sistemin mertebesidir. Eğer bir sistemin $t > t_0$ için davranışı, sadece t_0 anındaki durumu ve t_0 'dan sonra sisteme uygulanan girişler tarafından belirleniyorsa, o sisteme *durumla belirlenen sistem* denir. Durum değişkenlerinin türevleri de durum değişkenleri cinsinden ifade edilebileceğinden sistemin dinamiğini tam olarak tanımlayan n sayıda birinci mertebe denklem, durum değişkenleri (x_1, x_2, \dots, x_n) ve kontrol girişleri (u_1, u_2, \dots, u_r) cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu denklemlerdeki f_i fonksiyonları genel halde lineer olmayan fonksiyonlardır. Denklemin argümanındaki t terimi sistemin parametrelerinin zamana göre değiştiği hallerde bulunur. Bu denklemlere durum denklemleri denir.

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.1)$$

Eğer,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlanırsa, denklem (6.1) kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir. (Terimlerin altındaki çizgi onların matris ya da vektör olduğunu göstermektedir.)

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (6.2)$$

Sistemin y_1, y_2, \dots, y_m gibi m sayıda çıkışı varsa, bunlar durum değişkenleri ve sistem girişleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$y_k(t) = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (6.3)$$

Eğer,

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

tanımları yapılırsa, çıkış ifadesi kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (6.5)$$

Bu denklemdeki \underline{u} terimi girişin doğrudan çıkışa katkıda bulunduğu nadir durumlarda argümanda yer alır. \underline{g} 'nin elemanları ise genel halde lineer olmayan fonksiyonlardır.

Sabit parametrelili, girişin doğrudan çıkışa taşınmadığı, lineer bir sistem için denklem (6.2) ve denklem (6.3) aşağıdaki hali alırlar.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (6.6)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} \quad (6.7)$$

Yukarıdaki denklemlerde \underline{A} terimi $n \times n$ boyutlu sistem matrisi, \underline{B} terimi $n \times r$ boyutlu giriş matrisi, \underline{C} terimi ise $m \times n$ boyutlu çıkış matrisidir.

Durum değişkenleri sistemi tam olarak tanımlayan ve birbirinden bağımsız değişkenlerden oluşmak kaydıyla, sonsuz sayıda değişken takımınlarından herhangi birisi olabilir. Bununla beraber, avantajları dolayısıyla uygulamalarda bazı değişken takımları tercih edilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

i) *Bağımsız enerji depolayan elemanların enerji depolamasına sebep olan akım veya gerilim değişkenleri.*

Bu tür değişkenlerin üstünlüğü fiziksel olmaları, kolayca ölçülüp izlenebilmeleri ve geri besleme için kolayca kullanılabilmesidir. Durum denklemlerinin bu tür değişkenlerle elde edilmesi için kullanılan standart yöntemler [6.1] numaralı kaynakta ayrıntılı olarak bulunabilir.

ii) *Faz değişkenleri.*

Bu değişkenler, bir değişken ve bu değişkenin $n - 1$ sayıda sıralı türevi olarak tanımlanır. Girişle çıkış arasındaki transfer fonksiyonu verilmişse, payda polinomunun katsayılarından doğrudan yazılabilir. Örnek olarak, lineer bir sistemin çıkışı $y(t)$, girişi $u(t)$, giriş ve çıkış arasındaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K(c_m s^{m-1} + a_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (m \leq n) \quad (6.8)$$

Böyle bir sistemin faz değişkenleri cinsinden durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdot & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (6.9)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdot \quad c_m \quad 0 \quad \cdot \quad 0] \underline{x} \quad (6.10)$$

Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi, verilen bir transfer fonksiyonundan durum denklemleri ve çıkış ifadesinin yazılma kuralı aşağıdaki gibidir.

A matrisini oluşturmak için,
- $n \times n$ bir boş matris alın.

- Diyagonal terimlerin bir üzerindeki bütün elemanları “1” yapın.
- Son satır elemanları olarak, transfer fonksiyonun payda polinomunun katsayılarının negatifini a_1 'den başlayarak sıralı olarak yazın.
- Diğer bütün elemanlara “0” yazın.

B matrisini oluşturmak için,

- $n \times 1$ boyutlu bir boş matris alın.
- En alttaki elemana K kazancını yazın.
- Diğer bütün elemanlara “0” yazın.

C matrisini oluşturmak için,

- $1 \times n$ boyutlu bir boş matris alın.
- Soldan itibaren c_1 'den başlayarak transfer fonksiyonunun pay polinomunun katsayılarını sıralı olarak elemanlara yazın.
- Geri kalan bütün elemanlara “0” yazın.

Yukarıdaki işlemler yapılırken, transfer fonksiyonunun eksik katsayıları varsa, bunların yerine sıfır yazın.

Faz değişkenleri kullanmanın bir üstünlüğü, blok diyagramında ardışık integrasyon işlemi yapılması, geri besleme ve ileri besleme hatlarında sadece sabit katsayıların yer almasıdır. Ancak bundan daha önemlisi, bazı tasarım yöntemlerinde faz değişkenleri kullanılmasının zorunlu olmasıdır. Buna karşılık en önemli sakıncası ise fiziksel değişkenlerin yüksek mertebeli türevlerini ölçecek aygıtların bulunmaması ve bu yüzden geri beslemede yaşanan zorluktur.

iii) Kanonik Değişkenler

Kanonik değişkenlerin en önemli özelliği A matrisinin diyagonal olmasıdır. Transfer fonksiyonu denklem (6.8)'deki gibi verilen ve katlı kutupları olmayan bir sistem olsun. Bu transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi kısmi kesirlerine ayrılabilir. Burada λ_i ($i = 1, \dots, n$) sistemin kutuplarıdır.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{d_1}{s - \lambda_1} + \frac{d_2}{s - \lambda_2} + \frac{d_3}{s - \lambda_3} + \dots + \frac{d_n}{s - \lambda_n} \quad (6.11)$$

Yeni bir değişken takımı z , aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\frac{z_i(s)}{u(s)} = \frac{1}{s - \lambda_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.12)$$

Bu şekilde tanımlanan yeni değişkenlere kanonik değişkenler denir. Denklem (6.12)'den aşağıdaki gibi bir dizi birinci mertbe diferansiyel denklem sistemin durum denklemleri olarak yazılabilir.

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) + u(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.13)$$

Çıkış ifadesi ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = d_1 z_1(t) + d_2 z_2(t) + \dots + d_n z_n(t) \quad (6.14)$$

Sistemin matris formundaki durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.15)$$

$$y = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_{n-1} \quad d_n] \underline{z} \quad (6.16)$$

Kanonik değişkenleri kullanmanın en önemli üstünlüğü, değişkenlerin birbirinden bağımsız olarak birinci mertbe diferansiyel denklemlerden çözülebilmesidir. Buna karşılık değişkenlerin fiziksel bir anlamları olmayabilir ve bu değişkenler geri besleme amacıyla ölçülemeyebilir. Kanonik değişkenler kompleks dahi olabilir.

6.2 Durum Denklemleri ve Transfer Fonksiyonu İlişkisi

Lineer bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad (6.17)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} \quad (6.18)$$

\underline{x} için başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek bu denklemlerin Laplace transformları alınır,

$$s\underline{x}(s) = \underline{A}\underline{x}(s) + \underline{B}\underline{u}(s) \quad (6.19)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{C}\underline{x}(s) \quad (6.20)$$

olur. Bu denklemlerden $\underline{x}(s)$ ve $\underline{y}(s)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{x}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{B}\underline{u}(s) = \underline{\Phi}(s) \underline{B}\underline{u}(s) \quad (6.21)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{C}[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{B}\underline{u}(s) = \underline{G}(s) \underline{u}(s) \quad (6.22)$$

Bu denklemlerde geçen,

$$\underline{\Phi}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \quad (6.23)$$

terimine *çözücü matris* denir.

Denklem (6.22)'deki,

$$\underline{G}(s) = \underline{C}[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{B} \quad (6.24)$$

terimi ise transfer fonksiyonları matrisidir. Denklem (6.22) aşağıdaki gibi açık bir biçimde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdot & \cdot & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdot & \cdot & G_{2r}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdot & \cdot & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(s) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Bu ifadeye $G_{ij}(s)$ gibi bir terim, j 'inci giriş ile i 'inci çıkış arasındaki transfer fonksiyonudur. Tek giriş ve tek çıkışı olan sistemlerde \underline{C} matrisi n boyutlu yatay bir matris, \underline{B} ise r boyutlu düşey bir matris olduğundan $\underline{G}(s)$ 'nin boyutu 1×1 olur ve tek bir transfer fonksiyonu elde edilir. Bu da klasik kontrolde kullanılan transfer fonksiyonudur.

6.3 Kontrol Edilebilirlik ve Gözlenebilirlik

Bir sistemde durum değişkenlerinin bazıları giriş tarafından değiştirilebilirken bazılarının girişin erişmesi mümkün olmayabilir. Bazı değişkenler çıkışa katkıda bulunurken bazıları ise herhangi bir katkıda bulunmayabilir. Bu özellikler *kontrol edilebilirlik* ve *gözlenebilirlik* kavramlarıyla ifade edilir. Herhangi bir sistem bu kavramlar kullanılarak dört alt bölüme ayrılabilir.

- i) Hem kontrol edilebilirliği hem de gözlenebilirliği olan kısım.
- ii) Kontrol edilebilirliği olmayan ama gözlenebilirliği olan kısım.
- iii) Kontrol edilebilirliği olan ama gözlenebilirliği olmayan kısım.
- iv) Hem kontrol edilebilirliği hem de gözlenebilirliği olmayan kısım.

Bir sistem durum denklemleriyle ifade edildiğinde yukarıdaki kısımların hepsi matematiksel olarak gösterilebilir. Buna karşılık klasik kontrolde kullanılan transfer fonksiyonu yaklaşımında sadece kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği olan kısım dikkate alınır. Yani transfer fonksiyonuyla tanımlama ve durum denklemleriyle tanımlama biçimleri, eğer sistem tamamen kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği olan kısımdan oluşmuşsa eşdeğerdir. Aksi takdirde durum denklemleriyle tanımlama daha fazla bilgi içerirken, transfer fonksiyonuyla tanımlamada bilgi kaybı vardır.

Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik özellikleri durum değişkenlerinin matematiksel tanımlanma biçimiyle yakından ilişkilidir. Aynı sistemin farklı durum değişkeni takımlarıyla tanımlanması halinde, birinin kontrol edilebilirliği ya da gözlenebilirliği olurken diğer tanım şeklinde tersi olabilir. Eğer bir sistemin kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği varsa, o sistemin çıkışının kontrol edilebilmesi daima mümkündür. Bir sistemin sadece kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği olan kısımdan olup olmadığı aşağıda verilen matematiksel testlerle belirlenebilir.

1. Denklem (6.17) ve denklem (6.18) ile tanımlanan bir sistem, eğer $n \times nr$ boyutlu aşağıdaki kompozit matrisin rank'ı (kerte'si) n ise *kontrol edilebilir*'dir.

$$[\underline{B} | \underline{A}\underline{B} | \underline{A}^2 \underline{B} | \dots | \underline{A}^{n-1} \underline{B}] \quad (6.26)$$

Bu matrisin rank'ı kontrol edilebilirliği olan durum değişkeni sayısına eşittir.

2. Denklem (6.17) ve denklem (6.18) ile tanımlanan bir sistem, eğer $n \times nm$ boyutlu aşağıdaki kompozit matrisin rank'ı n ise *gözlenebilir*'dir.

$$[\underline{C}^T | \underline{A}^T \underline{C}^T | \underline{A}^{T^2} \underline{C}^T | \dots | \underline{A}^{T(n-1)} \underline{C}^T] \quad (6.27)$$

Bu matrisin rank'ı gözlenebilir olan durum değişkeni sayısına eşittir.

6.4 Lineer Dönüşümle Yeni Durum Değişkenleri Türetilmesi

Lineer bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad (6.28)$$

$$y = \underline{C}\underline{x} \quad (6.29)$$

Yeni bir durum değişkeni takımı \underline{z} aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\underline{x} = \underline{P}\underline{z} \quad (6.30)$$

$$\underline{z} = \underline{P}^{-1} \underline{x} \quad (6.31)$$

Burada \underline{P} tekil olmayan bir kare matris olup, dönüştürme matrisi olarak adlandırılır. Denklem (6.30)'dan \underline{x} alınıp denklem (6.28) ve (6.29)'da yerine koyulursa ve ilk denklemin her iki tarafı sol taraftan \underline{P}^{-1} ile çarpılırsa, yeni durum değişkeni cinsinden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\dot{\underline{z}} = \underline{P}^{-1} \underline{A}\underline{P}\underline{z} + \underline{P}^{-1} \underline{B}u \quad (6.32)$$

$$y = \underline{C}\underline{P}\underline{z} \quad (6.33)$$

Yeni sistem matrisi \underline{A}^* , giriş matrisi \underline{B}^* ve çıkış matrisi \underline{C}^* aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$\underline{A}^* = \underline{P}^{-1} \underline{A}\underline{P} \quad \underline{B}^* = \underline{P}^{-1} \underline{B} \quad \underline{C}^* = \underline{C}\underline{P} \quad (6.34)$$

yeni tanımlanan durum değişkenleri cinsinden sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A}^* \underline{z} + \underline{B}^* u \quad (6.35)$$

$$y = \underline{C}^* \underline{z} \quad (6.36)$$

Yukarıdaki işlemlerde \underline{P} tekil olmamak kaydıyla herhangi bir kare matris olabilir. Yani \underline{P} için sonsuz seçenek vardır. O halde bir sistemi ifade edebilmek için sonsuz sayıdaki durum değişkeni takımından herhangi biri kullanılabilir.

Durumla belirlenen bir sistemde lineer dönüşümle durum değişkeni değiştirildiğinde sistemin aşağıdaki özelliklerinin değişmediği kolaylıkla ispat edilebilir [6.2].

- i) Sistem matrisinin özdeğerleri aynı kalır. Yani, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\det[s\underline{I} - \underline{A}] = \det[s\underline{I} - \underline{A}^*] \quad (6.37)$$

- ii) Girişle çıkış arasında transfer fonksiyonu değişmez. Yani, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\underline{C}[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{B} = \underline{C}^*[s\underline{I} - \underline{A}^*]^{-1} \underline{B}^* \quad (6.38)$$

6.5 Durumla Belirlenen Lineer Sistemin Zaman Cevabı

Durumla belirlenen lineer bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (6.39)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} \quad (6.40)$$

denklemleriyle verilmiş olsun. Bu sistemin $t = 0$ anındaki durumu $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ve $t \geq 0$ için sisteme uygulanan giriş $\underline{u}(t)$ ise, $t \geq 0$ için $\underline{x}(t)$ 'nin çözümü sistemin zaman cevabını verir.

Denklem (6.39) ile verilen diferansiyel denklem takımının çözümü diğer lineer diferansiyel denklemlerde olduğu gibi üç aşamadan oluşur. Bu aşamalar sırasıyla homojen çözümün (zorlanmamış çözüm) integrasyon sabitleri cinsinden bulunması, $\underline{u}(t)$ 'ye karşılık gelen özel çözümün (zorlanmış çözüm) bulunması, homojen çözümle özel çözümün toplamı olan genel çözüme başlangıç şartlarını uygulayarak integrasyon sabitlerinin bulunmasıdır. Aşağıda bu aşamalar kısaca özetlenerek sistem cevabı için genel bir ifade elde edilecektir.

i) Homojen çözüm

Homojen çözüm zorlanmamış sistemin çözümü olduğundan $\underline{u}(t) = 0$ alınır. Yani,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} \quad (6.41)$$

denkleminin çözümüdür. Bu çözüm \underline{x}_h olsun ve aşağıdaki gibi sonsuz bir zaman serisi şeklinde ifade edilebildiği varsayalım

$$\underline{x}_h = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 t + \underline{c}_2 t^2 + \dots + \underline{c}_m t^m + \dots \quad (6.42)$$

Bu çözüm denklem (6.41)'de yerine koyulur, eşitliğin iki tarafındaki t 'nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayıları birbirine eşitlenirse, \underline{c}_0 dışındaki katsayılar \underline{c}_0 cinsinden bulunabilir ve çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{x}_h = \left[\underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2!} \underline{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{m!} \underline{A}^m t^m + \dots \right] \underline{c}_0 = e^{\underline{A}t} \underline{c}_0 \quad (6.43)$$

Yukarıdaki denklemde köşeli parantezin içindeki terimin formatı e^{at} teriminin zaman serisi açılımıyla aynı olduğundan kısaca $e^{\underline{A}t}$ olarak gösterilmiştir. $e^{\underline{A}t}$ terimi denklem (6.43)'de köşeli parantez içinde verildiği gibi tanımlanmıştır. Bununla beraber, e^{at} teriminin türevini ya da integralini alırken geçerli olan kurallar, $e^{\underline{A}t}$ için de geçerlidir. Sadece a yerine \underline{A} yazmak yeterlidir. $e^{\underline{A}t}$ terimi kısaca,

$$\underline{\phi}(t) = e^{\underline{A}t} \quad (6.44)$$

olarak da yazılır. Bu matris *durum dönüştürme matrisi* ya da *temel matris* olarak adlandırılır. Bu matrisin anlamı ve özellikleri bu bölümün ilerleyen kısımlarında ayrıntılı olarak incelenecektir.

ii) Zorlanmış çözüm

Zorlanmış çözümde sistem girişi sıfır olmadığından,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (6.45)$$

denklemi geçerlidir. Zorlanmış çözüm $\underline{x}_p(t)$ 'nin aşağıdaki gibi ifade edilebileceği varsayalım.

$$\underline{x}_p = e^{\underline{A}t} \underline{p}(t) \quad (6.46)$$

Bu ifadenin türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\dot{\underline{x}}_p = \underline{A}e^{\underline{A}t} \underline{p}(t) + e^{\underline{A}t} \frac{d\underline{p}(t)}{dt} \quad (6.47)$$

$\underline{x}_p(t)$ aynı zamanda denklem (6.45)'i de sağlamak zorunda olduğundan, aşağıdaki ifade de yazılabilir.

$$\dot{\underline{x}}_p = \underline{A}\underline{x}_p + \underline{B}\underline{u} \quad (6.48)$$

Denklem (6.47) ve denklem (6.48)'in sağ taraflarını eşitleyerek elde edilecek ifadenin her iki tarafı soldan $e^{-\underline{A}t}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d\underline{p}(t)}{dt} = e^{-\underline{A}t} \underline{B}\underline{u} \quad (6.49)$$

ya da, bu denklemin integrali alınır ve sonuç denklem (6.46)'da yerine koyulursa, özel çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{x}_p = e^{\underline{A}t} \int_0^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{B}\underline{u}(\tau) d\tau \quad (6.50)$$

iii) Genel çözüm ve başlangıç şartlarının uygulanması

Genel çözüm denklem (6.43) ile verilen homojen çözüm ve denklem (6.50) ile verilen zorlanmış çözümün toplamı olup,

$$\underline{x} = e^{At} \underline{c}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \underline{B}u(\tau) d\tau \quad (6.51)$$

şeklinindedir. Bu denkleme $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ sınır şartı uygulanırsa integrasyon sabiti $\underline{c}_0 = \underline{x}_0$ olur ve sistemin zaman cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= e^{At} \underline{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \underline{B}u(\tau) d\tau \\ &= e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \underline{B}u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.52)$$

Bu denklemdeki birinci terim sistemin başlangıç durumuna olan cevabı, ikinci terim ise zorlamaya olan cevabıdır. Denklemde yer alan integralin adı *konvolüsyon integrali*'dir.

6.6 Durum Dönüştürme Matrisi

Zorlanmamış bir sistemin,

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 = \underline{\phi}(t) \underline{x}_0 \quad (6.53)$$

şeklinde olan zaman cevabı incelendiğinde, $\underline{\phi}(t)$ 'ye neden durum dönüştürme matrisi denildiği daha kolay anlaşılır. Görüldüğü gibi, bu matris bir operatör gibi davranarak sistemin $t = 0$ 'daki \underline{x}_0 durumunu t anındaki $\underline{x}(t)$ durumuna dönüştürmektedir.

Homojen çözüm Laplace transferi yöntemiyle de elde edilebilir. Denklem (6.41)'in Laplace transformu alınır, sırasıyla aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{x}(s) \quad (6.54)$$

$$\underline{x}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{x}(0) = \underline{\Phi}(s) \underline{x}_0 \quad (6.55)$$

$$\underline{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}] \underline{x}_0 = \mathcal{L}^{-1} [\underline{\Phi}(s)] \underline{x}_0 \quad (6.56)$$

Denklem (6.56) ile denklem (6.53) karşılaştırılırsa,

$$\underline{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} [\underline{\Phi}(s)] \quad \underline{\Phi}(s) = \mathcal{L} [\underline{\phi}(t)] \quad (6.57)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde durum dönüştürme matrisi, denklem (6.23) ile verilen çözücü matrisin Laplace transformudur.

Denklem (6.39)'un $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ sınır şartıyla Laplace transformu alınır, sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{x}(s) + \underline{B}\underline{u}(s) \quad (6.58)$$

$$\underline{x}(s) = \underline{\Phi}(s)\underline{x}(0) + \underline{\Phi}(s)\underline{B}\underline{u}(s) \quad (6.59)$$

$$\underline{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [\underline{\Phi}(s)] \underline{x}_0 + \mathcal{L}^{-1} [\underline{\Phi}(s) \underline{B}\underline{u}(s)] \quad (6.60)$$

Durum dönüştürme matrisinin bazı özellikleri ispat edilmeden aşağıda listelenmiştir [6.2].

$$\text{i) } \underline{\phi}(0) = \underline{I} \quad (6.61)$$

$$\text{ii) } \underline{\dot{\phi}}(t) = \underline{A}\underline{\phi}(t) \quad (6.62)$$

$$\text{iii) } \underline{\phi}(t_2) = \underline{\phi}(t_2 - t_1)\underline{\phi}(t_1) \quad (6.63)$$

$$\text{iv) } \underline{\phi}(t_1)\underline{\phi}(t_2) = \underline{\phi}(t_1 + t_2) \quad (6.64)$$

$$\text{v) } [\underline{\phi}(t)]^{-1} = \underline{\phi}(-t) \quad (6.65)$$

$$\text{vi) } [\underline{\phi}(t)]^n = \underline{\phi}(nt) \quad (6.66)$$

Durum Dönüştürme Matrisinin Elde Edilme Yöntemleri:

Durum dönüştürme matrisi aşağıdaki yöntemlerden birisi kullanılarak elde edilebilir.

i) Matrisin zaman serisi açılımının kullanılması.

Durum dönüştürme matrisi aşağıdaki sonsuz zaman serisiyle tanımlanmıştır.

$$\underline{\phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2!} \underline{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{m!} \underline{A}^m t^m + \dots \quad (6.67)$$

Bu yöntemde serinin yeterince sayıda terimi alınarak durum dönüştürme matrisinin elemanları tanımlanmaya çalışılır.

ii) $\dot{\underline{\phi}}(t) = \underline{A}\underline{\phi}(t)$ denkleminin $\underline{\phi}(0) = \underline{I}$ sınır şartına tabi olarak analitik ya da nümerik yöntemlerle çözülmesi.

iii) Sylvester açılım teoreminin kullanılması.

Aşağıda verilen Sylvester açılım teoremi \underline{A} -matrisinin özdeğerlerinin, yani sistem kutuplarının katlı olmadığı durumlar için kullanılır.

Sylvester Açılım Teoremi:

Eğer $f(\underline{A})$ fonksiyonu \underline{A} 'nın,

$$f(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{A}^k \quad (6.68)$$

gibi bir polinom fonksiyonuysa, $f(\underline{A})$,

$$f(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \underline{F}_i \quad (6.69)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada λ_i , \underline{A} -matrisinin özdeğerleri, \underline{F}_i katsayıları ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\underline{F}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\underline{A} - \lambda_j \underline{I}}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (6.70)$$

6.7 Örnekler

Örnek 6.1:

Transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (6.71)$$

olan sistemin, kanonik değişkenler kullanarak \underline{A} -matris formunda ifade edilmesi istenmektedir.

Verilen transfer fonksiyonunun paydası aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılabilir.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s + 8}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \quad (6.72)$$

Bu ifade aşağıdaki gibi kısmi kesirlerine ayrılabilir.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s + 8}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \\ &= \frac{d_1}{s + 1} + \frac{d_2}{s + 2} + \frac{d_3}{s + 3} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Kısmi kesir katsayıları, kısmi kesirleri ortak payda altına alıp, karşılıklı olarak katsayıları eşitleyerek bulunabilir. Ya da kalıntı (rezidü) teoreminden yararlanarak aşağıdaki gibi doğrudan bulunabilir [6.1].

$$d_1 = G(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{2s + 8}{(s + 2)(s + 3)} \Big|_{s=-1} = 3 \quad (6.74)$$

$$d_2 = G(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{2s + 8}{(s + 1)(s + 3)} \Big|_{s=-2} = -4 \quad (6.75)$$

$$d_3 = G(s)(s + 3) \Big|_{s=-3} = \frac{2s + 8}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s=-3} = 1 \quad (6.76)$$

O halde,

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{3}{s + 1} + \frac{-4}{s + 2} + \frac{1}{s + 3} \quad (6.77)$$

olduğuna göre, denklem (6.13)'den sistemin durum denklemleri kanonik değişkenler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) + u(t) \quad (i=1, 2, 3) \quad (6.78)$$

Çıkış ifadesi ise denklem (6.14)'den aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = 3z_1(t) - 4z_2(t) + z_3(t) \quad (6.79)$$

Örnek 6.2:

Bir sistemin \underline{A} matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

Sylvester açılım teoremini kullanarak durum dönüştürme matrisi $\underline{\phi}(t)$ 'nin bulunması istenmektedir.

Yürütülmesi gereken işlemler aşağıda sıralanmıştır.

$$\det[\lambda \underline{I} - \underline{A}] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad (6.81)$$

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j$$

$$\underline{F}_1 = \frac{\underline{A} - \lambda_2 \underline{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix}}{2j} \quad (6.82)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix}}{-2j} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(t) &= e^{jt} \underline{F}_1 + e^{-jt} \underline{F}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} & \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \\ -\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} & \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.84)$$

Euler formülü kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\underline{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\quad (6.85)$$

Örnek 6.3:

Bir sistemin durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\quad (6.86)$$

olarak verilmiştir. Başlangıç şartı ve sistem girişi,

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u = 1 \quad (t \geq 0)\quad (6.87)$$

olduğuna göre, sistemin zaman cevabının bulunması istenmektedir.

Sistemin özdeğerleri,

$$\begin{aligned}\det[\lambda \underline{I} - \underline{A}] &= \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \\ \lambda_1 &= -1 \quad \lambda_2 = -3\end{aligned}\quad (6.88)$$

olduğuna göre, Sylvester açılım teoreminden durum dönüştürme matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{F}_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} \underline{\phi}(t) &= e^{-t} \underline{F}_1 + e^{-3t} \underline{F}_2 \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.91)$$

Sistem cevabı ise denklem (6.52)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

ya da,

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)} \\ \frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0) \quad (6.94)$$

KAYNAKLAR

- [6.1] Ercan, Y., *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği*, ISBN: 978-975-04-0107-7, Literatür, İstanbul, 2003.
- [6.2] Schultz, D.G., Melsa, J.L., *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.

PROBLEMLER

6.1 Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemleri faz değişkenleri cinsinden \underline{A} -matris formunda ifade edin.

$$(a) \quad G(s) = \frac{20}{s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 7s + 1}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 1)}{s^3 + 24s^2 + 16s + 1} \quad (c) \quad G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^3 + 3s + 2}$$

6.2 Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemleri doğrudan transfer fonksiyonunu kullanarak kanonik değişkenler cinsinden \underline{A} -matris formunda ifade edin.

$$(a) \quad G(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 6)}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 5)} \quad (c) \quad G(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 3s + 2}$$

6.3 Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemleri önce faz değişkenleri cinsinden ifade edin. Faz değişkenlerini kanonik değişkenlere dönüştürecek dönüşüm matrisi \underline{P} 'yi bulun.

$$(a) \quad G(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{4(s^2 + 2s + 1)}{(s + 2)(s + 4)} \quad (c) \quad G(s) = \frac{2(s + 1)}{s(s + 2)}$$

6.4 Aşağıda verilen sistemlerin giriş ve çıkışları arasındaki transfer fonksiyonlarını bulun.

$$(a) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1] \underline{x}$$

$$(b) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 1] \underline{x}$$

6.5 Aşağıda verilen sistemlerin kontrol edilebilirliğini ve gözlenebilirliğini inceleyin.

$$(a) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0] \underline{x}$$

$$(b) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 1] \underline{x}$$

$$(c) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$(d) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}$$

6.6 Homojen denklemleri aşağıda verilen sistemlerin durum dönüştürme matrislerini Sylvester açılım teoremini kullanarak bulun.

$$(a) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (\text{Sistemin özdeğerleri: } -1, -2 \text{ ve } -4)$$

$$(b) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

6.7 Homojen denklemi aşağıda verilen sistemin durum dönüştürme matrisini seri açılımı tanımından yararlanarak bulun.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

6.8 Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

(a) Sylvester açılım teoremini kullanarak durum dönüştürme matrisini bulun.

(b) $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($t \geq 0$) olduğuna göre sistem cevabını bulun.

6.9 Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

(a) Sylvester açılım teoremini kullanarak durum dönüştürme matrisini bulun.

(b) $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($t \geq 0$) olduğuna göre sistem cevabını bulun.

7

GENEL

OPTİMUM KONTROL

Modern kontrolün klasik kontrole göre en önemli farklarından birisi kontrol sırasında integral formunda bir performans kriterinin minimum yapılmasıdır. Genel optimum kontrol probleminde bu kriter,

$$P.K. = \int_{t_i}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (7.1)$$

şeklinde olup, sistemin durum denklemleri de aşağıdaki genel formdadır.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (7.2)$$

Yukarıda denklem (7.1)'de geçen $L(\underline{x}, \underline{u}, t)$ birinci ve ikinci türevleri sürekli olan, \underline{x} ve \underline{u} fonksiyonlarının bir *fonksiyon fonksiyonu*'dur. Verilen \underline{x} ve \underline{u} fonksiyonları için L 'nin çıktısı scalar bir değerdir. Performans kriterinin zaman içinde sürekli artması için $L(\underline{x}, \underline{u}, t)$ teriminin her an pozitif ya da sadece bazen sıfır olması gereklidir. Denklem (7.2)'deki \underline{f} matrisinin elemanları genel halde lineer değildir. Optimum kontrol probleminin amacı $P.K.$ 'yı minimum yapacak kontrol girişi $\underline{u}(t)$ 'nin bulunmasıdır.

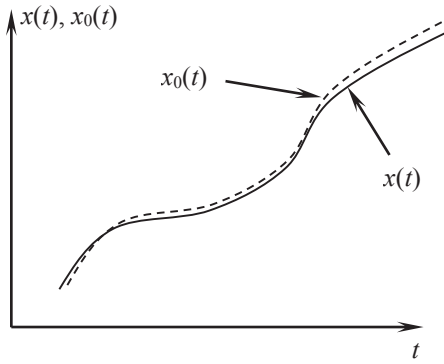
Bu bölümde önce temel matematik kavramlar verilerek, integral formda bir fonksiyon fonksiyonunu minimum yapacak fonksiyonların bulunması için çözülmesi gereken denklemler elde edilecektir. Daha sonra bu temel denklemlerden yararlanarak, denklem (7.2) ile tanımlanan bir sistemin denklem (7.1)'deki gibi bir performans kriterini minimum yapmasını sağlayacak $\underline{u}(t)$ kontrol girişini çözmeye yarayacak denklemler bulunacaktır. Konular olabildiğince özet olarak sunulacaktır. Daha ayrıntılı bilgi bölüm sonunda verilen kaynaklarda bulunabilir [7.1-7.6].

7.1 Euler Denklemi

Bir fonksiyon fonksiyonu argümanında verilen bir fonksiyon için skalar bir değer verir. Örneğin Şekil 7.1'deki gibi bir $x(t)$ fonksiyonu olsun. $x(t)$ fonksiyonunun tanımladığı eğrinin $t = a$ ve $t = b$ arasındaki uzunluğu için,

$$V(x) = \int_a^b \sqrt{1 + [\dot{x}(t)]^2} dt \quad (7.3)$$

yazılabilir. Burada $V(x)$ bir fonksiyon fonksiyonudur.



Şekil 7.1

Eğer fonksiyon fonksiyonunun $x = x_0$ için verdiği değer x_0 'ın komşusu tüm x fonksiyonları için,

$$V(x) \geq V(x_0) \quad (7.4)$$

ise, " $V(x)$ fonksiyon fonksiyonu x_0 için, x_0 'ın komşu bölgesinde minimumdur." denir. Bir x fonksiyonu başka bir x_0 fonksiyonuna komşu ise, herhangi bir t değerinde $x - x_0$ ve $\dot{x} - \dot{x}_0$ küçüktür.

x 'in varyasyonu δx aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x - x_0 = \delta x \quad (7.5)$$

$V(x)$ ile $V(x_0)$ arasındaki fark ΔV olsun. ΔV 'ye V 'nin toplam varyasyonu denir. Taylor serisi açılımı kullanılırsa, ΔV aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V(x) - V(x_0) = V(x_0 + \delta x) - V(x_0) \\
&= V(x_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x_0} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right|_{x_0} \delta x^3 + \dots - V(x_0) \\
&= \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Bu denklemde geçen δV 'ye V 'nin birinci varyasyonu ya da kısaca V 'nin varyasyonu, $\delta^2 V$ 'ye V 'nin ikinci varyasyonu, $\delta^3 V$ 'ye V 'nin üçüncü varyasyonu, $\delta^n V$ 'ye V 'nin n 'inci varyasyonu denir. Bu terimler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\delta V = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} \delta x \tag{7.7}$$

$$\delta^2 V = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x_0} \delta x^2 \tag{7.8}$$

$$\delta^3 V = \left. \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right|_{x_0} \delta x^3 \tag{7.9}$$

.

.

Bir fonksiyon fonksiyonunun varyasyonunu alırken uygulanan kurallarla, bir fonksiyonun diferansiyelini alırken uygulanan kurallar aynıdır. Örneğin, v bir fonksiyon ise,

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \delta v \tag{7.10}$$

olur. Eğer yukarıdaki denklemde v hız ise, $v = \dot{x}$ olacağından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\delta v = mv\delta(\dot{x}) = m\dot{x}\delta(\dot{x}) \quad (7.11)$$

Fonksiyon fonksiyonlarının minimumlarını bulmak için aşağıdaki teoremden yararlanılır.

Teorem:

Eğer bir fonksiyon fonksiyonu $V(x)$ 'in varyasyonu varsa ve eğer $x = x_0$ için V minimum ise, $x = x_0$ için $\delta V = 0$ olur.

$\delta V = 0$ şartı gerek şart olup, yeterli değildir. Yeterli şart için ayrıca $\delta^2 V$ 'nin işaretine de bakılması gerekir. Ancak fiziksel sebeplerden dolayı optimum kontrol kapsamında bu ikinci değerlendirmenin yapılmasına gerek yoktur.

Bir x fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanan bir fonksiyon fonksiyonu olsun.

$$V(x) = \int_a^b L[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (7.12)$$

Burada L , sürekli ve sürekli birinci ve ikinci kısmi türevlere sahiptir. Ayrıca $x(t)$ için $x(a) = A$ ve $x(b) = B$ sınır şartları verilmiş olsun. Bu problem, a ve b 'deki uç noktalarında x 'in değeri sabit olduğundan, *sabit uç noktası problemi* olarak anılır.

Amaç, $V(x)$ 'i minimum yapacak x 'i bulmaktır. x 'e δx gibi bir varyasyon uygulansın. Ancak a ve b 'de x sabit olduğundan, $\delta x(a) = 0$ ve $\delta x(b) = 0$ olmak zorundadır. δx varyasyonu uygulandığında, V 'nin toplam varyasyonu ΔV için denklem (7.6)'dan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Delta V = \int_a^b \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}^2} \delta \dot{x}^2 + \dots \right] dt \quad (7.13)$$

O halde, V 'nin birinci varyasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\delta V = \int_a^b \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt \quad (7.14)$$

Parantez içindeki ikinci terime kısmi integral formülü uygulanırsa,

$$\delta V = \int_a^b \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt + \left. \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_a^b \quad (7.15)$$

elde edilir. Ama $\delta x(a) = 0$ ve $\delta x(b) = 0$ olduğundan yukarıdaki denklemde son terim düşer. Denklemi rastgele δx için sağlayacak şart aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7.16)$$

Bu denklem Euler denklemdir. Euler denklemini fonksiyon fonksiyonlarının minimizasyonunda kullanılan temel denklemdir. Euler denkleminde elde edilen eğrilere *ekstremal*'ler denir. Euler denklemini $V(x)$ 'in minimum olması için gerek, ancak yeterli olmayan şarttır. Yani matematiksel olarak ikinci varyasyonun da incelenmesi gerekir. Ancak mühendislik sistemlerinde fiziksel ve geometric sebepler dolayısıyla buna gerek kalmaz.

Örnek 7.1:

Aşağıda verilen fonksiyon fonksiyonunun, verilen sınır şartları için minimum yapılması istenmektedir. Bunun sağlamak için Euler denkleminin ekstremallerini ve $x(t)$ fonksiyonunu bulun.

$$V(x) = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2) dt \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 1 \quad (7.17)$$

Bu problem için Euler denklemini aşağıdaki gibidir.

$$2x - \frac{d}{dt} 2\dot{x} = 0 \quad (7.18)$$

ya da,

$$\ddot{x} - x = 0 \quad (7.19)$$

Ekstremaller ise,

$$x(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-t} \quad (7.20)$$

olup, sınır şartları uygulanırsa,

$$K_1 + K_2 = 0 \quad K_1 e + K_2 e^{-1} = 1 \quad (7.21)$$

ya da, $K_1 e - K_1 e^{-1} = 1$ olduğundan aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$K_1 = \frac{1}{e - e^{-1}} \quad K_2 = -\frac{1}{e - e^{-1}} \quad (7.22)$$

$$x(t) = \frac{1}{e - e^{-1}} (e^t - e^{-t}) \quad (7.23)$$

Eğer V fonksiyon fonksiyonu n sayıda x_i ($i = 1, \dots, n$) fonksiyonunun fonksiyonuysa, V 'nin minimum olması için aşağıdaki n sayıda Euler denkleminin sağlanması gereklidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial \dot{x}_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial \dot{x}_n} &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Bu denklemler matris formunda kısaca aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)}{\partial \underline{\dot{x}}} = 0 \quad (7.25)$$

7.2 Değişken Uç Noktası Problemi

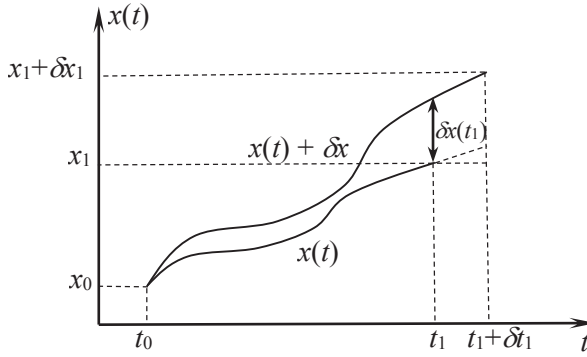
Kısım 7.1'de incelenen, sabit uç noktası probleminin daha genel hali, uç noktalarının birinde ya da her ikisinde x 'in değişken olmasıdır. Bu problem *değişken uç problemi* olarak anılır. Euler denkleminin sağlanması, bu durumun özel hali olan sabit uç problem için gerekli şart olduğundan, değişken uç problemi için de gerekli şarttır.

Önce $V(x)$ 'in sadece x 'gibi tek bir fonksiyonunun fonksiyonu olduğunu kabul edilsin ve aşağıdaki gibi tanımlanan bir fonksiyon fonksiyonu verilmiş olsun.

$$V(x) = \int_{t_0}^{t_1} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (7.26)$$

Burada $x(t)$ fonksiyonu Şekil 7.2’de görüldüğü gibi sol uca $x(t_0) = x_0$ olarak sabittir. Sağ uç ise değişken olarak kabul edilmiş, bu uca t yönünde δt_1 gibi, x yönünde ise δx_1 gibi varyasyon uygulanmıştır. Sağ uçtaki geometrinin incelemesinden aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$\delta x_1 = \delta x(t_1) + \dot{x}(t_1) \delta t_1 \quad (7.27)$$



Şekil 7.2

V 'nin toplam varyasyonu ΔV aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x + \delta x) - V(x) \\ &= \int_{t_0}^{t_1 + \delta t_1} L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] dt - \int_{t_0}^{t_1} L[x, \dot{x}, t] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] dt + \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] dt - \int_{t_0}^{t_1} L[x, \dot{x}, t] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] dt + \int_{t_0}^{t_1} \{L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] - L[x, \dot{x}, t]\} dt \end{aligned} \quad (7.28)$$

Bu denklemin birinci mertbe terimlerini alarak V 'nin birinci varyasyonu δV elde edilebilir. Denklemin birinci terimi için Şekil 7.2’deki geometriden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] dt \approx L(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_1} \delta t_1 \quad (7.29)$$

Buna ek olarak ikinci terim de Taylor serisi açılımı kullanılarak sadeleştirilirse, δV aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta V = L(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_1} \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt \quad (7.30)$$

İntegral altındaki ikinci terime kısmi integral formülü uygulanırsa, δV aşağıdaki hali alır.

$$\delta V = L(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_1} \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (7.31)$$

Yukarıdaki denklemden integralin altındaki terim Euler denklemi olduğundan sıfıra eşittir ve düşer. t_0 sabit olduğundan $\delta x(t_0) = 0$ 'dır. Ayrıca Şekil 7.2'de sağ uçtaki geometrik yapıdan dolayı $\delta x(t_1) = \delta x_1 - \dot{x}(t_1) \delta t_1$ yazılabilir. Bu hususlar dikkate alınarak birinci varyasyon δV sıfıra eşitlenirse, sonuç olarak sağdaki uç için aşağıdaki sınır şartı elde edilir.

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1} \delta x_1 + \left[L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t_1} \delta t_1 = 0 \quad (7.32)$$

Eğer sağ uç sabit, sol uç değişken ise, yukarıdakine benzer işlemlerle aşağıdaki sınır şartı bulunur.

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} \delta x_0 + \left[L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 = 0 \quad (7.33)$$

Sağ uç hem x hem de t yönünde değişkense, δx_1 ve δt_1 sıfırdan farklı rastgele değerlere sahip olacağından, denklem (7.32)'nin sağlanması için bu terimlerin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir ve aşağıdaki iki sınır şartı elde edilir.

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1} = 0 \quad (7.34)$$

$$\left[L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1} = 0 \quad (7.35)$$

Eğer t_1 sabit ($\delta t_1 = 0$) ise, denklem (7.32)'de ikinci terim düşer ve aşağıdaki tek sınır şartı elde edilir.

$$\left. \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1} = 0 \quad (7.36)$$

Eğer x_1 sabit ($\delta x_1 = 0$) ise, bu sefer de denklem (7.32)'de birinci terim düşer ve aşağıdaki tek sınır şartı elde edilir.

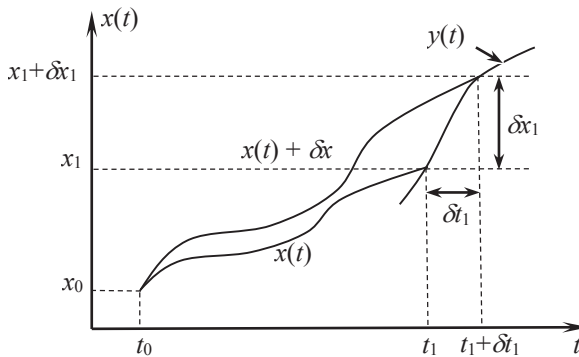
$$\left[L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1} = 0 \quad (7.37)$$

Bazı durumlarda sağ uçta δx_1 ve δt_1 birbirine bağımlı olabilir. Örneğin, sağ uç Şekil 7.3'deki gibi $y(t)$ gibi fonksiyonun üzerinde olabilir. Bu tür probleme *buluşma problemi* (*randevü problemi*) denir. Buna örnek olarak yörüngede bir uydunun buluşma gösterilebilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$x(t) \Big|_{t_1} = y(t) \Big|_{t_1} \quad \delta x_1 \cong \dot{y}(t_1) \delta t_1 \quad (7.38)$$

Yukarıdaki eşitlikler denklem (7.32) ile birlikte kullanılırsa *kesişme şartı* (*transversalite şartı*) denilen aşağıdaki sınır şartı elde edilir.

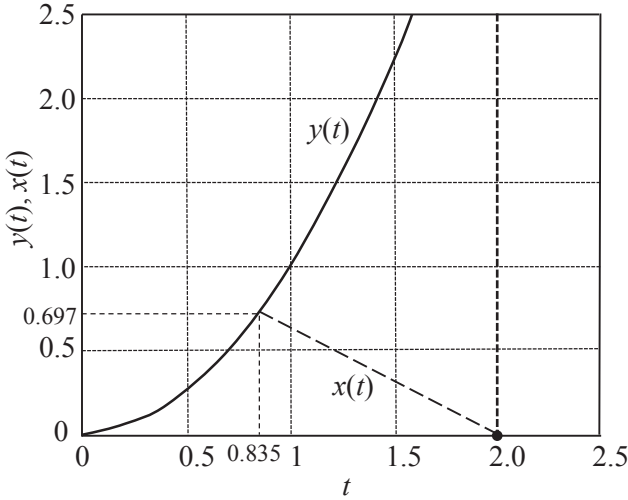
$$\left[L(x, \dot{x}, t) + (\dot{y} - \dot{x}) \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1} = 0 \quad (7.39)$$



Şekil 7.3

Örnek 7.2:

Şekil 7.4’de $y(t) = t^2$ eğrisi görülmektedir. Bu eğriyle $(x = 0, t = 2)$ noktası arasındaki en kısa yolu veren $x(t)$ fonksiyonunun bulunması istenmektedir.



Şekil 7.4

İki nokta arasındaki uzaklığı veren genel ifade bilindiği gibi aşağıdaki gibidir.

$$V(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \quad (7.40)$$

$L = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}$ alınarak Euler denklemi yazılırsa,

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7.41)$$

ya da,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7.42)$$

ya da,

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = (\text{sabit}) \quad (7.43)$$

ya da,

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = (\text{sabit}) \quad (7.44)$$

ya da,

$$\dot{x} = K_1 \text{ (sabit)} \quad (7.45)$$

bulunur. Bu denklemin integrali alınırsa Euler denkleminin ekstremalleri K_1 ve K_2 sabitleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x = K_1 t + K_2 \quad (7.46)$$

Şimdi sınır şartlarını uygulayarak bilinmeyen sabitler belirlenebilir.

- Sabit uç sınır şartı:

$$x(2) = 0 \text{ ya da } 0 = K_1 \cdot 2 + K_2 \text{ ya da,}$$

$$K_2 = -2K_1 \quad (7.47)$$

- Değişken uç sınır şartı:

$$y(t_1) = x(t_1) \quad (7.48)$$

ya da,

$$t_1^2 = K_1 t_1 + K_2 \quad (7.49)$$

Ayrıca denklem (7.39)'dan,

$$\begin{aligned} & \left[L(x, \dot{x}, t) + (\dot{y} - \dot{x}) \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1} \\ & = \sqrt{1 + K_1^2} + (2t_1 - K_1) \frac{K_1}{\sqrt{1 + K_1^2}} = 0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

ya da,

$$t_1 = -\frac{1}{2K_1} \quad (7.51)$$

Denklem (7.47)'den K_2 , denklem (7.51)'den de t_1 alınarak denklem (7.49)'da yerine koyulursa,

$$8K_1^3 + 2K_1^2 + 1 = 0 \quad (7.52)$$

elde edilir. Bu denklemin gerçek bir kökü vardır ve $K_1 = -0.599$ olarak bulunur.

Sonuç olarak $K_1 = -0.599$, $K_2 = 1.197$ ve $t_1 = 0.835$ elde edilir ve $x(t)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$x(t) = -0.599t + 1.197 \quad (7.53)$$

$x(t)$ fonksiyonu Şekil 7.4'de noktalı olarak gösterilmiştir.

7.3 Genel Optimum Kontrol Problemi

Bu bölümde şimdiye kadar integral formunda bir kriterin minimum yapılması incelenmişti. Bunun sağlanması için gerek şart Euler denkleminin sağlanmasıdır. Bu denklemin çözümü için integralin başlangıç ve son sınırlarında verilen şartlar kullanılmıştı. Bunun dışında herhangi bir sınır şartı yoktu. Ancak optimum kontrol probleminde integral formundaki bir performans kriteri minimum yapılırken, aynı zamanda sistemin durum denklemlerinin de sağlanması gerekir. Yani minimizasyon problemine ek sınırlayıcı şartlar olarak durum denklemlerinin uygulanması gereklidir. Bu kısımda önce sınırlayıcı şartların minimizasyon problemlerine nasıl uygulandığı anlatılacak, daha sonra da genel optimum kontrol problemi çözülecektir.

7.3.1 Sınırlayıcı Şartların Minimizasyon Problemlerine Uygulanması

Yöntemi basitçe anlatmak için x ve y değişkenlerinin,

$$f(x, y) = 4x^2 + xy + y^2 \quad (7.54)$$

gibi bir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonu,

$$x + y = 1 \quad (7.55)$$

sınırlayıcı şartla minimum yapacak x ve y değerlerinin belirlenmesi istenmektedir. Bu problem çözmek için aşağıdaki üç yöntemden birisi kullanılabilir.

i) Sınırlayıcı şartın varyasyon almadan önce uygulanması.

Sınırlayıcı şarttan y değişkeni $y = 1 - x$ olarak çözümlenip, denklem (7.54)'de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} f &= 4x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 \\ &= 4x^2 + x - x^2 + 1 - 2x + x^2 \\ &= 4x^2 - x + 1 \end{aligned} \quad (7.56)$$

elde edilir. f 'nin varyasyonu alınıp sifira eşitlenirse, f 'yi minimum yapan x 'in ve y 'nin değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta f = 8x\delta x - \delta x = (8x - 1)\delta x = 0 \quad (7.57)$$

$$8x - 1 = 0 \quad (7.58)$$

$$x = \frac{1}{8} \quad y = 1 - x = \frac{7}{8} \quad (7.59)$$

ii) Sınırlayıcı şartın varyasyon alındıktan sonra uygulanması.

Denklem (7.54)'ün ve denklem (7.55)'in varyasyonları alınırsa, sonuç aşağıdaki aşamalarla bulunur

$$\delta f = 8x\delta x + x\delta y + y\delta x + 2y\delta y \quad (7.60)$$

$$\delta x + \delta y = 0 \quad (7.61)$$

ya da,

$$\begin{aligned} \delta f &= 8x\delta x - x\delta x + (1-x)\delta x - 2(1-x)\delta x \\ &= (8x - 1)\delta x \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$8x - 1 = 0 \quad (7.63)$$

$$x = \frac{1}{8} \quad y = 1 - x = \frac{7}{8} \quad (7.64)$$

iii) Lagrange çarpanları yöntemi.

Lagrange çarpanları yöntemi dolaylı bir yöntemdir. Bu yöntemde göre f gibi bir fonksiyonun $\phi_1 = 0, \dots, \phi_k = 0$ gibi bir sınırlayıcı şartlara tabi olarak minimum yapılması, $f' = f + \lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_k\phi_k$ ifadesinin herhangi bir sınır şartı olmadan minimum yapılmasıyla aynıdır. Burada

λ_i ($i=1, \dots, k$) Lagrange çarpanları olup, minimizasyon işlemi sırasında bunların her biri bağımsız bir değişken gibi işlem görür.

İncelenen örnekte $f(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$ fonksiyonunun $x + y = 1$ ya da $\phi(x, y) = x + y - 1 = 0$ sınır şartı altında minimum yapılması istenmektedir. Bu ise,

$$\begin{aligned} f'(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda\phi(x, y) \\ &= 4x^2 + xy + y^2 + \lambda(x + y - 1) \end{aligned} \quad (7.65)$$

fonksiyonunu sınırlayıcı bir şart olmadan minimum yapmakla aynıdır. $f'(x, y, \lambda)$ 'nin varyasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \delta f' &= 8x\delta x + x\delta y + y\delta x + 2y\delta y + \lambda\delta x + \lambda\delta y + (x + y - 1)\delta\lambda \\ &= (8x + y + \lambda)\delta x + (x + 2y + \lambda)\delta y + (x + y - 1)\delta\lambda = 0 \end{aligned} \quad (7.66)$$

Yukarıdaki denklemin rastgele δx , δy ve $\delta\lambda$ için sağlanması ancak bu terimlerin katsayılarının sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Böylece x , y ve λ 'nin çözülebileceği aşağıdaki üç denklem elde edilir. Görüldüğü gibi bu denklemlerden sonuncusu sınırlayıcı ifade ile aynıdır. Bu durum Lagrange çarpanları yönteminin bir özelliği olup, elde edilen denklemlerden birisi daima sınırlayıcı ifade ile aynıdır.

$$8x + y + \lambda = 0 \quad (7.67)$$

$$x + 2y + \lambda = 0 \quad (7.68)$$

$$x + y - 1 = 0 \quad (7.69)$$

Denklem (7.67) ve denklem (7.68)'den λ yok edilirse,

$$8x + y - x - 2y = 7x - y = 0 \quad (7.70)$$

elde edilir. Denklem (7.69) ve denklem (7.70)'den $f(x, y)$ 'yi minimum yapan x ve y değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$x = \frac{1}{8} \quad y = \frac{7}{8} \quad (7.71)$$

7.3.2 Temel Optimum Kontrol Problemi ve Pontryagin Fonksiyonu

Bu bölümde,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (7.72)$$

durum denklemleriyle tanımlanan n 'inci merteye bir sistemin,

$$P.K. = \int_{t_i}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt + S[\underline{x}(t_f), t_f] \quad (7.73)$$

gibi bir performans kriterini minimum yapacak biçimde optimum kontrolü incelenecektir. \underline{x} , durum değişkenleri vektörü; \underline{u} , kontrol girişleri vektörüdür. $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$ 'nin elemanları lineer olmayabilir. $L(\underline{x}, \underline{u}, t)$ terimi de lineer olmayabilir, ancak anlamlı bir performans kriteri olması için pozitif yarı-definit olması gereklidir. $S[\underline{x}(t_f), t_f]$, bir son durum ceza terimidir. Bu teriminin \underline{x} 'e göre birinci ve ikinci türevleri süreklidir. Bu terim istenirse sıfır alınabilir. Denklem (7.73)'de L ve S terimlerinin her ikisi de mevcut olabileceği gibi, bunlardan herhangi birisi olmayabilir.

Başlangıç zamanı ve durumu sabittir. Yani $\underline{x}(t_i)$ ve t_i verilmiştir. Buna karşılık t_f sabit veya değişken olabilir. $\underline{x}(t_f)$ sabit veya değişken olabilir veya $g_k[\underline{x}(t_f), t_f] = 0$ ($k \leq n$) biçiminde k sayıda sınırlayıcı ifadeye tabi olabilir. Amaç, sistemi verilen bir başlangıç durumu $\underline{x}(t_i)$ 'den, verilen son durumdaki sınır şartlarına götürürken $P.K.$ 'yi minimum yapacak olan kontrol girişi \underline{u} 'yu bulmaktır.

Performans kriterinden $S[\underline{x}(t_i), t_i]$ gibi sabit bir terim çıkarmak, optimizasyon sonuçları açısından bir fark yaratmayacağından, performans kriteri aşağıdaki hale dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} P.K. &= \int_{t_i}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt + S[\underline{x}(t_f), t_f] - S[\underline{x}(t_i), t_i] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt + S[\underline{x}(t), t]_{t_i}^{t_f} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{d}{dt} S[\underline{x}(t), t] \right\} dt \end{aligned} \quad (7.74)$$

ya da,

$$P.K. = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} \right\} dt \quad (7.75)$$

Denklem (7.72) ile verilen durum denklemleri, minimizasyon sırasında sağlanması gereken sınırlayıcı şart olup, Lagrange çarpanları yöntemiyle probleme dahil edilebilir. Ancak Kısım 7.3.1'deki durumdan farklı olarak şimdi bir fonksiyon fonksiyonu minimum yapılmaktadır. Bu durumda o bölümde bir değişken olarak kabul edilen Lagrange çarpanı, burada $\underline{\lambda}(t)$ gibi Lagrange fonksiyonları olarak kabul edilecektir. Sınırlayıcı şart olan denklem (7.72),

$$\phi(\underline{x}, \underline{u}, t) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}} = 0 \quad (7.76)$$

şeklinde ifade edilirse, denklem (7.75)'de verilen $P.K.$ 'ni sınırlayıcı şart altında minimum yapmakla, aşağıdaki kriteri sınırlayıcı şart olmaksızın minimum yapmak aynı olur.

$$P.K. = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} \right. \\ \left. + \underline{\lambda}^T [\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \right\} dt \quad (7.77)$$

Eğer denklem (7.77)'deki integralin argümanı için,

$$L'(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \right]^T \dot{\underline{x}} \\ + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \quad (7.78)$$

tanımı yapılırsa, $L'(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ için yazılacak Euler denklemlerinin sağlanması $P.K.$ 'nin minimum yapılması için gerek şart olur. Eğer sistem n 'inci merteye ve kontrol girişi sayısı r ise, \underline{x} ve $\underline{\lambda}$ 'nın herbirinin n sayıda elemanı, \underline{u} 'nun ise r sayıda elemanı olacağından $L'(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ 'nin argümanında $2n + r$ sayıda fonksiyon vardır. Yani, $2n + r$ sayıda Euler denklemi yazılmalıdır. Aşağıda \underline{x} , \underline{u} ve $\underline{\lambda}$ 'nın elemanları için Euler denklemleri gruplar halinde vektöryel olarak çıkarılacaktır.

i) \underline{x} için Euler denklemleri:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \right\} \\ & - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{x}}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} \right. \\ & \left. + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.79)$$

ya da,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) \right] + \frac{\partial^2 S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}^2} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial^2 S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x} \partial t} \\ & - \frac{\partial^2 S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}^2} \dot{\underline{x}} - \frac{\partial^2 S[\underline{x}, t]}{\partial t \partial \underline{x}} + \dot{\underline{\lambda}} = 0 \end{aligned} \quad (7.80)$$

ya da,

$$\dot{\underline{\lambda}} = - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) \right] \quad (7.81)$$

ii) \underline{u} için Euler denklemleri:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \right\} \\ & - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{u}}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}}] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

ya da türevlere katkıda bulunmayan terimler atılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \left[L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}^T (f(\underline{x}, \underline{u}, t)) \right] = 0 \quad (7.83)$$

iii) $\underline{\lambda}$ için Euler denklemleri:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\lambda}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{\dot{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \underline{\dot{x}}] \right\} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \underline{\dot{\lambda}}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{\dot{x}} + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \underline{\dot{x}}] \right\} = 0 \quad (7.84)$$

ya da,

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\lambda}} [L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}^T f(\underline{x}, \underline{u}, t)] - \underline{\dot{x}} = 0 \quad (7.85)$$

ya da,

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \underline{\dot{x}} = 0 \quad (7.86)$$

Bu son denklem Lagrange çarpanları yönteminin özelliği gereği sınırlayıcı ifade olan durum denklemleriyle aynıdır.

Yukarıdaki sonuçları daha öz bir şekilde ifade etmek için,

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (7.87)$$

tanımını yapılınsın. Bu denklemle tanımlanan $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ Pontryagin fonksiyonu olarak anılır. Elde edilen Euler denklemlerinin tamamı, yani denklemler (7.81), (7.83) ve (7.85), Pontryagin fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underline{\dot{\lambda}} = - \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)}{\partial \underline{x}} \quad (7.88)$$

$$0 = \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)}{\partial \underline{u}} \quad (7.89)$$

$$\underline{\dot{x}} = \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (7.90)$$

Denklem (7.90) durum denklemleridir. Denklem (7.88) ise *yardımcı durum denklemleri* olarak adlandırılır.

Bu denklemlerin çözümü için izlenen genel yöntem aşağıdaki gibidir.

- 1) Önce denklem (7.89)'dan kontrol girişi \underline{u} , \underline{x} ve $\underline{\lambda}$ cinsinden çözülür. Bu çözüm $\underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)$ olsun.
- 2) Elde edilen $\underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)$, denklem (7.88) ve denklem (7.90)'da yerine koyularak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\dot{\underline{\lambda}} = - \frac{\partial H[\underline{x}, \underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t), \underline{\lambda}, t]}{\partial \underline{x}} \quad (7.91)$$

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t), t)}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{f}[\underline{x}, \underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t), t] \quad (7.92)$$

3) Verilmiş olan sınır şartları uygulanarak, denklem (7.91) ve denklem (7.92)'den $\underline{x}(t)$ ve $\underline{\lambda}(t)$ çözülür. Bu denklemlerin çözümünde kullanılan sınır şartları aşağıdaki gibidir.

- a) Başlangıç sınır şartı $\underline{x}(t_i)$ ve t_i verilmiştir.
- b) Kontrol bitişindeki sınır şartları için ise aşağıdaki seçeneklerden birisi geçerlidir.
 - i) Bitiş zamanı ve bitiş durumu verilmiş:
 $t_f = \text{sabit}$, $\underline{x}(t_f) = \underline{x}_f$ (sabit)
 - ii) Bitiş zamanı ve bitiş durumu serbest:
Bu durumda denklem (7.32) ile verilen serbest uç sınır şartı uygulanırsa, genelleştirilmiş sınır şartı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left\{ \left[\frac{\partial L'(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)}{\partial \dot{\underline{x}}} \right]^T \delta \underline{x} + \left[L'(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) - \frac{\partial L'(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)}{\partial \dot{\underline{x}}} \dot{\underline{x}} \right] \delta t \right\} \Bigg|_{t_f} = 0 \quad (7.93)$$

ya da,

$$\left\{ \left[\frac{\partial S(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} - \underline{\lambda} \right]^T \delta \underline{x} + \left[L(\underline{x}, \underline{u}^o, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} + \underline{\lambda}^T [f(\underline{x}, \underline{u}^o, t)] \right] \delta t \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (7.94)$$

ya da,

$$\left\{ \left[\frac{\partial S(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} - \underline{\lambda} \right]^T \delta \underline{x} + \left[H^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} \right] \delta t \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (7.95)$$

Yukarıdaki ifadede t_f sabitse katsayısı düşer. $\delta \underline{x}$ 'in elemanlarından sabit olanlar varsa, onların katsayıları da düşer.

Eğer $\underline{x}(t_f) = \underline{y}(t_f)$ gibi bir sınır şartı verilmişse, yani bir buluşma (randevü) problemi çözülyorsa, denklem (7.39)'un vektör hali kesişme sınır şartı olarak kullanılır. Bu durumda $\delta \underline{x}(t_f) = \dot{\underline{y}}(t_f) \delta t$ olacağından, denklem (7.95)'den kesişme şartı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left\{ \left[\frac{\partial S(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} - \underline{\lambda} \right]^T \dot{\underline{y}}(t) + \left[H^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) + \frac{\partial S[\underline{x}, t]}{\partial t} \right] \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (7.96)$$

- 4) Elde edilen $\underline{x}(t)$ ve $\underline{\lambda}(t)$, $\underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)$ ifadesinde yerine koyularak optimum kontrol aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{u}^o(t) = \underline{u}^o[\underline{x}(t), \underline{\lambda}(t), t] \quad (7.97)$$

Yukarıdaki yöntemin ikinci ve üçüncü aşamasında, $2n$ sayıdaki diferansiyel denklemden $\underline{x}(t)$ ve $\underline{\lambda}(t)$ 'nin elde edilmesi, diferansiyel denklem çözümleri arasında en zor problemlerden birisidir. Zira sınır şartlarının yarısı başlangıç zamanı t_i 'de verilmişken, diğer yarısı bitiş zamanı t_f 'de verilmiştir. Bu tür problemlere *iki uçlu sınır değer problemi* denir. Bu tür problemlerde bilgisayarla çözüme çok elverişli olan ileri integrasyon yöntemi kullanılamaz. Çözümün bir döngü içinde iterasyonla bulunması gerekir. Çözümün çok zahmetli olmasına karşın, sonuçta elde edilen sadece açık çevrim kontroldür. Başlangıç şartları değiştiğinde ya da bozucular

dolayısıyla sistemin durum uzayında izlediği optimum yörüngede bir sapma olduğunda çözümün tekrar edilmesi gerekir. Bu sebeplerden dolayı, çok basit problemler dışında genel optimum kontrol algoritmasının uygulamalarda kullanılması pek pratik değildir.

Buraya kadarki incelemede kontrol girişi \underline{u} üzerine herhangi bir sınırlama koyulmamıştır. Ama uygulanabilecek kontrol girişleri genellikle $\underline{u} \in U$ gibi bir bölgeyle sınırlıdır. Pontryagin, denklem (7.89)'a yeni bir yorum getirmiş ve bundan dolayı $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ fonksiyonuna adı verilmiştir. Şöyle ki, \underline{u} 'nun sınırlı olmadığı durumda denklem (7.89), $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ 'yi minimum yapan \underline{u} 'yu vermektedir. Pontryagin, kontrol girişi $\underline{u} \in U$ şeklinde bir bölge ile sınırlı olduğu takdirde de, bu bölge içinde $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t)$ 'yi minimum yapan \underline{u} 'nun optimum \underline{u} olduğunu göstermiştir. Bu durumda, denklem (7.91) ve denklem (7.92)'de geçen $H(\underline{x}, \underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t), t)$ terimi, aşağıdaki gibi alınmalıdır.

$$H(\underline{x}, \underline{u}^o(\underline{x}, \underline{\lambda}, t), t) = \min_{\underline{u} \in U} H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) \quad (7.98)$$

Pontryagin ve arkadaşları tarafından bulunan aşağıdaki gerek şartlar da bazı problemlerin çözümünde çok yararlıdır [7.2, 7.7]

- a) Eğer son zaman t_f sabitse ve Pontryagin fonksiyonu zamanın doğrudan fonksiyonu değilse, optimum yörünge boyunca Pontryagin fonksiyonu sabittir. Yani,

$$H[\underline{x}^o(t), \underline{u}^o(t), \underline{\lambda}^o(t)] = c \text{ (sabit)} \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (7.99)$$

- b) Eğer son zaman t_f serbestse ve Pontryagin fonksiyonu zamanın doğrudan fonksiyonu değilse, optimum yörünge boyunca Pontryagin fonksiyonu sıfırdır. Yani,

$$H[\underline{x}^o(t), \underline{u}^o(t), \underline{\lambda}^o(t)] = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (7.100)$$

Bazı durumlarda, problem tanımı yukarıda incelenen standart yapıda olmamasına karşın, bazı ara işlemlerle standart hale dönüştürülebilir. Bunlar hakkında, belirtilen referanslarda daha ayrıntılı bilgi verilmiştir. Burada sadece kısaca değinilecektir.

- a) *Performans kriterinde durum değişkenlerinin türevlerinin yer alması:*

Performans kriterinin argümanında durum değişkenlerinin türevleri varsa, örneğin \dot{x}_k gibi bir terim geçiyorsa, $x_{n+1} = \dot{x}_k$

gibi ek bir durum değışkeni tanımlanarak optimum kontrol işlemleri yürütülür [7.8].

b) *Eşitsizlik olarak ifade edilen sınırlamalar olması:*

Eğer, $a_i \leq x_i \leq b_i$ gibi bir sınırlama verilmişse, bunun yerine,

$$(\dot{x}_i - a_i)(b_i - \dot{x}_i) - y_i^2 = 0 \quad (7.101)$$

gibi eşitlik olarak tanımlanan bir sınırlayıcı ifade kullanılır. Burada $y_i = 0$ ek olarak tanımlanan bir durum değışkenidir [7.8, 7.9].

c) *İzoperimetrik Kısıtlama:*

İzoperimetrik kısıtlama adını, “Çevresi sabit uzunlukta olan düzlemsel bir yüzeyin alanının maksimum olması için şekli nasıl olmalıdır?” probleminden alır. Bu kısıt genel haliyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_{t_i}^{t_f} g(\underline{x}, \underline{u}, t) dt = A \text{ (Sabit)} \quad (7.102)$$

Bu durumda ek bir durum değışkeni,

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_i}^t g(\underline{x}, \underline{u}, t') dt' \quad (7.103)$$

olarak ve ek bir durum denklemi,

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (7.104)$$

olarak tanımlanır ve aşağıdaki şartlar uygulanır [7.5, 7.8, 7.9].

$$x_{n+1}(t_i) = 0 \quad x_{n+1}(t_f) = A \quad (7.105)$$

Bu tür sınırlamalara, yakıt ve enerjinin sınırlı olduğu minimum-yakıt ve minimum-enerji problemlerinde sıklıkla karşılaşılır. (Bakınız Bölüm 8, Örnek 7 ve Örnek 8.) Bu durumlarda kısıt ifadeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir.

$$\int_{t_i}^{t_f} |u_i| dt = A \text{ (Sabit)} \quad (7.106)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} u_i^2 dt = A \text{ (Sabit)} \quad (7.107)$$

Örnek 7.3:

Bir uçak gemisinde uçaklara ilk hareket bir itki sistemiyle verilmektedir. Uçağın kütlesi m 'dir. İtki sistemi uçağa maksimum F_m büyüklüğünde bir kuvvet uygulayabilmektedir. Uçağın sıfır hızdan bir V_f hızına en kısa sürede erişmesini sağlayacak kuvveti ve bunun için gereken pist uzunluğunu bulun.

Bu problemde uçağın hızı durum değişkeni olarak, uçağa uygulanan kuvvet de kontrol girişi olarak alınırsa, sistemin durum denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{x} = \frac{1}{m} u \quad (7.108)$$

Kontrol sırasında minimum yapılması istenen performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{t_f} 1 \cdot dt \quad (7.109)$$

şeklinde dir. Sınır şartları ve u için sınırlayıcı ifade aşağıdaki gibidir.

$$x(0) = 0 \quad x(t_f) = V_f \quad t_f - \text{Serbest} \quad (7.110)$$

$$0 \leq u \leq F_m \quad (7.111)$$

Bu problemde $L = 1$ olduğundan Pontryagin fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = 1 + \lambda \frac{u}{m} \quad (7.112)$$

Kontrol girişi sınırlı olduğuna göre, H 'yi minimum yapan u değeri λ 'nın işaretine bağlı olarak aşağıdaki gibidir.

$$\lambda < 0 \text{ ise } u_o = F_m \quad (7.113)$$

$$\lambda > 0 \text{ ise } u_o = 0$$

u_o için yardımcı durum ve durum denklemleri (7.91) ve (7.92)'den yazılırsa,

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{ya da} \quad \lambda = K \quad (\text{sabit}) \quad (7.114)$$

ve

$$\dot{x} = \frac{1}{m} u_o \quad (7.115)$$

elde edilir. Bu denklem incelendiğinde u_o 'un sıfır olamayacağı görülür. Zira bu değer x 'in (hızın) değişmesine sebep olmaz. o halde $u_o = F_m$ olmalıdır.

Denklem (7.115)'in integrali alınırsa,

$$x(t) = \frac{F_m}{m} t + C \quad (7.116)$$

Başlangıç sınır şartından C aşağıdaki gibi bulunur.

$$x(0) = 0 \quad \text{ya da} \quad C = 0 \quad (7.117)$$

Serbest uç sınır şartı, denklem (7.95)'de $S = 0$ için δ' 'nin katsayısını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi yazılır.

$$\left[H^o \right]_{t_f} = \left[1 + \lambda \frac{F_m}{m} \right]_{t_f} = 0 \quad (7.118)$$

ya da,

$$\lambda(t_f) = -\frac{m}{F_m} = \lambda(t) \quad (7.119)$$

Diğer yandan, $x(t_f) = V_f$ olduğuna göre, t_f aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x(t_f) = \frac{F_m}{m} t_f = V_f \quad (7.120)$$

ya da,

$$t_f = \frac{mV_f}{F_m} \quad (7.121)$$

Pistin boyu ℓ ise, $x(t)$ hızının integralini alarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\ell = \int_0^{t_f} \frac{F_m}{m} t dt = \frac{F_m}{2m} t_f^2 = \frac{1}{2} \frac{mV_f^2}{F_m} \quad (7.122)$$

Örnek 7.4:

Durum denklemleri aşağıda verilen birinci merteye bir sistem olsun.

$$\dot{x} = -2x + u \quad (7.123)$$

Başlangıç anında $x(0) = 10$ olsun. Bitiş zamanı $t_f = 1$, bitiş durumu $x(1)$ serbest, kontrol sırasında minimum yapılmak istenen performans kriteri aşağıdaki gibi olsun.

$$P.K. = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt + [x^2(t)]_{t=1} \quad (7.124)$$

Bu problem için Pontryagin durum fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$H(x, u, \lambda) = x^2 + u^2 + \lambda(-2x + u) \quad (7.125)$$

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda)}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \quad (7.126)$$

ya da,

$$u^o = -\frac{\lambda}{2} \quad (7.127)$$

ve

$$H^o = x^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda(-2x - \frac{\lambda}{2}) = x^2 - \frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda x \quad (7.128)$$

olduğundan, optimum kontrol için yardımcı durum ve durum denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H^o}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - \frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda x) = -2x + 2\lambda \quad (7.129)$$

$$\dot{x} = -2x - \frac{\lambda}{2} \quad (7.130)$$

Denklem (7.129)'dan λ alınarak denklem (7.128)'de kullanılırsa x cinsinden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\ddot{x} - 5x = 0 \quad (7.131)$$

ya da,

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t} \quad (7.132)$$

ve

$$\lambda(t) = -8.47C_1 e^{\sqrt{5}t} + 0.47C_2 e^{-\sqrt{5}t} \quad (7.133)$$

Başlangıç sınır şartı:

$$x(0) = 10 \quad \text{ya da} \quad C_1 + C_2 = 10 \quad (7.134)$$

Serbest uç sınır şartı (t_f sabit, x serbest):

$$\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} - \lambda \right]_{t=1} = [2x - \lambda]_{t=1} = 0 \quad (7.135)$$

ya da,

$$10.47e^{\sqrt{5}} C_1 + 1.53e^{-\sqrt{5}} C_2 = 0 \quad (7.136)$$

Denklem (7.134) ve denklem (7.136)'dan $C_1 = 0.0856$ ve $C_2 = 9.914$ olarak bulunur. Bu değerler denklem (7.132)'de yerine koyulursa,

$$\lambda(t) = -0.725e^{\sqrt{5}t} + 4.613e^{-\sqrt{5}t} \quad (7.137)$$

olarak bulunur. Optimum kontrol ise denklem (7.127)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u^o = -\frac{\lambda}{2} = 0.362e^{\sqrt{5}t} - 2.306e^{-\sqrt{5}t} \quad (7.138)$$

Örnek 7.5:

Durum denklemleri aşağıda verilen ikinci mertebe bir sistem olsun.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u\end{aligned}\quad (7.139)$$

Sistem $t = 0$ 'da $\underline{x} = [1 \quad 1]^T$ başlangıç durumundadır. Bitiş zamanı t_f serbest, bitiş durumu $\underline{x}(t_f) = [0 \quad 0]^T$ olarak verilmiştir. Aşağıdaki performans kriterini minimum yapacak optimum kontrolün bulunması istenmektedir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \quad (7.140)$$

Bu problem için Pontryagin durum fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-2x_2 + u) \quad (7.141)$$

$$\frac{\partial H(\underline{x}, u, \underline{\lambda})}{\partial u} = 2u + \lambda_2 = 0 \quad (7.142)$$

ya da,

$$u^o = -\frac{\lambda_2}{2} \quad (7.143)$$

ve

$$H^o = x_1^2 + x_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{4} + \lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 x_2 \quad (7.144)$$

olduğundan, optimum kontrol için yardımcı durum ve durum denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H^o}{\partial x_1} = -2x_1 \quad (7.145)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H^o}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \quad (7.146)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H^o}{\partial \lambda_1} = x_2 \quad (7.147)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H^o}{\partial \lambda_2} = -2x_2 - \frac{\lambda_2}{2} \quad (7.148)$$

Epeyce bir ara işlemden sonra integrasyon sabitleri cinsinden bu denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_1(t) = \frac{C_1}{2.189} e^{2.189t} - \frac{C_2}{2.189} e^{-2.189t} + \frac{C_3}{0.457} e^{0.457t} - \frac{C_4}{0.457} e^{-0.457t} \quad (7.149)$$

$$x_2(t) = C_1 e^{2.189t} + C_2 e^{-2.189t} + C_3 e^{0.457t} + C_4 e^{-0.457t} \quad (7.150)$$

$$\lambda_1(t) = -C_1 \frac{2}{2.189^2} e^{2.189t} - C_2 \frac{2}{2.189^2} e^{-2.189t} - C_3 \frac{2}{0.457^2} e^{0.457t} - C_4 \frac{2}{0.457^2} e^{-0.457t} \quad (7.151)$$

$$\lambda_2(t) = -C_1 8.378 e^{2.189t} + C_2 0.378 e^{-2.189t} - C_3 4.914 e^{0.457t} - C_4 3.086 e^{-0.457t} \quad (7.152)$$

Bu denklemlerdeki bilinmeyen katsayılar ve t_f aşağıdaki sınır şartları uygulanarak çözülür.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 & x_2(0) &= 1 & x_1(t_f) &= 0 \\ x_2(t_f) &= 0 & H^0(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (7.153)$$

$H^0(t_f) = 0$ sınır şartı denklem (7.144)'e uygulanırsa aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\lambda_2(t_f) = 0 \quad (7.154)$$

Sınır şartları denklemler (7.149) - (7.152)'ye uygulanırsa,

$$\frac{C_1}{2.189} - \frac{C_2}{2.189} + \frac{C_3}{0.457} - \frac{C_4}{0.457} = 1 \quad (7.155)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \quad (7.156)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{2.189} e^{2.189t_f} - \frac{C_2}{2.189} e^{-2.189t_f} \\ & + \frac{C_3}{0.457} e^{0.457t_f} - \frac{C_4}{0.457} e^{-0.457t_f} = 0 \end{aligned} \quad (7.157)$$

$$\begin{aligned} & C_1 e^{2.189t_f} + C_2 e^{-2.189t_f} \\ & + C_3 e^{0.457t_f} + C_4 e^{-0.457t_f} = 0 \end{aligned} \quad (7.158)$$

$$\begin{aligned} & -C_1 8.378 e^{2.189t_f} + C_2 0.378 e^{-2.189t_f} \\ & - C_3 4.914 e^{0.457t_f} - C_4 3.086 e^{-0.457t_f} = 0 \end{aligned} \quad (7.159)$$

denklemleri elde edilir. Zahmetli olmakla birlikte bu denklemlerden t_f ve C_i ($i=1, 2, 3, 4$) çözümlenerek $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\lambda_1(t)$ ve $\lambda_2(t)$ bulunur. Daha sonra optimum kontrol $u^o = -\lambda_2(t)/2$ olarak elde edilir.

Bu son örneğin gösterdiği gibi, oldukça basit görünümlü bir problem için dahi genel optimum probleminin çözümü oldukça çetrefilli bir hal alabilir. Bu örnekte alınan sistemin lineer ve sadece ikinci mertebe olduğu düşünülürse, yüksek mertebeli ve nonlinear bir sistem için analitik veya nümerik bir çözüme ulaşmanın zorluğu anlaşılır.

KAYNAKLAR

- [7.1] Athans, M., Falb, P.L., *Optimal Control*, ISBN-13: 978-0486453286, McGraw-Hill, New York, 2006.
- [7.2] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, ISBN-13: 978-0486434841, Dover, Mineola, New York, 2004.
- [7.3] Pinch, E.R., *Optimal Control and the Calculus of Variations*, ISBN-13: 978-0198514893, Oxford University Press, U.S.A., 1995.
- [7.4] Bryson, A.E., Ho, Y., *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, Blaisdell, Watham, Massachusetts, 1975.

- [7.5] Schultz, D.G., Melsa, J.L., *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [7.6] Hsu, J.C., Meyer, A.U., *Modern Control Principles and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [7.7] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [7.8] Tou, J.T., *Modern Control Theory*, McGraw-Hill, 1964.
- [7.9] Pierre, D.A., *Optimization Theory with Applications*, SBN: 471 68945 9, John Wiley, 1969.

PROBLEMLER

- 7.1 Eğer $L(x, \dot{x}, t)$, t 'nin doğrudan fonksiyonu değilse, Euler denkleminin birinci integralinin aşağıdaki hali aldığını gösterin.

$$L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = \text{sabit}$$

- 7.2 $x(0) = 0$ ve $x(t_1) = t_1 - 2$ sınır şartlarına tabi olarak,

$$V(x) = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{4x} dt$$

fonksiyon fonksiyonunu minimum yapan $x(t)$ fonksiyonunu bulun.

- 7.3 $x_1(0) = 0$, $x_1(3\pi/2) = -1$, $x_2(0) = 0$ ve $x_2(3\pi/2) = -1$ şartlarına tabi olarak,

$$V(\underline{x}) = \int_0^{3\pi/2} (\dot{x}_1^2 + 4\dot{x}_2^2 + 4x_1x_2) dt$$

fonksiyon fonksiyonunu minimum yapacak $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ fonksiyonlarını bulun.

- 7.4 $x(0) = 0$, $x(4) = \text{Serbest}$ şartlarına tabi olarak,

$$V(\underline{x}) = \int_0^4 (\dot{x}^2 + x) dt$$

fonksiyon fonksiyonunu, minimum yapacak $x(t)$ fonksiyonunu bulun.

7.5 $x(0) = 1$, $x(t_f) = 5$ ve t_f : *Serbest* sınır şartları altında,

$$V(x) = \int_0^{t_f} (2t\dot{x} + 4\dot{x}^2) dt$$

fonksiyon fonksiyonunu minimum yapan $x(t)$ fonksiyonunu bulun.

7.6 Durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

olarak verilen sistemi, $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ilk durumundan $\underline{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son

durumuna getirirken,

$$P.K. = \int_0^2 u^2 dt$$

performans kriterini minimum yapacak optimum kontrol $u(t)$ 'yi bulun.

7.7 Durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{u}$$

olarak verilen sistemi, $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ilk durumundan $\underline{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son

durumuna getirirken,

$$P.K. = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u_1^2 + u_2^2 \right) dt$$

performans kriterini minimum yapacak optimum kontrol $u(t)$ 'yi bulun.

7.8 Durum denklemi,

$$\dot{x} = -x + u$$

olan, ilk durumu $x(0) = 1$ ve son durumu $x(1) = 0$ olarak verilen sistem için,

$$P.K. = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2}u^2) dt$$

performans kriterini minimum yapacak optimum kontrol $u(t)$ 'yi bulun.

7.9 Bir sistemin durum denklemleri ve kontrol girişi sınırlaması aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -7x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 6x_1 + u \end{aligned} \quad ; \quad |u(t)| \leq 2$$

Bu sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$ ilk durumdan, t_f gibi bir son zamandaki

$\underline{x}_f(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ durumuna en kısa zamanda getirecek kontrolü ve kontrolün bitiş zamanını bulun.

7.10 Dördüncü mertebeden bir sistemin kontrolü için aşağıdaki gibi bir performans kriteri kullanılmaktadır.

$$P.K. = \int_0^T (x_1^2 + x_3^2 + u^2) dt + 2x_2(T) - 3x_4(T)$$

Bu sistem için aşağıdaki sınır şartları verilmiştir:

$$x_1(T) = x_2(T) ; \quad x_3(T) = 0 ; \quad x_4(T) \text{ ve } T \text{ verilmemiş.}$$

Eksik olan uç sınır şartlarını bulun.

7.11 Davranışı,

$$\dot{x} = -2x + u$$

denklemleriyle belirlenen ve $x(0) = 10$ olan sistem için,

$$P.K. = \int_0^1 \left(\rho x^2 + \frac{1}{2} u^2 \right) dt$$

performans kriterini minimum yapacak kontrolü bulun. Burada ρ pozitif ve değeri bilinen bir ağırlık katsayısıdır.

7.12 Durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

ve ilk durumu $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ olan sistem için,

$$P.K. = \int_0^1 (4x_1^2 + u^2) dt$$

performans kriterlerini minimum yapacak optimum kontrolü bulmak için gereken diferansiyel denklemleri ve sınır şartlarını yazın. (Denklemleri çözmeyin.)

7.13 Durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \quad |u| \leq 5$$

olarak verilen ve ilk durumu $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ve son durumu $x(t_f) = 0$

olan sistemi minimum zaman kriterine göre kontrol etmek için kontrol girişini ve kontrol süresini bulun. (MATLAB'den yararlanın.)

7.14 Durum denklemi,

$$\dot{x} = -2x + u$$

ve başlangıç şartı $x(0) = 0$ olan sistem aşağıdaki gibi bir performans kriterini minimum yaparak kontrol edilmek isteniyor. Burada ρ sabit bir katsayıdır.

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt - \rho x(1)$$

Bu performans kriteriyle ne yapılmak istendiğini yorumlayın. Optimum kontrol $u(t)$ 'yi bulun.

7.15 Durum denklemleri,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

olan sistem için başlangıç şartları $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak verilmiştir.

Aşağıdaki performans kriterini minimum yapacak optimum kontrolü bulmak için gereken diferansiyel denklemleri ve sınır şartlarını yazın. (Denklemleri çözmeyin.)

$$P.K. = \int_0^{t_f} (x_2^2 + u^2) dt$$

7.16 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ilk durumundan $\underline{x}(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son durumuna

aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak getirecek kontrolü bulmak için gereken diferansiyel denklemleri ve sınır şartlarını yazın. (Denklemleri çözmeyin.)

$$P.K. = \int_0^T (1 + u^2) dt \quad (T \text{ serbest})$$

MİNİMUM-ZAMAN

MİNİMUM-YAKIT

MİNİMUM-ENERJİ KONTROLÜ

Bu bölümde anlatılacak olan konular hakkında 1960 yılı sonrasında çok sayıda çalışma yapılmış ve önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Yapılan çalışmaların itici gücü şüphesiz uzay programları ve askeri uygulamalardır. Konuların derinlemesine incelemesi oldukça akademik olup, ana hatlarıyla o sıralarda kaleme alınan pekçok kitapta da oldukça ayrıntılı olarak ele alınmıştır [8.1-8.5]. Bu kitap, öğrencilere ve mühendislere kontrol sistemi tasarımında yetkinlik kazandırmak için verilecek bir başlangıç dersi için hazırlanmış olduğundan, bu bölümün konuları nisbeten basitleştirilmiş problemlere uygulanarak anlatılacaktır.

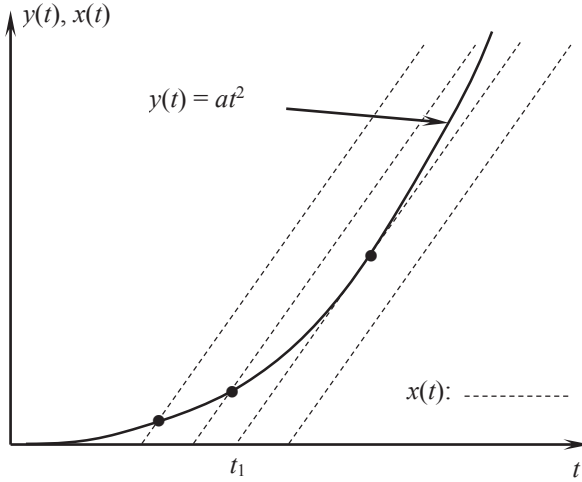
8.1 Minimum-Zaman Kontrolü

Bir sistemin bir başlangıç durumundan başlayarak bir son duruma en kısa zamanda getirilmesi pek çok uygulamada karşılaşılan bir durumdur. Bunlar için aşağıda bazı örnekler verilmiştir. Bu örneklerin hepsinde sisteme sağlanan kontrol girişinin sınırlı olduğunu düşünün.

- Hareket halinde bir düşman uçağının en kısa sürede bir füzeyle vurulması.
- Birden fazla ısıtma bölgesine sahip bir binanın en kısa sürede istenen sıcaklığa getirilmesi.
- Bir taşıt aracının bir noktadan diğer bir noktaya en kısa sürede götürülmesi.
- Hareket halinde bir aracın en kısa sürede durdurulması.
- Bir roketin yörüngede bir uzay istasyonu ile en kısa sürede buluşması.

Problemleri yapısına göre, bazı problemlerin zamana göre optimum kontrol çözümleri olmayabilir. Bazı problemlerde ise çözüm sadece belli şartlar altında mümkün olabilir. Örneğin, konumu $y(t) = at^2$ biçiminde artan bir hedefin, $t = t_0$ 'da harekete geçirilen ve konumu zamanla orantılı olarak artan bir imha aracıyla vurulması ele alınsın. Bu sistemde hedef konumunun zamana göre değişimi ve imha aracının değişik t_0

zamanları için konumlarının değişmesi temsili olarak Şekil 8.1'de verilmiştir. Görüldüğü gibi, eğer imha aracı t_1 anından önce harekete geçirilmişse hedef ve imha aracının yörüngeleri kesişmektedir. Daha sonra harekete geçirildiğinde ise imha aracı hedefi hiçbir zaman yakalayamamaktadır.



Şekil 8.1

Buna benzer bir durum ısı kaybı çok fazla olan bir odanın ısı gücü küçük olan bir ısıtıcıyla kontrolünde de söz konusudur. Böyle bir sistem hiçbir zaman istenilen bir son sıcaklığa getirilemeyebileceğinden zamana göre optimum bir çözüm mümkün değildir.

8.1.1 Sabit Parametrelili Lineer Sistemlerin Minimum-Zaman Kontrolü

Sabit parametrelili lineer sistemlerin herhangi sabit bir başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \underline{0}$ son durumuna büyüklüğü sınırlı olan kontrol girişleri kullanarak en kısa sürede getirilmesi, oldukça ayrıntılı olarak incelenmiş ve sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Kontrol edilebilirliği olan böyle bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad |u| \leq U \quad (8.1)$$

Minimum zaman kontrolü için performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{t_f} 1 \cdot dt \quad (8.2)$$

olduğuna göre, Pontryagin fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) &= 1 + \underline{\lambda}^T (\underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}) \\ &= 1 + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + \underline{\lambda}^T \underline{B}\underline{u} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Optimum kontrol Pontryagin fonksiyonunu minimum yapar. Denklem (8.3)'de i 'inci kontrol girişini içeren terim,

$$(\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) u_i = \gamma_i u_i \quad (8.4)$$

gibi olduğuna göre, Pontryagin fonksiyonunu minimum yapan optimum kontrol girişleri, u_i 'nin katsayısının işaretine bağlıdır. u_i 'nin katsayısı anahtarlama fonksiyonu olarak anılır ve u_i 'nin değeri γ_i 'ye bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_i = \begin{cases} +U_i & (\gamma_i < 0) \\ -U_i & (\gamma_i > 0) \\ \text{Belirsiz} & (\gamma_i = 0) \end{cases} \quad (8.5)$$

Bu tür kontrole *bang-bang kontrol* denir. Bang-bang kontrolde γ_i 'nin işaretine göre kontrol girişinin en büyük veya en küçük değeri kullanılır. $\gamma_i = 0$ olduğunda ise kontrol girişi bir uç değerden diğerine geçer. Bu geçiş durumuna *anahtarlama* denir. Eğer sistemin hiçbir özdeğerlerinin gerçek kısmı pozitif değilse, sistemi bir başlangıç durumu \underline{x}_0 'dan son durum $\underline{x}(t_f) = \underline{0}$ 'a getirecek bir optimum kontrol daima vardır ve bu kontrol tektir [8.1]. Eğer n 'inci mertebeye bir sistemin bütün özdeğerleri gerçek ve negatif ise anahtarlama sayısı en fazla $n - 1$ kadardır [8.1]. Son durum orijin değilse, yeni değişkenler tanımıyla son durumun orijine getirilmesi mümkündür.

Minimum zaman kontrolü problemlerinde γ_i 'nin işareti başlangıçta bilinmediğinden denklem (7.91) ve denklem (7.92)'de optimum kontrol yerine koyulamaz. Bu yüzden bu denklemlerin çözülmesi yoluna gidilmez. Bunun yerine kontrol girişlerinin $+U$ ve $-U$ için olabilecek bütün kombinasyonları için sistemin durum uzayında takip edeceği yörünge ailelerinden yararlanılır. Bu ailelerden bir tanesi başlangıç durumundan başlayarak zamanın arttığı yön için, bir tanesi ise son

durumdan başlayarak zamanın azaldığı yön için çizilir. Sonra başlangıç durumundan başlayarak ve bir yörüngeden diğerine anahtarlama ile atlayarak sistemi son duruma getirecek optimum yol ve kontrol bulunur. Ancak sistem mertebesinin ikiden büyük olması halinde bu yöntemin uygulanması basit değildir.

Özdeğerleri gerçek olan ve negatif olmayan, tek girişli ikinci mertebe bir sistemi $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = 0$ son durumuna minimum zamanda götürmek için anahtarlama noktasına kadar u_b kontrol girişi, anahtarlama sonrası da u_s girişi kullanılmışsa, anahtarlamanın olduğu an ve toplam kontrol süresi aşağıdaki gibi cebirsel olarak bulunabilir. Sistemin durum dönüşüm matrisi $\underline{\phi}(t)$, anahtarlama anı t_s , kontrolün bittiği an ise t_f olsun. Bölüm 5’de sistemlerin zaman cevabı ile ilgili sonuçlardan aşağıdaki denklemler yazılabilir.

Başlangıç durumundan anahtarlamanın olduğu duruma erişildiğinde,

$$\underline{x}(t_s) = \underline{\phi}(t_s)\underline{x}(0) + \int_0^{t_s} \underline{\phi}(t_s - \tau)\underline{B}u_b d\tau \quad (8.6)$$

ifadesi, anahtarlama durumundan orijine varıldığında ise,

$$\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\phi}(t_f - t_s)\underline{x}(t_s) + \int_{t_s}^{t_f} \underline{\phi}(t_f - \tau)\underline{B}u_s d\tau \quad (8.7)$$

ifadesi yazılabilir. Denklem (8.6)’dan $\underline{x}(t_s)$ alınarak denklem (8.7)’de yerine koyulursa aşağıdaki denklem bulunur.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\phi}(t_f)\underline{x}(0) + \underline{\phi}(t_f - t_s) \int_0^{t_s} \underline{\phi}(t_s - \tau)\underline{B}u_b d\tau \quad (8.8)$$

$$+ \int_{t_s}^{t_f} \underline{\phi}(t_f - \tau)\underline{B}u_s d\tau$$

Bu denklemin sağ tarafındaki işlemler yapılarak elde edilecek matrisin terimleri sol taraftaki terimlere eşitlenirse, t_f ve t_s cinsinden iki denklem elde edilir. Ancak bu denklemlerden t_f ve t_s terimlerinin çözümü zor olabilir ve iterasyon gerektirebilir. Bu yüzden zamana göre optimum kontrolün bulunması için MATLAB ya da benzer bir programın diferansiyel denklem çözüm kodunun kullanılması büyük kolaylık sağlar.

Örnek 8.1:

Durum denklemleri ve kontrol girişi sınırları,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (-1 \leq u \leq 1) \quad (8.9)$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolün ve kontrol süresinin bulunması istenmektedir.

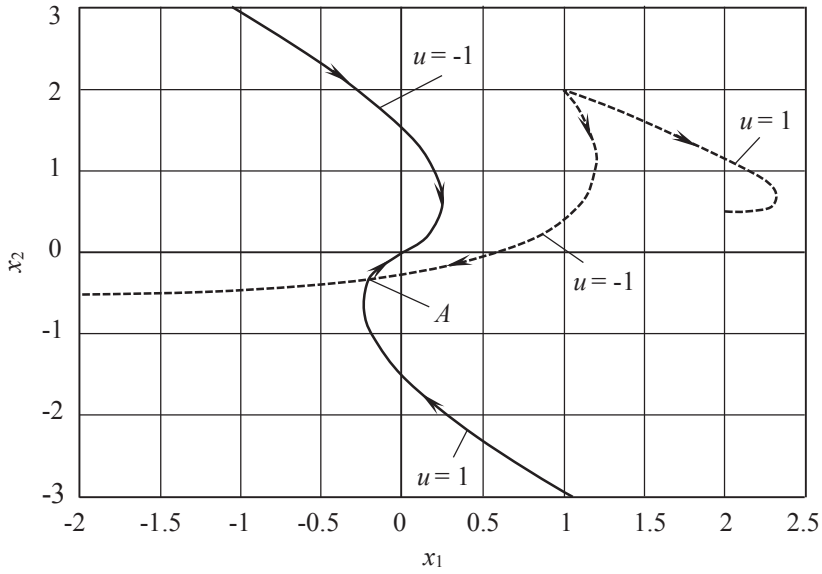
Bu sistemin özdeğerleri negatif ve gerçektir. Sistemin mertebesi $n = 2$ olduğundan en çok $n - 1 = 1$ sayıda anahtarlama ile sistemin orijine getirilmesi mümkündür. Denklem (8.5) gereği optimum kontrol sırasında kontrol girişi u 'nun değeri sadece +1 ya da -1 olabilir.

u 'nun +1 ve -1 olması halleri için denklem (8.9)'un negatif zaman yönünde son durumdan başlayarak integrali alınırsa, x_1 - x_2 düzleminde Şekil 8.2'de katı çizgilerle gösterilen yörüngeler elde edilir.

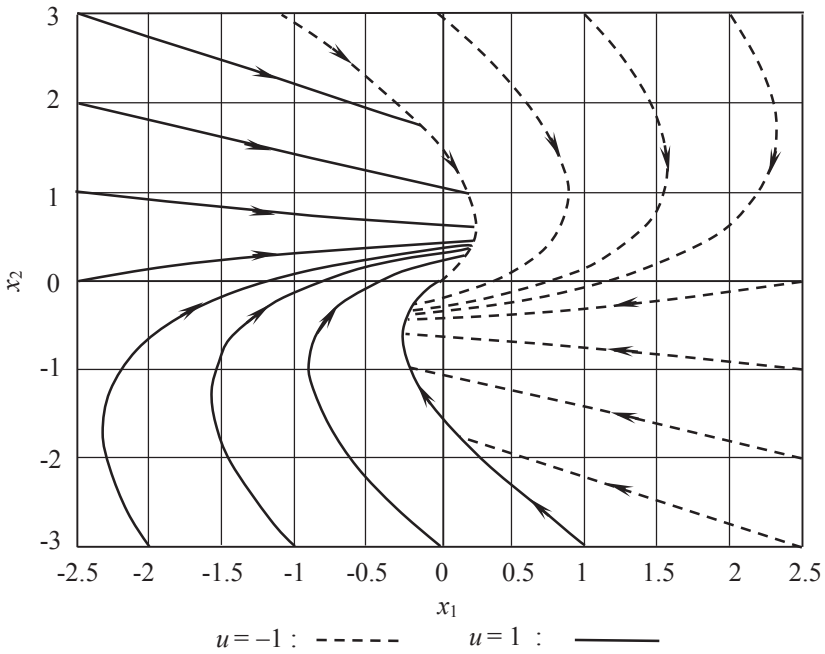
Denklem (8.9)'un integrali başlangıç durumundan itibaren başlayarak u 'nun +1 ve -1 olması halleri için artı zaman yönünde alınırsa, Şekil 8.2'de kesikli çizgilerle gösterilen yörüngeler elde edilir.

Optimum çözüm sırasında sistem önce kesikli çizgiler üzerinden ilerler, kesikli çizgilerin katı çizgilerle kesiştiği noktada anahtarlama gerçekleşir ve katı çizgileri izleyerek orijine varır. Başlangıç noktasından anahtarlamanın yapıldığı A noktasına kadar geçen süre 1.31 s, orijindeki son duruma erişme için geçen toplam süre ise 1.55 s kadardır.

Şekil 8.3'de ise farklı noktalardan başlayan ve sistemi orijine götüren zamana göre optimum yörüngeler toplu olarak verilmiştir.



Şekil 8.2



Şekil 8.3

Yukarıda verilen anahtarlama anı ve kontrol süresi değerleri diferansiyel denklem çözüm kodlarından yararlanarak bulunmuştur. Burada çözüm yöntemini göstermek için, aynı değerlerin denklem (8.8)'den nasıl bulunacağı da verilecektir. Bu sistemin durum dönüştürme matrisi Sylvester açılım teoreminden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{\phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Bu ifade denklem (8.8)'de kullanılırsa, ve $t_a = t_f - t_s$ olarak tanımlanır,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t_f} & 2e^{-t_f} - 2e^{-2t_f} \\ 0 & 2e^{-2t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} e^{-t_a} & 2e^{-t_a} - 2e^{-2t_a} \\ 0 & 2e^{-2t_a} \end{bmatrix} \int_0^{t_s} \begin{bmatrix} e^{-(t_s-\tau)} & 2e^{-(t_s-\tau)} - 2e^{-2(t_s-\tau)} \\ 0 & 2e^{-2(t_s-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1] d\tau \\ &+ \int_{t_s}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{-(t_f-\tau)} & 2e^{-(t_f-\tau)} - 2e^{-2(t_f-\tau)} \\ 0 & 2e^{-2(t_f-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\tau \end{aligned} \quad (8.11)$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa ve

$$\begin{aligned} x &= e^{-t_a} \\ y &= e^{-t_s} \end{aligned} \quad (8.12)$$

olarak tanımlanır, sonuç olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5xy - 4x^2y^2 \\ 2x^2y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x + 3xy + x^2 - x^2y^2 \\ -0.5x^2 + 0.5x^2y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 - 3x + x^2 \\ 0.5 - 0.5x^2 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Matrisler toplanır ve sağlı-sollu terimler birbirine eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$8xy - 5x^2y^2 - 6x + 2x^2 + 2 = 0$$

$$2.5x^2y^2 - x^2 + 0.5 = 0$$

Bu denklemlerden x kolaylıkla yok edilip, y çözülebilir. Böylece, $y = 0.2707$ ve $x = 0.7824$ ya da $t_s = 1.31$ s, $t_a = 0.24$ s ve $t_f = 1.55$ s bulunur.

Örnek 8.2:

Durum denklemleri ve kontrol girişi sınırları,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$-1 \leq u_i \leq 1 \quad (i = 1, 2)$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolün ve kontrol süresinin bulunması istenmektedir.

Denklem (8.5)'de verildiği gibi, zamana göre optimum kontrol bang-bang türündedir. Sistemin özdeğerleri -2 ve -4 olup, pozitif değil gerçektir. $n = 2$ olduğuna göre, sistemin en çok bir anahtarlama ile orijine getirilmesi mümkündür.

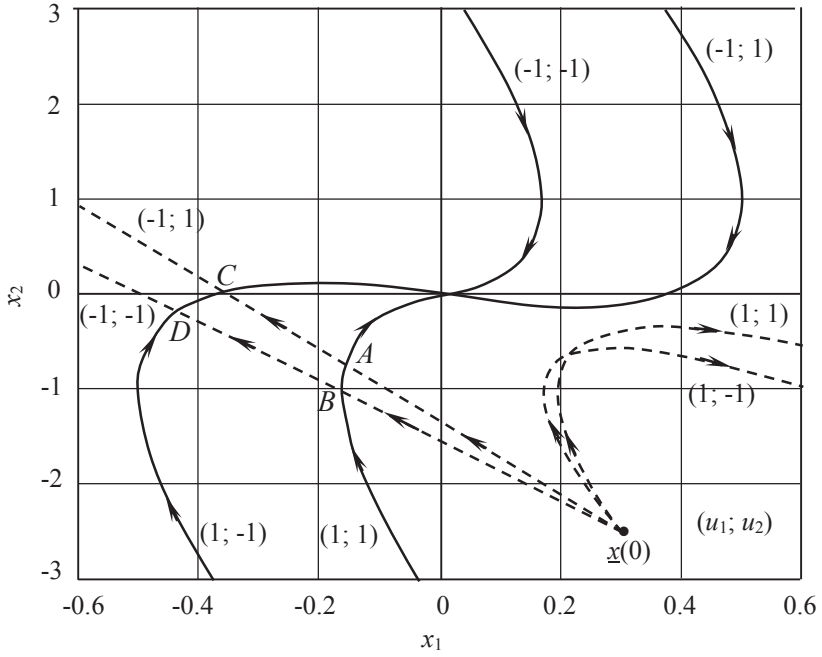
Bu problemde iki kontrol girişi olduğundan, optimum kontrol sırasında kontrol girişlerinin mümkün olan kombinezonları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1 & u_2 = 1 \\ u_1 = 1 & u_2 = -1 \\ u_1 = -1 & u_2 = 1 \\ u_1 = -1 & u_2 = -1 \end{array} \quad (8.15)$$

\underline{u} 'nun değişik kombinezonları için denklem (8.14)'ün negatif zaman yönünde son durumdan başlayarak integrali alınır, x_1 - x_2 düzleminde Şekil 8.4'de katı çizgilerle gösterilen yörüngeler elde edilir. Sistem son duruma bu yörüngelerden biri üzerinden (pozitif zaman yönünde) erişecektir.

Başlangıç durumundan başlayarak, mümkün olan kontrol girişleri için sistem denklemlerinin artı zaman yönünde integrali alınır, Şekil 8.4'de kesikli çizgilerle gösterilen yörüngeler elde edilir. Görüldüğü gibi,

sistemi son duruma götüren dört farklı çözüm adayı vardır. Bunlar A , B , C ve D noktalarından geçen yörüngelerdir. Bunların özellikleri Çizelge 8.1'de listelenmiştir. Bu adaylar arasında, A noktasından geçen çözüm en kısa kontrol süresine sahiptir ve zamana göre optimum kontrolü verir.



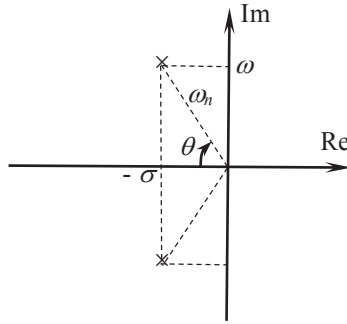
Şekil 8.4

Çizelge 8.1

Anahtarlama Noktası	Aşama 1 Kontrol Girişleri ($u_1; u_2$)	Aşama 2 Kontrol Girişleri ($u_1; u_2$)	Anahtarlama Anı (s)	Toplam Kontrol Süresi (s)
A	$(-1; 1)$	$(1; 1)$	0.184	0.400
B	$(-1; -1)$	$(1; 1)$	0.254	0.429
C	$(-1; 1)$	$(1; -1)$	0.335	0.665
D	$(-1; -1)$	$(1; -1)$	0.345	0.759

8.1.2 Kompleks Kutupları Olan Kararlı Sistemlerin Minimum-Zaman Kontrolü

Daha önce ele alınan ikinci mertebe sistemlerin bütün kutuplarının gerçekte olduğu ve pozitif olmadığı kabul edilmiştir. Şimdi de kutup yerleşimi Şekil 8.5'deki gibi olan bir sistem verilmiş olsun. Bu sistemin sönüm oranı $\zeta = \cos \theta$ olarak bulunur. Özel halde, $\sigma = 0$ olduğunda sönümsüz sistem elde edilir. Sönümsüz sistem doğal frekansı ω_n , sönümlü sistem doğal frekansı ω 'dır.



Şekil 8.5

Sistemin durum denklemleri faz değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\sigma^2 + \omega^2) & -2\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad |u| \leq 1 \quad (8.16)$$

Böyle bir sistem için zamana göre optimum kontrolün çözülmesi çok daha karmaşıktır. Bu problemin çözümü ayrıntılı olarak referans [8.1]'de incelenmiştir. Burada sadece çözümün özellikleri özetlenecektir.

- Zamana göre optimum kontrol bang-bang türündedir. Yani herhangi bir anda kontrol girişi u , $+1$ ya da -1 değerlerinden birine eşittir. Bu değerler arasında anahtarlama yapılır. Kontrol girişi herhangi bir uç değerinde belli bir süreden fazla kalmaz.
- Anahtarlama sayısının bir üst değeri yoktur.
- Tekil kontrol oluşması mümkün değildir. Yani anahtarlama fonksiyonu herhangi bir zaman aralığı süresince sıfır değere sahip olamaz.

8.2 Optimum Kontrol Girişi Kontrolü

Bazı uygulamalarda kontrol girişinin bir biçimde sınırlanması veya minimum yapılması istenir. Kompleks bir ısıtma sisteminde sıcaklık kontrolünün minimum enerji kullanımıyla gerçekleştirilmesi, bir uzay istasyonuna kenetlenmenin minimum yakıt kullanımıyla yapılması gibi problemler bunun örnekleridir.

Bu tür problemlerin çözümünde aşağıda bazı örnekleri verilen performans kriterleri kullanılabilir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} (\underline{u}^T \underline{P} \underline{u}) dt \quad (8.17)$$

$$P.K. = \int_0^{t_f} (\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{P} \underline{u}) dt; \quad \int_0^{t_f} (\underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt = C \quad (C > 0 \text{ ve sabit}) \quad (8.18)$$

$$P.K. = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^r (\rho_i |u_i|) dt \quad \rho_i > 0; \quad |u_i| \leq U_i \quad (8.19)$$

$$P.K. = \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=1}^r \rho_i u_i^2 \right) dt \quad \rho_i > 0; \quad |u_i| \leq U_i \quad (8.20)$$

Yukarıda denklem (8.17) ile tanımlanan problemde \underline{u} üzerinde herhangi bir sınırlama yoktur Bu problem Bölüm 7’de açıklanan yöntemle çözülebilir. Kontrol girişinin bulunmasında denklem (7.89) kullanılabilir. Denklem (8.19) ve denklem (8.20) ile tanımlanan problemlerde ise denklem (7.98)’in kullanılması gereklidir.

Performans kriteri denklem (8.19) gibi olan problemler, *minimum yakıt problemi* olarak anılır. Performans kriteri denklem (8.20) gibi tanımlanan problemlere ise *minimum enerji problemi* denir. Kısım (8.2.1) ve Kısım (8.2.2)’de sırasıyla bu iki tür problemin çözümü incelenecektir. İnceleme lineer sabit parametrelili sistemlerle sınırlı olacaktır.

Denklem (8.18)’de verilen sınır şartı, *izoperimetrik sınır şartı* olarak anılır. Bu sınır şartının probleme dahil edilmesi için ek bir durum değişkeninin tanımlanması gereklidir. Bu konu Kısım (8.2.3)’de incelenecektir.

8.2.1 Minimum-Yakıt Kontrolü

Bir sistemin durum denklemleri ve kontrol sırasında kullanılacak performans kriteri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad |u_i| \leq U_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (8.21)$$

$$P.K. = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^r (\rho_i |u_i|) dt \quad \rho_i > 0 \quad (8.22)$$

Bu sistemin Pontryagin fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}) &= \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + \underline{\lambda}^T \underline{B}\underline{u} \\ &= \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n] \begin{bmatrix} b_{11}u_1 & b_{12}u_2 & \dots & b_{1r}u_r \\ b_{21}u_1 & b_{22}u_2 & \dots & b_{2r}u_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}u_1 & b_{n2}u_2 & \dots & b_{nr}u_r \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k b_{ki} u_i \right] \end{aligned} \quad (8.23)$$

Pontryagin'in minimum prensibine göre optimum kontrol girişi Pontryagin fonksiyonunu minimum yapar. O halde u_i 'inci kontrol girişinin optimum değeri, denklem (8.23)'de bu terimin çarpanının değerine göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) < -\rho_i \quad \text{için:} & \quad u_{io} = U \\ -\rho_i < (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) < \rho_i \quad \text{için:} & \quad u_{io} = 0 \\ \rho_i < (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) \quad \text{için:} & \quad u_{io} = -U \\ (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) = -\rho_i \quad \text{için:} & \quad u_{io} = \text{Negatif olmayan} \\ & \quad \text{bir değer} \\ (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) = \rho_i \quad \text{için:} & \quad u_{io} = \text{Pozitif olmayan} \\ & \quad \text{bir değer} \end{aligned} \right\} (8.24)$$

Minimum yakıt probleminin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Bang-bang kontrolden farklı olarak, girişin uç değerlerinin yanı sıra “0” değeri de kullanılır.
- Amaç sistemi bir başlangıç durumundan orijine getirmektir.
- t_f serbest ise birden fazla çözüm mümkün olabilir. [8.2]
- t_f sabit ise çözüm mümkün olmayabilir. [8.2]
- Denklem (8.19)’un argümanına ayrıca sabit bir terim eklenerek, problem minimum yakıt + zaman problemi olarak da çözülebilir. Bu durumda zaman ve yakıt terimleri arasında, bunların ağırlık katsayılarına göre bir uzlaşa sağlanır. [8.1, 8.2]

Örnek 8.3:

Bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + u & |u| &\leq 1 \\ x(0) &= 5 & x(t_f) &= 0 & t_f &= T \end{aligned} \quad (8.25)$$

Sistemi son duruma aşağıdaki gibi tanımlanan performans kriterini minimum yaparak götürecektir kontrolün bulunması istenmektedir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} |u| dt \quad (8.26)$$

Verilen sistem kararlı olduğundan ve $u = 0$ olduğunda zaten kendiliğinden $x = 0$ değerine gittiğinden, t_f serbest alınırsa minimum yakıt probleminin bir anlamı yoktur. Zira hiç yakıt kullanmadan sistem orijine gitmektedir. Bu yüzden minimum yakıt problemi ancak $t_f = T$ gibi bir sınır şartı verilirse anlamlıdır. Burada da böyle bir sınır şartının verildiği kabul edilecektir.

Bu problem için Pontryagin fonksiyonu,

$$H = |u| + \lambda(-2x + u) \quad (8.27)$$

olarak bulunur. H 'yi minimum yapan kontrol girişi denklem (8.24)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \lambda < -1 & \text{ için:} & u_o &= 1 \\ -1 < \lambda < 1 & \text{ için:} & u_o &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.28-a)$$

$$\begin{array}{ll}
 1 < \lambda \text{ için:} & u_o = -1 \\
 \lambda = -1 \text{ için:} & u_o = \text{Negatif olmayan} \\
 & \text{bir değer.} \\
 \lambda = 1 \text{ için:} & u_o = \text{Pozitif olmayan} \\
 & \text{bir değer.}
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} (8.28-b)$$

Diğer yandan, yardımcı durum denklemi,

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_o}{\partial x} = 2\lambda \quad (8.29)$$

olduğundan, Lagrange çarpanı λ 'nın zamanla değişimi bir c integrasyon sabiti cinsinden,

$$\lambda = ce^{2t} \quad (8.30)$$

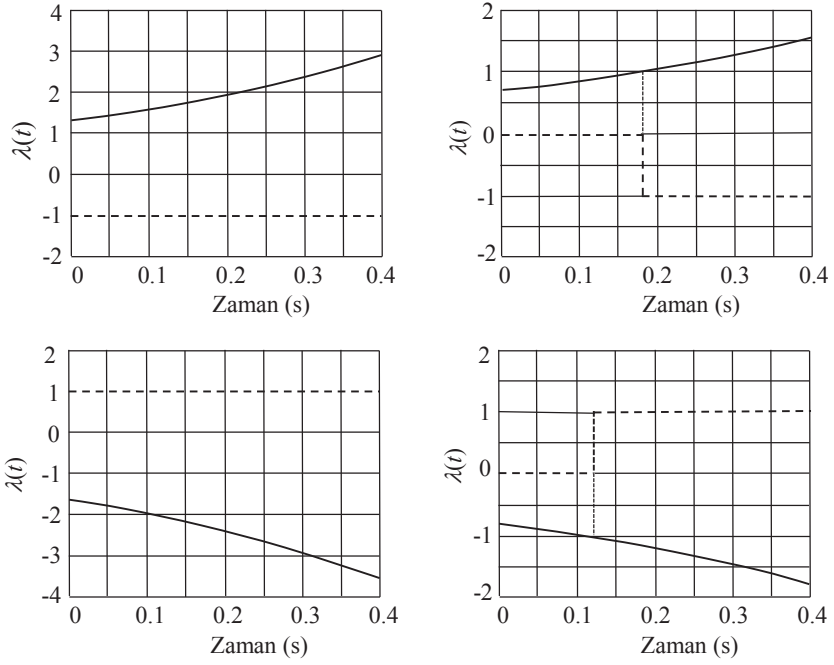
gibidir. O halde herhangi bir zaman aralığı boyunca λ 'nın $+1$ ya da -1 olması mümkün değildir. Bu durumda denklem (8.28) aşağıdaki hale indirgenir.

$$\begin{array}{ll}
 \lambda < -1 \text{ için:} & u_o = 1 \\
 -1 < \lambda < 1 \text{ için:} & u_o = 0 \\
 1 < \lambda \text{ için:} & u_o = -1
 \end{array} \quad (8.31)$$

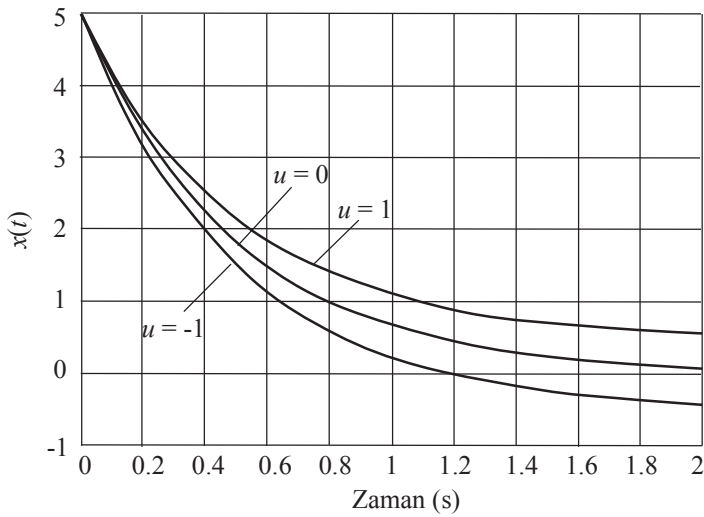
şekil 8.6'da λ 'nın zamanla değişimi c sabitinin farklı değerleri için denklem (8.30) kullanılarak çizilmiştir. λ 'nın değerine bağlı olarak u 'nun değişimi de şekil üzerinde noktalı çizgilerle gösterilmiştir.

şekil 8.7'de ise verilen başlangıç koşulundan başlayarak $u = 0$, $u = 1$ ve $u = -1$ için x 'in zamanla değişimi görölmektedir. Bu eğrilerden ve denklem (8.25)'den göröldüğü gibi, $u = 0$ olması halinde sistemin durağan durumu olan $x = 0$ 'a erişmesi ancak $t = \infty$ 'da gerçekleşir. $u = 1$ olduğunda ise $x = 0$ 'a hiç bir zaman ulaşamaz. Dolayısıyla, kontrol $u = -1$ ile tamamlanmalıdır. Yani kontrol süresince ya $u = -1$ kullanılmalı ya da önce $u = 0$ sonra da $u = -1$ kullanılmalıdır. $u = -1$ eğrisi incelendiğinde, eğer $T < 1.2$ s ise kontrolün mümkün olmadığı, $T = 1.2$ s ise optimum kontrolün $u = -1$ olduğu, $T > 1.2$ s ise önce $u = 0$ sonra $u = -1$ uygulanması gerektiği anlaşılır. $u = 0$ 'dan $u = -1$ 'e anahtarlanmanın yapıldığı an bir diferansiyel denklem yazılımından yararlanarak bulunabileceği gibi, analitik olarak da elde edilebilir. şekil 8.8'de $T = 1.4$ s için yazılım kullanılarak elde edilen çözümler görölmektedir. Çözümü bulmak için denklem (8.25)'in başlangıç

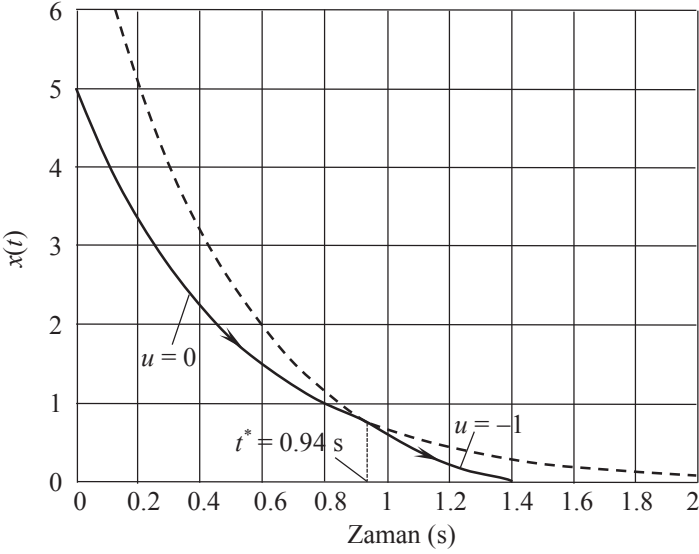
şartından başlayarak artan zaman yönünde, son zaman ve durumdan başlayarak ise azalan zaman yönünde integrali alınmıştır. Anahtarlama işlemi $t^* = 0.93$ s'de yapılmaktadır.



Şekil 8.6



Şekil 8.7



Şekil 8.8

Anahtarlama anı sistem cevabını veren denklemlerden de aşağıdaki sırayla bulunabilir.

$$\phi(t) = e^{-2t} \quad (8.32)$$

$$x(t^*) = e^{-2t^*} x(0) + \int_0^{t^*} e^{-2(t^*-\tau)} (1)(0) d\tau = 5e^{-2t^*} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} x(1.4) = 0 &= e^{-2(1.4-t^*)} (5e^{-2t^*}) + \int_{t^*}^{1.4} e^{-2(1.4-\tau)} (1)(-1) d\tau \\ &= 5e^{-2.8} - \left[\frac{1}{2} e^{-2(1.4-\tau)} \right]_{t^*}^{1.4} = 5e^{-2.8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2(1.4-t^*)} \end{aligned} \quad (8.34)$$

$$e^{-2(1.4-t^*)} = 1 - 10e^{-2.8} \quad (8.35)$$

$$-2.8 + 2t^* = \ln(1 - 10e^{-2.8}) = -0.93675 \quad (8.36)$$

$$t^* = 0.93 \text{ s} \quad (8.37)$$

Örnek 8.4:

İkinci mertebe bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u & \quad |u| \leq 100 \\ \underline{x}(0) &= \begin{bmatrix} -2.5 \\ 3 \end{bmatrix} & \quad \underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \quad t_f = T \text{ (sabit)} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Sistemi son duruma aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak götüreceğiz kontrolün bulunması istenmektedir.

$$P.K. = \int_0^T |u| dt \quad (8.39)$$

Bu problem için Pontryagin fonksiyonu,

$$H = |u| + \lambda_1(x_2 + u) + \lambda_2(-5x_1 - 6x_2) \quad (8.40)$$

olarak bulunur. H 'yi minimum yapan kontrol girişi denklem (8.24)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 < -1 \text{ için:} & \quad u_o = 100 \\ -1 < \lambda_1 < 1 \text{ için:} & \quad u_o = 0 \\ 1 < \lambda_1 \text{ için:} & \quad u_o = -100 \\ \lambda_1 = -1 \text{ için:} & \quad u_o = \text{Negatif olmayan} \\ & \quad \text{bir değer.} \\ \lambda_1 = 1 \text{ için:} & \quad u_o = \text{Pozitif olmayan} \\ & \quad \text{bir değer.} \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Diğer yandan, yardımcı durum denklemleri,

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_o}{\partial x_1} = 5\lambda_2 \quad (8.42)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_o}{\partial x_2} = -\lambda_1 + 6\lambda_2 \quad (8.43)$$

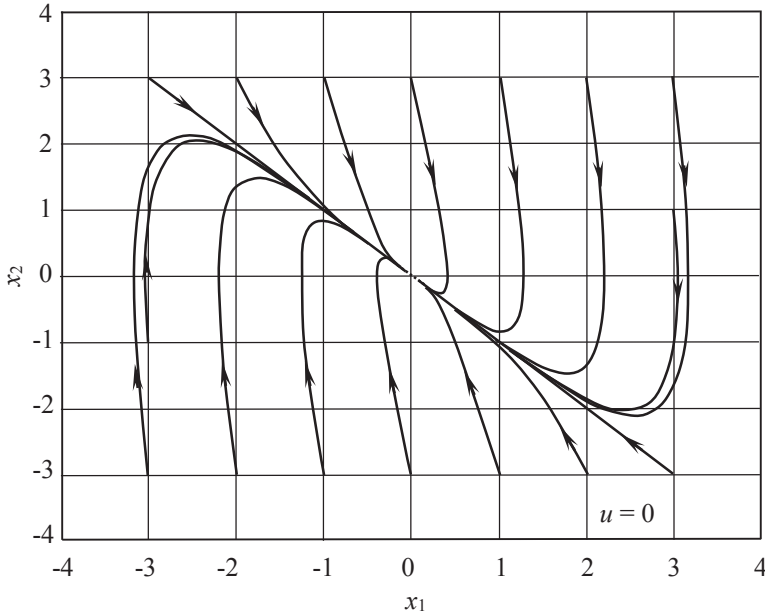
olduğuna gre,

$$\ddot{\lambda}_2 - 6\dot{\lambda}_2 + 5\lambda_2 = 0 \quad \lambda_2 = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \quad (8.44)$$

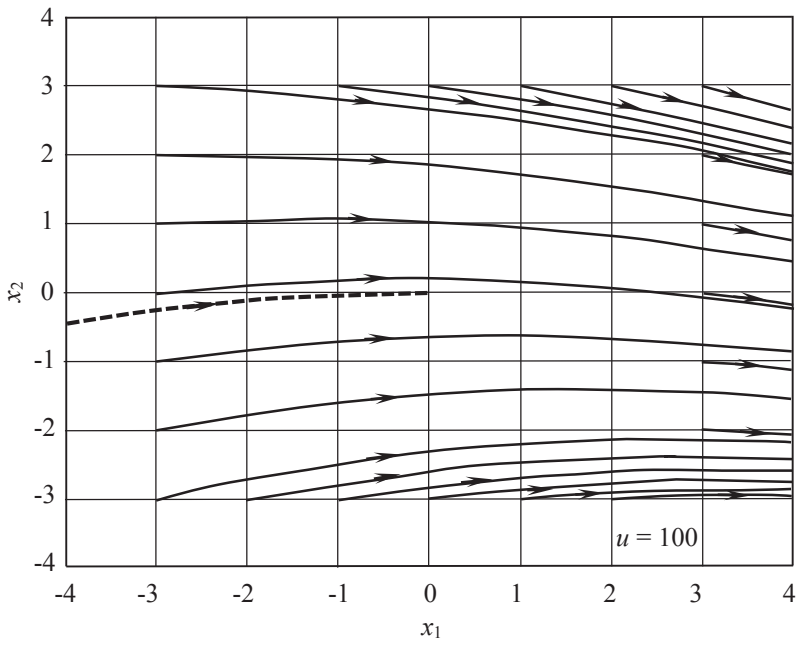
$$\dot{\lambda}_1 = 5c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} \quad \lambda_1 = 5c_1 e^t + c_2 e^{5t} \quad (8.45)$$

elde edilir. λ_1 'in ifadesi incelendiğinde, eksponansiyel terimlerinin üsleri aynı değilse, bu teriminin belli bir zaman aralığında özdeş olarak sıfır olamayacağı görülür. O halde denklem (8.41)'de verilen u_0 seçeneklerinden sadece ilk üçünün kullanılması mümkündür.

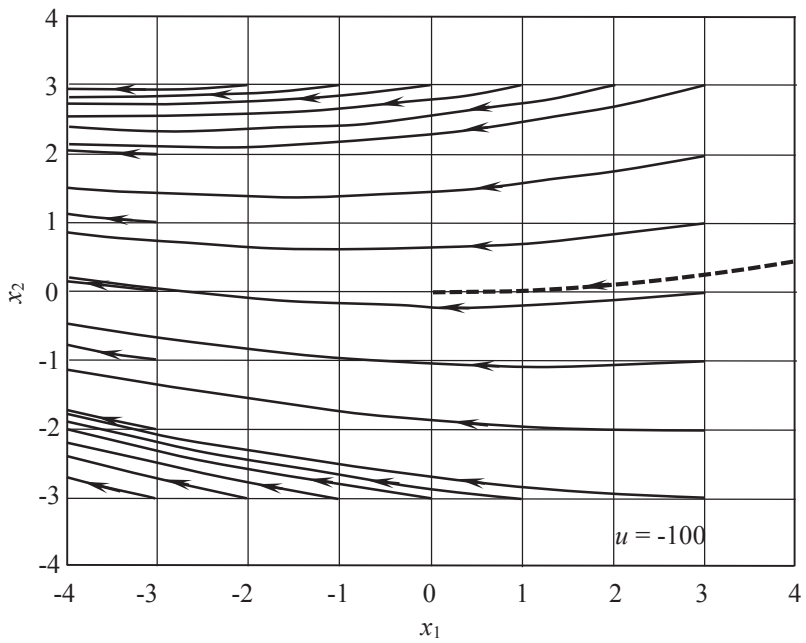
şekil 8.9-8.11'de $u = 0$, $u = 100$ ve $u = -100$ olması durumlarında, değişik başlangıç şartları için sistemin izleyeceği yörüngeler x_1 - x_2 düzleminde gösterilmiştir. $u = 0$ için yörüngeler ancak $t \rightarrow \infty$ iken orijine ulaşabildiğinden kontrol işlemi $u = 0$ kullanılarak sona eremez. Son aşamada $u = 100$ veya $u = -100$ kullanılmalıdır. şekil 8.10 ve şekil 11'de orijinden geçen $u = 100$ ve $u = -100$ yörüngeleri de kesik çizgilerle gösterilmiştir. Sistem orijine bu iki yörüngeden birini kullanarak gelecektir.



şekil 8.9



Şekil 8.10



Şekil 8.11

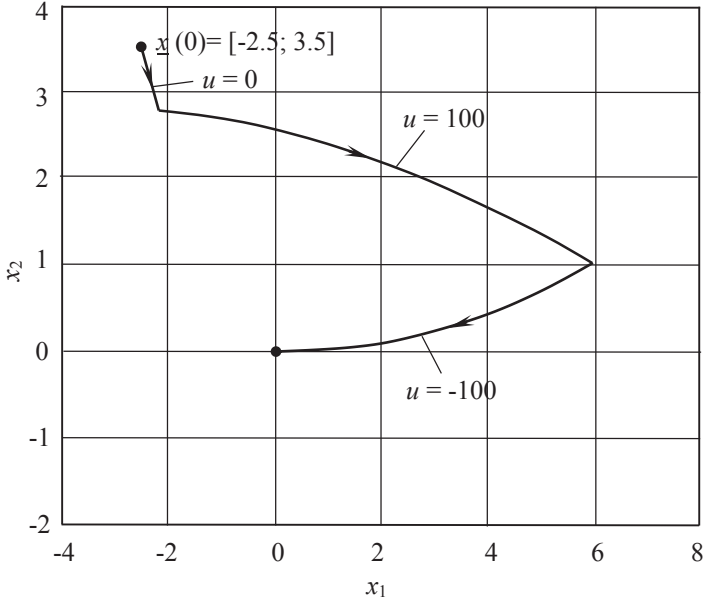
Anahtarlama zamanı ve toplam kontrol süresinin hesaplaması için Örnek 3’de kullanılan analitik yöntem, anahtarlama sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda aşırı karmaşıktır ve genellikle iterasyon gerektirir. Bu yüzden uygun bir yazılım kullanarak sistem denklemlerinin integrasyonu daha kolaydır. Bu örnekte izlenen yol aşağıdaki gibidir.

- Başlangıç durumundan itibaren rastgele seçilen ilk anahtarlama zamanına kadar $u = 0$ eğrisi üzerinden gelin.
- Bu noktadan itibaren $u = 100$ eğrisi üzerinden, sistemi orijine getiren $u = -100$ eğrisine ulaşıncaya kadar devam edin.
- Son gelinen noktadan itibaren $u = -100$ eğrisi üzerinden orijine erişinceye kadar devam edin.
- Anahtarlama zamanlarını ve toplam kontrol süresini kaydedin.
- İlk anahtarlama zamanı için farklı değer kullanarak yukarıdaki işlemleri tekrar edin.
- Elde edilen çözümler arasından sizin için en uygun olanını seçin. Bu seçim yapılırken toplam kontrol süresi ve performans kriteri arasında bir uzlaşıda bulunmanız gerekecektir.

Bu örnekte ele alınan sistem için elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir. Bu çizelgede kontrol sırasında kontrol girişi kullanılmayan sürenin toplam kontrol süresine oranı da verilmiştir. Bu oran ne kadar yüksekse performans kriteri değeri de o kadar küçüktür. Şekil 8.12’de çizelgenin beşinci satırındaki kontrol için sistemin x_1-x_2 düzleminde izlediği yol örnek olarak verilmiştir.

Çizelge 8.2

Seçenek	Birinci Anahtarlama Zamanı, t_1^* (s)	İkinci Anahtarlama Zamanı, t_2^* (s)	Kontrol Süresi, T (s)	$(t_1^*/T) \times 100$ (%)
1	1.9	1.93	1.95	97
2	1.5	1.53	1.56	96
3	0.9	0.95	0.98	91
4	0.4	0.46	0.51	78
5	0.1	0.18	0.24	42



Şekil 8.12

Minimum yakıt problemlerinde zamanı sınırlamak için diğer bir yol performans kriterine zamanla ilgili bir terim eklemektir. Bu durumda performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{t_f} \left[\rho_0 + \sum_{i=1}^r (\rho_i |u_i|) \right] dt \quad \rho_0, \rho_i > 0 \quad (8.46)$$

haline gelir ve problem minimum-yakıt-zaman kontrolü olur.

Bu sistemin Pontryagin fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}) &= \rho_0 + \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + \underline{\lambda}^T \underline{Ax} + \underline{\lambda}^T \underline{Bu} \\ &= \rho_0 + \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n] \begin{bmatrix} b_{11}u_1 & b_{12}u_2 & \dots & b_{1r}u_r \\ b_{21}u_1 & b_{22}u_2 & \dots & b_{2r}u_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}u_1 & b_{n2}u_2 & \dots & b_{nr}u_r \end{bmatrix} \\ &= \rho_0 + \sum_{i=1}^r \rho_i |u_i| + \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k b_{ki} u_i \right] \end{aligned} \quad (8.47)$$

Pontryagin'in minimum prensibine göre optimum kontrol girişi Pontryagin fonksiyonunu minimum yapar. O halde u_i 'inci kontrol girişinin optimum değeri, denklem (8.47)'de bu terimin çarpanının değerine göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{array}{ll}
 (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) < -\rho_i \text{ için:} & u_{io} = U \\
 -\rho_i < (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) < \rho_i \text{ için:} & u_{io} = 0 \\
 \rho_i < (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) \text{ için:} & u_{io} = -U \\
 (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) = -\rho_i \text{ için:} & u_{io} = \text{Negatif olmayan} \\
 & \text{bir değer} \\
 (\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}) = \rho_i \text{ için:} & u_{io} = \text{Pozitif olmayan} \\
 & \text{bir değer}
 \end{array} \quad (8.48)$$

Çözüm aşamaları aşağıda verilen Örnek 5'de açıklanmıştır. Çözüm sırasında denklem (7.100)'ün kullanılış biçimine dikkat ediniz.

Örnek 8.5:

Bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \dot{x} = -4x + u \quad |u| \leq 1 \\
 x(0) = 4 \quad x(t_f) = 0 \quad t_f : \text{Serbest}
 \end{array} \quad (8.49)$$

Sistemi son duruma aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak götürecek kontrolün bulunması istenmektedir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} [\rho_0 + |u|] dt \quad (\rho_0 > 0) \quad (8.50)$$

Bu problem için Pontryagin fonksiyonu,

$$H = \rho_0 + |u| + \lambda(-4x + u) \quad (8.51)$$

olarak bulunur. H 'yi minimum yapan kontrol girişi denklem (8.48)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{array}{ll}
 \lambda < -1 \text{ için:} & u_o = 1 \\
 -1 < \lambda < 1 \text{ için:} & u_o = 0 \\
 1 < \lambda \text{ için:} & u_o = -1 \\
 \lambda = -1 \text{ için:} & u_o = \text{Negatif olmayan} \\
 & \text{bir değer.} \\
 \lambda = 1 \text{ için:} & u_o = \text{Pozitif olmayan} \\
 & \text{bir değer.}
 \end{array} \quad (8.52)$$

Diğer yandan, yardımcı durum denklemini,

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_o}{\partial x} = 4\lambda \quad (8.53)$$

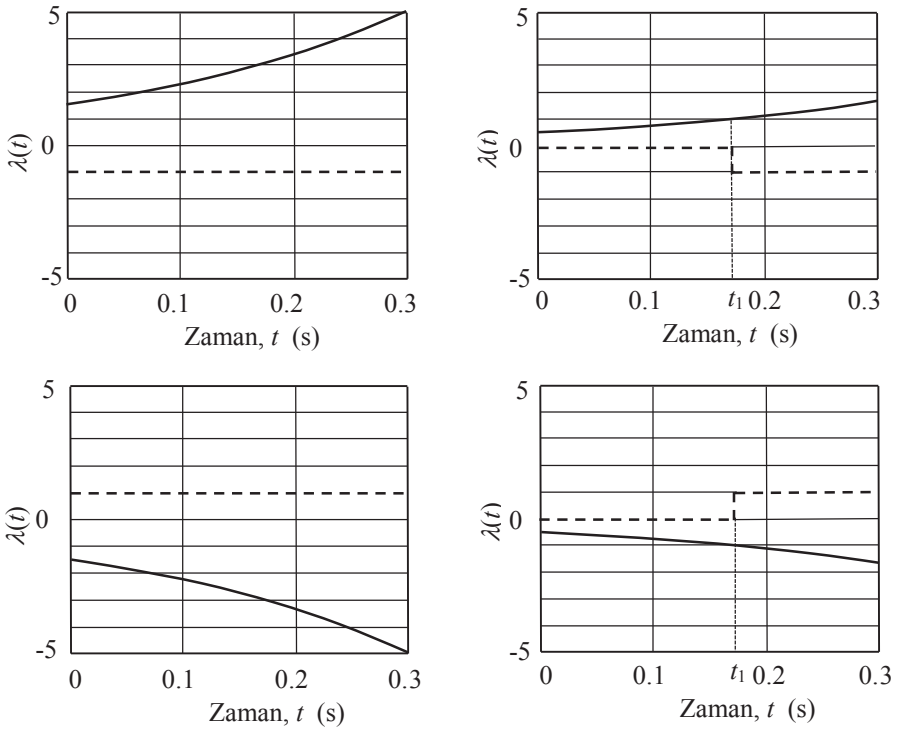
olduğundan, Lagrange arpanı λ 'nın zamanla değişimi bir c integrasyon sabiti cinsinden,

$$\lambda = ce^{4t} \quad (8.54)$$

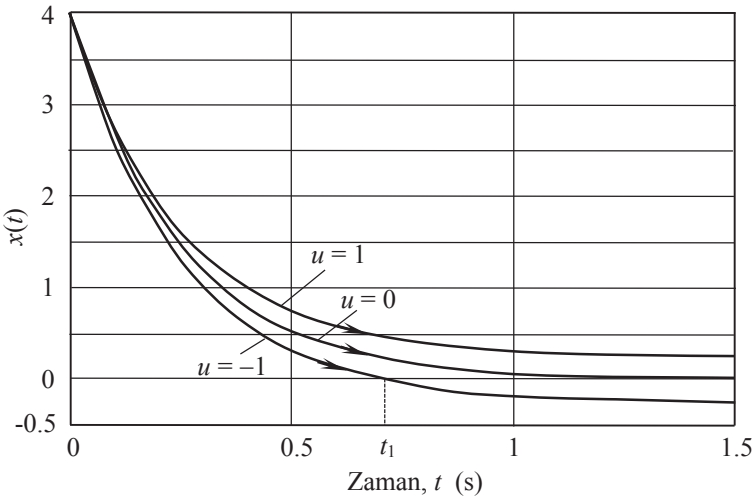
gibidir. O halde herhangi bir zaman aralığı boyunca λ 'nın $+1$ ya da -1 olması mümkün değildir. Bu durumda denklem (8.52) aşağıdaki hale indirgenir.

$$\begin{array}{ll}
 \lambda < -1 \text{ için:} & u_o = 1 \\
 -1 < \lambda < 1 \text{ için:} & u_o = 0 \\
 1 < \lambda \text{ için:} & u_o = -1
 \end{array} \quad (8.55)$$

şekil 8.13'de λ 'nın zamanla değişimi c sabitinin farklı değerleri için denklem (8.54) kullanılarak çizilmiştir. λ 'nın değerine bağlı olarak u 'nun değişimi de şekil üzerinde noktalı çizgilerle gösterilmiştir. şekil 8.14'de ise verilen başlangıç koşulundan başlayarak $u = 0$, $u = 1$ ve $u = -1$ için x 'in zamanla değişimi görülmektedir. Bu eğrilerden ve denklem (8.49)'dan görüldüğü gibi, $u = 0$ olması halinde sistemin durağan durumu olan $x = 0$ 'a erişmesi ancak $t = \infty$ 'da gerçekleşir. $u = 1$ olduğunda ise $x = 0$ 'a hiçbir zaman ulaşamaz. Dolayısıyla, kontrol $u = -1$ ile tamamlanmalıdır. Yani kontrol süresince ya $u = -1$ kullanılmalı ya da önce $u = 0$ sonra da $u = -1$ kullanılmalıdır. $u = -1$ eğrisi incelendiğinde, eğer $T < t_1$ olması isteniyor ise kontrolün mümkün olmadığı, $T = t_1$ ise optimum kontrolün $u = -1$ olduğu, $T > t_1$ ise önce $u = 0$ sonra $u = -1$ uygulanması gerektiği anlaşılır. $u = 0$ 'dan $u = -1$ 'e anahtarlanmanın



Şekil 8.13



Şekil 8.14

yapıldığı t_s anı, bir diferansiyel denklem yazılımından yararlanarak bulunabileceği gibi, analitik olarak Örnek 8.3'deki gibi de elde edilebilir. Ancak bu problemin performans kriterinde $\rho_0 \neq 0$ gibi bir terimin yer alması ve t_f üzerinde bir sınır olmaması Bölüm 7'de denklem (7.100) ile tanımlanan özelliğten yararlanma imkanı tanır. Kontrol $u = 0$ 'dan $u = -1$ 'e geçmeden hemen önce, $u^o = 0$ olduğu ve $\lambda = +1$ değerini aldığı için t_s anında denklem (7.100) aşağıdaki hali alır.

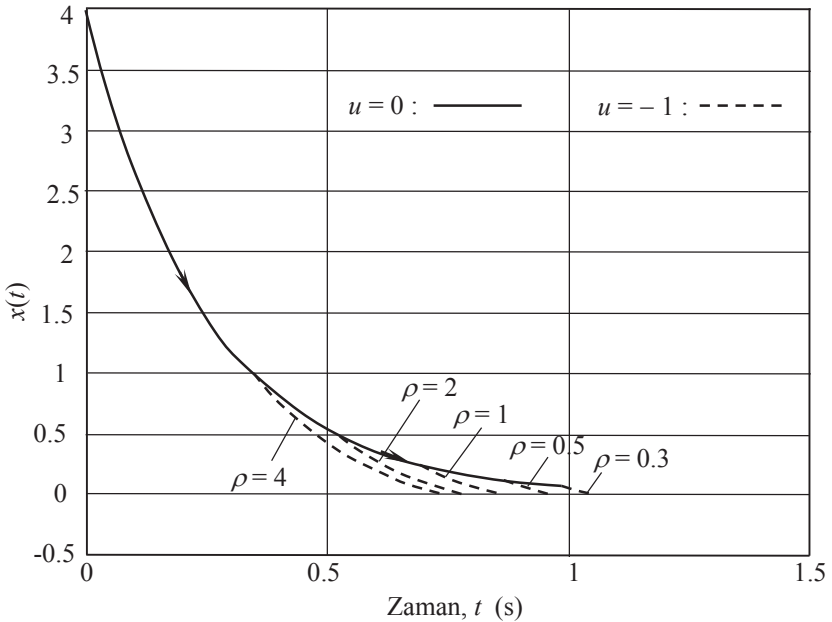
$$\begin{aligned} H[x^o(t), u^o(t), \lambda^o(t)] \\ &= \rho_0 + |u^o| - 4\lambda(t_s)x(t_s) + \lambda(t_s)u^o \\ &= \rho_0 - 4x(t_s) = 0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

ya da,

$$x(t_s) = \frac{\rho_0}{4} \quad (8.57)$$

bulunur. Bu bilgi, kontrol edilmiş sistemin cevabını elde etmekte büyük kolaylık sağlar.

Şekil 8.15'de beş farklı ρ_0 değeri için bulunan sistem cevapları ve kontrol girişleri verilmiştir.



Şekil 8.15

8.2.2 Minimum-Enerji Kontrolü

Dirençlerden oluşan ve toplam eşdeğer direnci R_e olan bir elektrik şebekesine i gibi bir akım verilirse, şebekeye sağlanan enerji $i^2 R_e$ kadardır. Bu enerji girişin karesiyle orantılı olduğundan, denklem (8.20)'deki gibi bir performans kriterini minimum yapmaya çalışan kontrole *minimum-enerji kontrolü* denir. Bu bölümde lineer, sabit parametrel ve kontrol girişi sınırlı olan sistemlerin minimum enerji kontrolü incelenecektir.

Kontrol edilecek sistemin durum denklemleri ve kontrol sırasında kullanılacak performans kriteri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad |u_i| \leq U_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (8.58)$$

$$P.K. = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^r (\rho_i u_i^2) dt \quad \rho_i > 0 \quad (8.59)$$

Bu sistemin Pontryagin fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{\lambda}, u) &= \sum_{i=1}^r \rho_i u_i^2 + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + \underline{\lambda}^T \underline{B}u \\ &= \sum_{i=1}^r \rho_i u_i^2 + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n] \begin{bmatrix} b_{11}u_1 & b_{12}u_2 & \dots & b_{1r}u_r \\ b_{21}u_1 & b_{22}u_2 & \dots & b_{2r}u_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}u_1 & b_{n2}u_2 & \dots & b_{nr}u_r \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \rho_i u_i^2 + \underline{\lambda}^T \underline{A}\underline{x} + \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k b_{ki} u_i \right] \end{aligned} \quad (8.60)$$

Pontryagin'in minimum prensibine göre optimum kontrol girişi Pontryagin fonksiyonunu minimum yapar. Pontryagin fonksiyonunu minimum yapan u_i değeri,

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 2\rho_i u_i + \lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni} = 0 \quad (8.61)$$

ya da,

$$u_i = -\frac{\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \dots + \lambda_n b_{ni}}{2\rho_i} \quad (8.62)$$

olarak bulunur. Ancak $|u_i| \leq U_i$ olarak sınırlanmış olduğundan optimum kontrol aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \cdots + \lambda_n b_{ni}}{2\rho_i} > U \quad \text{ise: } u_{io} = U \\
 & -\frac{\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \cdots + \lambda_n b_{ni}}{2\rho_i} < -U \quad \text{ise: } u_{io} = -U \\
 & -U < -\frac{\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \cdots + \lambda_n b_{ni}}{2\rho_i} < U \quad \text{ise:} \\
 & \quad u_{io} = -\frac{\lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \cdots + \lambda_n b_{ni}}{2\rho_i}
 \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

Örnek 8.6:

Daha önce Örnek 3’de zamana göre optimum kontrol çözümü elde edilen sistemin bu defa minimum-enerji kontrolü incelenecektir. Sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -2x + u & |u| &\leq 1 \\
 x(0) &= 1.5 & x(t_f) &= 0 & t_f &:(serbest)
 \end{aligned} \quad (8.64)$$

Minimum yapılmak istenen performans kriteri ise kontrolün bitiş zamanını sınırlamak için aşağıdaki gibi olsun. Bu ifadede geçen ρ pozitif değerli ağırlık katsayısıdır. ρ ’nun değeri artırıldıkça kontrol süresi kısalmır.

$$P.K. = \int_0^{t_f} (\rho + u^2) dt \quad (8.65)$$

Pontryagin fonksiyonu,

$$H(x, u, \lambda) = \rho + u^2 - 2\lambda x + \lambda u \quad (8.66)$$

olduğuna göre,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \quad (8.67)$$

olduğundan u sınırlanmamış olsaydı,

$$u_o = -\frac{\lambda}{2} \quad (8.68)$$

olurdu. Ancak $|u| \leq 1$ olduğundan optimum kontrol λ 'nın değerine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

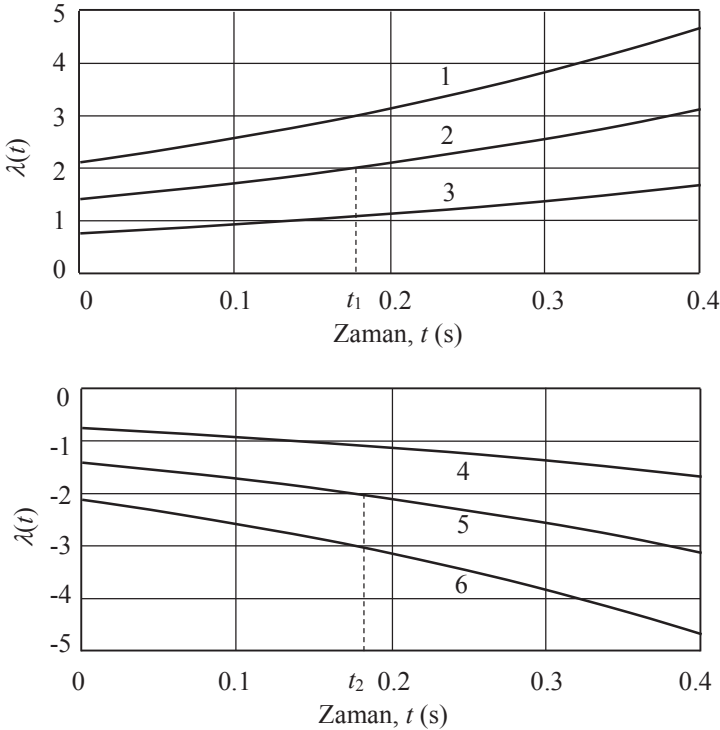
$$\left. \begin{array}{l} \lambda \leq -2 \text{ ise:} \\ \lambda \geq 2 \text{ ise:} \\ -2 < \lambda < 2 \text{ ise:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_{io} = 1 \\ u_{io} = -1 \\ u_{io} = -\frac{\lambda}{2} \end{array} \quad (8.69)$$

Optimum kontrol için yardımcı durum denklemleri ve λ , denklem (8.66)'dan aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x, u_o, \lambda)}{\partial x} = 2\lambda \quad (8.70)$$

$$\lambda(t) = ce^{2t} \quad (8.71)$$

İntegrasyon sabiti c 'nin değerine bağlı olarak, λ 'nın mümkün olan değişim biçimleri Şekil 8.16'da görülmektedir.



Şekil 8.16

Bu değişim biçimlerine bağlı olarak kullanılması gereken optimum kontrol girişleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{l}
 \text{1 no.lu eğri için:} \quad u_o = -1 \\
 \text{2 no.lu eğri için:} \quad \text{Eğer } t_1 \geq t_f \text{ ise, } u_o = -\frac{\lambda}{2} \\
 \quad \quad \quad \text{Eğer } t_1 < t_f \text{ ise,} \\
 \quad \quad \quad \quad u_o = -\frac{\lambda}{2} \quad (t < t_1) \\
 \quad \quad \quad \quad u_o = -1 \quad (t > t_1) \\
 \text{3 ve 4 no.lu eğriler için:} \quad u_o = -\frac{\lambda}{2} \\
 \text{5 no.lu eğri için:} \quad \text{Eğer } t_2 \geq t_f \text{ ise, } u_o = -\frac{\lambda}{2} \\
 \quad \quad \quad \text{Eğer } t_2 < t_f \text{ ise,} \\
 \quad \quad \quad \quad u_o = -\frac{\lambda}{2} \quad (t < t_2) \\
 \quad \quad \quad \quad u_o = 1 \quad (t > t_2) \\
 \text{6 no.lu eğri için:} \quad u_o = 1
 \end{array} \quad (8.72)$$

şekil 8.16'da 1, 2 ve 3 numaralı eğriler eğer $x(0) > 0$ ise; 4, 5 ve 6 numaralı eğriler ise eğer $x(0) < 0$ ise kullanılır. Bunun doğruluğu, bu kontrollerin sisteme uygulanması halinde sistemin orijine götürülmesinin mümkün olup olmadığı incelenerek gösterilebilir. Sistem $x(0) = 1.5$ gibi pozitif bir değerden başladığından sadece 1, 2 ve 3 numaralı eğrilerin kullanılması beklenmelidir.

Bu problemde son zaman serbest ve Pontryagin fonksiyonu doğrudan zamanın fonksiyonu olmadığından Bölüm 7'de denklem (7.100) ile verilen şart geçerlidir. x 'in anlık değerine bağlı olarak, denklem (8.72)'de 1, 2 ve 3 numaralı eğriler için verilen seçeneklerden hangisinin kullanılacağına bu şart incelenerek karar verilebilir.

Önce 2 numaralı eğri için verilen kontrol kullanılarak $t = t_1$ anında denklem (7.100) incelenir. Bu noktada $\lambda = 2$ ve $u_o = -1$ değerine sahip olduğundan, denklem (7.100)'den aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
 H[x_o(t_1), u_o(t_1), \lambda_o(t_1)] &= \left[\rho + u_o^2 - 2\lambda_o x_o + \lambda_o u_o \right] \Big|_{t=t_1} \\
 &= \rho + 1 - 4x_o(t_1) - 2 = 0
 \end{aligned} \tag{8.73}$$

Buradan x_o çözülürse,

$$x_o(t_1) = \frac{\rho - 1}{4} \tag{8.74}$$

bulunur. Bu problemde x pozitiftir. O halde optimum kontrol sırasında $u = -1$ değerinin kullanılabilmesi için $\rho > 1$ olması gereklidir. Aksi takdirde durum eğri 3'deki gibidir ve optimum kontrol aşağıdaki gibidir.

$$u_o = -\frac{\lambda}{2} \tag{8.75}$$

Denklem (8.75), denklem (7.100) birlikte kullanılırsa, denklem (8.75)'in geçerli olduğu bölgede optimum kontrol, x 'e bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 H[x_o(t), u_o(t), \lambda_o(t)] &= \left[\rho + u^2 - 2\lambda x + \lambda u \right] \Big|_o \\
 &= \left[\rho + \frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} \right] \Big|_o = 0
 \end{aligned} \tag{8.76}$$

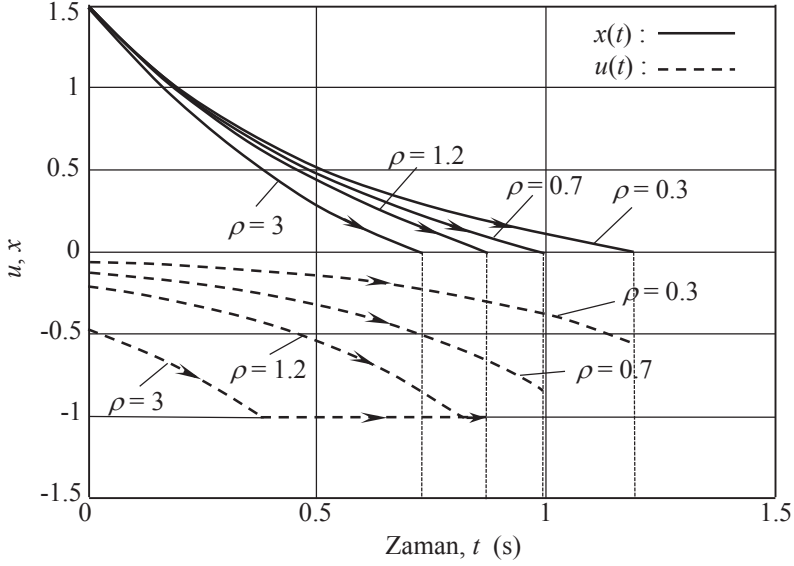
ya da λ çözülürse ve denklem (8.75) kullanılırsa, $u_o(t)$ aşağıdaki ifade edilir.

$$u_o(t) = 2x_o(t) - \sqrt{4[x_o(t)]^2 + \rho} \tag{8.77}$$

Şekil 8.17'de $x(0) = 1.5$ başlangıç durumu ve dört farklı ρ değeri için bulunan optimum kontrol girişleri ve sistem cevapları verilmiştir. Toplam kontrol süresinin ağırlık katsayısı ρ ile değişimi aşağıdaki gibidir.

Çizelge 8.3

Ağırlık katsayısı, ρ	0.3	0.7	1.2	3
Kontrol süresi, t_f (s)	1.20	0.99	0.88	0.72



Şekil 8.17

8.2.3 İzoperimetrik Kısıtlamalı Optimum Kontrol

Daha önce Bölüm 7’de izoperimetrik kısıtlar hakkında ön bilgi verilmişti. Eğer,

$$\int_{t_i}^{t_f} g(\underline{x}, \underline{u}, t) dt = A \quad (\text{Sabit}) \quad (8.78)$$

gibi bir kısıtlama verilmişse, aşağıdaki gibi ek bir durum değişkeni ve durum denklemleri tanımlanır.

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \int_{t_i}^t g(\underline{x}, \underline{u}, t') dt' \quad (8.79)$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (8.80)$$

Ayrıca aşağıdaki sınır şartları uygulanır [7.5, 7.8, 7.9].

$$x_{n+1}(t_i) = 0 \quad x_{n+1}(t_f) = A \quad (8.81)$$

Örnek 8.7’de yöntemin uygulanışı açıklanmıştır.

Örnek 8.7:

Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = -4x + u \quad (8.82)$$

Bu sistemi $x(0) = 2$ başlangıç durumundan $x(t_f) = 0$ son durumuna,

$$\int_0^{t_f} u^2 dt = 2 \quad (8.83)$$

kısıtlamasıyla, aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak getirecek kontrolün bulunması istenmektedir.

$$P.K. = \int_0^{t_f} dt \quad (8.84)$$

Ek bir durum değişkeni ile birlikte, yeni durum değişkenleri $z_1 = x$ ve

$$z_2 = \int_0^t u^2 dt \quad (8.85)$$

olarak tanımlanırsa, durum denklemleri,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -4z_1 + u \\ \dot{z}_2 &= u^2 \end{aligned} \quad (8.86)$$

gibi, sınır şartları ise aşağıdaki gibi olur.

$$\underline{z}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{z}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (8.87)$$

Pontryagin fonksiyonu,

$$H(\underline{z}, u, \underline{\lambda}) = 1 + \lambda_1(-4z_1 + u) + \lambda_2 u^2 \quad (8.88)$$

olduğuna göre, bunu minimum yapan kontrol aşağıdaki gibidir.

$$u = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \quad (8.89)$$

Yardımcı durum denklemleri ise,

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_o}{\partial z_1} = -\frac{\partial}{\partial z_1} \left[1 + \lambda_1 \left(-4z_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \right) + \lambda_2 \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2} \right] = 4\lambda_1 \quad (8.90)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_o}{\partial z_2} = 0$$

olduğundan,

$$\lambda_1 = c_1 e^{4t} \quad \lambda_2 = c_2 \quad u_o = -\frac{c_1 e^{4t}}{2c_2} = c e^{4t} \quad (8.91)$$

elde edilir. Optimum olarak kontrol edilen sistemin durum denklemleri,

$$\dot{z}_1 = -4z_1 + c e^{4t} \quad (8.92)$$

$$\dot{z}_2 = c^2 e^{8t} \quad (8.93)$$

olur. Görüldüğü gibi, $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ 'yi içeren denklemler birbirinden ayrılmış haldedir. z_1 'in zaman cevabı Bölüm 6'da elde edilen denklem (6.52)'de $e^{At} = e^{-4t}$, $\underline{B} = c$ ve $u(\tau) = e^{4\tau}$ alarak; aşağıdaki gibi elde edilir.

$$z_1(t) = e^{-4t} z_1(0) + \frac{c}{8} (e^{4t} - e^{-4t}) \quad (8.94)$$

z_2 'in zaman cevabı ise denklem (8.93)'ün integralini alarak, bir K integrasyon sabiti cinsinden aşağıdaki gibi bulunur.

$$z_2(t) = \frac{c^2}{8} e^{8t} + K \quad (8.95)$$

Denklem (8.87) ile verilen sınır şartları uygulanırsa,

$$t_f = 0.354 \text{ s} \quad c = -1 \quad K = -0.125 \quad (8.96)$$

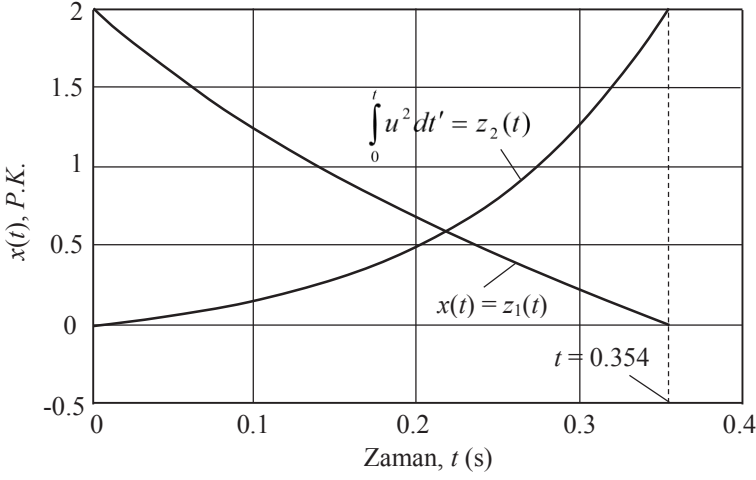
bulunur. Sonuç olarak, sistem çıkışı $z_1(t)$, performans kriteri $z_2(t)$ ve kontrol girişi $u_o(t)$ 'yi veren ifadeler aşağıdaki hali alır.

$$z_1(t) = 2e^{-4t} - 0.125(e^{4t} - e^{-4t}) \quad (0 \leq t \leq 0.354) \quad (8.97)$$

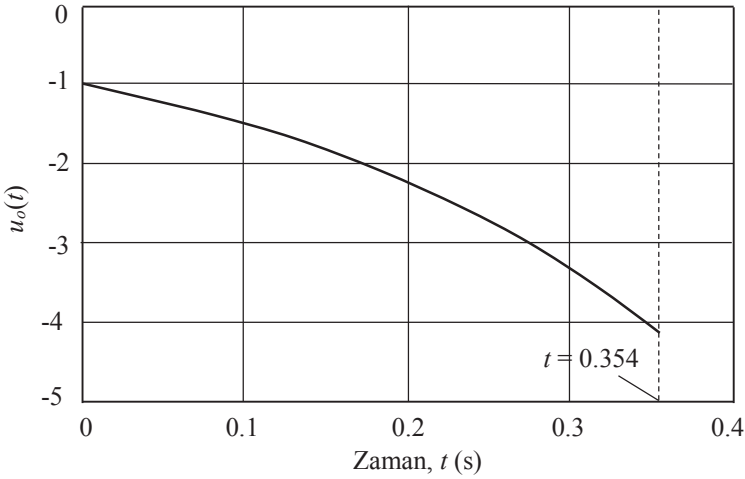
$$z_2(t) = 0.125e^{8t} - 0.125 \quad (0 \leq t \leq 0.354) \quad (8.98)$$

$$u_o(t) = -e^{4t} \quad (0 \leq t \leq 0.354) \quad (8.99)$$

Şekil 8.18 ve Şekil 8.19'da bunların zamanla değişimleri grafik halinde verilmiştir.



Şekil 8.18



Şekil 8.19

KAYNAKLAR

- [8.1] Athans, M., Falb, P.L., *Optimal Control*, ISBN-13 : 978-0486453286, McGraw-Hill, New York, 2006.
- [8.2] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, ISBN-13: 978-0486434841, Dover, Mineola, New York, 2004.
- [8.3] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [8.4] Hsu, J.C., Meyer, A.U., *Modern Control Principles and Applications*, ISBN 07-030635-4, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [8.5] Tou, J.T., *Modern Control Theory*, McGraw-Hill, New York, 1964.

PROBLEMLER

Not: Problemlerin çözümünde MATLAB'den yararlanın.

8.1 Durum denklemleri ve kontrol girişi sınırları,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad -1 \leq u \leq 1$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son

durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolü ve kontrol süresini bulun.

8.2 Aşırı sönümlü ikinci mertebe bir sistemin dinamik denklemleri ve kontrol girişi sınırı aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u(t) \quad -1 \leq u \leq 1$$

i) Sistemin girişi ve çıkışı arasındaki transfer fonksiyonunu bulun.

ii) Bu sistemi faz değişkenleri cinsinden ifade edin. Sistem $t = 0$ 'da $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ durumunda olduğuna göre, sistemi en kısa sürede $x(t_f) = 10$ ve $\dot{x}(t_f) = 0$ konumuna getirecek kontrolü bulun.

8.3 Durum denklemleri ve kontrol girişi sınırları,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad -1 \leq u_i \leq 1 \quad (i=1,2)$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolü ve kontrol süresini bulun.

8.4 Durum denklemleri ve kontrol girişi sınırları,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad -1 \leq u_i \leq 1 \quad (i=1,2)$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \end{bmatrix}$ son durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolü ve kontrol süresini bulun.

8.5 Durum denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad -1 \leq u \leq 1$$

olan sistemi $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ başlangıç durumundan $\underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son durumuna en kısa zamanda getirecek optimum kontrolü ve kontrol süresini bulun.

8.6 Bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + u & |u| &\leq 1 \\ x(0) &= 2 & x(t_f) &= 0 & t_f &= 0.8 \end{aligned}$$

Sistemi son duruma aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak götürecek kontrolü bulun.

$$P.K. = \int_0^{t_f} |u| dt$$

- 8.7** İkinci mertebe bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & \quad |u| \leq 10 \\ \underline{x}(0) &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} & \quad \underline{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \quad t_f = T \quad (\text{Sabit}) \end{aligned}$$

Sistemi son duruma aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak götürecek kontrol seçeneklerini ve kontrol sürelerini bulun. İlk anahtarlama süresine karşı T grafiğini çizin.

$$P.K. = \int_0^T |u| dt$$

- 8.8** Bir sistemin durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + u & \quad |u| \leq 2 \\ x(0) &= 6 & \quad x(t_f) = 0 & \quad t_f: \text{Serbest} \end{aligned}$$

Sistemi son duruma aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak götürecek kontrolü bulun. ρ_0 'ın 1, 2 ve 4 değerleri için optimum sistemin zamanla değişimini, anahtarlama anlarını, anahtarlama anındaki x değerlerini ve toplam kontrol sürelerini bulun. ρ_0 'ın değerinden t_f nasıl etkileniyor?

$$P.K. = \int_0^{t_f} [\rho_0 + |u|] dt \quad (\rho_0 > 0)$$

- 8.9** Durum denklemleri, başlangıç durumu ve son durumu,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5x + u & \quad |u| \leq 1 \\ x(0) &= 4 & \quad x(t_f) = 0 & \quad t_f: \text{Serbest} \end{aligned}$$

olarak verilen sistem için,

$$P.K. = \int_0^{t_f} (\rho + u^2) dt \quad (\rho > 0)$$

performans kriterini minimum yapacak kontrolü, ρ 'nun 0.2, 2 ve 11 değerleri için bulun.

8.10 Bir sistemin durum denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = -6x + u$$

Bu sistemi $x(0) = 3$ başlangıç durumundan $x(t_f) = 0$ son durumuna,

$$\int_0^{t_f} u^2 dt = 2$$

kısıtlamasıyla, aşağıdaki performans kriterini minimum yaparak getirecek kontrolü bulun.

$$P.K. = \int_0^{t_f} dt$$

8.11 Bir sistemin durum denklemleri ve kontrol sırasında uygulanacak sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = -2x + u$$

$$x(0) = 5, \quad x(t_f) = 0, \quad \int_0^{t_f} u^2 dt = 4$$

Minimum yapılmak istenen performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{t_f} dt$$

olduğuna göre optimum kontrolü bulun.

LİNEER KARESEL OPTİMUM KONTROL

Bölüm 7’de sunulan optimum kontrol yöntemi lineer olmayan sistemlere uygulanabilmesine ve genel bir integral performans kriterine sahip olmasına karşın, uygulama açısından pek çok zorluğun aşılmasını gerektirir. Yöntemin verdiği diferansiyel denklemlerin sınır şartlarının bir kısmı başlangıç zamanında, bir kısmı ise son zamanda verilmiştir. Bu yüzden iki uçlu sınır değer probleminin çözülmesi gerekir. Bütün sınır şartları başlangıç anı için verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri ileri integrasyon yöntemiyle oldukça kolayca çözülebilir. Buna karşılık iki uçlu sınır değer problemlerinin çözümü çok zordur. Genel optimum kontrolün bir diğer zorluğu çözümün sınır şartlarına bağımlı olması ve sınır şartları değiştiğinde çözümün tekrarlanması zorunluluğudur. Bütün bu zorluklara rağmen elde edilen optimum kontrol açık çevrim türündedir. Uygulamalarda arzu edilen ise kapalı çevrim bir kontrol sistemi elde etmektir.

Genel optimum kontrolden elde edilen durum ve yardımcı durum denklemlerinden kapalı çevrim optimum kontrol elde edilebilmek için hem sistem tanımı hem de performans kriterinin yapısı açısından bazı fedakarlıklarda bulunmak ve bunları özelleştirmek gerekir. Bu amaçla sistemin aşağıdaki gibi lineer durum denklemleriyle tanımlandığı kabul edilecektir.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (9.1)$$

Daha önce Bölüm 7’de kabul edilen genel integral performans kriteri yerine aşağıdaki gibi karesel terimlerden oluşan bir performans kriteri kullanılacaktır.

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{P}\underline{u}) dt + \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{S}\underline{x} \Big|_{t_f} \quad (9.2)$$

Yukarıdaki ifadede geçen matrislerin özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \underline{Q} & : n \times n \text{ simetrik, pozitif semi-definit matris} \\ \underline{P} & : r \times r \text{ simetrik, pozitif definit matris} \\ \underline{S} & : n \times n \text{ simetrik, pozitif semi-definit matris} \end{aligned}$$

Bu özellikler zaman geçtikçe performans kriteri değerinin artarak anlam kazanmasını sağlar. Performans kriterinin \underline{S} matrisini içeren ikinci terimi son durum ceza fonksiyonu olarak anılır.

Denklem (9.2)'de \underline{P} 'nin elemanları çok küçük alınırsa, performans kriterini fazlaca artırmadan büyük kontrol girişleri kullanılabilir. \underline{P} sıfıra doğru götürülürse, sisteme sonsuza yakın büyüklükte kontrol girişleri verilebilir. (Ancak, \underline{P} pozitif definit kabul edildiğinden tam olarak sıfır yapılamaz.) Bu durumda performans kriterinin mutlak minimum değeri $\underline{x} = 0$ olduğunda sıfır olarak elde edilir. Yani, sistem kendisine sağlanabilen kontrol girişlerinin büyüklüklerinin el verdiği ölçüde sistemi durum uzayının orijinine götürmeye çalışır. Bu nedenle, bu tür kontrol sistemi, *durum kontrol sistemi* olarak anılır.

9.1 Matris Riccati Denklemi

Matris Riccati denklemi karesel optimum kontrol problemlerinin çözümünde en çok kullanılan denklemdir. Varsayılan durum denklemleri ve performans kriteri denklem (9.1) ve denklem (9.2)'deki gibidir.

Optimum kontrol çözümü bulunurken aşağıdaki matris eşitliklerinden yeri geldiğinde yararlanılacaktır.

$$\frac{\partial \underline{x}^T \underline{a}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{a}^T \underline{x}}{\partial \underline{x}} = \underline{a} \quad (9.3)$$

$$(\underline{ab})^T = \underline{b}^T \underline{a}^T \quad (9.4)$$

Bu problem için Pontryagin fonksiyonu denklem (7.87)'den aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{P} \underline{u} + \underline{\lambda}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{\lambda}^T \underline{B} \underline{u} \quad (9.5)$$

Optimum kontrol \underline{u}^o için denklem (7.89)'dan aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{P} \underline{u}^o + \underline{B}^T \underline{\lambda} = 0 \quad (9.6)$$

$$\underline{u}^o = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{\lambda} \quad (9.7)$$

\underline{u}^o için durum ve yardımcı durum denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = -\underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{\lambda} \quad (9.8)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}^o = \underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{\lambda} \quad (9.9)$$

$\underline{\lambda}$ ile \underline{x} arasında simetrik ve pozitif definit bir $\underline{R}(t)$ matrisi cinsinden aşağıdaki gibi bir ilişki olduğunu varsayarak çözüme ulaşılabilir.

$$\underline{\lambda}(t) = \underline{R}(t)\underline{x}(t) \quad (9.10)$$

Bu ifadenin türevi alınır, denklem (9.8) kullanılırsa,

$$\dot{\underline{\lambda}} = \dot{\underline{R}}\underline{x} + \underline{R}\dot{\underline{x}} = -\underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{\lambda} = -\underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{R}\underline{x} \quad (9.11)$$

ve denklem (9.9) kullanılırsa,

$$\dot{\underline{R}}\underline{x} + \underline{R}\underline{A}\underline{x} - \underline{R}\underline{B}\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}\underline{x} = -\underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{R}\underline{x} \quad (9.12)$$

olur. Sağ taraftaki terimler sola alınır ve \underline{x} sağ taraftan parantez dışına alınır,

$$(\dot{\underline{R}} + \underline{R}\underline{A} + \underline{R}\underline{B}\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R} + \underline{Q} + \underline{A}^T \underline{R})\underline{x} = 0 \quad (9.13)$$

Denklem (9.13)'ün farklı \underline{x} değerleri için sağlanabilmesi ancak \underline{x} 'in katsayısının sıfır olmasıyla mümkün olduğundan \underline{R} 'nin çözülebileceği aşağıdaki denklem bulunur.

$$\dot{\underline{R}} + \underline{R}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{R} - \underline{R}\underline{B}\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R} + \underline{Q} = 0 \quad (9.14)$$

İsmi *Matris Riccati Denklemi* olan bu denklemin çözülmesi için gerekli olan sınır şartları ise t_f sabit, $\underline{x}(t_f)$ serbest olduğundan denklem (7.32)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{S} \underline{x} \right)}{\partial \underline{x}} - \underline{\lambda} \right]_{t_f} = 0 \quad (9.15)$$

ya da,

$$\underline{S}\underline{x}(t_f) = \underline{\lambda}(t_f) = \underline{R}(t_f)\underline{x}(t_f) \quad (9.16)$$

ya da,

$$\underline{R}(t_f) = \underline{S} \quad (9.17)$$

Optimum kontrol denklem (9.7)'den,

$$\underline{u}^o = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R} \underline{x} = -\underline{K}^T \underline{x} \quad (9.18)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi optimum kontrol durum değişkenlerinin fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Yani bu yöntemle kapalı çevrim kontrol elde edilmektedir. Burada \underline{K}^T matrisinin elemanları geri besleme katsayılarıdır.

Düşük mertebeli sistemlerde Riccati denkleminin çözümü analitik olarak elde edilebilirse de bu pratik bir yol değildir. En uygun yöntem, t_f anında denklem (9.17) ile verilen sınır şartından başlayarak, $t = 0$ anına kadar negatif zaman yönünde denklemin nümerik olarak integralini almaktır.

Örnek 9.1:

Örnek olarak durum denklemleri ve performans kriteri aşağıda verilen birinci mertebe sistem için optimum kontrol bulunacaktır.

$$\dot{x} = -x + u \quad (9.19)$$

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) + \frac{1}{2} s x^2 \Big|_{t_f} \quad (9.20)$$

Bu sistem için $\underline{R}(t)$ matrisi 1×1 boyutlu $r(t)$ gibi skalar bir değişkendir. Ayrıca $\underline{A} = -1$, $\underline{B} = 1$, $\underline{Q} = 1$, $\underline{P} = 1$ olduğundan matris Riccati denklemi ve sınır şartı aşağıdaki hali alır.

$$\dot{r} - 2r - r^2 + 1 = 0 \quad (9.21)$$

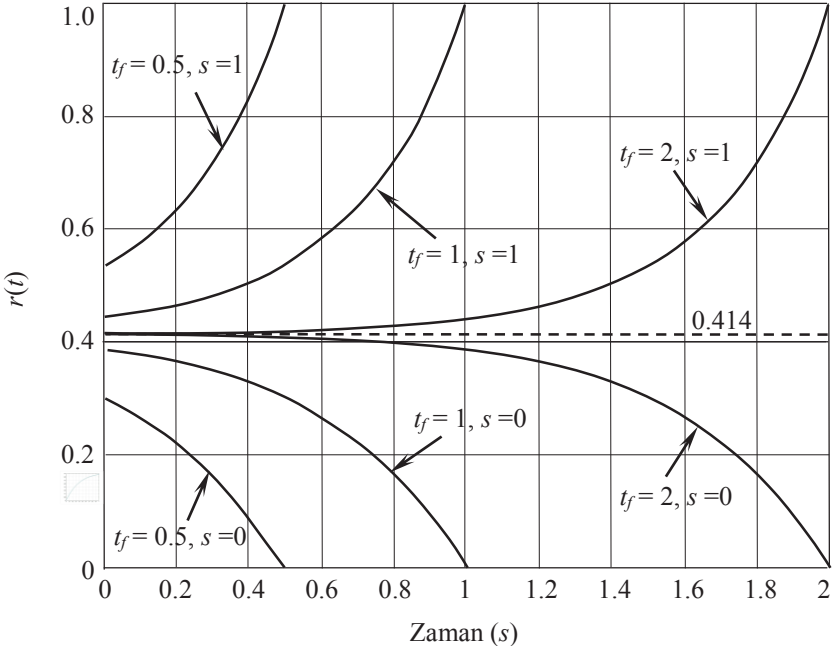
$$r(t_f) = s \quad (9.22)$$

Değişik t_f ve s değerleri için elde edilen $r(t)$ çözümleri Şekil 9.1'de verilmiştir. Görüldüğü gibi, eğriler grafiğin sol tarafında denklem (9.21)'in durağan çözümü olan 0.414 değerine doğru gitmektedir. t_f 'nin değeri arttıkça eğrinin çözümün geçici kısmı sağa doğru kayacak, t_f sonsuz olduğunda geçici kısım sonsuzda kalacak ve $r(t)$ 'nin çözümü 0.414'e eşit bir sabit haline gelecektir.

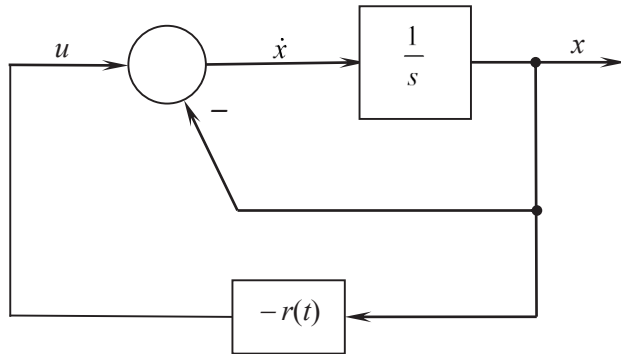
Denklem (9.18)'den,

$$u^o = -r(t)x \quad (9.23)$$

olarak bulunur. Kontrol edilmiş sistemin blok diyagramı Şekil 9.2'de verilmiştir.



Şekil 9.1



Şekil 9.2

Şekil 9.1'den anlaşıldığı gibi, denklem (9.2)'de $t_f = \infty$ alındığında, $\underline{R}(t)$ matrisi, elemanları sabitler olan \underline{R}_0 gibi bir matris haline gelmekte ve matris Riccati denklemi aşağıdaki denkleme indirgenmektedir. Bu denkleme *indirgenmiş Riccati denklemi* ya da *cebirsal Riccati denklemi* denir.

$$\underline{R}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{R}_0 - \underline{R}_0 \underline{B} \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 + \underline{Q} = 0 \quad (9.24)$$

Bu denklemde \underline{R}_0 simetrik ve pozitif definittir. Eğer matris işlemleri yapıp, denklemin sol tarafı tek bir matris halinde yazılırsa ve her bir terim sıfıra eşitlenirse, \underline{R}_0 'ın elemanlarının çözülmesine olanak veren cebirsel denklemler elde edilir. Ancak bu denklemlerde karesel terimler olacağından çok seçenekli çözümler bulunacaktır. Bunlar arasından \underline{R}_0 'ı pozitif definit yapan çözüm seçilir. Bu yöntem düşük mertebeli sistemlerde kolayca kullanılabilir. Ancak yüksek mertebeli sistemlerde içinden çıkılmaz hale döner. Bu durumda denklem (9.24)'de \underline{R}_0 yerine $\underline{R}(t)$ koyulur ve denkleme bir $\dot{\underline{R}}(t)$ terimi eklenerek denklem (9.14)'de verilen matris Riccati denklemi yazılır. Negatif zaman yönünde durağan çözüm elde edilinceye kadar bu denklemin integrali alınırsa \underline{R}_0 elde edilir. Bunun yerine aşağıdaki denklemin $t = 0$ 'dan itibaren durağan çözüm elde edilinceye kadar pozitif zaman yönünde integralinin alınması da yeterlidir.

$$\dot{\underline{R}} - \underline{R} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{R} + \underline{R} \underline{B} \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R} - \underline{Q} = 0 \quad (9.25)$$

MATLAB gibi yazılımlarda indirgenmiş Riccati denklemini çözen komutlardan da yararlanma imkanı vardır.

Örnek 9.2:

Bir sistemin durum denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9.26)$$

olarak verilmiştir. Bu sistemin aşağıdaki performans kriterini minimum yapacak biçimde kontrol edilmesi isteniyor.

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(x_1 + x_2)^2 + \rho^2 u^2] dt \quad (\rho > 0.5) \quad (9.27)$$

Burada ρ , değeri bilinen bir sabittir. Riccati denklemini kullanarak optimum kontrol için geri besleme katsayılarını bulun. Kontrol edilmiş sistemin blok diyagramını çizin.

$t_f = \infty$ olduğundan indirgenmiş Riccati denklemi kullanılabilir. Bu problemde \underline{A} , \underline{B} , \underline{Q} , \underline{P} ve \underline{R}_0 matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \underline{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \underline{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{P} &= [\rho^2] & \underline{R}_0 &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Bu matrisler indirgenmiş Riccati denkleminde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (9.29)$$

olur. Matris işlemleri yapıлып sol taraf tek bir matris halinde yazılırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$\begin{bmatrix} -\frac{r_{12}^2}{\rho^2} + 1 & r_{11} - \frac{r_{12}r_{22}}{\rho^2} + 1 \\ r_{11} - \frac{r_{12}r_{22}}{\rho^2} + 1 & 2r_{12} - \frac{r_{22}^2}{\rho^2} + 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (9.30)$$

Bu matrisin terimleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki üç bağımsız denklem elde edilir.

$$-\frac{r_{12}^2}{\rho^2} + 1 = 0 \quad (9.31)$$

$$r_{11} - \frac{r_{12}r_{22}}{\rho^2} + 1 = 0 \quad (9.32)$$

$$2r_{12} - \frac{r_{22}^2}{\rho^2} + 1 = 0 \quad (9.33)$$

Denklem (9.30)'dan $r_{12} = \pm \rho$ olarak iki çözüm bulunur. Bu değerler denklem (9.32)'de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} r_{12} = -\rho \text{ için} \quad r_{22} &= \pm \rho \sqrt{1-2\rho} \quad (\text{sanal değer}) \\ r_{12} = +\rho \text{ için} \quad r_{22} &= \pm \rho \sqrt{1+2\rho} \end{aligned} \quad (9.34)$$

bulunur. $r_{12} = -\rho$ için r_{22} 'nin değeri sanaldır. O halde $r_{12} = +\rho$ geçerlidir. Bir sonraki aşamada denklem (9.32)'de $r_{12} = +\rho$ ve $r_{22} = \pm \rho \sqrt{1+2\rho}$ yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} r_{22} = -\rho \sqrt{1+2\rho} \text{ için} \quad r_{11} &= -1 - \sqrt{1+2\rho} \quad (\text{negatif}) \\ r_{22} = +\rho \sqrt{1+2\rho} \text{ için} \quad r_{11} &= -1 + \sqrt{1+2\rho} \end{aligned}$$

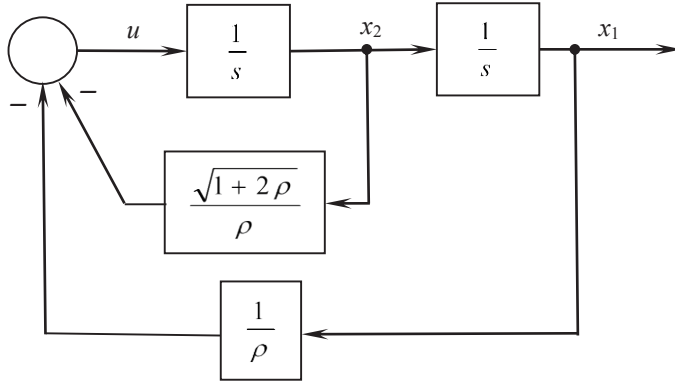
Yukarıda birinci çözüm negatif olduğundan $r_{22} = +\rho \sqrt{1+2\rho}$ geçerlidir. Sonuçta elde edilen \underline{R}_0 matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1+2\rho} & \rho \\ \rho & \rho \sqrt{1+2\rho} \end{bmatrix} \quad (9.35)$$

Kapalı çevrim optimum kontrol, denklem (9.18)'den aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \underline{u}^o &= -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 \underline{x} = -\frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{r_{12}}{\rho^2} & -\frac{r_{22}}{\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} x_1 - \frac{\sqrt{1+2\rho}}{\rho} x_2 \end{aligned} \quad (9.36)$$

Optimum olarak kontrol edilen sistemin blok diyagramı Şekil (9.3)'deki gibidir.



Şekil 9.3

9.2 Kalman Denklemi

Karesel optimum kontrol aşağıda türetilen Kalman denklemiyle elde edilebilir [9.1]. Sistemin durum denklemleri yine lineer olup, aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (9.37)$$

Performans kriteri ise denklem (9.2)'nin aşağıda verilen özel bir halidir. Yani denklem (9.2)'de $t_f = \infty$ ve $\underline{s} = 0$ alınmıştır.

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{P}\underline{u}) dt \quad (9.38)$$

$t_f = \infty$ olduğuna göre aşağıda tekrar verilen cebirsel Riccati denklemini geçerlidir.

$$\underline{R}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{R}_0 - \underline{R}_0 \underline{B} \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 + \underline{Q} = 0 \quad (9.39)$$

\underline{Q} matrisi pozitif definit ya da semi-definit olduğundan uygun tanımlanmış bir $\underline{\Gamma}$ matrisi cinsinden,

$$\underline{Q} = \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^T \quad (9.40)$$

şeklinde yazılabilir. \underline{P} matrisi ise mutlaka pozitif definit olduğundan,

$$\underline{P} = \underline{D} \underline{D} \quad \underline{P}^{-1} = \underline{D}^{-1} \underline{D}^{-1} \quad (9.41)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada \underline{D} matrisi simetrik ve pozitif definitir. Denklemler (9.40) ve (9.41), denklem (9.39)'da yerine koyulup terimler düzenlenirse, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\underline{R}_0 \underline{A} - \underline{A}^T \underline{R}_0 + \underline{R}_0 \underline{B} \underline{D}^{-1} \underline{D}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 = \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^T \quad (9.42)$$

Diğer yandan geri besleme matrisi ifadesinden,

$$\underline{K}^T = \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 = \underline{D}^{-1} \underline{D}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 \quad (9.43)$$

ya da,

$$\underline{D} \underline{K}^T = \underline{D}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 \quad (9.44)$$

ya da iki tarafın transpozu alınır,

$$\underline{K} \underline{D} = \underline{R}_0 \underline{B} \underline{D}^{-1} \quad (9.45)$$

olur. Denklemler (9.44) ve (9.45), denklem (9.42)'de yerine koyulursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\underline{R}_0 \underline{A} - \underline{A}^T \underline{R}_0 + \underline{K} \underline{D} \underline{D} \underline{K}^T = \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^T \quad (9.46)$$

Bu denklem sol taraftan $\underline{D}^{-1} \underline{B}^T \underline{\Phi}^T(-s)$ ile, sağ taraftan $\underline{\Phi}(s) \underline{B} \underline{D}^{-1}$ ile çarpılırsa ($\underline{\Phi}(s)$ çözücü matris), burada ayrıntısı verilmeyen bazı ara işlemlerden sonra aşağıda verilen denkleme ulaşılır [9.1].

$$\langle \underline{I} + \underline{D} \underline{K}^T \underline{\Phi}(s) \underline{B} \underline{D}^{-1} \rangle^2 = \underline{I} + \langle \underline{\Gamma}^T \underline{\Phi}(s) \underline{B} \underline{D}^{-1} \rangle^2 \quad (9.47)$$

Bu denklemde yer alan $\langle \dots \rangle^2$ sembolü, aşağıdaki gibi tanımlanan matris işleminin kısa yazılıdır.

$$\langle \underline{M}(s) \rangle^2 = \underline{M}^T(-s) \underline{M}(s) \quad (9.48)$$

Denklem (9.47) *Kalman denklemi* olarak anılır. Bu denklemden kapalı çevrim kontrolün geri besleme katsayıları doğrudan çözülebilir. Pozitif geri besleme olmaması için \underline{K} 'nin elemanlarının pozitif işaretli çözümleri seçilir.

Aşağıda Kalman denkleminin bazı özel halleri verilmiştir.

Özel Hal 1: Eğer $\underline{P} = \underline{I}$ ise,

$$\langle \underline{I} + \underline{K}^T \underline{\Phi}(s) \underline{B} \rangle^2 = \underline{I} + \langle \underline{\Gamma}^T \underline{\Phi}(s) \underline{B} \rangle^2 \quad (9.49)$$

Özel Hal 2: Eğer $\underline{P} = \underline{I}$ ise ve \underline{B} matrisi, $\underline{B} = \underline{b}$ gibi bir sütun matris ise, yani kontrol girişi u skalar ise,

$$\langle 1 + \underline{k}^T \underline{\Phi}(s) \underline{b} \rangle^2 = 1 + \langle \underline{\Gamma}^T \underline{\Phi}(s) \underline{b} \rangle^2 \quad (9.50)$$

Örnek 9.3:

Daha önce cebirsel Riccati denklemi için verilen örnekteki sistem için optimum kontrol, $\rho = 1$ alarak bu defa Kalman denklemiyle bulunsun. Sistemin durum denklemleri ve performans kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9.51)$$

$$P.K. = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(x_1 + x_2)^2 + u^2] dt \quad (9.52)$$

Bu problemde \underline{A} , \underline{b} , \underline{Q} ve \underline{P} matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = [1] \quad (9.53)$$

$\underline{Q} = \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^T$ ve $\underline{P} = \underline{D} \underline{D}$ olduğuna göre, $\underline{\Gamma}$ ve \underline{D} matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \underline{D} = [1] \quad (9.54)$$

Çözücü matris $\underline{\Phi}(s)$ ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{\Phi}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

Şimdi Kalman denklemi, denklem (9.50)'deki haliyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \left\langle 1 + [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle^2 \\ & = 1 + \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle^2 \end{aligned} \quad (9.56)$$

$$\left\langle 1 + \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} \right\rangle^2 = 1 + \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}s^2} + \frac{1}{\sqrt{2}s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}s^2} + \frac{1}{\sqrt{2}s} \end{bmatrix} \right\rangle^2 \quad (9.57)$$

Denklem (9.48)'de verilen matris operasyonu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k_1}{s^2} - \frac{k_2}{s} \right) \left(1 + \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} \right) \\ & = 1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}s^2} - \frac{1}{\sqrt{2}s} & \frac{1}{\sqrt{2}s^2} - \frac{1}{\sqrt{2}s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}s^2} + \frac{1}{\sqrt{2}s} & \frac{1}{\sqrt{2}s^2} + \frac{1}{\sqrt{2}s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.58)$$

ya da,

$$1 + (2k_1 - k_2^2) \frac{1}{s^2} + \frac{k_1^2}{s^4} = 1 - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \quad (9.59)$$

Eşitliğin sağ ve solunda s 'nin aynı kuvvetli terimlerinin katsayıları eşitlenirse k_1 ve k_2 'nin çözülebileceği aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$k_1^2 = 1 \quad (9.60)$$

$$2k_1 - k_2^2 = -1 \quad (9.61)$$

Birinci denklemden $k_1 = \pm 1$ elde edilir. Negatif geri besleme için + işaretli kök seçilerek,

$$k_1 = 1 \quad (9.62)$$

alınır. Bu değer ikinci denklemde yerine koyulursa elde edilen,

$$k_2^2 = 2k_1 + 1 = 3 \quad (9.63)$$

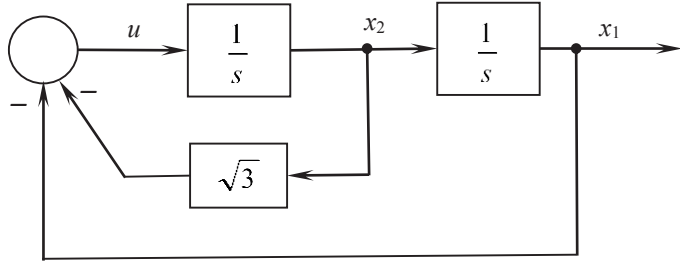
denklemden $k_2 = \pm\sqrt{3}$ elde edilir. Bunlar arasından da + işaretli kök seçilerek,

$$k_2 = \sqrt{3} \quad (9.64)$$

bulunur. Optimum kontrol girişi,

$$u^o = [-1 \quad -\sqrt{3}] \underline{x} = -x_1 - \sqrt{3}x_2 \quad (9.65)$$

şeklinde olup, kontrol edilen sistemin blok diyagramı Şekil 9.4'deki gibidir. Doğal olarak, elde edilen sistem $\rho = 1$ için Şekil 9.3'dekiyle aynıdır.



Şekil 9.4

KAYNAKLAR

- [9.1] Schultz, D.G., Melsa, J.L., *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1966.

PROBLEMLER

9.1 Bir sistem aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 4x_2 + u \end{aligned}$$

a) $P.K. = \int_0^{\infty} (9x_1^2 + 4x_2^2 + u^2) dt$ performans kriterini minimum

yapacak kapalı-çevrim kontrolü cebirsel Riccati denklemini kullanarak bulun. Kontrol edilmiş sistemin blok diyagramını çizin.

- b) Kontrol edilmiş sistemin (kapalı-çevrim) kutuplarının yerini bulun ve açık çevrim sistemin kutuplarının yerleriyle karşılaştırın.

9.2 Bir sistem aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 4x_2 + u\end{aligned}$$

a) $P.K. = \int_0^{\infty} (9x_1^2 + 4x_2^2 + u^2) dt$ performans kriterini minimum

yapacak kapalı-çevrim kontrolü Kalman denklemini kullanarak bulun. Kontrol edilmiş sistemin blok diyagramını çizin.

9.3 Bir sistemin durum denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = -5x + u$$

$\rho = 0.02$ ve $\rho = 1$ değerleri için,

$$P.K. = \int_0^{\infty} (x^2 + \rho u^2) dt$$

performans kriterini minimum yapacak kapalı çevrim kontrolleri cebirsel Riccati denklemini kullanarak bulun. $\rho = 1$ için kapalı çevrim sistemin blok diyagramını çizin. Başlangıçta sistem $x(0) = 10$ durumunda ise, sistem cevaplarını karşılaştırın. (Sistem cevaplarını MATLAB kullanarak bulun.)

9.4 Bir sistemin durum denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = -5x + u$$

$\rho = 0.02$ ve $\rho = 1$ değerleri için,

$$P.K. = \int_0^{\infty} (x^2 + \rho u^2) dt$$

performans kriterini minimum yapacak kapalı çevrim kontrolleri Kalman denklemini kullanarak bulun. $\rho = 1$ için kapalı çevrim sistemin blok diyagramını çizin. Başlangıçta sistem $x(0) = 10$ durumunda ise, sistem cevaplarını karşılaştırın. (Sistem cevaplarını MATLAB kullanarak bulun.)

- 9.5** Bir sistemin durum denklemleri ve kontrol sırasında minimum yapılacak performans kriteri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad P.K. = \int_0^{10} (x_1^2 + u^2) dt$$

Matris Riccati denklemini kullanarak zamanın fonksiyonu olarak geribesleme katsayılarını bulun. Kontrol edilmiş sistemin denklemlerini yazın. (MATLAB kullanın.)

- 9.6** Bir sistemin dinamik davranışı aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır. Bu denklemde u kontrol girişi, u_d ise bozucu giriştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_d$$

Kontrol sırasında minimum yapılacak performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + 2u^2) dt$$

olduğuna göre matris Riccati denkleminin durağan çözümünü kullanarak geribesleme katsayılarını bulun. Kontrol edilmiş sistemin denklemlerini yazın. u_d bu çözümü nasıl etkiler? (Diferansiyel denklemleri çözmek için MATLAB kullanın.)

- 9.7 Bir sistemin durum denklemleri ve kontrol sırasında minimum yapılacak performans kriteri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad P.K. = \int_0^2 (x_1^2 + \rho u^2) dt$$

$\rho = 0.01$ ve $\rho = 1$ değerleri için, matris Riccati denklemini kullanarak geribesleme katsayılarını zamanın fonksiyonu olarak bulun. (MATLAB kullanın.)

10

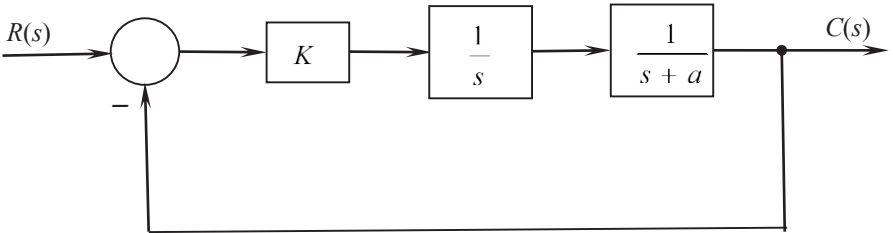
KUTUP YERLEŞTİRME

YÖNTEMİ

10.1 Kutup Yerleştirme Yöntemleri

Daha önce Bölüm 3’de çevrim kazancı değiştirildiğinde sistemin kapalı çevrim kutuplarının kompleks düzlemde yer eğrileri üzerindeki değişim biçimleri ve açık çevrim transfer fonksiyonuna eklenen kutup ve sıfırlarla yer eğrilerinin şeklinin nasıl deęiŐtirilebileceęi incelenmişti. Ancak sunulan yöntem, kutupların kompleks düzlemde herhangi bir noktaya yerleŐtirilmesine olanak vermemekteydi. Bu sınırlama, kapalı çevrim kontrol sırasında sadece sistem çıkışının geri beslenmesinin bir sonucudur. Eğer sistem durum değişkenleri cinsinden tanımlanmışsa, durum değişkenlerinin hepsi geri beslenebilir ve sistem kutupları kompleks düzlemde isteniler yerlere yerleştirilebilir.

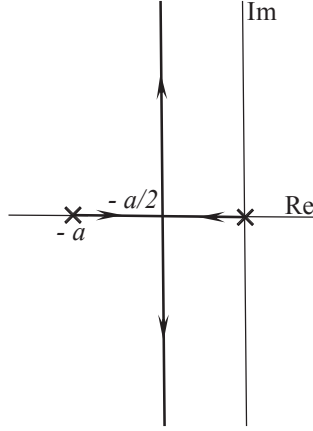
Basit bir örnek olarak Şekil 10.1’de görölen ve sistem çıkışının geri beslendiği klasik bir kontrol sistemini ele alalım. Bu sistemin karakteristik polinomu $D(s) = s^2 + as + K$ şeklinde olup, kutupları aşağıdaki gibidir.



Şekil 10.1

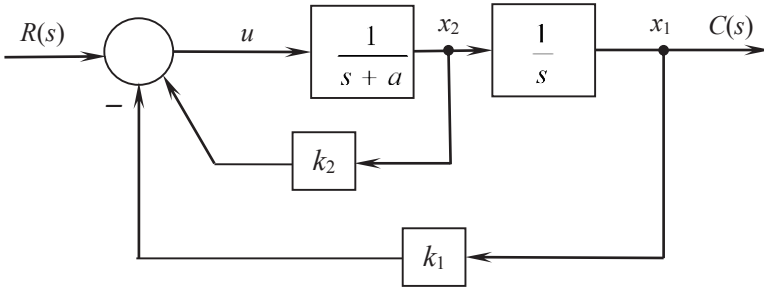
$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2} \quad (10.1)$$

Çevrim kazancı K 'nın değeri 0'dan ∞ 'a kadar artırıldığında kompleks düzlemde kutupların değişimi Şekil 10.2'deki yer eğrileriyle gösterilmiştir. Bu yer eğrilerinin dışında kutup elde etme imkanı yoktur.



Şekil 10.2

Şimdi de bütün durum değişkenlerinin geri beslendiği Şekil 10.3'deki modern kontrol yaklaşımını inceleyelim. Bu sistemin karakteristik polinomu ise $D(s) = s^2 + (k_2 + a)s + k_1$ gibidir. Polinomun katsayıları k_1 ve k_2 'nin değerlerini ayarlayarak birbirinden bağımsız olarak değiştirilebildiğinden sistemin kutupları kompleks düzlemde herhangi bir yere yerleştirilebilir.



Şekil 10.3

Bu bölümün amacı,

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u \quad (10.2)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (10.3)$$

denklemleriyle tanımlanan n 'inci mertebe, tek girişi ve tek çıkışı olan bir sistemin kutuplarını kompleks düzlemde istenilen yerlere, durum değişkenlerini

$$u = \underline{k}^T \underline{x} \quad (10.4)$$

şeklinde geri besleyerek sağlamaktır. Bu işlem *kutup yerleştirme* olarak anılır.

Bütün durum değişkenlerinin ölçülebilir olduğu, yani sistemin gözlenebilir olduğu, kabul edilecektir. Ayrıca sistem kontrol edilebilir olmalı, yani kontrol edilebilirlik matrisinin rank'ının n olması gereklidir. Eğer bu şart sağlanmıyorsa, bazı kutupların yerlerinin geri besleme yoluyla değiştirilmesi mümkün değildir. Örneğin,

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (10.5)$$

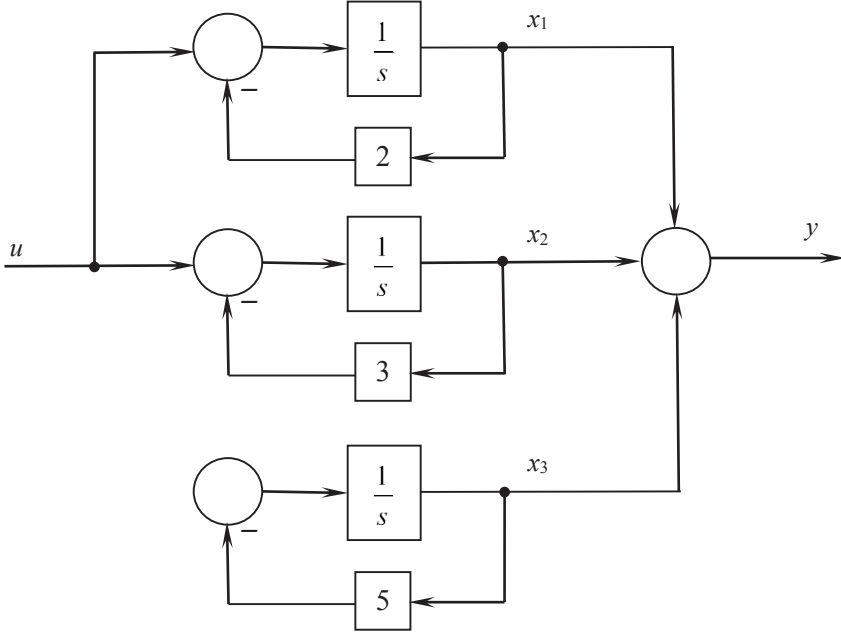
$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \underline{x} \quad (10.6)$$

olarak tanımlanmış bir sistem olsun. Bu sistemin blok diyagramı Şekil 10.4'deki gibidir. Görüldüğü gibi, diyagramın alt kısmındaki çevrime u girişinin erişimi yoktur. Sistemin kontrol edilebilirlik matrisi \underline{M}_C ,

$$\underline{M}_C = [\underline{B} | \underline{A}\underline{B} | \underline{A}^2 \underline{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

şeklinde olup, rank'ı 2 (<3) olduğundan sistem *kontrol edilebilir* değildir. Gerçekten de bu sistemde,

$$u = \underline{k}^T \underline{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (10.8)$$



Şekil 10.4

alınırsa, durum denklemi aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \underline{x} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \\
 &= \begin{bmatrix} k_1 - 2 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 - 3 & k_3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}^* \underline{x}
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

Yeni sistem matrisi \underline{A}^* 'dir. Karakteristik denklem ise,

$$\begin{aligned}
D(s) = \det(s\underline{I} - \underline{A}^*) &= \det \begin{bmatrix} s - k_1 + 2 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & s - k_2 + 3 & -k_3 \\ 0 & 0 & s + 5 \end{bmatrix} \\
&= (s - k_1 + 2)(s + 5) - k_1 k_2 (s + 5) \\
&= [s^2 + (7 - k_1 - k_1 k_2)s + 10 - 5k_1 k_2](s + 5)
\end{aligned} \tag{10.10}$$

olduğundan -5'deki kutbun yeri k_1 ve k_2 geri besleme katsayıları tarafından değiştirilememektedir.

Kutup yerleştirme probleminin çözümü için literatürde birden fazla yöntem vardır. Aşağıda bunlardan iki tanesi verilecektir. Birinci yöntem daha doğrudandır ve arkasındaki sebep daha anlaşılardır. İkinci yöntem ise bu konuda daha önceden türetilmiş bir formüle dayanır, ama işlemler açısından daha kolaydır.

Yöntem 1: Doğrudan Metot

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Bütün durum değişkenlerinin ölçülebildiğini ve sistemin kontrol edilebilir olduğunu kabul edilsin.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \tag{10.11}$$

u girişi geri besleme katsayı matrisi \underline{k} cinsinden,

$$u = \underline{k}^T \underline{x} \tag{10.12}$$

olduğundan, bu giriş uygulandığında elde edilecek yeni sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{k}^T \underline{x} = (\underline{A} + \underline{B}\underline{k}^T)\underline{x} = \underline{A}^* \underline{x} \tag{10.13}$$

\underline{A}^* yeni sistem matrisi olup, bu sistemin karakteristik polinomu aşağıdaki ifadede elde edilebilir.

$$D(s) = \det(s\underline{I} - \underline{A}^*) = \det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\underline{k}^T) \tag{10.14}$$

Kutup yerleştirme sonunda sistemin yeni kutupları λ_i ($i=1, \dots, n$) olsun. Bu kutuplar cinsinden sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \dots (s - \lambda_n) \tag{10.15}$$

Denklem (10.14) ve denklem (10.15) eşitlenirse,

$$\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\underline{k}^T) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \dots (s - \lambda_n) \quad (10.16)$$

olur. Bu denklemdeki işlemler yapılırsa, iki tarafta da s cinsinden n 'inci merteye polinomlar elde edilir. s 'nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayıları sağlı-sollu birbirine eşitlenirse \underline{k} 'nin elemanlarını çözmek için n sayıda denklem bulunur.

Örnek 10.1:

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (10.17)$$

Bu sistemin kutupları $p_{1,2} = -0.1 \pm j$ ve $p_3 = 0$ değerlerindedir. Bu kutupları $p_{1,2} = -1 \pm j$ ve $p_3 = -10$ noktalarına getirecek geri besleme matrisi \underline{k} ($u = \underline{k}^T \underline{x}$) doğrudan yöntemle aşağıdaki gibi bulunur.

u skalar ise sistemin kontrol edilebilirlik matrisi daima kare şeklindedir. Bu sistemin kontrol edilebilirlik matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{M}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 & -0.97 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

\underline{M}_C matrisinin determinantı $\det(\underline{M}_C) = -1 \neq 0$ olduğundan matrisin rank'ı 4'dür ve verilen sistem *kontrol edilebilir*'dir.

Şimdi denklem (10.16) yazılabilir.

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) \quad (10.19)$$

$$= (s + 1 + j)(s + 1 - j)(s + 10)$$

ya da,

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -k_1 & 1.01 - k_2 & s + 0.2 - k_3 \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

$$= (s + 1 + j)(s + 1 - j)(s + 10)$$

ya da,

$$s^3 + (0.2 - k_3)s^2 + (1.01 - k_2)s - k_1 \quad (10.21)$$

$$= s^3 + 12s^2 + 22s + 20$$

Bu denklemin sağ ve sol tarafında s 'nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayıları eşitlenirse aşağıdaki katsayılar ve u girişi elde edilir.

$$0.2 - k_3 = 12 \quad \rightarrow \quad k_3 = -11.8$$

$$1.01 - k_2 = 22 \quad \rightarrow \quad k_2 = -20.99$$

$$k_1 = -20$$

$$u = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]x = -20x_1 + 20.99x_2 - 11.8x_3$$

Yeni sistem matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{A}^* = \underline{A} + \underline{B}\underline{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & -20.99 & -11.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & -20.99 & -11.8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -22 & -12 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Yöntem 2: Ackermann Formülünün Kullanımı

Yöntem 1'in en zor kısmı denklem, (10.16)'nın sol tarafındaki determinantın bulunması gerekliliği ve sonuca giderken fazladan işlemler yapılmasıdır. Ackermann formülü geri besleme katsayılarını tek aşamada verir [10.1]. Buna karşılık kontrol edilebilirlik matrisi \underline{M}_C 'nin tersinin alınmasını gerektirir.

Formülün ispatı [10.1] ve [10.2] numaralı kaynaklarda bulunabilir. Burada sadece kullanım şekli üzerinde durulacaktır. $u = \underline{k}^T \underline{x}$ olarak tanımlanırsa, Ackermann formülünün ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{k}^T = -[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \underline{M}_C^{-1} D(\underline{A}) \quad (10.23)$$

Burada $D(\underline{A})$ terimi, olması istenen kutuplara karşılık gelen karakteristik denklem $D(s)$ 'de $s = \underline{A}$ yerine koyularak elde edilir. Yani,

$$D(s) = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (10.24)$$

ise,

$$D(\underline{A}) = \underline{A}^n + a_n \underline{A}^{n-1} + a_{n-1} \underline{A}^{n-2} + \dots + a_2 \underline{A} + a_1 \underline{I} \quad (10.25)$$

olarak alınır.

Örnek 10.2:

Daha önce Yöntem 1 için verilen örnek bu defa Ackermann formülüyle çözülsün.

Sistemin kontrol edilebilirliği daha önce test edildiğinden, bu işlem burada tekrar edilmeyecek ve denklem (10.18) doğrudan kullanılacaktır. Olması gereken kutuplar için karakteristik polinom aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} D(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ &= s^3 + 12s^2 + 22s + 20 \end{aligned} \quad (10.26)$$

Ackermann formülü yazılırsa,

$$\underline{k}^T = -[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 & -0.97 \end{bmatrix}^{-1} [\underline{A}^3 + 12\underline{A}^2 + 22\underline{A} + 20\underline{I}] \quad (10.27)$$

olur. \underline{M}_C matrisinin tersi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \underline{M}_C^{-1} &= \frac{[\text{cof}(\underline{M}_C)]^T}{\det(\underline{M}_C)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 & -0.97 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.01 & 0.2 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.28)$$

Denklem (10.27)'nin son teriminde \underline{A} matrisi yerine koyulur ve sadeleştirmeler yapılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix}^3 + 12 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix}^2 \\ &+ 22 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20.99 & 11.8 \\ 0 & 8.082 & 18.63 \\ 0 & -18.8163 & 4.356 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.29)$$

Denklem (10.27) ve denklem (10.28)'de elde edilen ifadeler denklem (10.27)'de yerine koyulursa, geri besleme katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \underline{k}^T &= -[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1.01 & 0.2 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 20.99 & 11.8 \\ 0 & 8.082 & 18.63 \\ 0 & -18.8163 & 4.356 \end{bmatrix} \\ &= [-20 \ -20.99 \ -11.8] \end{aligned} \quad (10.30)$$

10.2 Kutup Yerleştirme İçin MATLAB Kullanımı

MATLAB yazılımının Control System Toolbox'ında kutup yerleştirme yapan iki komut vardır. Bunlar aşağıda açıklanmıştır.

Doğrudan yöntemle kutup yerleştirme:

place(A,B,P)

Ackermann yöntemiyle kutup yerleştirme:

acker(A,B,P)

Bu komutların argümanında yer alan matrisler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

A : Kutup yerleştirme öncesindeki sistem matrisi.

B : Giriş matrisi

P : Yerleştirme işlemi sonrasında istenen kutupların vektörü

Örnek 10.1'de incelenen sistem için kullanım şekli aşağıdaki gibidir.

$$a = [0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1; \ 0 \ -1.01 \ -0.2]$$

$$b = [0; \ 0; \ 1]$$

$$p = [-1+j; \ -1-j; \ -10]$$

$$\text{place}(a,b,p)$$

$$\text{acker}(a,b,p)$$

KAYNAKLAR

- [10.1] Ackermann, J., *Der Entwurf Linearer Regelungssysteme im Zustandsraum*, Regelungstech. Prozess-Datenverarb., cilt 7, sayfa 297-300, 1972.
- [10.2] Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th Ed., ISBN: 0-13-032393-4, Prentice-Hall, New Jersey, 2002.

PROBLEMLER

10.1 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -2 \pm 2j$ ve $p_3 = -10$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini doğrudan yöntemle bulun.

10.2 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -2 \pm 2j$ ve $p_3 = -10$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini Ackermann formülünü kullanarak bulun.

10.3 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -2 \pm 4j$ ve $p_3 = -8$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini doğrudan yöntemle bulun.

10.4 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.01 & -0.2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -2 \pm 4j$ ve $p_3 = -8$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini Ackermann formülünü kullanarak bulun.

10.5 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8.08 & -3.24 & -1.6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -1 \pm 4j$ ve $p_3 = -6$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini doğrudan yöntemle bulun.

10.6 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8.08 & -3.24 & -1.6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -1 \pm 4j$ ve $p_3 = -6$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini Ackermann formülünü kullanarak bulun.

10.7 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -1 \pm 2j$ ve $p_3 = -5$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini doğrudan yöntemle bulun.

10.8 Bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -1 \pm 2j$ ve $p_3 = -5$ noktalarına getirecek geri besleme matrisini Ackermann formülünü kullanarak bulun.

11

MODELE DAYALI OPTİMUM KONTROL SİSTEMİ TASARIMI

11.1 Faz Değişkenleri ve Model Sistem

n 'inci mertebeye, tek girişli ve tek çıkışlı lineer bir sistemin durum değişkenleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u \quad (11.1)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (11.2)$$

u üzerinde herhangi bir sınırlama olmasın. Kontrol edilmiş sistemin çıkışının,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{dy}{dt} + \alpha_1 y = 0 \quad (11.3)$$

denklemlerle tanımlanan bir sistemin davranışına yaklaşması için şartların belirlenmesi istenmektedir. Yani sistemi kontrol etmek için istenen büyüklükte u kullanılabilirse, diğer bir deyişle sisteme istenildiği kadar güç aktarılabilirse, sistem çıkışının denklem (11.3)'e uygun davranması istenmektedir. Denklem (11.3) ile tanımlanan sisteme *model sistem* denir.

Önce bu amaca yönelik bir performans kriteri oluşturulması gereklidir. Giriş ve çıkış arasındaki transfer fonksiyonu denklem (6.23)'den aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(s) = \underline{c}^T [sI - \underline{A}]^{-1} \underline{b} \quad (11.4)$$

Bu transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi, pay polinomu ve karakteristik polinomun oranı olarak ifade edilebilir.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K(c_m s^{m-1} + c_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (m \leq n) \quad (11.5)$$

Böyle bir sistemin faz değişkenleri cinsinden durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (11.6)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \underline{x} \quad (11.7)$$

Denklem (11.7)'den y ve y 'nin türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m \\ \dot{y} &= c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + \dots + c_m \dot{x}_m = c_1 x_2 + c_2 x_3 + \dots + c_m x_{m+1} \\ \ddot{y} &= c_1 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_3 + \dots + c_m \dot{x}_{m+1} = c_1 x_3 + c_2 x_4 + \dots + c_m x_{m+2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{d^k y}{dt^k} &= c_1 \dot{x}_k + c_2 \dot{x}_{k+1} + \dots + c_m \dot{x}_{m+k-1} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Denklem (11.8)'deki terimler, denklem (11.3)'de yerine koyulduğunda elde edilecek model diferansiyel denkleminin incelenen sisteme bağımlı olmaması istenirse, yani model denkleminde a_i ($i = 1, \dots, n$) katsayılarının yer almaması istenirse, denklem (11.8)'in son teriminin indisi n 'den küçük olmalıdır. O halde $m + k - 1 < n$, ya da $k < n - (m - 1)$ ya da $k \leq n - (m - 1) - 1$ şartı sağlanmalıdır. Sistemdeki sıfır sayısı $z = m - 1$ olduğuna göre, model sistemin mertebesi en fazla " $n - (\text{sıfır sayısı}) - 1$ " kadar olabilir. Örneğin, sistemin sıfırı yoksa, model sistemin mertebesi en fazla $n - 1$ olabilir.

$\dot{x}_i = x_{i+1}$ olduğu dikkate alınır ve denklem (11.8), denklem (11.3)'de yerine koyulursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\alpha_{n-z} \frac{d^{n-z-1}y}{dt^{n-z-1}} + \alpha_{n-z-1} \frac{d^{n-z-2}y}{dt^{n-z-2}} + \dots + \alpha_2 \frac{dy}{dt} + \alpha_1 y = 0 \quad (11.9)$$

ya da,

$$\begin{aligned} & \alpha_{n-z}(c_1 x_{n-z} + c_2 x_{n-z+1} + \dots + c_m x_n) + \dots \\ & + \alpha_2(c_1 x_2 + c_2 x_3 + \dots + c_m x_{m+1}) + \alpha_1(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m) = 0 \end{aligned} \quad (11.10)$$

Eğer denklem (11.10)'daki terimler \underline{x} 'in elemanlarına göre gruplanırsa, model sistemin denklemi kısaca aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underline{\lambda}^T \underline{x} = 0 \quad (11.11)$$

Bu denklemdeki $\underline{\lambda}$ vektörünün elemanları, yaklaşıması istenen model sistem diferansiyel denkleminin katsayılarına ve plant transfer fonksiyonunun pay polinomunun katsayılarına bağlıdır. Plant transfer fonksiyonunun sıfır sayısı arttıkça bu katsayıların ifadeleri gittikçe karmaşıklaşır. Örnek olarak sadece bir sıfırı olan bir transfer fonksiyonu alınır, denklem (11.10)'da c_1 ve c_2 dışındaki c_i ($i \geq 3$) terimleri sıfır olacağından $\underline{\lambda}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha_1 c_1 \\ \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1 \\ \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-z} c_2 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

Örnek 11.1:

Örnek olarak transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K(s^2 + c_2 s + c_1)}{s^5 + a_5 s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (11.13)$$

olan sistem için maksimum mertebeye sahip model denklemi bulunsun.

Faz değişkenleri cinsinden durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (11.14)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \underline{x} \quad (11.15)$$

Başlangıçta beşinci merteye bir model kabul ederek aşağıdaki gibi bir model sistem denklemi kabul edilsin.

$$\alpha_6 \frac{d^5 y}{dt^5} + \alpha_5 \frac{d^4 y}{dt^4} + \alpha_4 \frac{d^3 y}{dt^3} + \alpha_3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy}{dt} + \alpha_1 y = 0 \quad (11.16)$$

y terimi denklem (11.15)'den alınıp, bu denklemde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} & \alpha_6 \frac{d^5}{dt^5} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) + \alpha_5 \frac{d^4}{dt^4} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) \\ & + \alpha_4 \frac{d^3}{dt^3} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) + \alpha_3 \frac{d^2}{dt^2} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) \\ & + \alpha_2 \frac{d}{dt} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) + \alpha_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) = 0 \end{aligned} \quad (11.17)$$

bulunur. Faz değişkenlerinin tanım biçimi dikkate alınır, denklem (11.17) aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} & \alpha_6 (c_1 \dot{x}_5 + c_2 \ddot{x}_5 + \ddot{x}_5) + \alpha_5 (c_1 x_5 + c_2 \dot{x}_5 + \ddot{x}_5) \\ & + \alpha_4 (c_1 x_4 + c_2 x_5 + \dot{x}_5) + \alpha_3 (c_1 x_3 + c_2 x_4 + x_5) \\ & + \alpha_2 (c_1 x_2 + c_2 x_3 + x_4) + \alpha_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) = 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

Model sistemin, kontrol edilen sistemin parametrelerinden bağımsız olması şartının sağlanması için, yani x_5 'in türevlerinin denklem (11.18)'de yer almaması için α_6 , α_5 ve α_4 sıfır alınmalıdır. Sonuç olarak model sistem en fazla ikinci merteye olabilir. Eğer bu katsayılar sıfır alınarak denklem (11.16) yeniden yazılırsa, en yüksek mertebeli model sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha_3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy}{dt} + \alpha_1 y = 0 \quad (11.19)$$

Denklem (11.18)'de α_6 , α_5 ve α_4 sıfır alınarak terimler düzenlenirse, model sistemin denklemi durum değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} & \alpha_1 c_1 x_1 + (\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) x_2 \\ & + (\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_1 + \alpha_1) x_3 \\ & + (\alpha_2 + \alpha_3 c_2) x_4 + \alpha_3 x_5 = \underline{\lambda}^T \underline{x} = 0 \end{aligned} \quad (11.20)$$

Burada $\underline{\lambda}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\underline{\lambda}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 c_1 \\ \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 c_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

Daha önce faz değişkenleri cinsinden tanımlanan bir sistemde, model sistemin denklemi durum değişkenleri cinsinden denklem (11.11)'deki gibi elde edilmişti. Bu denklem aşağıda tekrar verilmiştir.

$$\underline{\lambda}^T \underline{x} = 0 \quad (11.22)$$

Şimdi bir sistemin optimum kontrolü için aşağıdaki gibi tanımlanan bir performans kriterinin kullanıldığı düşünülün.

$$P.K. = \int_0^{\infty} \left[(\underline{\lambda}^T \underline{x})^2 + pu^2 \right] dt \quad (p > 0) \quad (11.23)$$

Bu performans kriterinde p 'nin değerinin azaltılması, daha büyük kontrol girişlerinin kullanılmasına olanak verir. Zira kontrol girişinin performans kriterine olan katkısı azalır. p 'nin değeri sıfıra doğru gittiğinde, performans kriterinin mutlak minimumu $\underline{\lambda}^T \underline{x}$ 'nin sıfır olmasıyla sağlanır. Bu ise model sistemi tanımlayan denklemdir. Yani optimum kontrol, kontrol edilen sistemin davranışını model sistemin davranışına götürmeye çalışır. Bu tip bir kontrole *modele dayalı optimum kontrol* denir.

Sistem faz değişkenleri cinsinden tanımlanmışsa, aşağıda verilen karesel performans kriteri, daima denklem (11.23)'deki forma dönüştürülebilir.

$$P.K. = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + pu^2) dt \quad (11.24)$$

Denklem (11.24)'ün, denklem (11.23)'e dönüştürülmesi için $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$ terimi önce,

$$\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = (\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x}) \quad (11.25)$$

şeklinde iki bileşene ayrılır. Bu ifadede \dot{x}_n teriminin yer almaması için, yani dönüşümün kontrol edilen sistemin parametrelerine bağımlı olmaması için \underline{S} matrisinin son satırı ve son sütunu sıfırlardan oluşturulur. Daha sonra denklemin iki tarafındaki işlemler yapılarak, x_i 'nin ($i = 1, \dots, n$) aynı kuvvetteki terimlerinin denklemin sağ ve solundaki katsayıları birbirine eşitlenir. Bu şekilde elde edilen eşitliklerden $\underline{\gamma}$ 'nin ve \underline{S} 'nin elemanları çözülür. Çözüm sırasında $\underline{\gamma}$ 'nin elemanları karesel denklemlerde yer alacağından, ortaya çıkacak ikili çözümlerden pozitif değerlerliler çözüm olarak kabul edilmelidir. Bu şekilde dönüştürülen $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$, denklem (11.24)'de yerine koyulursa performans kriteri aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} P.K. &= \int_0^{\infty} \left[(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x}) + pu^2 \right] dt = \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + pu^2] dt + (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x}) \Big|_0^{\infty} \\ &= \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + pu^2] dt + \underline{x}^T(\infty) \underline{S} \underline{x}(\infty) - \underline{x}^T(0) \underline{S} \underline{x}(0) \end{aligned} \quad (11.26)$$

Ama başlangıç koşulları bilindiğinden $\underline{x}(0)$ terimi sabittir. Optimum olarak kontrol edilen kabul edilebilir bir sistem ise asemptotik kararlı olacağından $\underline{x}(\infty) = 0$ olur. Bu yüzden denklem (11.26)'daki son iki terimin optimizasyon işlemine katkısı yoktur. Bu terimler atıldığında dönüştürülmüş performans kriteri aşağıdaki hali alır.

$$P.K. = \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + pu^2] dt \quad (11.27)$$

Yukarıdaki işlemler göstermektedir ki, \underline{Q} 'nun içindeki bazı bileşenlerin optimizasyon sürecine katkısı yoktur. (\underline{S} 'yi oluşturan bileşenler.) Eğer farklı \underline{Q} matrislerine yukarıdaki dönüşüm uygulandığında aynı $\underline{\gamma}$ vektörü elde ediliyorsa, bu farklı \underline{Q} matrislerini kullanarak elde edilecek optimum kontroller aynı olur. Denklem (11.27) ile tanımlanan performans kriterine *indirgenmiş performans kriteri* denir.

Örnek 11.2:

Karesel bir performans kriteri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$P.K. = \int_0^{\infty} \left(\underline{x}^T \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + pu^2 \right) dt \quad (11.28)$$

Buna karşılık gelen indirgenmiş performans kriteri aşağıdaki gibi bulunur.

Denklem (11.25)'den,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}^2 \\ &+ \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (11.29)$$

ya da,

$$\begin{aligned} & 9x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ &= \gamma_1^2x_1^2 + \gamma_2^2x_2^2 + \gamma_3^2x_3^2 + 2\gamma_1\gamma_2x_1x_2 + 2\gamma_1\gamma_3x_1x_3 \\ &+ 2\gamma_2\gamma_3x_2x_3 + 2s_{11}x_1x_2 + 2s_{12}x_1x_3 + 2s_{12}x_2^2 + 2s_{22}x_2x_3 \end{aligned} \quad (11.30)$$

Sağ ve soldaki aynı kuvvette sahip terimlerin katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 &= 9 \\
\gamma_2^2 + 2s_{12} &= 1 \\
\gamma_3^2 &= 1 \\
2\gamma_1\gamma_2 + 2s_{11} &= 8 \\
2\gamma_1\gamma_3 + 2s_{12} &= 2 \\
2\gamma_2\gamma_3 + 2s_{22} &= 0
\end{aligned} \tag{11.31}$$

Bu denklemlerden $\underline{\gamma}$ ve \underline{S} aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 4 - 3\sqrt{7} & -3 & 0 \\ -3 & -\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.32}$$

İndirgenmiş performans kriteri ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
P.K. &= \int_0^{\infty} [(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 + pu^2] dt \\
&= \int_0^{\infty} [(3x_1 + \sqrt{7}x_2 + x_3)^2 + pu^2] dt \\
&= \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} 9x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 6\sqrt{7}x_1x_2 \\ + 6x_1x_3 + 2\sqrt{7}x_2x_3 + pu^2 \end{bmatrix} dt
\end{aligned} \tag{11.33}$$

Riccati denkleminde olduğu gibi, durum uzayında yapılan optimum sistem tasarımlarında performans kriterlerinde karesel terim $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$ yer alır. Bu gibi durumlarda bir model sistem denklemleri verilmişse, yani $\underline{\gamma}$ verilmişse, bundan \underline{Q} matrisinin elde edilmesi gerekir. Böyle bir sistemin faz değişkenleri cinsinden tanımlandığı kabul edilir. Eğer sistemin mertebesi n ise ve m sayıda sıfırı varsa, $\underline{\gamma}$ 'nin boyutu en fazla $n - m - 1$ olmalıdır. Ancak verilen bir $\underline{\gamma}$ vektöründen, bir \underline{Q} matrisine geçişte pek çok seçenek vardır. Zira,

$$\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = (\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x}) \tag{11.34}$$

ifadesinde geçen \underline{S} matrisi simetrik, son sütun ve satırı sıfırlardan oluşan bir matris olup, pek çok şekilde seçilebilir. Bu seçim yapılırken tek şart, elde edilecek \underline{Q} matrisinin pozitif definit ya da yarı definit olmasıdır. Bu şart sağlanıyorsa, $\underline{S} = 0$ bile alınabilir. Aşağıda \underline{Q} matrisinin elde edilmesiyle ilgili üç örnek verilmiştir.

Örnek 11.3:

Bir tane sıfırı olan üçüncü mertebeli bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2(s+4)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \quad (11.35)$$

Bu sistemin optimum kontrolü için mertebesi $n - m - 1 = 1$ olan,

$$\dot{y} + 2y = 0 \quad (11.36)$$

denklemlerle tanımlanan bir model sistem kullanılacaktır. Buna göre performans kriterinde kullanılacak \underline{Q} matrisini belirleyin.

Önce bu sistem faz değişkenleri cinsinden ifade edilsin.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (11.37)$$

$$y = [4 \quad 1 \quad 0] \underline{x} \quad (11.38)$$

İlk seçenek olarak $\underline{S} = 0$ kabul edelim ve $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = (\underline{\gamma}^T \underline{x})^2$ eşitliğinden \underline{Q} matrisini elde edelim. Bu eşitlik açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ [2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}^2 \quad (11.39)$$

ya da,

$$\begin{aligned}
 & q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_{13}x_1x_3 + 2q_{23}x_2x_3 \\
 & = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2
 \end{aligned} \quad (11.40)$$

Denklemin sağ ve solundaki aynı kuvvetteki x terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$q_{11} = 4 \quad q_{22} = 1 \quad q_{12} = 2 \quad q_{33} = q_{13} = q_{23} = 0 \quad (11.41)$$

elde edilir. Bu durum için \underline{Q} matrisi aşağıdaki gibidir. Bu matris pozitif yarı-definit olduğundan çözüm geçerlidir.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.42)$$

İkinci seçenek olarak,

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.43)$$

alalım. Bu durumda denklem (11.34)'den aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 & q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_{13}x_1x_3 + 2q_{23}x_2x_3 \\
 & = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_1x_2)
 \end{aligned} \quad (11.44)$$

Sistem faz değişkenleriyle tanımlandığından türevli terim,

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_1x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 \quad (11.45)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade denklem (11.44)'de yerine koyular, denklemin sağ ve solundaki aynı kuvvetteki x terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
 & q_{11} = 4 \quad q_{22} = 2 \quad q_{12} = 3 \\
 & q_{13} = 0.5 \quad q_{33} = q_{23} = 0
 \end{aligned} \quad (11.46)$$

elde edilir. Bu durum için \underline{Q} matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0.5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

Bu matris pozitif definit ya da yarı-definit olmadığından seçilen \underline{S} matrisi uygun değildir.

Örnek 11.4:

İkinci mertebe bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 5} \quad (11.48)$$

Bu sistemin optimum kontrolü için mertebesi $n - 1 = 1$ olan,

$$\dot{y} + 2y = 0 \quad (11.49)$$

denklemlerle tanımlanan bir model sistem kullanılacaktır. Buna göre performans kriterinde kullanılacak \underline{Q} matrisini belirleyin.

Önce bu sistem faz değişkenleri cinsinden ifade edilsin.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (11.50)$$

$$y = [1 \ 0] \underline{x} \quad (11.51)$$

İlk seçenek olarak $\underline{S} = 0$ kabul edilsin ve $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = (\underline{\gamma}^T \underline{x})^2$ eşitliğinden \underline{Q} matrisi bulunsun. Bu eşitlik açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\}^2 \quad (11.52)$$

ya da,

$$q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + 2q_{12}x_1x_2 = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \quad (11.53)$$

Denklemin sağ ve solundaki aynı kuvvetteki x terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$q_{11} = 4 \quad q_{22} = 1 \quad q_{12} = 2 \quad (11.54)$$

elde edilir. Bu durum için \underline{Q} matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.55)$$

Bu matris pozitif yarı-definit olduğundan $\underline{S} = 0$ seçilmesi uygundur.

İkinci seçenek olarak,

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

alınsın. Bu durumda denklem (11.34)'den aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned} & q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + 2q_{12}x_1x_2 \\ & = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + \frac{d}{dt}(-x_1^2) \end{aligned} \quad (11.57)$$

Sistem faz değişkenleriyle tanımlandığından türevli terim,

$$\frac{d}{dt}(x_1^2) = -2x_1\dot{x}_1 = -2x_1x_2 \quad (11.58)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade denklem (11.57)'da yerine koyulur, denklemin sağ ve solundaki aynı kuvvetteki x terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$q_{11} = 4 \quad q_{22} = 1 \quad q_{12} = 1 \quad (11.59)$$

elde edilir. Bu durum için \underline{Q} matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

Bu matris pozitif definit olduğundan seçilen \underline{S} uygundur.

Son bir seçenek olarak,

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.61)$$

alalım. Bu durumda denklem (11.34)'den aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned} & q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + 2q_{12}x_1x_2 \\ & = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + \frac{d}{dt}(10x_1^2) \end{aligned} \quad (11.62)$$

Sistem faz değişkenleriyle tanımlandığından türevli terim,

$$\frac{d}{dt}(10x_1^2) = 20x_1\dot{x}_1 = 20x_1x_2 \quad (11.63)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade denklem (11.62)'de yerine koyulur, denklemin sağ ve solundaki aynı kuvvetteki x terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$q_{11} = 4 \quad q_{22} = 3 \quad q_{12} = 12 \quad (11.64)$$

elde edilir. Bu durum için \underline{Q} matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.65)$$

Bu son durumda \underline{Q} matrisi pozitif definit ya da semi-definit olmadığından, \underline{S} matrisi denklem (11.61)'deki gibi seçilemez.

Yukarıda denklem (11.55) ve denklem (11.60)'la verilen \underline{Q} matrisleri aynı indirgenmiş performans kriterine sahip olduğundan, bunlar kullanılarak yürütülecek optimum kontrol tasarımları aynı sonucu verir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 11.5:

Bir sistemin durum denklemleri denklem (11.50)'deki gibi verilmiştir. Bu sistem için optimum kontrol girişi u 'yu sırasıyla aşağıdaki performans kriterleri için bulalım.

$$P.K. = \int_0^{\infty} \left\{ \underline{x}^T \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + u^2 \right\} dt \quad (11.66)$$

$$P.K. = \int_0^{\infty} \left\{ \underline{x}^T \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + u^2 \right\} dt \quad (11.67)$$

Optimum kontrolü bulmak için indirgenmiş Riccati denklemi kullanılsın.

- a) Denklem (11.66) ile tanımlanan performans kiteri için cebirsel Riccati denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{R}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{R}_0 - \underline{R}_0 \underline{B} \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 + \underline{Q} = 0 \quad (11.68)$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11.69)$$

Eğer matris işlemleri yapılır ve sonuçta elde edilecek matrisin elemanları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki bağımsız denklemler elde edilir.

$$r_{12}^2 + 10r_{12} - 4 = 0 \quad (11.70)$$

$$r_{11} - 3r_{12} - 5r_{22} - r_{12}r_{22} + 2 = 0 \quad (11.71)$$

$$2r_{12} - 6r_{22} - r_{22}^2 + 1 = 0 \quad (11.72)$$

Bu denklemlerin pozitif definit \underline{R}_0 veren kökleri seçildiğinde, \underline{R}_0 matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.38 \\ 0.38 & 0.28 \end{bmatrix} \quad (11.73)$$

Optimum kontrol girişi ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_0 &= -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 \underline{x} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 & 0.38 \\ 0.38 & 0.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -0.38x_1 - 0.28x_2 \end{aligned} \quad (11.74)$$

- b) Denklem (11.67) ile tanımlanan performans kriteri için cebirsel Riccati denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{R}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{R}_0 - \underline{R}_0 \underline{B} \underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 + \underline{Q} = 0 \quad (11.75)$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11.76)$$

Eğer matris işlemleri yapılır ve sonuçta elde edilecek matrisin elemanları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki bağımsız denklemler elde edilir.

$$r_{12}^2 + 10r_{12} - 4 = 0 \quad (11.77)$$

$$r_{11} - 3r_{12} - 5r_{22} - r_{12}r_{22} + 1 = 0 \quad (11.78)$$

$$2r_{12} - 6r_{22} - r_{22}^2 + 1 = 0 \quad (11.79)$$

Bu denklemlerin pozitif definit \underline{R}_0 veren kökleri seçildiğinde, \underline{R}_0 matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 3.64 & 0.38 \\ 0.38 & 0.28 \end{bmatrix} \quad (11.80)$$

Optimum kontrol girişi ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_0 &= -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R}_0 \underline{x} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.64 & 0.38 \\ 0.38 & 0.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -0.38x_1 - 0.28x_2 \end{aligned} \quad (11.81)$$

Görüldüğü gibi, sonuç denklem (11.74) ile aynıdır.

Şimdiye kadar yürütülen analizde sistemin faz değişkenleri cinsinden tanımlandığı kabul edilmiştir. Eğer başlangıçta sistem faz değişkenleri cinsinden değil de, aşağıdaki genel denklemlerle tanımlanmışsa,

$$\dot{\underline{x}}_o = \underline{A}_o \underline{x}_o + \underline{b}_o u \quad (11.82)$$

$$y = \underline{c}_o^T \underline{x}_o \quad (11.83)$$

yukarıdaki yöntem aşağıdaki gibi değişken dönüşümleri yapılarak uygulanabilir. Bu denklemlerde geçen \underline{x}_o terimi sistemin orijinal durum değişkenlerini, “o” indisiyle gösterilen matrisler de sistemin orijinal olarak tanımlanmış olan matrislerini göstermektedir.

- 1) Önce sistemin giriş ve çıkışı arasındaki transfer fonksiyonunu aşağıda yeniden verilen denklem (6.24)’den yazın.

$$G(s) = \underline{c}^T [sI - \underline{A}]^{-1} \underline{b} \quad (11.84)$$

Bu transfer fonksiyonu bir pay polinomu ve karakteristik polinomun oranı olarak aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K(c_m s^{m-1} + c_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (m \leq n) \quad (11.85)$$

- 2) Sistemi aşağıdaki gibi faz değişkenleri \underline{x} cinsinden ifade edin.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (11.86)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \underline{x} \quad (11.87)$$

- 3) Mertebesi en fazla $n - (m - 1) - 1 = n - m$ olan bir model sistem seçin. Model sistemin diferansiyel denklemini yazın. En yüksek mertebeli model sistem denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\alpha_{n-m+1} \frac{d^{n-m} y}{dt^{n-m}} + \alpha_{n-m} \frac{d^{n-m-1} y}{dt^{n-m-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{dy}{dt} + \alpha_1 y = 0 \quad (11.88)$$

- 4) Faz değişkenlerinin tanımlanma biçimini dikkate alarak model sistemin denklemini,

$$\underline{\lambda}^T \underline{x} = 0 \quad (11.89)$$

şeklinde ifade edin.

- 5) İndirgenmiş performans kriterini aşağıdaki gibi yazın.

$$P.K. = \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + pu^2] dt \quad (11.90)$$

- 6) Kullanacağınız optimum kontrol yöntemi,

$$P.K. = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + pu^2) dt \quad (11.91)$$

şeklinde bir performans kriteri kullanılmasını gerektiriyorsa,

$$\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = (\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x}) \quad (11.92)$$

denkleminde uygun bir \underline{S} matrisi seçerek \underline{Q} matrisini bulun ve performans kriterini denklem (11.91)'deki hale dönüştürün.

- 7) Kullanmak istediğiniz optimum kontrol tasarım yöntemiyle geri besleme katsayılarının bulun ve optimum kontrol girişini faz değişkenleri cinsinden,

$$u = -\underline{k}^T \underline{x} \quad (11.93)$$

biçiminde ifade edin.

- 8) Son aşamada Kısım 6.4'de verilen lineer dönüşüm yöntemiyle faz değişkenleri \underline{x} , orijinal değişkenler \underline{x}_o 'a dönüştürülebilir ve kontrol girişi original değişkenler cinsinden yazılabilir. Bunun için, faz değişkenleri \underline{x} , sistemin original değişkenleri \underline{x}_o 'a dönüştüren ve elemanları henüz bilinmeyen bir dönüşüm matrisi \underline{P} kabul edilir. \underline{P} tekil olmayan bir kare matris olup, bu dönüşüm aşağıdaki gibidir.

$$\underline{x}_o = \underline{P} \underline{x} \quad (11.94)$$

Daha sonra aşağıda tekrar düzenlenen, (6.34) ile verilen denklemler yazılır.

$$\underline{P}\underline{A}_o = \underline{A}P \quad \underline{P}\underline{B}_o = B \quad \underline{C}_o = \underline{C}P \quad (11.95)$$

Bu denklemlerden \underline{P} 'nin elemanları çözülür.

- 9) Optimum kontrol girişi u orijinal durum değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u = -\underline{k}^T \underline{x} = -\underline{k}^T \underline{P}^{-1} \underline{x}_o \quad (11.96)$$

11.2 Modele Dayalı Tasarım

Bu kısımda bir giriş ve bir çıkışlı sistemlerin karesel optimum kontrolü için model sistem kavramı daha genelleştirilecektir. n 'inci mertebeye bir lineer sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Burada durum değişkenleri faz değişkenleri olmak zorunda değildir.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u \quad (11.97)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (11.98)$$

Bu sistemin, aşağıda verilen m 'inci mertebeye model sisteme yaklaşan bir davranış sergilemesi istenmektedir.

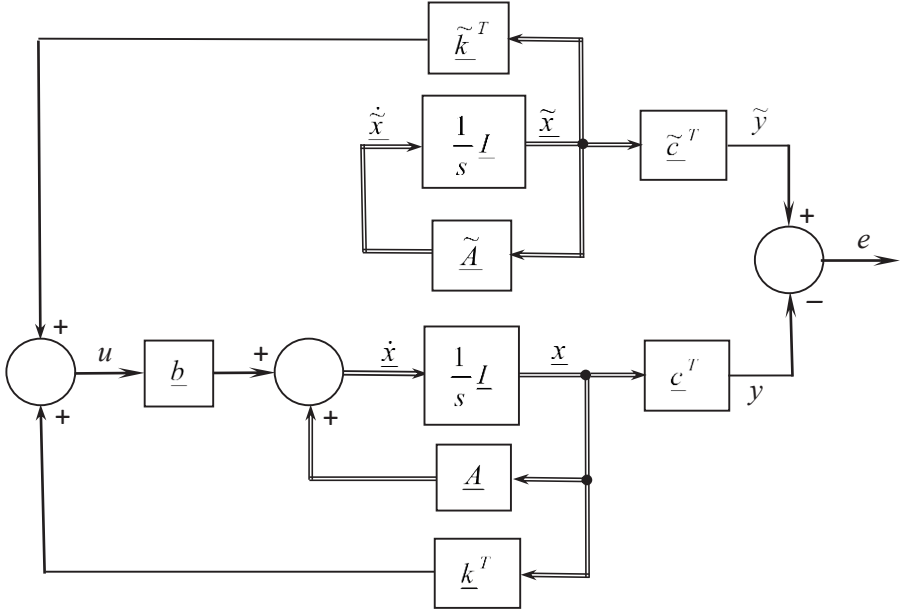
$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\tilde{\underline{x}} \quad (11.99)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\underline{c}}^T \tilde{\underline{x}} \quad (11.100)$$

Denklem (11.99) ile verilen model denklemi homojendir. Yani sistem girişinden etkilenmemektedir. Bu sistem $t = 0$ 'da verilen başlangıç şartı tarafından sürülmektedir. Bu şart $t = 0$ 'da model çıkışı ve kontrol edilen sistem çıkışı aynı olacak şekilde belirlenir. Arzu edilen baskın kutup özelliklerini dikkate alarak model sistemin birinci ya da ikinci mertebeye alınması uygun olur.

Şimdi kontrol edilecek sistemi ve model sistemi kullanarak Şekil 11.1'deki gibi yeni bir sistem oluşturulsun. Bu yeni sistemin kontrol edilmemesi halinin ($\underline{k}^T = 0$, $\tilde{\underline{k}}^T = 0$) durum denklemleri ve çıkış ifadesi;

\underline{A} , $\underline{\tilde{A}}$, \underline{b} , \underline{c}^T ve $\underline{\tilde{c}}^T$ matrislerinin elemanları cinsinden denklem (11.101) ve denklem (11.102)'deki gibi yazılabilir.



Şekil 11.1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \\ \tilde{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdot & \tilde{a}_{1m} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdot & \tilde{a}_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdot & \tilde{a}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ \tilde{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u$$

(11.101)

$$e = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & \cdot & \cdot & -c_n & \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \cdot & \tilde{c}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ \tilde{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix} \quad (11.102)$$

ya da kısaca,

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A}_z \underline{z} + \underline{b}_z u \quad (11.103)$$

$$e = \underline{c}_z^T \underline{z} \quad (11.104)$$

Amaç model sistem çıkışıyla kontrol edilen sistemin çıkışı arasındaki farkı en aza indirmek olduğuna göre, performans kriteri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$P.K. = \int_0^{\infty} (e^2 + \rho u^2) dt = \int_0^{\infty} \left[(\underline{c}_z^T \underline{z})^2 + \rho u^2 \right] dt \quad (11.105)$$

Yukarıdaki işlemler sonucu, modele dayalı tasarım problemi, klasik bir karesel optimum kontrol problemine dönüşmüştür. Tasarımı gerçekleştirmek için Riccati denklemi kullanılabilir. Yöntemin uygulanmasıyla ilgili aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek 11.6:

Kontrol edilmek istenen bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -0.1 & 8 \\ -2 & -0.1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (11.106)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (11.107)$$

Bu sistemin kutup değerleri $p_{1,2} = -0.1 \pm 4j$ olup, sönümsüz sistem doğal frekansı yaklaşık $\omega_n \cong 4.0$, sönüm oranı ise $\zeta = 0.025$ kadardır. Yani sistem, sönümü çok az olan salınımlı bir sistemdir.

Kontrol sonucunda sistem davranışının,

$$\dot{\tilde{y}} + 3\tilde{y} = 0 \quad (11.108)$$

ya da,

$$\dot{\tilde{x}} = -3\tilde{x} \quad (11.109)$$

$$\tilde{y} = \tilde{x} \quad (11.110)$$

şeklinde tanımlanan bir model sistemin davranışına yaklaşması istenmektedir.

Bu problemde kontrol edilmek istenen sistem ve model sistemi birlikte tanımlayan durum denklemleri (denklem 11.101) aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 8 & 0 \\ -2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (11.111)$$

$$e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \quad (11.112)$$

ya da kısaca,

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A}_z \underline{z} + \underline{b}_z u \quad (11.113)$$

$$e = \underline{c}_z^T \underline{z} \quad (11.114)$$

Kullanılması gereken performans kriteri,

$$P.K. = \int_0^{\infty} (e^2 + \rho u^2) dt = \int_0^{\infty} [(-z_1 + z_3)^2 + \rho u^2] dt \quad (11.115)$$

ya da \underline{Q} matrisi formunda aşağıdaki gibidir.

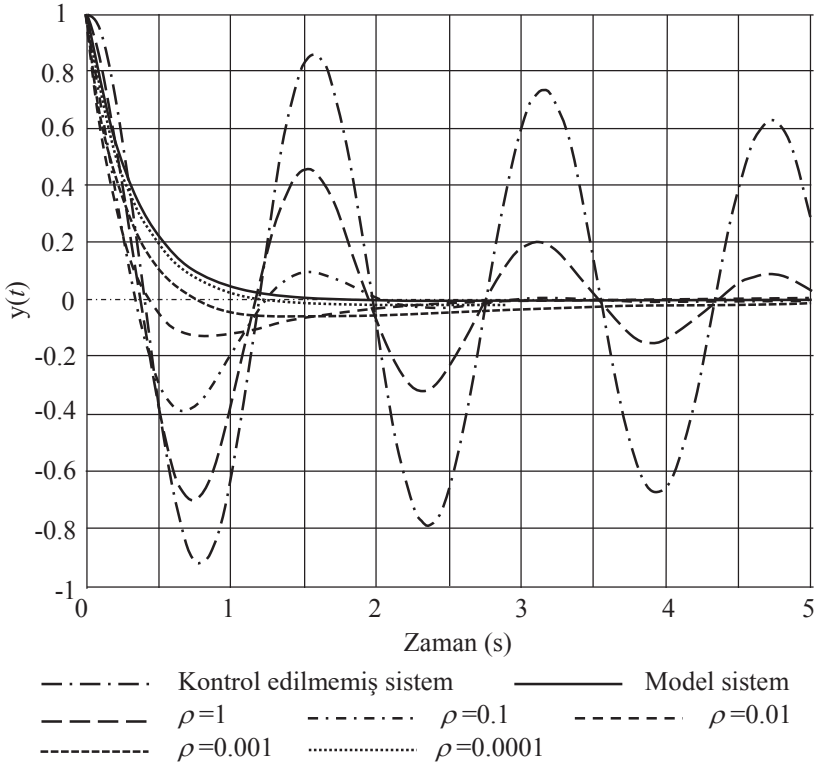
$$P.K. = \int_0^{\infty} (\underline{z}^T \underline{Q} \underline{z} + \rho u^2) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \underline{z}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z} + \rho u^2 \right\} dt \quad (11.116)$$

Bundan sonra değişik ρ değerleri için matris Riccati denkleminin R_0 matrisleri ve geri besleme katsayıları bulunmuş ve sonuçlar Çizelge 11.1'de özetlenmiştir. Şekil 11.2'de ise $x_1(0) = \tilde{x}_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ başlangıç şartları ve farklı ρ değerleri için kontrol edilen sistemin cevabı ve model sistemin cevabı görülmektedir. ρ değeri azaldıkça, performans kriterinin yapısı gereği daha büyük kontrol girişleri kullanılmakta ve kontrol edilen sistemin cevabı model sistemin cevabına doğru yaklaşmaktadır.

Çizelge 11.1

ρ	R_0 matrisinin elemanları						Geribesleme katsayıları		
	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{22}	r_{23}	r_{33}	k_1	k_2	\tilde{k}_1
1	0.820	0.041	-0.110	3.260	-0.283	0.165	0.820	0.041	-0.110
0.1	0.297	0.0147	-0.0898	1.165	-0.227	0.153	2.970	0.147	-0.898
0.01	0.098	0.0047	-0.0563	0.368	-0.137	0.114	9.805	0.475	-5.630
0.001	0.031	0.0014	-0.0258	0.103	-0.055	0.056	31.43	1.42	-25.79
0.0001	0.010	0.0004	-0.0095	0.022	-0.013	0.018	99.81	3.55	-94.51



Şekil 11.2

PROBLEMLER

11.1 Bir sistemin ideal cevabı aşağıdaki denklemlerle tanımlanmışsa, model sistemin diferansiyel denklemini nasıl seçersiniz?

a) $y(t) = t^2$ b) $y(t) = e^{-t}$ c) $y(t) = t^3$ d) $y(t) = e^{-2t}$

11.2 Bir roket $t = 0$ 'da yerden y_0 uzaklıkta ve hareketsiz haldeyken yumuşak iniş yapacak şekilde kontrol edilmesi istenmektedir. Bunun için ideal sistem cevabı,

$$y(t) = y_0 e^{-2t}$$

olarak verilmiştir. Yer çekimi ivmesi \vec{g} , roketin kütlesi M 'dir. Roket motorunun uyguladığı tepki kuvveti $F(t)$ olup, kontrol girişini $u(t) = F(t) - Mg$ olarak alın.

- Roketin durum denklemlerini faz değişkenleri cinsinden standart matris formunda yazın.
- Model sistemin diferansiyel denklemini bulun.
- Yeterince büyük kontrol gücü kullanılırsa, kontrol edilen sistemin davranışının model sistemin davranışına gitmesini sağlayacak bir performans kriteri oluşturun.
- Kalman denklemini kullanarak kapalı çevrim optimum kontrolü bulun. Kontrol edilmiş kapalı çevrim sistemin blok diyagramını çizin.

11.3 Transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

olan sistemin kontrolü için aşağıdaki model sistem denklemleri verilmiştir.

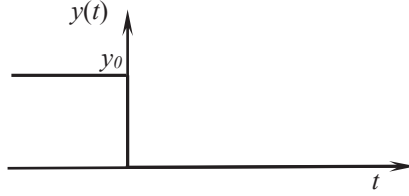
$$\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

- Sistemi faz değişkenleri cinsinden yazın ve $\underline{\gamma}$ -vektörünü bulun.
- $P.K. = \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \rho u^2] dt$ gibi bir performans kriteri oluşturun.
- Matris Riccati denkleminin durağan çözümünden yararlanarak kapalı çevrim optimum kontrolü $\rho = 1$ ve $\rho = 10$ için bulun. Kontrol edilmiş kapalı çevrim sistemin blok diyagramını çizin. (MATLAB'den yararlanın.)

11.4 Bir sistemin girişiyle çıkışı arasındaki transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3}$$

gibidir. Bu sistem $y(0) = y_0$ başlangıç durumundan $y(t_f) = 0$ son durumuna aşağıdaki ideal cevaba göre getirilmek istenmektedir.



Problemin çözümünde,

$$P.K. = \int_0^{\infty} [(\underline{\gamma}^T \underline{x})^2 + \rho u^2] dt$$

şeklinde bir performans kriteri ve uygun durum değişkenleri kullanın.

- Cebirsel Riccati denklemini kullanarak optimum geribesleme katsayılarını bulun. Kapalı çevrim sistemin blok diyagramını çizin.
- $\rho = 0.0001$, $\rho = 0.01$, $\rho = 1$, $\rho = 10$ ve $\rho = 100$ değerleri ve $y_0 = 4$ için sistemin zaman cevaplarını ve ideal sistem cevabını bir grafikte gösterin. Sonuçları yorumlayın. (Bu kısımda MATLAB kullanın.)

11.5 Kontrol edilmek istenen bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -0.1 & 8 \\ -2 & -0.1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0] \underline{x}$$

Kontrol sonucunda sistem davranışının,

$$\ddot{\tilde{y}} + 4\dot{\tilde{y}} + 4.01\tilde{y} = 0$$

gibi tanımlanan bir model sistemin davranışına yaklaşması istenmektedir. Bölüm 8.2'deki yöntemi kullanın. $\rho = 1$, $\rho = 0.1$, $\rho = 0.01$, $\rho = 0.001$ ve $\rho = 0.0001$ için matris Riccati denkleminin durağan çözümünü kullanarak optimum geribesleme katsayılarını bulun. $\underline{x}(0) = [1 \quad 0]^T$ ve bu ağırlık katsayıları için sistem cevaplarını ve ideal cevabı grafik olarak gösterin. Sonuçları yorumlayın. (MATLAB kullanın.)

- 11.6** Kontrol edilmek istenen bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40.4 & -44.04 & -12 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0 \ 0] \underline{x}$$

Kontrol sonucunda sistem davranışının,

$$\ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{y}} = 0$$

gibi tanımlanan bir model sistemin davranışına yaklaşması istenmektedir. Bölüm 8.2'deki yöntemi kullanın. $\rho = 0.1$, $\rho = 1$, $\rho = 10$ ve $\rho = 100$ için matris Riccati denkleminin durağan çözümünü kullanarak optimum geribesleme katsayılarını bulun. $\underline{x}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ ve bu ağırlık katsayıları için sistem cevaplarını ve ideal cevabı grafik olarak gösterin. Sonuçları yorumlayın. (MATLAB kullanın.)

12

ÖLÇÜLEMİYEN DURUM DEĞİŞKENLERİ

Durum uzayında yapılan kontrol sistemi tasarımlarında temel yaklaşım, durum değişkenlerinin hepsinin geri beslenmesidir. Bölüm 9’da görüldüğü gibi, lineer karesel optimum kontrol tüm durum değişkenlerinin ölçülmesini ve geri besleme katsayılarıyla çarpılarak optimum kontrol girişlerinin elde edilmesini öngörür. Bölüm 10’da sunulan kutup yerleştirme yönteminde de bütün durum değişkenleri geri beslenmişti. Ancak uygulamalarda genellikle bazı durum değişkenlerine ulaşılamaz. Bu durum, değişkenlerin tanımları dolayısıyla bunları ölçecek transdüserlerin piyasada mevcut olmaması, değişkenlerin ölçülebilirliğinin olmaması, ölçümün çok maliyetli olması ya da değişkenlerin ölçüleceği noktalara fiziksel olarak ulaşılamaması, ölçümde gürültü olması gibi nedenlerden kaynaklanabilir. Bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

- Faz değişkenleri kullanıldığında basınç, sıcaklık, debi, elektrik gerilimi, elektrik akımı, kuvvet, v.b. değişkenlerin türevlerini ölçecek transdüserler yoktur.
- Kanonik değişkenler kullanıldığında, bu değişkenlerin fiziksel karşılıkları olmayabilir.
- Yayılı parametrelili bir sistemin kümesel parametrelili olarak modellenmesi sonucu, ölçüm yeri tam olarak tanımlanamaz.
- Sistemin fiziksel yapısı ya da olumsuz çevre şartları dolayısıyla ölçüm noktasına erişilemez.
- Yapılan ölçümde aşırı gürültü olabilir.

Böyle durumlarla karşılaşıldığında ölçülebilen durum değişkenlerinden ya da sistem çıkışından sağlanan bilgiye dayanarak ölçülemeyen değişkenlerin kestirilmesi veya filtreleme gibi yöntemlere başvurulur. Kontrol işlemi, ölçülen ve kestirilen değişkenler geri beslenerek yürütülür. Bu bölümde *gözleyici* ve *Kalman filtresi* kullanımı olarak iki yöntem sunulacaktır. Gözleyici, sistemde gürültünün az olduğu hallerde,

ölçülen değişken bilgilerinden ölçülemeyenleri deterministik olarak verir. Kalman filtresi ise sistemde gürültü olması halinde, gürültülü olarak ölçülen ve ölçülemeyen değişkenleri elde etmeye yarar.

12.1 Gözleyiciler ve Ölçülemeyen Değişkenler İçin Gözleyici Tasarımı

Gözlenebilirliği olan tek çıkışlı bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad (12.1)$$

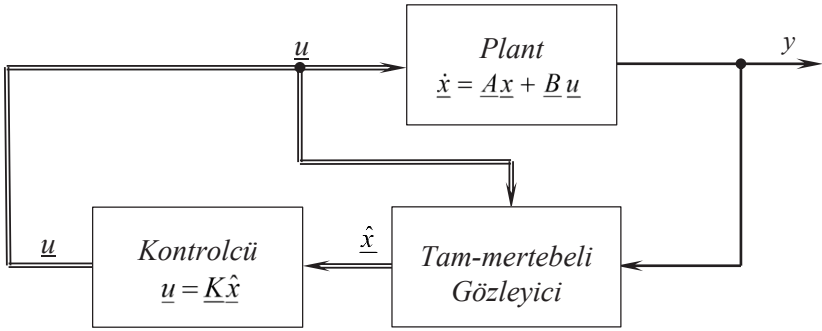
$$y = \underline{C}\underline{x} \quad (12.2)$$

Bu sisteme optimum kontrol ya da kutup yerleştirme gibi bir yöntem uygulandığında bütün durum değişkenlerinin geri beslenmesi gerekir. Ancak uygulamalarda yukarıda belirtilen sebepler dolayısıyla durum değişkenlerinin hepsinin ölçülmesi mümkün olmayabilir. Hatta bazı durumlarda sistemin çıkışı dışında hiç bir ölçüm yapılamayabilir. Her iki durumda da gözleyiciler kullanarak ölçülemeyen durum değişkenlerinin kestirimi yoluna gidilir. Eğer sadece sistemin çıkışı ölçülüyorsa, bu bilgiye dayanarak durum değişkenlerinin hepsinin değerini kestirmek için kullanılan gözleyiciye *tam-mertebeli durum gözleyicisi* denir. Tam-mertebeli durum gözleyicisinin durum değişkenlerini kestirebilmesi için gerek ve yeter şart, kontrol edilen sistemin gözlenebilir olmasıdır [12.1]. Ölçülebilen bazı durum değişkenlerini kullanarak ölçülemeyen diğer durum değişkenlerini kestiren gözleyici ise *minimum-mertebeli durum gözleyicisi* olarak adlandırılır.

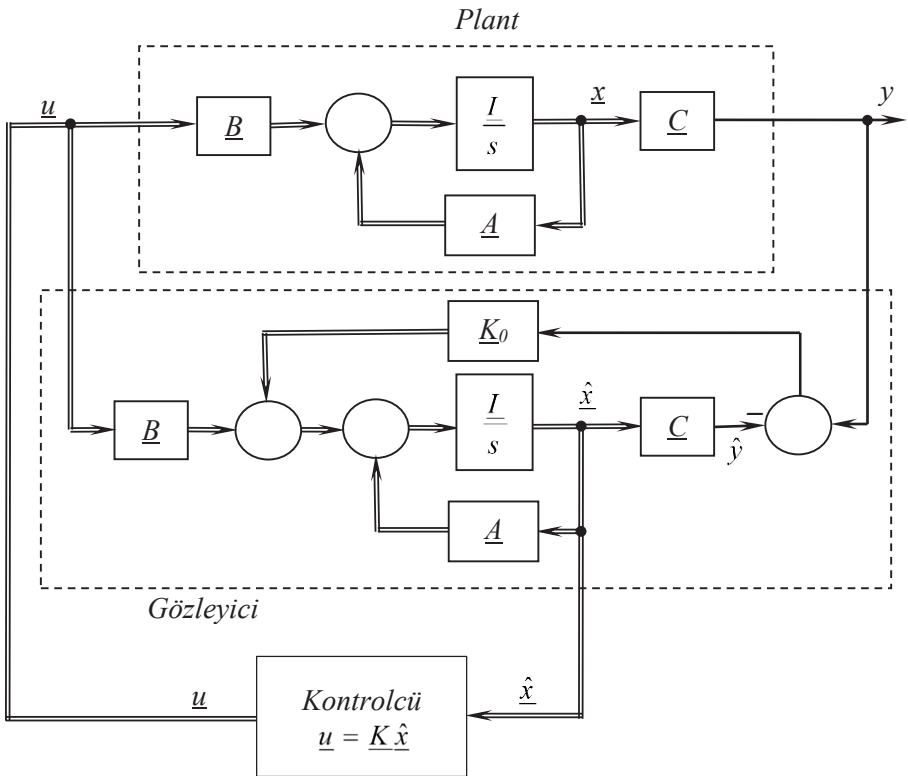
12.1.1 Tam-Mertebeli Gözleyici Tasarımı

Tam-mertebeli gözleyici uygulanan bir sistemin genel yapısı Şekil 12.1'deki gibidir. \underline{K} 'nın elemanları belli bir tasarım kriterine göre kapalı çevrim sistem kutuplarını belirlemeye yarayan geri besleme katsayılarıdır. Bu katsayıların çarptığı durum değişkenlerinin kestirilen değerleri bir gözleyici tarafından belirlenmektedir. Ölçülen sistem çıkışı y ve sisteme uygulanan kontrol girişi u tam-mertebeli durum gözleyicisinin girişleridir. Gözleyicinin çıkışı kontrol edilen sistemin kestirilen durum vektörü $\hat{\underline{x}}$ 'dir.

Gözleyici ve plantın daha ayrıntılı yapısı Şekil 12.2'deki blok diyagramında verilmiştir. Gözleyici kullanılmasının temel nedeni, durum değişkenleri ölçülemediğinden başlangıç şartlarının bilinmemesi ve bu yüzden sistem modelinden durum değişkenlerinin çözülerek geri besleme amacıyla kullanılamamasıdır. İyi tasarlanan bir gözleyici tarafından



Şekil 12.1



Şekil 12.2

kestirilen durum değişkeni değerleri kısa bir süre sonra sistemin durum değişkenlerinin değerlerine doğru yaklaşır ve bu sorunu ortadan kaldırır.

Gözleyicinin girişleri \underline{u} ve y olup, Şekil 12.2'deki blok diyagramından aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\dot{\hat{x}} = (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})\hat{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{K}_o y \quad (12.3)$$

Durum değişkenleri vektörü \underline{x} ve kestirilen durum değişkenleri \hat{x} arasındaki fark kestirim hatası olup, aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} - [(\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})\hat{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{K}_o y] \\ &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} - [(\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})\hat{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{K}_o \underline{C}\underline{x}] \\ &= \underline{A}(\underline{x} - \hat{x}) - \underline{K}_o \underline{C}(\underline{x} - \hat{x}) = (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})(\underline{x} - \hat{x}) \end{aligned} \quad (12.4)$$

ya da,

$$\dot{e} = (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})e \quad (12.5)$$

Bu denklemden çözülecek hatanın kararlı olması zorunludur. Ayrıca çözüm hızla sifıra doğru gitmelidir. Hatanın sifıra gitme hızı, kontrol edilen sistemin en hızlı cevap bileşeninden daha hızlı olmalıdır. Yani denklem (12.5) ile tanımlanan gözleyicinin kutupları, kapalı çevrim sistemin en küçük kutbundan daha küçük seçilmelidir. Ancak uygulamalarda aşırı hızlı bir gözleyici kullanılması halinde, sistemde olabilecek gürültünün de gözleyici tarafından izlenebileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Çeşitli kaynaklarda gözleyici tasarımı için farklı yaklaşımlar sunulmuştur. Ancak bunların hepsi esas itibarıyla gözleyicili sistemin kutuplarının uygun olarak seçilmesini, bu yapılırken de gözleyici kutuplarının diğer sistem kutuplarından yeterince küçük olmasını sağlar. Yani sonuç olarak bir kutup yerleştirme probleminin çözülmesi söz konusudur. Eğer hata denkleminin kutupları $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ olarak seçilmişse, \underline{K}_o aşağıdaki denklemini sağlar.

$$\det [s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C})] = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots \quad (12.6)$$

Şekil 12.2'den,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{K}\hat{x} = \underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{K}\underline{x} + \underline{B}\underline{K}\underline{x} - \underline{B}\underline{K}\hat{x} \\ &= (\underline{A} - \underline{B}\underline{K})\underline{x} + \underline{B}\underline{K}(\underline{x} - \hat{x}) = (\underline{A} - \underline{B}\underline{K})\underline{x} + \underline{B}\underline{K}e \end{aligned} \quad (12.7)$$

yazılabilir, Bu denklem, denklem (12.5) ile birlikte ele alınırsa, kontrol edilen sistem ve hatayı tanımlayan sistemin oluşturduğu bütünlük sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir [12.1].

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{B}\underline{K} & \underline{B}\underline{K} \\ 0 & \underline{A} - \underline{K}_o\underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

Bu denklemin $\underline{\dot{e}} = (\underline{A} - \underline{K}_o\underline{C})\underline{e}$ kısmı sadece \underline{e} cinsinden olduğundan özdeğerleri sistemin geri kalanından bağımsız olarak belirlenebilir. Denklem (12.7) ile tanımlanan sistemin karakteristik denklemi,

$$\det \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\underline{K} & -\underline{B}\underline{K} \\ 0 & s\underline{I} - \underline{A} + \underline{K}_o\underline{C} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.9)$$

olacağından,

$$(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\underline{K})(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{K}_o\underline{C}) = 0 \quad (12.10)$$

yazılabilir. Bu ifadede ikinci çarpanın determinantı sıfıra eşitlenirse hata denkleminin özdeğerlerini verir. Birinci çarpanın determinantı sıfıra eşitlenirse kontrol edilmek istenen sistemin özdeğerleri elde edilir. O halde gözleyicinin özdeğerleri, kontrol edilmek istenen sistemin özdeğerlerinden bağımsız olarak bulunabilir.

Denklem (12.8) incelendiğinde hatanın başlangıç koşullarının rastgele değil, olduğunca doğru olarak tahmin edilmesinin önemi görülmektedir. Bu denklemden \underline{x} ayrılırsa,

$$\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\underline{K})\underline{x} + \underline{B}\underline{K}\underline{e} \quad (12.11)$$

elde edilir. $t = 0$ 'da gözleyici büyük bir hata değeriyle başlatılırsa, bu denklem (12.11) için büyük bir basamak giriş olarak algılanacak ve \underline{x} 'in geçici davranışını olumsuz yönde etkileyecektir. Bu durumda gözleyici ancak bu geçici davranış sönümlendikten sonra beklenen performansı vermeye başlayacaktır. Bu bölümde verilen Örnek 12.2'de bu husus daha ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Şimdi gözleyicinin sisteme eklenmesi sonucu ortaya çıkan bütünleşik sistem incelenir. Kontrol edilmek istenen sistemin mertebesi n ise tam-mertebeli gözleyicinin mertebesi de n olacağından, kontrol edilmek istenen sistemle gözleyicinin oluşturduğu komple sistemin mertebesi $2n$ olur. Şekil 12.2'den aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{K}\hat{\underline{x}} \quad (12.12)$$

$$\underline{\dot{\hat{x}}} = (\underline{A} - \underline{K}_o\underline{C} - \underline{B}\underline{K})\hat{\underline{x}} + \underline{K}_o\underline{C}\underline{x} \quad (12.13)$$

$2n$ mertebeli bütünleşik sistemin durum değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\hat{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B}\underline{K} \\ \underline{K}_o\underline{C} & \underline{A} - \underline{K}_o\underline{C} - \underline{B}\underline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underline{A}^* \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\hat{x}} \end{bmatrix} \quad (12.14)$$

Şekil 12.2’de gözleyicinin \underline{A} , \underline{B} ve \underline{C} matrisleri sistemin matrisleriyle aynı alınmıştır. Bu durumda durağan kestirim hatası sıfıra gider. Ancak uygulamalarda sistem matrislerinin belirlenmesinde daima bir miktar belirsizlik vardır ve kestirim hatası tam olarak sıfıra gitmez.

Tam-mertebeli bir gözleyici tasarlanırken izlenecek aşamalar aşağıda sıralanmıştır.

- Kontrol edilecek sistemin arzu edilen kutup yerlerini belirleyin. Bunun için klasik veya modern kontrol yöntemlerinden birisi kullanılabilir. Örneğin geçici davranış özellikleri ya da Riccati denklemi kullanılabilir. Bu kutupları verecek geribesleme matrisi \underline{K} ’yı bulun.
- Yukarıda belirlenen kutuplar arasında sanal eksenden en uzak olanından 2-4 kat uzak olacak şekilde gözleyici kutuplarını belirleyin.
- Denklem (12.6)’dan ya da herhangi bir kutup yerleştirme yöntemiyle gözleyici geribesleme matrisi \underline{K}_o ’yu belirleyin.
- $\underline{x}(0)$ ve $\underline{e}(0)$ başlangıç şartlarını akılcı bir biçimde belirleyin. Bu başlangıç şartlarını kullanarak denklem (12.8)’den \underline{x} ve \underline{e} ’nin değişimini elde edebilirsiniz. İstenirse bunlardan ayrıca $\underline{\hat{x}}$ bulunabilir. Diğer bir seçenek de verilen $\underline{x}(0)$ ve $\underline{\hat{x}}(0)$ başlangıç şartlarını kullanarak denklem (12.14)’den \underline{x} ve $\underline{\hat{x}}$ değişkenlerini çözmek ve bunlarda \underline{e} ’yi elde etmektir. Ancak daha basit bir ifade olması dolayısıyla genellikle denklem (12.8)’in kullanılması tercih edilir.

Örnek 12.1:

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12.15)$$

$$y = [1 \quad 1] \underline{x} \quad (12.16)$$

Bu sistemin,

$$P.I. = \int_0^{\infty} (10x_1^2 + u^2) dt \quad (12.17)$$

şeklinde tanımlanan bir performans kriteri kullanarak optimum olarak kontrol edilmesi istenmektedir. Bunun için Riccati denklemi kullanılmış ve optimum geribesleme katsayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\underline{K} = [1.742 \quad 1.823] \quad (12.18)$$

Bu sistemin kutupları $p_{1,2} = -1.41 \pm j2.34$ gibidir. Şekil 12.3 ve Şekil 12.4'de bu sistemin $\underline{x}(0) = [1 \quad 1]^T$ başlangıç koşuluna verdiği cevap görülmektedir.

Optimum kontrolün uygulanması sırasında sadece sistem çıkışı ölçülebildiğine göre tam-mertebeli bir gözleyici tasarlanmalıdır.

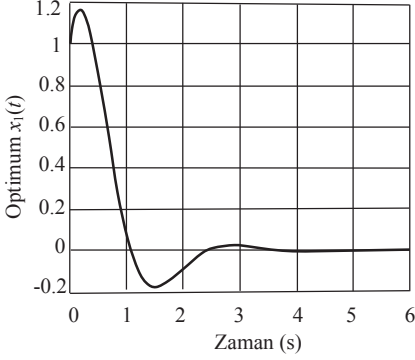
Gözleyici hata denkleminin kutupları sistemin sanal eksene en uzak kutbundan oldukça daha küçük seçilmelidir. Bunun için tipik bir ölçüt, gözleyici kutuplarının, sistemin sanal eksene en uzak kutbundan yaklaşık 2-4 kat kadar daha uzakta olmasıdır. Bu örnekte gözleyici kutupları katlı olarak $p_{1,2} = -6$ olarak alınacaktır.

Denklem (12.5) yazılırsa, aşağıdaki ifade bulunur.

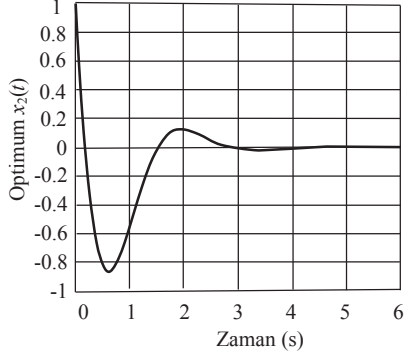
$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C}) \underline{e} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \underline{e} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{o1} & k_{o1} \\ k_{o2} & k_{o2} \end{bmatrix} \right\} \underline{e} = \begin{bmatrix} -k_{o1} & 2 - k_{o1} \\ -2 - k_{o2} & -1 - k_{o2} \end{bmatrix} \underline{e} = \underline{A}_o \underline{e} \end{aligned} \quad (12.19)$$

Hata denkleminin kutuplarının, -6 olması için şart ise,

$$\begin{aligned} \det[s\underline{I} - \underline{A}_o] &= \det \begin{bmatrix} s + k_{o1} & -2 + k_{o1} \\ 2 + k_{o2} & s + 1 + k_{o2} \end{bmatrix} \\ &= s^2 + (k_{o1} + k_{o2} + 1)s + 2k_{o2} - k_{o1} + 4 \\ &= (s + 6)^2 = s^2 + 12s + 36 \end{aligned} \quad (12.20)$$



Şekil 12.3



Şekil 12.4

gibidir. Bu denklemin sağ ve solundaki s 'nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayıları eşitlenirse, gözleyicinin geribesleme katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{K}_o = \begin{bmatrix} -3.333 \\ 14.333 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

Denklem (12.8)'de \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{K} ve \underline{K}_o yerine koyulursa gözleyicili sistemin denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{BK} & \underline{BK} \\ 0 & \underline{A} - \underline{K}_o \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

Burada,

$$\underline{A} - \underline{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.742 & 1.823 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3.742 & -2.823 \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

$$\underline{K}_o \underline{C} = \begin{bmatrix} -3.333 \\ 14.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.333 & -3.333 \\ 14.333 & 14.333 \end{bmatrix} \quad (12.24)$$

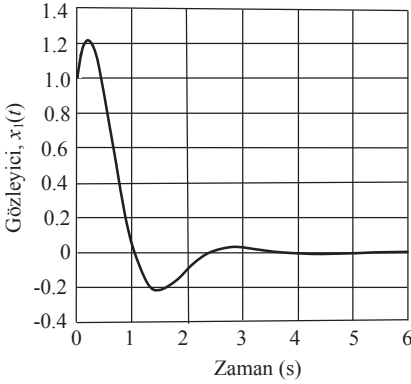
$$\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.333 & -3.333 \\ 14.333 & 14.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.333 & 5.333 \\ -16.333 & -15.333 \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

olduğuna göre, denklem (12.22) aşağıdaki hali alır.

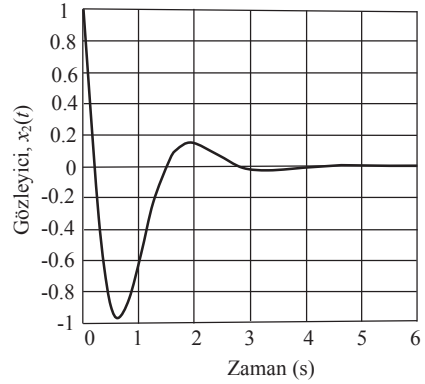
$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3.742 & -2.823 & 1.742 & 1.823 \\ 0 & 0 & 3.333 & 5.333 \\ 0 & 0 & -16.333 & -15.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \quad (12.26)$$

Yukarıdaki denklemle tanımlanan gözleyicili sistemin $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve

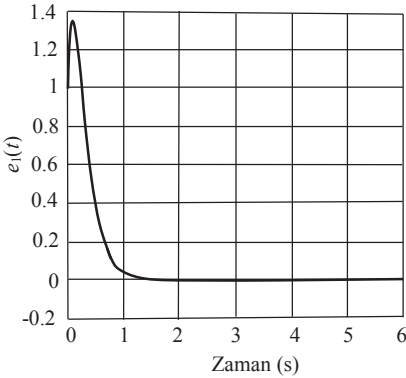
$\underline{e}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ başlangıç şartları için $\underline{x}(t)$ ve $\underline{e}(t)$ eğrileri Şekiller 12.5 – 12.8’de verilmiştir. Görüldüğü gibi, hatalar yaklaşık 1.5 s sonra sıfıra gitmektedir. Durum değişkenlerinin değişim biçimleri, Şekil 12.3 ve Şekil 12.4’teki optimum sisteminkilere çok yakındır.



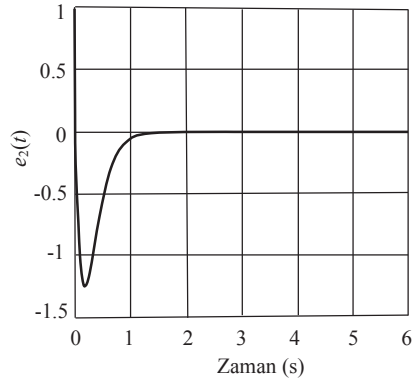
Şekil 12.5



Şekil 12.6



Şekil 12.7



Şekil 12.8

Örnek 12.2:

İki kontrol girişli bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} \quad (12.27)$$

$$y = [1 \quad 1] \underline{x} \quad (12.28)$$

Bu sistemin,

$$P.I. = \int_0^{\infty} (x_1^2 + u_1^2 + u_2^2) dt \quad (12.29)$$

şeklinde tanımlanan bir performans kriterini kullanarak optimum olarak kontrol edilmesi istenmektedir. Bunun için Riccati denklemi kullanılmış ve geribesleme katsayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.716 & 0.522 \\ 1.238 & 3.639 \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

Bu sistemin kutupları $p_1 = -2.678$ ve $p_2 = -0.915$ değerlerindedir.

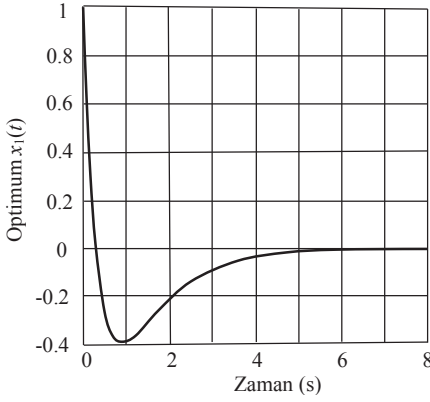
Bu sistemin $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ başlangıç koşuluna verdiği cevap eğrileri Şekil 12.9 ve Şekil 12.10'da görülmektedir.

Sadece sistem çıkışı ölçülebildiğinden, tam mertebeli bir gözleyici tasarlanması istenmektedir. Gözleyici kutuplarının sanal eksene uzaklığı, sistemin sanal eksene en uzak kutbundan 2-4 kat kadar daha uzak olmalıdır. Bu örnekte gözleyici kutupları katlı olarak $p_{1,2} = -8$ noktasında alınacaktır.

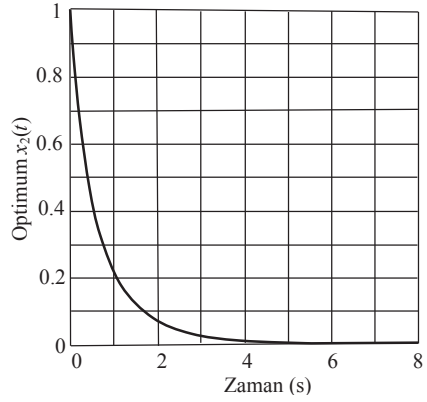
Hata denklemi yazılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= (\underline{A} - \underline{K}_o \underline{C}) \underline{e} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \underline{e} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{o1} & k_{o1} \\ k_{o2} & k_{o2} \end{bmatrix} \right\} \underline{e} = \begin{bmatrix} -k_{o1} & 1 - k_{o1} \\ 1 - k_{o2} & 2 - k_{o2} \end{bmatrix} \underline{e} = \underline{A}_o \underline{e} \end{aligned} \quad (12.31)$$

Hata denkleminin kutuplarının, -8 olarak istenen kutup değerlerine eşit olması için şart aşağıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 12.9



Şekil 12.10

$$\det[s\underline{I} - \underline{A}_o] = \det \begin{bmatrix} s + k_{o1} & -1 + k_{o1} \\ -1 + k_{o2} & s - 2 + k_{o2} \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

$$= s^2 + (k_{o1} + k_{o2} - 2)s + k_{o2} - k_{o1} - 1 = (s + 8)^2 = s^2 + 16s + 64$$

Bu denklemin sağ ve solundaki s 'nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayıları eşitlenirse, gözleyicinin geribesleme katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

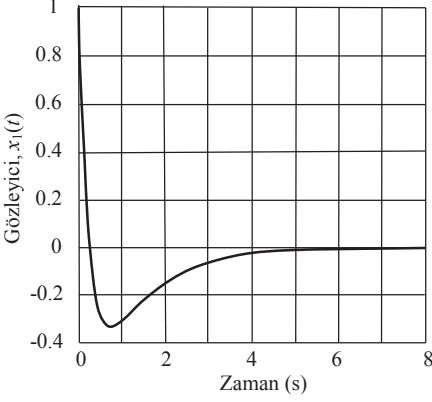
$$\underline{K}_o = \begin{bmatrix} -23.5 \\ 41.5 \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

Denklemler 12.8'de geçen terimler hesaplanır ve yerine koyulursa \underline{x} ve \underline{e} cinsinden aşağıdaki denklem yazılabilir.

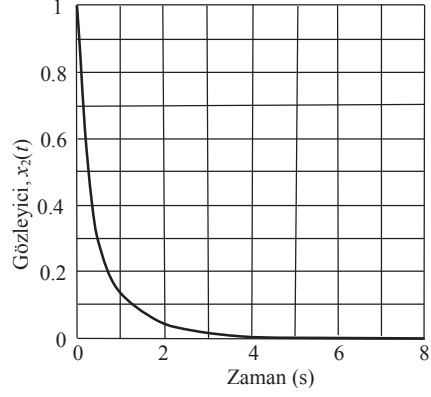
$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{B}\underline{K} & \underline{B}\underline{K} \\ 0 & \underline{A} - \underline{K}_o\underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.954 & -3.161 & 1.954 & 4.161 \\ -0.238 & -1.639 & 1.238 & 3.639 \\ 0 & 0 & 23.5 & 24.5 \\ 0 & 0 & -40.5 & -39.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \quad (12.34)$$

Bu sistemin $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\underline{e}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ başlangıç şartları için elde edilen cevap eğrileri Şekiller 12.11 – 12.14'de görülmektedir. Görüldüğü

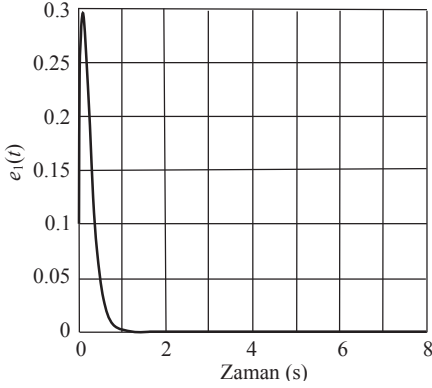
gibi, hatalar yaklaşık 1 s sonra sıfıra gitmektedir. Durum değişkenleri de Şekil 12.9 ve Şekil 12.10'daki optimum sistemin eğrilerine çok yakındır.



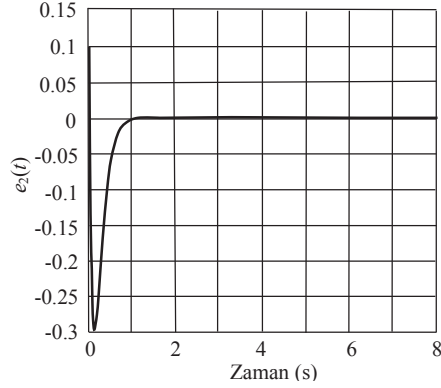
Şekil 12.11



Şekil 12.12



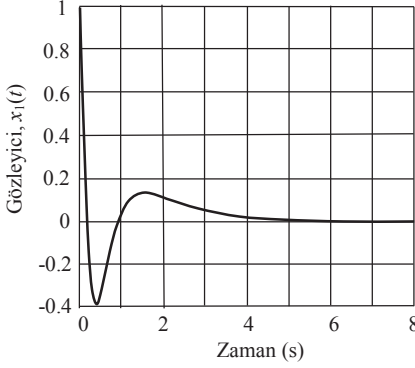
Şekil 12.13



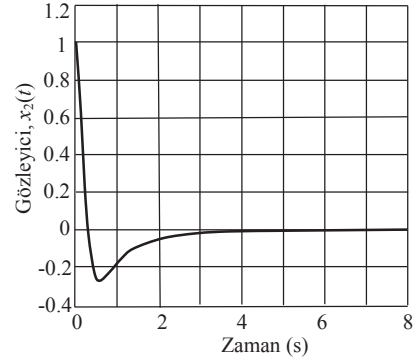
Şekil 12.14

Başlangıç şartlarının sistemde yarattığı geçici davranışı daha iyi görmek için şimdi de $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\underline{e}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ alınsın. Bu durum için elde edilen cevap eğrileri Şekiller 12.15 – 12.18'de verilmiştir. Başlangıç şartının denklem (12.11) üzerindeki güçlü etkisi açıkça görülmektedir. Bu durumda başlangıç şartının yarattığı geçici davranış dolayısıyla Şekil 12.15 ve Şekil 12.16'daki eğrilerle Şekil 12.11 ve Şekil 12.12'deki optimum sistemin eğrileri arasındaki fark çok artmıştır. Gözleyicinin durum

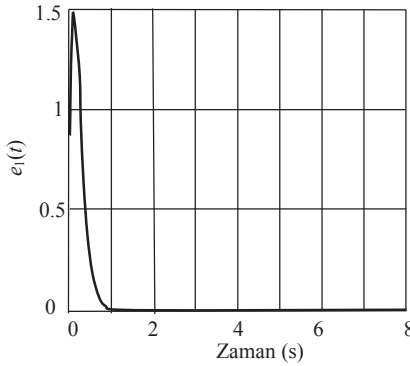
değişkenlerini doğru bir biçimde kestirebilmesi ancak geçici davranışın yeterince sönümlenmesinden sonra mümkün olacaktır.



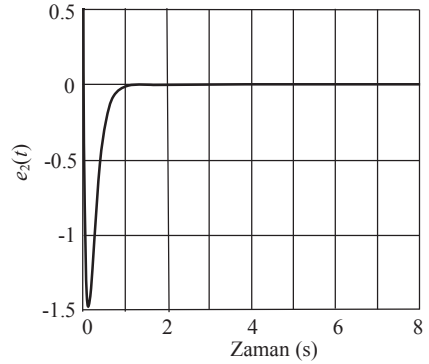
Şekil 12.15



Şekil 12.16



Şekil 12.17



Şekil 12.18

12.1.2 Minimum-Mertebeli Gözleyici Tasarımı

Bazı uygulamalarda durum değişkenlerinin bir kısmı ölçülebilirken, diğerleri ölçülemeyebilir. Böyle durumlarda sadece ölçülemeyen durum değişkenlerinin kestirilmesi yeterlidir. Bu işlem *minimum mertebeli gözleyici* kullanılarak gerçekleştirilir.

Mertebesi n ve giriş sayısı r olan bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (12.35)$$

a sayıdaki durum değişkeni ölçülüyor olsun. Bu değişkenler \underline{x}_a olarak gösterilsin. Geri kalan ve ölçülemeyen $n - a = b$ sayıdaki değişken ise \underline{x}_b olsun. Çıkış \underline{y} ise sadece ölçülebilen değişkenler cinsinden,

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{I}_a & \underline{0}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \underline{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_a \end{bmatrix} \quad (12.36)$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu tanımlar cinsinden durum denklemleri aşağıdaki gibi ayrıştırılarak yazılabilir. (Bu bölümde kullanılan matrislerin boyutları Çizelge 12.1’de listelenmiştir.)

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_a \\ \dot{\underline{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{aa} & \underline{A}_{ab} \\ \underline{A}_{ba} & \underline{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \underline{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_a \\ \underline{B}_b \end{bmatrix} \underline{u} \quad (12.37)$$

Denklem (12.37)’den ölçülemeyen durum değişkenleri için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\dot{\underline{x}}_b = \underline{A}_{bb}\underline{x}_b + \underline{A}_{ba}\underline{x}_a + \underline{B}_b\underline{u} \quad (12.38)$$

Denklem (12.37)’den ölçülebilen durum değişkenleri ile ilgili olarak ise aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\dot{\underline{x}}_a = \underline{A}_{aa}\underline{x}_a + \underline{A}_{ab}\underline{x}_b + \underline{B}_a\underline{u} \quad (12.39)$$

ya da,

$$\underline{A}_{ab}\underline{x}_b = \dot{\underline{x}}_a - \underline{A}_{aa}\underline{x}_a - \underline{B}_a\underline{u} \quad (12.40)$$

Şekil 12.19’da verilen blok diyagramında bu denklemler kullanılarak oluşturulan gözleyicili sistemin yapısı görülmektedir. Bu şekildeki blok diyagramı, Şekil 12.2’deki tam-mertebeli gözleyici kullanan sistemin blok diyagramıyla karşılaştırıldığında aşağıdaki iki husus özellikle dikkati çekmektedir.

- i) Şekil 12.19’da "1" olarak numaralanan toplama bloğunun sağındaki giriş incelendiğinde, denklem (12.40)’ın sağ tarafındaki terimlerin sistem çıkışının yerini aldığı görülmektedir. Bu giriş ölçülebilen değişkenler cinsindedir ve $\underline{A}_{ab}\underline{x}_b$ ’ye eşittir.
- ii) Toplama bloğunun eksi işaretli girişi, yani gözleyici çıkışı denklem (12.40)’ın sol tarafıyla aynıdır. Bu çıkış tam-mertebeli gözleyicide \underline{C} ile çarpılarak elde edilirken, bu sefer

\underline{C} 'nin yerini \underline{A}_{ab} almıştır. Bu giriş ise kestirilen değişkenler cinsinden ve $\underline{A}_{ab}\hat{x}_b$ 'ye eşittir.

iii) Şekil 12.2'deki $\underline{B}u$ teriminin yerini ise $\underline{A}_{ba}x_a + \underline{B}_b u$ almıştır.

Çizelge 12.1

Matris	Boyut	Matris	Boyut
\underline{A}	$n \times n$	\underline{K}_o	$b \times a$
\underline{A}_{aa}	$a \times a$	\underline{u}	$r \times 1$
\underline{A}_{ab}	$a \times b$	\underline{x}	$n \times 1$
\underline{A}_{ba}	$b \times a$	\hat{x}	$n \times 1$
\underline{A}_{bb}	$b \times b$	\underline{x}_a	$a \times 1$
\underline{B}	$n \times r$	\underline{x}_b	$b \times 1$
\underline{B}_a	$a \times r$	\hat{x}_b	$b \times 1$
\underline{B}_b	$b \times r$	\underline{y}	$a \times 1$
\underline{I}_a	$a \times a$	\underline{Q}_{ab}	$a \times b$
\underline{I}_b	$b \times b$	\underline{Q}_{ba}	$b \times a$
\underline{K}	$r \times n$	$a + b = n$	
Ölçülebilir durum değişkeni sayısı = a Ölçülemeyen durum değişkeni sayısı = b			

Şekil 12.19'deki blok diyagramından \hat{x}_b için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{x}_b = & (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) \hat{x}_b + \underline{A}_{ba} x_a \\ & + \underline{B}_b u + \underline{K}_o (\dot{x}_a - \underline{A}_{aa} x_a - \underline{B}_a u) \end{aligned} \quad (12.41)$$

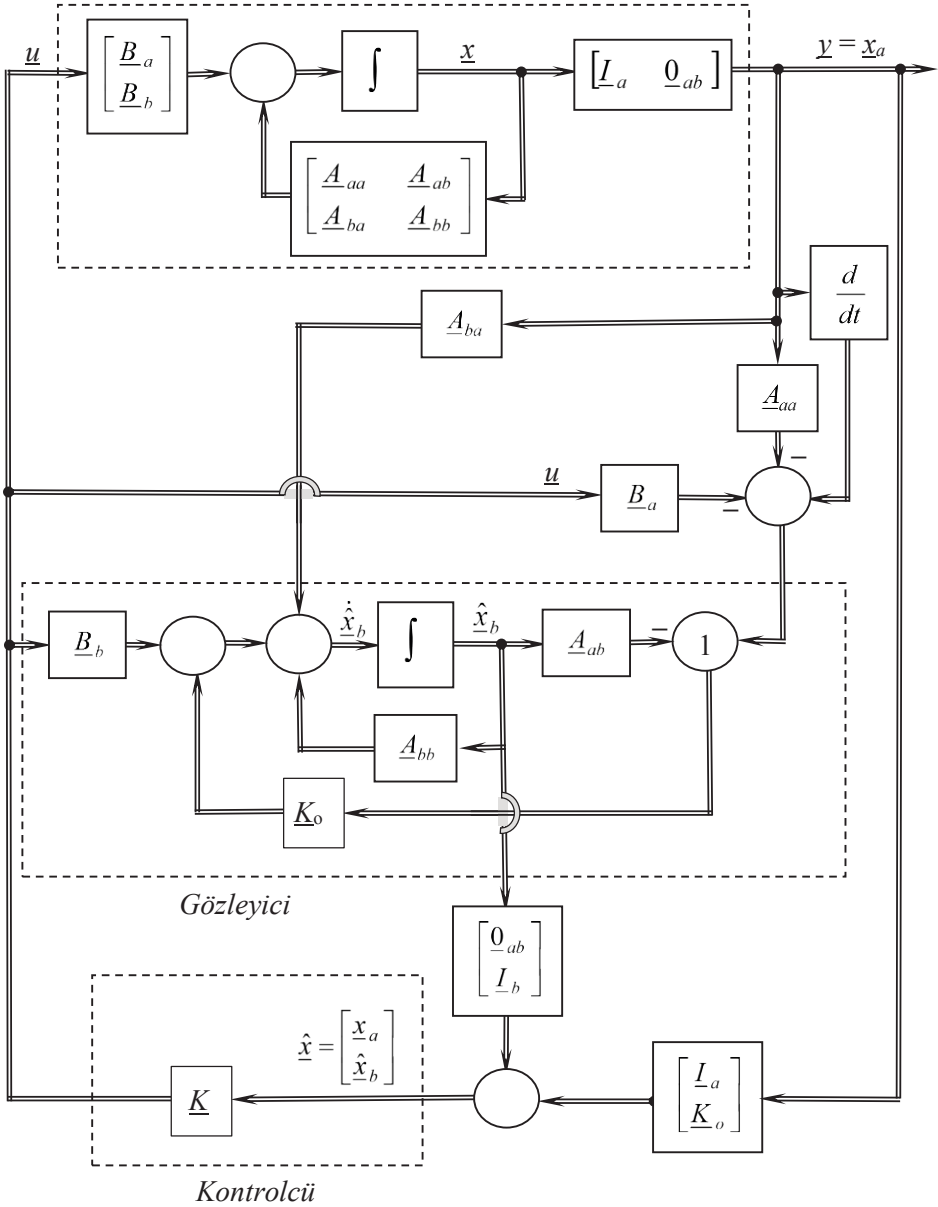
Ancak yukarıdaki denklemin içinde geçen \dot{x}_a teriminin ölçüm yoluyla bulunması sistemdeki gürültüyü artıracaktır. Bu terimi ortadan kaldırmak için sağ taraftaki türevli terim sol tarafa alınarak yeni bir \hat{z} değişkeni,

$$\hat{z} = \hat{x}_b - \underline{K}_o x_a \quad (12.42)$$

olarak tanımlansın. Denklem (12.42)'den \hat{x}_b çözümlü, denklem (12.41)'de yerine koyulursa, yeni değişken cinsinden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} + \underline{K}_o \hat{x}_a &= (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab})(\hat{z} + \underline{K}_o \underline{x}_a) \\ &+ \underline{A}_{ba} \underline{x}_a + \underline{B}_b \underline{u} + \underline{K}_o (\dot{x}_a - \underline{A}_{aa} \underline{x}_a - \underline{B}_a \underline{u}) \end{aligned} \quad (12.43)$$

ya da,



Şekil 12.19

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) \hat{z} \\ &+ [(\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) \underline{K}_o + \underline{A}_{ba} - \underline{K}_o \underline{A}_{aa}] \underline{x}_a \\ &+ (\underline{B}_b - \underline{K}_o \underline{B}_a) u\end{aligned}\quad (12.44)$$

Denklemin katsayıları için,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab} \\ \hat{B} &= (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) \underline{K}_o + \underline{A}_{ba} - \underline{K}_o \underline{A}_{aa} \\ \hat{F} &= \underline{B}_b - \underline{K}_o \underline{B}_a\end{aligned}\quad (12.45)$$

matrisleri tanımlanırsa, kısaca aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\dot{\hat{z}} = \hat{A} \hat{z} + \hat{B} \underline{x}_a + \hat{F} u \quad (12.46)$$

$u = K \hat{x}$ şeklinde tanımlanan kontrol girişinin elde edilebilmesi için \hat{z} değişkeninden tekrar \hat{x} değişkenine dönüşüm yapılmalıdır. \underline{x}_a ölçülebildiğinden doğrudan kullanılabilir. O halde, kontrol girişi ifadesinde kullanılacak \hat{x} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \hat{z} + \underline{K}_o \underline{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \underline{K}_o \underline{x}_a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{K}_o \end{bmatrix} \underline{x}_a = \hat{C} \hat{z} + \hat{D} \underline{x}_a = \hat{C} \hat{z} + \hat{D} y\end{aligned}\quad (12.47)$$

Gözleyicili sistemin yeni değişken \hat{z} cinsinden çizilen ve denklem (12.47)'deki dönüşümü de içeren blok diyagramı Şekil 12.20'de verilmiştir.

Diğer yandan, denklem (12.41)'de türev içeren parantezli terim yerine denklem (12.40)'dan $\underline{A}_{ab} \underline{x}_b$ koyulursa ve bu şekilde elde edilen denklem, denklem (12.38)'den çıkarılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{\underline{x}}_b - \dot{\hat{x}}_b = (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab})(\underline{x}_b - \hat{x}_b) \quad (12.48)$$

Hata matrisi,

$$\underline{e} = \underline{x}_b - \hat{x}_b \quad (12.49)$$

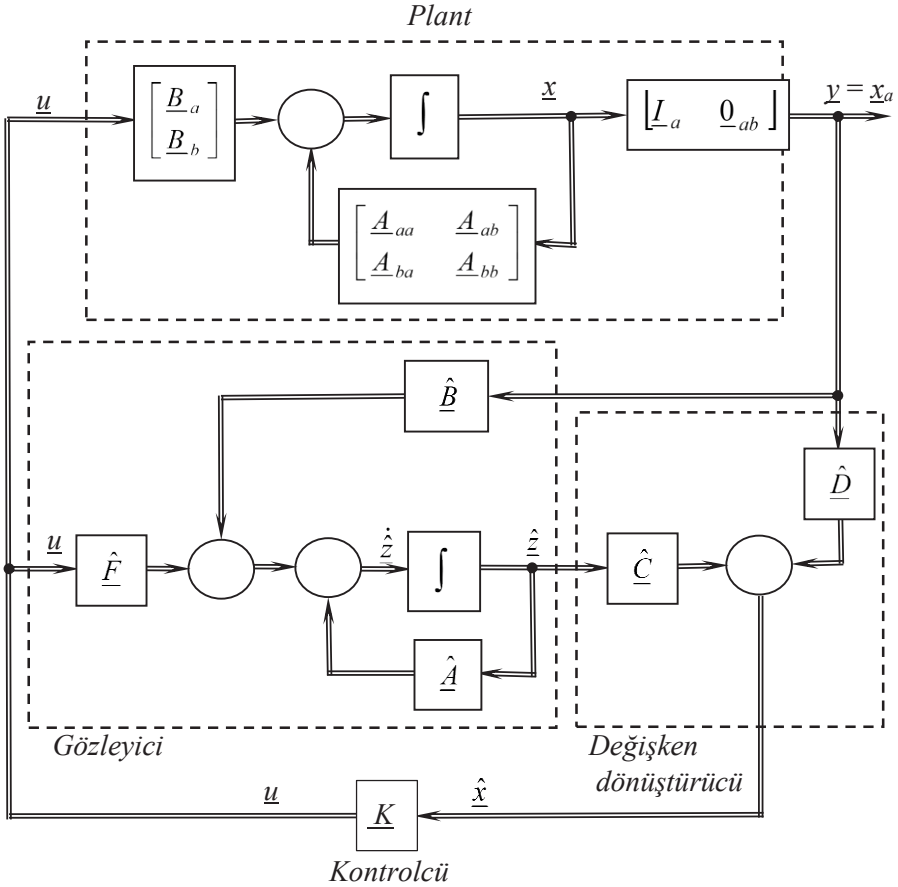
olarak tanımlanırsa, hatanın değişimini tanımlayan denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\underline{e}} = (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) \underline{e} = \hat{A} \underline{e} \quad (12.50)$$

Tasarım sırasında daha önce tam mertebeli gözleyici tasarımında olduğu gibi, denklem (12.50) ile tanımlanan sistemin kutupları, kontrol edilmiş sistemin kutuplarına göre sanal eksenenden 2-4 kat daha uzakta alınmalıdır.

Simülasyonda kullanılacak komple denklem takımı kompozit matrisler cinsinden aşağıdaki gibidir. Parantez içindeki terimler matrislerin boyutlarıdır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{\hat{B}} & \underline{0} \\ \underline{\hat{A}} & \underline{\hat{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{\hat{F}} \end{bmatrix} \underline{u} \quad (12.51)$$



Şekil 12.20

Denklem (12.51)'in sağ tarafındaki ilk matrisi \underline{A}^* denirse, durum değişkenleri $\underline{w}^T = [x_1 \ x_2 \ \cdot \cdot \ x_n \ \hat{z}_{n-b} \ \cdot \cdot \ \hat{z}_n]$ olarak yeniden isimlendirilirse ve

$$\underline{Q}\underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ (n \times r) \\ \underline{\hat{F}} \\ (b \times r) \end{bmatrix} \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ (n \times r) \\ \underline{\hat{F}} \\ (b \times r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K} \\ (r \times n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ (a \times a) & (a \times 2b) \\ \underline{K}_o & \underline{0} & \underline{I} \\ (b \times a) & (b \times b) & (b \times b) \end{bmatrix} \underline{w} \quad (12.52)$$

olarak tanımlanırsa, geri besleme uygulanmış gözleyicili sistemin durum denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\dot{\underline{w}} = (\underline{A}^* + \underline{Q})\underline{w} \quad (12.53)$$

Örnek 12.3:

Kontrol edilmek istenen bir sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.5 & -10.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12.54)$$

$$y = \underline{C}\underline{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \quad (12.55)$$

- i) Bu sistemin kapalı çevrim kutuplarının $p_{1,2} = -0.5 \pm 0.1j$ ve $p_{1,2} = -2 \pm 0.2j$ noktalarına yerleştirilmesi isteniyor. Bunu sağlayacak geribesleme katsayılarını bulun.
- ii) x_1 ölçülebilmektedir. x_2, x_3 ve x_4 'ü kestirmek için minimum mertebeli bir gözleyici tasarlayın.

Önce kutupları istenen yerlere yerleştirmek için gereken geri besleme katsayılarını belirleyelim. Sistem tek girişli olduğunda Ackermann

formülünden yararlanılabilir. Bu formüle göre geri besleme katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{k}^T = -[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \underline{M}_C^{-1} D(\underline{A}) \quad (12.56)$$

Burada $D(\underline{A})$ terimi, olması istenen kutuplara karşılık gelen karakteristik denklem $D(s)$ 'de $s = \underline{A}$ koyularak elde edilir. \underline{M}_C ise sistemin kontroledilebilirlik matrisidir. Bu problem için karakteristik denklem,

$$\begin{aligned} (s + 0.5 - 0.1j)(s + 0.5 + 0.1j)(s + 2 - 0.2j)(s + 2 + 0.2j) \\ = s^4 + 5s^3 + 8.3s^2 + 5.08s + 1.0504 \end{aligned} \quad (12.57)$$

olduğuna göre, $D(\underline{A})$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} D(\underline{A}) &= \underline{A}^4 + 5\underline{A}^3 + 8.3\underline{A}^2 + 5.08\underline{A} + 1.0504 \underline{I} \\ &= \begin{bmatrix} -7.4496 & -5.42 & 0.05 & 2 \\ -17 & -28.4496 & -21.92 & -5.95 \\ 50.575 & 45.475 & 20.6379 & -4.07 \\ 34.595 & 93.31 & 79.0525 & 32.8479 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.58)$$

$$\underline{M}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0.75 \\ 1 & -3 & 0.75 & 12.0 \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

olup,

$$\underline{M}_C^{-1} = \begin{bmatrix} 10.5 & 8.25 & 3 & 1 \\ 8.25 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.60)$$

olarak elde edilir. Denklem (12.58) ve denklem (12.60) ile bulunan değerler denklem (12.56)'da yerine koyulursa gözleyicili sistemin blok diyagramında yer alan geri besleme katsayı matrisi $\underline{K} (= -\underline{k}^T)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{K} = [7.4496 \quad 5.42 \quad -0.05 \quad -2] \quad (12.61)$$

Orijinal sistemin ve kutup yerleştirme sonrasında elde edilen sistemin $\underline{x}(0) = [1; 0; 0; 1]$ başlangıç şartı ve $u = 0$ için cevapları Şekil 12.21'de görülmektedir.

Bu problemde tek giriş olduğundan \underline{u} skalar u şeklindedir. x_1 ölçülebilmektedir. Diğer durum değişkenlerini kestirmek için kullanılacak minimum mertebeli gözleyicinin denklemlerinde geçen matrisler aşağıdaki gibidir.

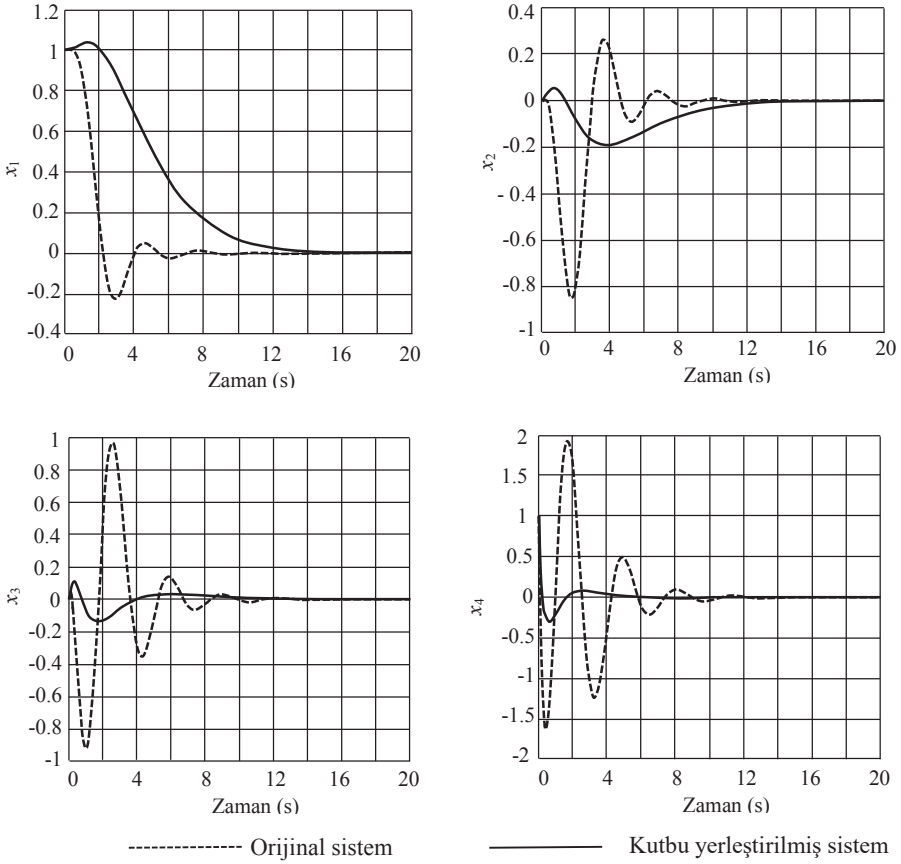
$$\begin{aligned} \underline{A}_{aa} &= [0] & \underline{A}_{ab} &= [1 \ 0 \ 0] \\ \underline{A}_{ba} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.5 \end{bmatrix} & \underline{A}_{bb} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \\ \underline{B}_a &= [0] & \underline{B}_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \underline{K}_o &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.62)$$

Denklemler (12.50)'de geçen $\hat{\underline{A}}$ matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{A}} &= (\underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -10.5 - k_3 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.63)$$

Bu matrisin özdeğerleri, kontrol edilmiş sistemin sanal eksenden en uzak özdeğerine göre dört kat daha uzakta, $p_{1,2,3} = -8$ noktasında katlı olarak seçilsin.

$$\begin{aligned} \det[s\underline{I} - \hat{\underline{A}}] &= \det \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 & 0 \\ k_2 & s & -1 \\ 10.5 + k_3 & 8.25 & s + 3 \end{bmatrix} = s^3 + (k_1 + 3)s^2 + (3k_1 + k_2 + 8.25)s \\ &+ (8.25k_1 + 3k_2 + k_3 + 10.5) = (s + 8)^3 = s^3 + 24s^2 + 192s + 512 \end{aligned} \quad (12.64)$$



Şekil 12.21

Denklem (12.64)'ün sağ ve solunda s 'nin aynı kuvvete sahip terimlerinin katsayılarını eşitleyerek $k_1 = 21$, $k_2 = 120.75$ ve $k_3 = -34$ olarak çözümler. Böylece, \underline{K}_o matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{K}_o = \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} \quad (12.65)$$

$\hat{\underline{A}}$ matrisi ise denklem (12. 63)'den aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -21 & 1 & 0 \\ -120.75 & 0 & 1 \\ 23.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \quad (12.66)$$

Denklemler (12.45) ve (12.47)'de geçen diğer matrisler ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \hat{A}K_o + A_{ba} - K_o A_{aa} \\ &= \begin{bmatrix} -21 & 1 & 0 \\ -120.75 & 0 & 1 \\ 23.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} -320.25 \\ -2569.75 \\ -409.1875 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (12.67)$$

$$\hat{F} = B_b - K_o B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (12.68)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ K_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix}\quad (12.69)$$

\hat{A} matrisi denklem (12.50)'de yerine koyulursa, hata denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 1 & 0 \\ -120.75 & 0 & 1 \\ 23.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}\quad (12.70)$$

\hat{A} , \hat{B} ve \hat{F} matrisleri denklemler (12.46)'da yerine koyulursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 1 & 0 \\ -120.75 & 0 & 1 \\ 23.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -320.25 \\ -2569.75 \\ -409.1875 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\quad (12.71)$$

Diğer yandan denklem (12.42)'den,

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} - \underline{K}_o y = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} x_1 \quad (12.72)$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} + \underline{K}_o y = \begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 \\ 120.75 \\ -34 \end{bmatrix} x_1 \quad (12.73)$$

Ayrıca giriş aşağıdaki gibidir.

$$u = \underline{K} \hat{x} = \underline{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} \quad (12.74)$$

Minimum mertebeli tüm sistemin yapısı Şekil 12.22'de verilmiştir.

Şimdi belli bir başlangıç koşulu için sistemin davranışını simülasyon yoluyla inceleyelim. Kontrol edilecek sistemin $t = 0$ 'daki başlangıç koşulları daha önce olduğu gibi $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 1$ olsun. \hat{x} ise başlangıçta hatalı olarak tahmin edilmiş olsun ve $\hat{x}_1(0) = x_1(0) = 1$ (bu terim hatasız ölçülmekte), $\hat{x}_2(0) = 0.1$, $\hat{x}_3(0) = 0.1$, $\hat{x}_4(0) = 0.9$ olarak kabul edilsin. \hat{z} için başlangıç şartları denklem (12.72)'den aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{z}_2(0) = \hat{x}_2(0) - k_1 x_1(0) = 0.1 - 21x_1(0) = -20.9$$

$$\hat{z}_3(0) = \hat{x}_3(0) - k_2 x_1(0) = 0.1 - 120.75x_1(0) = -120.65$$

$$\hat{z}_4(0) = \hat{x}_4(0) - k_3 x_1(0) = 0.9 + 34x_1(0) = 34.9$$

Simülasyonda kullanılacak komple denklem takımı aşağıdaki gibidir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (12.75)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (12.76)$$

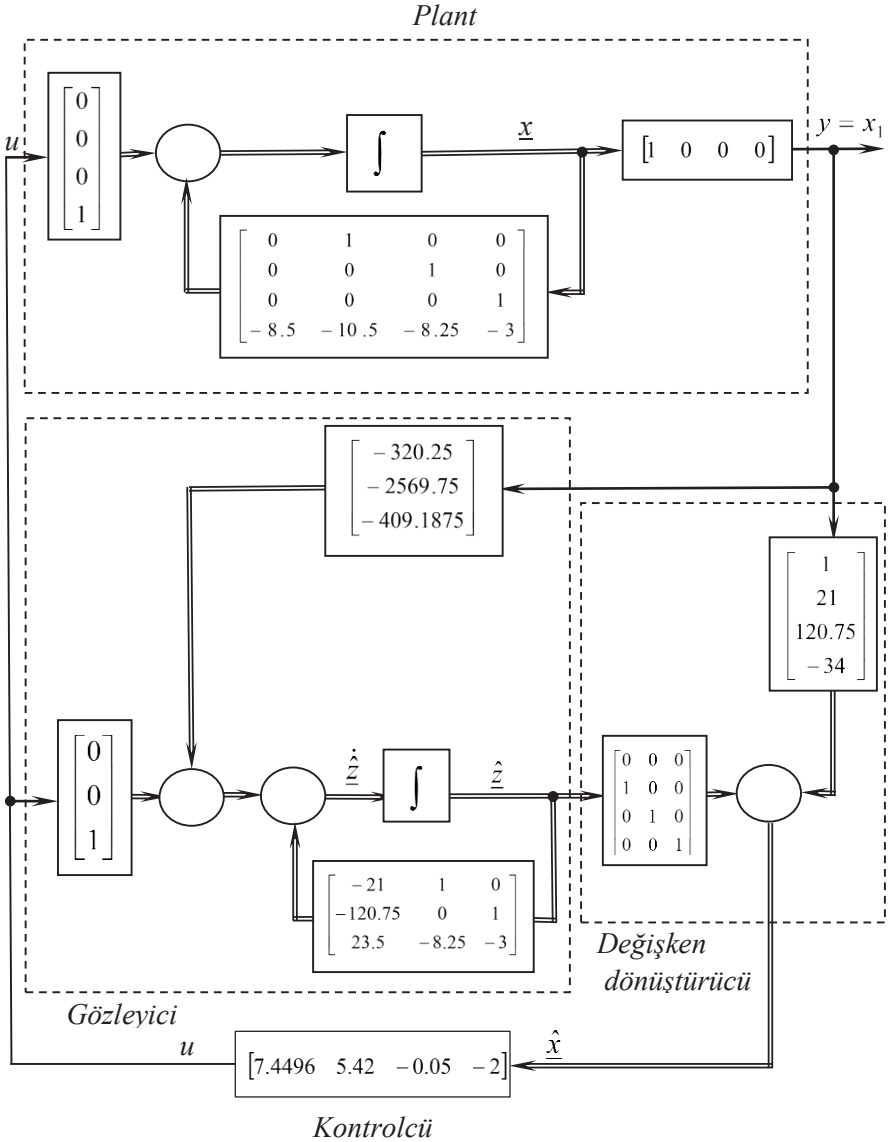
$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (12.77)$$

$$\dot{x}_4 = -8.5x_1 - 10.5x_2 - 8.25x_3 - 3x_4 + u \quad (12.78)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = -21\hat{z}_2 + \hat{z}_3 - 320.25x_1 \quad (12.79)$$

$$\dot{\hat{z}}_3 = -120.75\hat{z}_2 + \hat{z}_4 - 2569.75x_1 \quad (12.80)$$

$$\dot{\hat{z}}_4 = 23.5\hat{z}_2 - 8.25\hat{z}_3 - 3\hat{z}_4 - 409.1875x_1 + u \quad (12.81)$$



Bu denklemlerde geçen kontrol girişi ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$u = 7.4496 x_1 + 5.42 \hat{x}_2 - 0.05 \hat{x}_3 - 2 \hat{x}_4 \quad (12.82)$$

Ama,

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{z}_2 + k_1 x_1 \\ \hat{z}_3 + k_2 x_1 \\ \hat{z}_4 + k_3 x_1 \end{bmatrix} \quad (12.83)$$

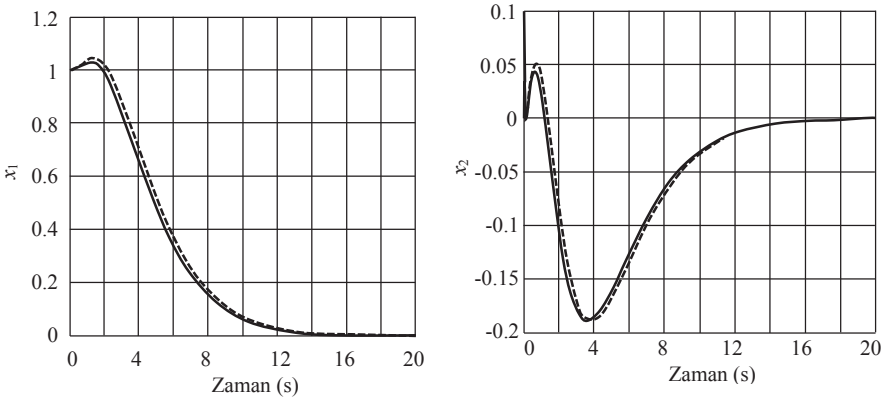
olduğundan, u aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u = (7.4496 + 5.42k_1 - 0.05k_2 - 2k_3)x_1 + 5.42\hat{z}_2 - 0.05\hat{z}_3 - 2\hat{z}_4 \quad (12.84)$$

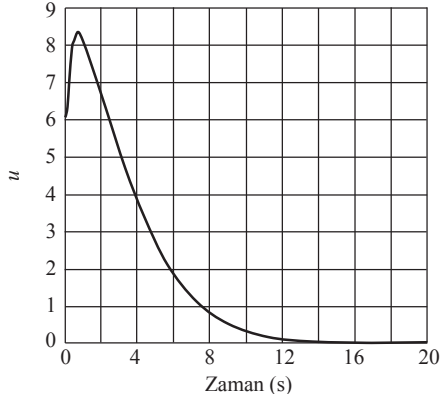
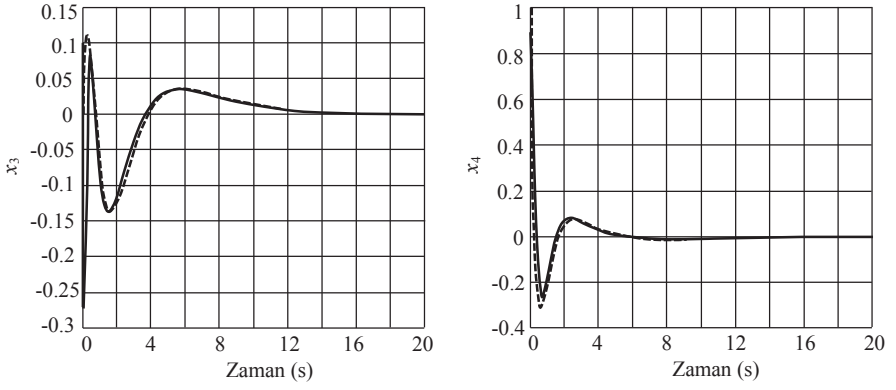
Gözleyicili sistemin simülasyonu, denklemler (12.75) - (12.81) ve (12.84)'ün aşağıda tekrardan özetlenen başlangıç koşullarıyla çözülmesiyle elde edilir.

$$\begin{aligned} x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0 \quad x_3(0) = 0 \quad x_4(0) = 1 \\ \hat{z}_2(0) = -20.9 \quad \hat{z}_3(0) = -120.65 \quad \hat{z}_4(0) = 34.9 \end{aligned} \quad (12.85)$$

Şekil 12.23'de kutup yerleştirilmesi yapılmış gözleyicisiz sistem ve minimum mertebeli gözleyici uygulanmış sistemin cevapları karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Şekil 12.24'de ise \hat{x}_2 , \hat{x}_3 ve \hat{x}_4 'in kestirim hataları (sırasıyla e_1 , e_2 ve e_3) verilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi gözleyici sistem yaklaşık 1 s içinde sönümlenen bir geçici davranıştan sonra durum değişkenlerini yaklaşık sıfır hatayla kestirebilmektedir.



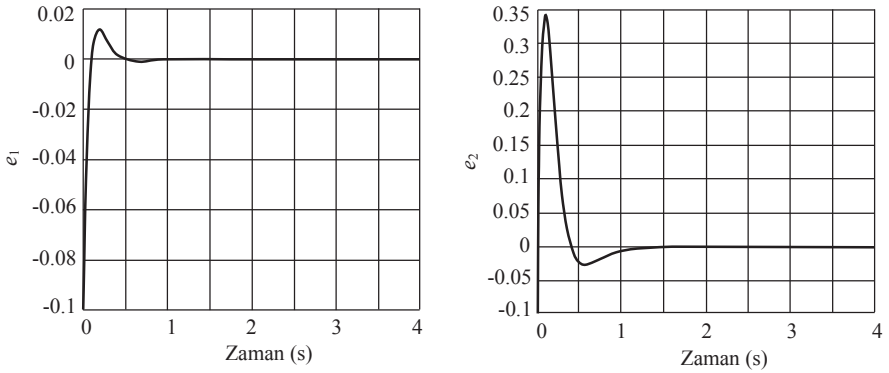
Şekil 12.23-1



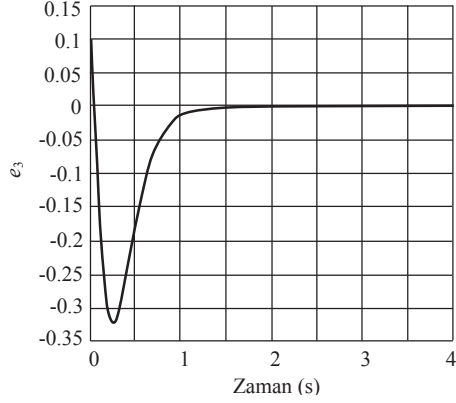
----- Kutbu yerleştirilmiş sistem

————— Gözleyicili sistem

Şekil 12.23-2



Şekil 12.24-1



Şekil 12.24-2

Örnek 12.4:

Bu örnekte daha genel bir sistem ele alınacaktır. Sistem beşinci mertebeli ve bir girişlidir. Sistemin durum denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -40.4 & -36.28 & -54.69 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12.86)$$

$$y = \underline{C}\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.87)$$

Durum değişkenlerinden x_1 ve x_2 ölçülmekte, fakat x_3 , x_4 ve x_5 ölçülememektedir. Bu sistemin kutupları $p_{1,2} = -2 \pm 2j$, $p_{3,4} = -0.1 \pm j$ ve $p_5 = -5$ konumlarındadır. Önce sistem kutuplarını $p_{1,2} = -1 \pm 1.5j$, $p_{3,4} = -0.5 \pm 0.5j$ ve $p_5 = -2$ konumuna yerleştirecek geri besleme katsayılarının belirlenmesi, daha sonra da ölçülemeyen x_3 , x_4 ve x_5 değişkenlerini kestirmek için minimum mertebeli bir gözleyici tasarlayarak kontrolün gerçekleştirilmesi istenmektedir.

Sistem tek girişli olduğundan kutupları istenen yerlere yerleştirmek için kullanılması gereken geri besleme katsayıları Ackermann formülünden yararlanarak bulunabilir. Bu formüle göre geri besleme katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$\underline{k}^T = -[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \underline{M}_C^{-1} D(\underline{A}) \quad (12.88)$$

Burada $D(\underline{A})$ terimi, olması istenen kutuplara karşılık gelen karakteristik denklem $D(s)$ 'de $s = \underline{A}$ koyularak elde edilir. \underline{M}_C ise sistemin kontroledilebilirlik matrisidir. Bu problem için karakteristik denklem,

$$\begin{aligned} (s + 0.5 - 0.5j)(s + 0.5 + 0.5j)(s + 1 - 1.5j)(s + 1 + 1.5j)(s + 2) \\ = s^5 + 5s^4 + 11.75s^3 + 15.75s^2 + 10.125s + 3.25 \end{aligned} \quad (12.89)$$

olduğuna göre, $D(\underline{A})$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} D(\underline{A}) &= \underline{A}^4 + 5\underline{A}^3 + 8.3\underline{A}^2 + 5.08\underline{A} + 1.0504 \underline{I} \\ &= \begin{bmatrix} -37 & -26 & -39 & -19 & -4 \\ 170 & 115 & 204 & 90 & 20 \\ -791 & -541 & -956 & -400 & -90 \\ 3623 & 2462 & 4364 & 1807 & 425 \\ -17181 & -11806 & -20796 & -8739 & -2105 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.90)$$

$$\underline{M}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9.2 \\ 0 & 0 & 1 & -9.2 & 53.8 \\ 0 & 1 & -9.2 & 53.8 & -266.5 \\ 1 & -9.2 & 53.8 & -266.5 & 1259.9 \end{bmatrix} \quad (12.91)$$

olup,

$$\underline{M}_C^{-1} = \begin{bmatrix} 36.28 & 54.69 & 30.81 & 9.2 & 1 \\ 54.69 & 30.81 & 9.2 & 1 & 0 \\ 30.81 & 9.2 & 1 & 0 & 0 \\ 9.2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.92)$$

olarak elde edilir. Denklem (12.90) ve denklem (12.92) ile bulunan değerler denklem (12.88)'de yerine koyulursa gözleyicili sistemin blok

diyagramında yer alan geri besleme katsayı matrisi \underline{K} ($= -\underline{k}^T$) aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{K} = [37.15 \quad 26.155 \quad 38.94 \quad 19.06 \quad 4.2] \quad (12.93)$$

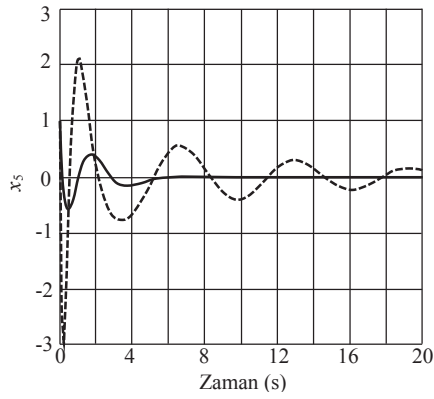
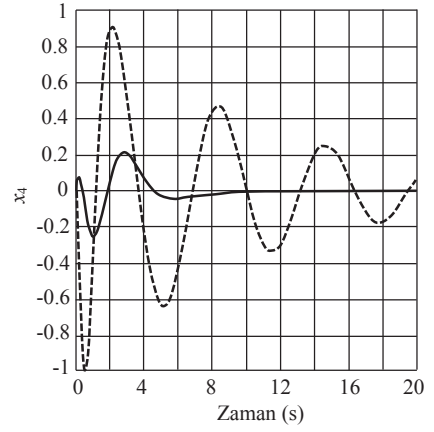
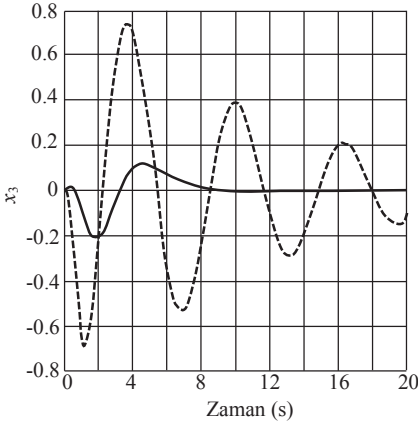
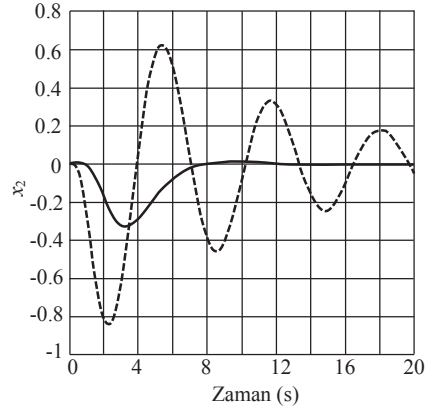
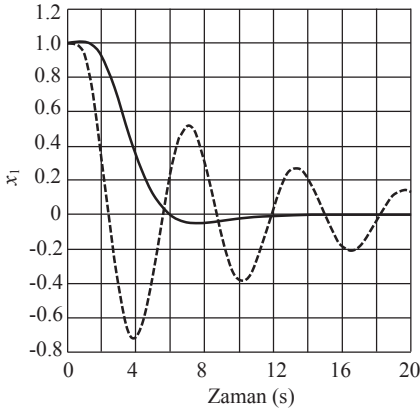
Orijinal sistemin ve kutup yerleştirme sonrasında elde edilen sistemin $\underline{x}(0) = [1; 0; 0; 0; 1]$ başlangıç şartı ve $u = 0$ için cevapları Şekil 12.25'de görülmektedir.

Şimdi ölçülemeyen durum değişkenlerinin kestirilmesi için minimum mertebeli gözleyici tasarımına geçilebilir. Bu problemde tek giriş olduğundan \underline{u} skalar u şeklindedir. Gözleyici denklemlerinde geçen matrisler bu problem için aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \underline{A}_{aa} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \underline{A}_{ab} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{A}_{ba} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -40.4 & -36.28 \end{bmatrix} & \underline{A}_{bb} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -54.69 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \\ \underline{B}_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \underline{B}_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.94)$$

Kutup yerleştirme sonrasında sistemin sanal eksenenden en uzak kutbunun gerçek kısmı -2 olduğuna göre, gözleyici kutupları buna göre yaklaşık 2-4 kat daha uzakta ve katlı olarak -8 'de alınsın. Denklem (12.45)'deki ifadelerde boyut uyumunun sağlanması için \underline{K}_o matrisinin boyutu 3×2 olmalıdır. \hat{A} matrisinin yerleştirmek için bu matrisin üç elemanının kullanılması yeterlidir. Diğer elemanlar seçilirken, genellikle uzaklaşmamak için ve bilgi kaybına neden olmamak için aşağıdaki kurallara uyulmalıdır. i) \underline{K}_o elemanları sıfır olmamalıdır. ii) \underline{K}_o 'nun kullanıldığı matrislerin hesaplanması sırasında elemanlar birbirini özdeş olarak yok etmemelidir. Bu düşünceler ışığında \underline{K}_o matrisini aşağıdaki gibi olsun.

$$\underline{K}_o = \begin{bmatrix} k_4 & k_1 \\ k_5 & k_2 \\ k_6 & k_3 \end{bmatrix} \quad (12.95)$$



----- Kutbu yerleştirilmemiş sistem ————— Kutbu yerleştirilmiş sistem

Şekil 12.25

Denklem (12.45)'den aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned}\hat{A} = \underline{A}_{bb} - \underline{K}_o \underline{A}_{ab} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -54.69 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_4 & k_1 \\ k_5 & k_2 \\ k_6 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -54.69 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -54.69 - k_3 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \quad (12.96)\end{aligned}$$

Bu matrisin öz değerlerini katlı olarak -8 'e yerleştirecek olan k_1, k_2 ve k_3 katsayıları aşağıdaki denklemin sağ ve solunda bulunan s 'nin aynı kuvvetli terimlerinin katsayılarını eşitleyerek bulunur.

$$\det[sI - \hat{A}] = (s + 8)^3 = s^3 + 24s^2 + 192s + 512 \quad (12.97)$$

Diğer katsayılar da sıfırdan farklı olarak "2" alınırsa \underline{K}_o ve \hat{A} aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{K}_o = \begin{bmatrix} 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \quad (12.98)$$

ve

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -14.8 & 1 & 0 \\ -25.03 & 0 & 1 \\ 174.264 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \quad (12.99)$$

Ayrıca denklem (12.45)'den \hat{B} ve \hat{F} bulunur.

$$\hat{B} = \hat{A}\underline{K}_o + \underline{A}_{ba} - \underline{K}_o \underline{A}_{aa} = \begin{bmatrix} -27.6 & -196 \\ -48.1 & -601.4 \\ 228.1 & 3876 \end{bmatrix} \quad (12.100)$$

$$\hat{F} = \underline{B}_b - \underline{K}_o \underline{B}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12.101)$$

$\underline{\hat{C}}$ ve $\underline{\hat{D}}$ matrisleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\underline{\hat{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.102)$$

$$\underline{\hat{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \quad (12.103)$$

$\underline{\hat{A}}$ matrisi denklem (12.50)'de yerine koyulursa, hata denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.8 & 1 & 0 \\ -25.03 & 0 & 1 \\ 174.264 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (12.104)$$

$\underline{\hat{A}}$, $\underline{\hat{B}}$ ve $\underline{\hat{F}}$ matrisleri denklemler (12.46)'da yerine koyulursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \\ \dot{\hat{z}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.8 & 1 & 0 \\ -25.03 & 0 & 1 \\ 174.264 & -30.81 & -9.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -27.6 & -196 \\ -48.1 & -601.4 \\ 228.1 & 3876 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12.105)$$

Diğer yandan denklem (12.42)'den,

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} - \underline{K}_o \underline{y} = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.106)$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix} + \underline{K}_o \underline{y} = \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.107)$$

Ayrıca giriş aşağıdaki gibidir.

$$\underline{u} = \underline{K} \hat{\underline{x}} = \underline{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} \quad (12.108)$$

Minimum mertebeli sistemin yapısı Şekil 12.26'da verilmiştir.

Şimdi belli bir başlangıç koşulu için sistemin davranışı simülasyon yoluyla incelenecektir. Kontrol edilecek sistemin $t = 0$ 'daki başlangıç koşulları daha önce olduğu gibi $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 1$ olsun. \hat{x} ise başlangıçta hatalı olarak tahmin edilmiş olsun ve $\hat{x}_1(0) = x_1(0) = 1$, $\hat{x}_2(0) = x_2(0) = 0$ (bu terimler hatasız ölçülmekte), $\hat{x}_3(0) = 0.1$, $\hat{x}_4(0) = 0.1$, $\hat{x}_5(0) = 0.9$ olarak kabul edilsin. \hat{z} için başlangıç şartları denklem (12.72)'den aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} - \underline{K}_o \underline{y} = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 14.8 \\ 2 & 25.03 \\ 2 & -228.954 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.109)$$

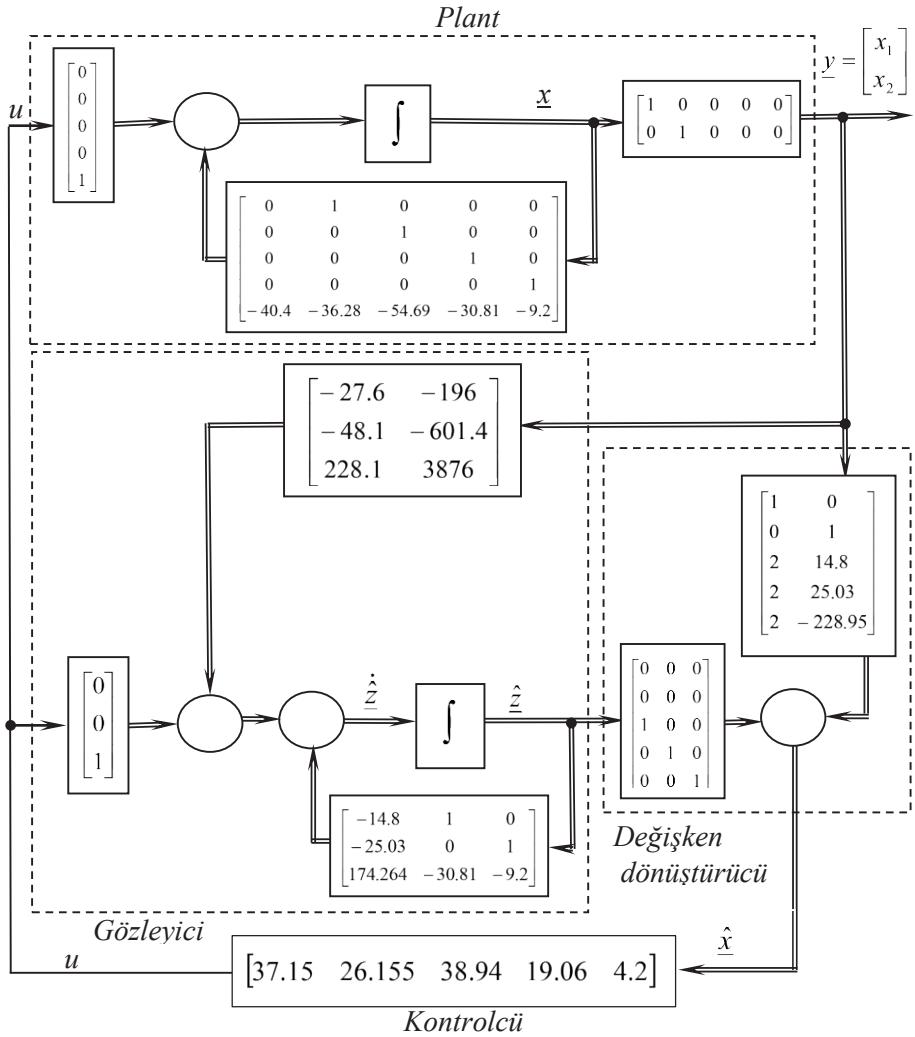
$$\hat{z}_3(0) = \hat{x}_3(0) - 2x_1(0) - 14.8x_2(0) = -1.9$$

$$\hat{z}_4(0) = \hat{x}_4(0) - 2x_1(0) - 25.03x_2(0) = -1.9$$

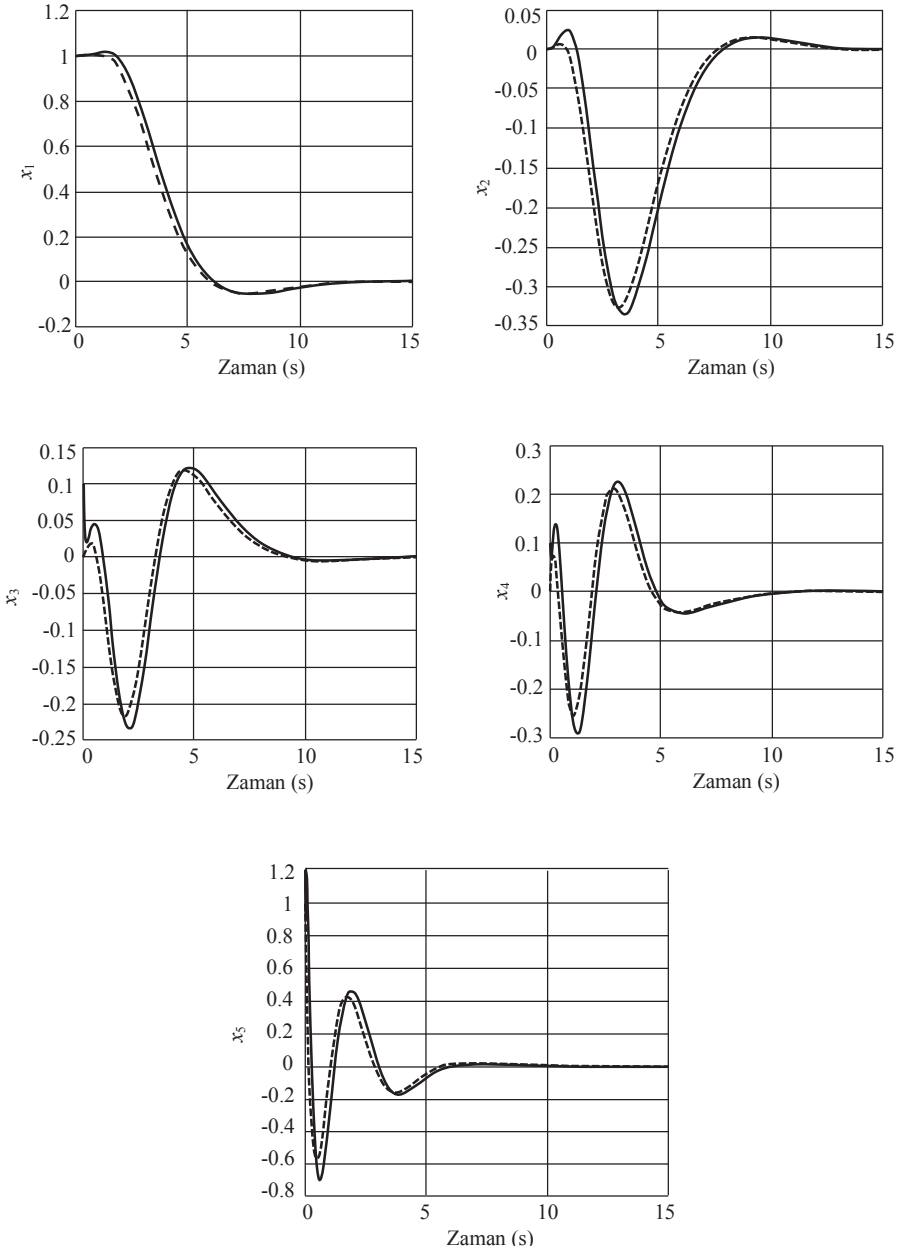
$$\hat{z}_5(0) = \hat{x}_5(0) - 2x_1(0) + 228.95x_2(0) = -1.1$$

Simülasyonda kullanılacak komple denklem takımı kompozit matrisler cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \underline{A} & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \underline{B} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{F} \end{bmatrix} u \quad (12.110)$$

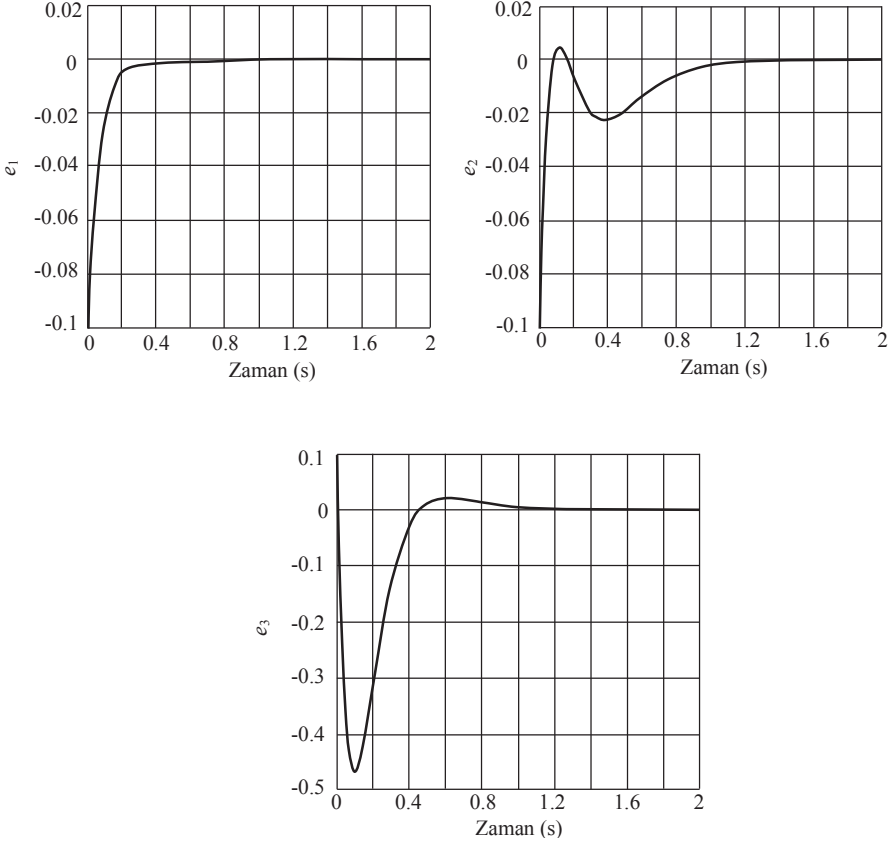


Şekil 12.26



----- Kutbu yerleştirilmiş sistem ————— Kutbu yerleştirilmiş gözleyicili sistem

Şekil 12.27



Şekil 12.28

12.2 Kalman Filtresi

Kalman filtresi bir sistemin girişinde ve/veya çıkış değişkenlerinde gürültü olması halinde durum değişkenlerinin değerini kestirmek için kullanılır. Kalman filtresi hem kesikli zaman sistemlerine hem de sürekli zaman sistemlerine uygulanabilir. Burada Kalman-Bucy filtresi olarak da adlandırılan sürekli zaman sistemlerine uygulaması anlatılacaktır [12.2, 12.3]. Kalman filtresi ve onun uzantısı olan olarak geliştirilen yöntemlerle ilgili çok sayıda kaynak mevcuttur. Konunun başlangıcı Wiener'in çalışmalarına kadar gider [12.4]. Kalman'ın original çalışmasından sonra, Kalman filtresinin türetilmesi için farklı yollar da önerilmiştir [12.5]. Konun gelişimini izlemek açısından, erken dönemde yayınlanan bazı kitaplar bölümün sonundaki kaynaklarda listelenmiştir [12.6-12.9]. Konunun tam olarak anlaşılması, gelişigüzel (rasgele) değişkenler ve

stokastik (istatistiksel) prosesler hakkında bilgi gerektirir. Burada stokastik sistemlerin ayrıntılı bir incelemesi verilmeyecek, konuya pratik yönden yaklaşarak analog sistemler için Kalman filtresinin varsayımları ve tasarımı ana hatlarıyla ispatına girilmeden özet olarak sunulacaktır [12.6-12.8].

Lineer bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x}\end{aligned}\quad (12.114)$$

Bu sistem gürültü olduğunda ise,

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{\hat{x}} + \underline{B}\underline{u} + \underline{G}\underline{w} \\ \underline{\hat{y}} &= \underline{C}\underline{\hat{x}} + \underline{v}\end{aligned}\quad (12.115)$$

denklemleriyle tanımlansın. $\underline{G}\underline{w}$ terimi proses gürültüsünü, \underline{v} ise sistem çıkışındaki gürültüyü göstermektedir. Burada \underline{v} ve \underline{w} Gauss dağılımlı, durağan ve ortalamaları sıfır olan gürültülerdir. Ayrıca \underline{v} ve \underline{w} birbirine bağımlı değildir. \underline{v} ve \underline{w} 'nin özellikleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$E[\underline{v}(t)] = \underline{0} \quad E[\underline{w}(t)] = \underline{0} \quad (12.116)$$

$$E[\underline{v}(t)\underline{v}^T(t+\tau)] = \underline{\Gamma}_v\delta(t) \quad (12.117)$$

$$E[\underline{w}(t)\underline{w}^T(t+\tau)] = \underline{\Gamma}_w\delta(t) \quad (12.118)$$

Burada $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonu (impuls) olup, beyaz gürültü için $\tau = 0$ 'dır. Eğer $\underline{v}(t)$ ve $\underline{w}(t)$ 'nin kendi elemanları arasında korelasyon yoksa, $\underline{\Gamma}_v$ ve $\underline{\Gamma}_w$ diyagonal matrislerdir. Bu matrislerin elemanları yapılan gürültü ölçümlerinden bulunabilir.

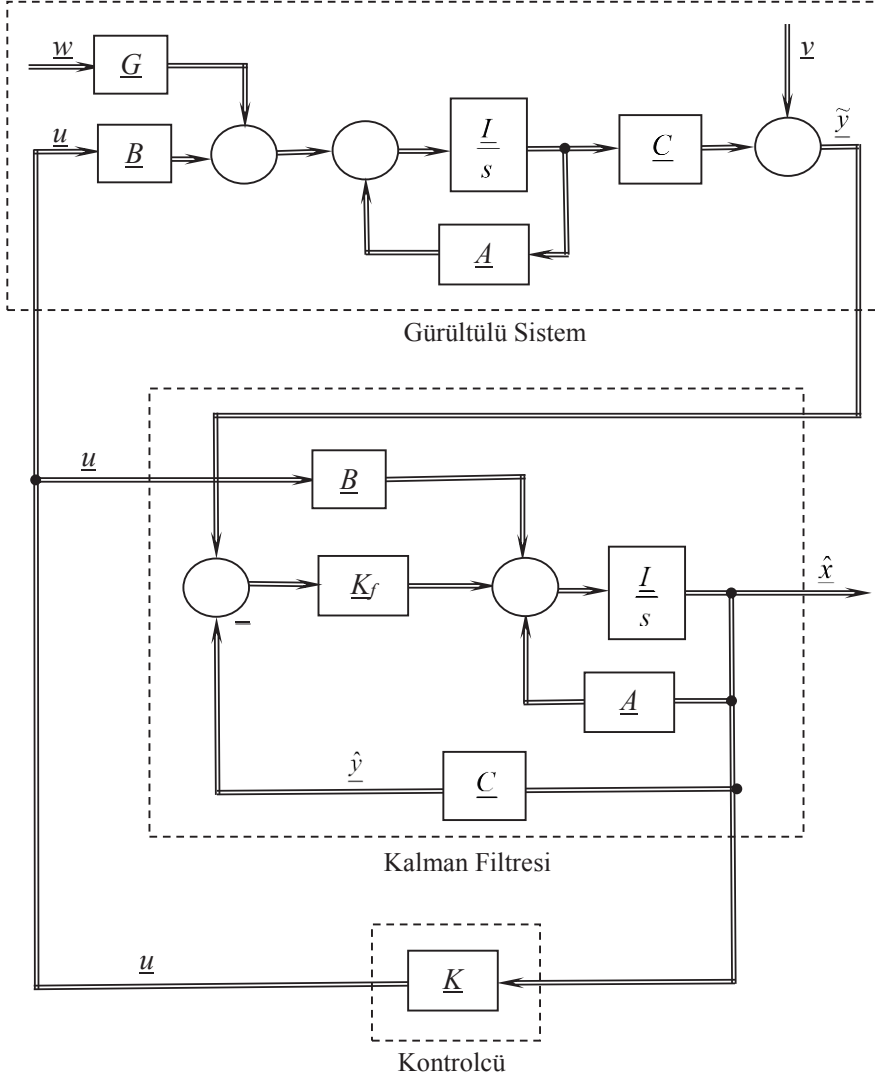
Kalman filtresinin denklemler (12.114) ve (12.115) ile tanımlanan sistemlere uygulanış biçimi Şekil 12.29'da verilen blok diyagramında gösterilmiştir. Bu şekildeki \underline{K}_f matrisi Kalman kazancı olarak bilinir. Bu matrisi elde etmek için önce herhangi bir başlangıç koşulundan başlayarak, aşağıda verilen matris Riccati denkleminin pozitif zaman yönünde interali alınır ve durağan çözüm (\underline{R}_0) matrisi bulunur.

$$\dot{\underline{R}} = \underline{A}\underline{R} + \underline{R}\underline{A}^T - \underline{R}\underline{C}^T \underline{\Gamma}_v^{-1} \underline{C}\underline{R} + \underline{G}\underline{\Gamma}_w \underline{G}^T \quad (12.119)$$

Burada \underline{R}_0 simetriktir ve

$$\underline{R}_0 = E\{[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T\} \quad (12.120)$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 12.29

\underline{R}_0 matrisi simetrik olup, aşağıdaki cebirsel Riccati denkleminde bulunabilir. Bu denklemden elde edilen birden fazla çözüm arasından pozitif definit olan çözüm kullanılır.

$$\underline{A}\underline{R}_0 + \underline{R}_0\underline{A}^T - \underline{R}_0\underline{C}^T \underline{\Gamma}_v^{-1} \underline{C}\underline{R}_0 + \underline{G}\underline{\Gamma}_w \underline{G}^T = 0 \quad (12.121)$$

Kalman kazancı \underline{K}_f ise \underline{R}_0 cinsinden aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{K}_f = \underline{R}_0 \underline{C}^T \underline{\Gamma}_v^{-1} \quad (12.122)$$

Örnek 12.5:

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12.123)$$

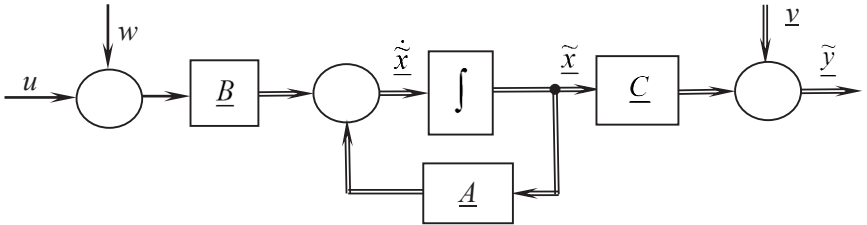
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.124)$$

Bu sistemde Şekil 12.30'daki blok diyagramında verildiği gibi gürültü vardır. Bu gürültüler,

$$E = [w^2] = \delta(t) \quad (12.125)$$

$$E = [v v^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (12.126)$$

şeklinde tanımlanmış olduğuna göre Kalman filtresinin bulunması istenmektedir.



Şekil 12.30

Bu problem için $\underline{G} = \underline{B}$ olup matrix Riccati denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} \\ \dot{r}_{12} & \dot{r}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] [0 \quad 1] \quad (12.127)$$

Buradan durağan çözüm \underline{R}_0 matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 0.2224 & 0.000 \\ 0.000 & 0.3157 \end{bmatrix} \quad (12.128)$$

Kalman kazancı matrisi \underline{K}_f ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{K}_f = \underline{R}_0 \underline{C}^T \underline{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2224 & 0.000 \\ 0.000 & 0.3157 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.2224 & 0.000 \\ 0.000 & 0.3157 \end{bmatrix} \quad (12.129)$$

Bu örnek için Şekil 12.29'daki blok diyagramı Şekil 12.31'deki gibi uyarlanabilir.

Örnek 12.6:

Bir sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (12.130)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (12.131)$$

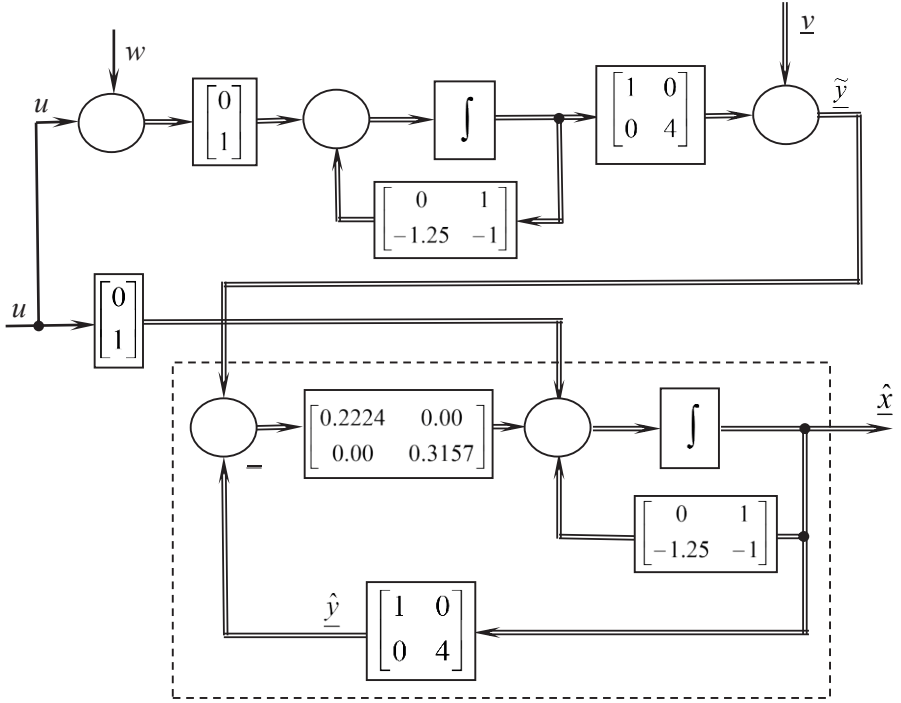


Figure 12.31

Bu sistemin,

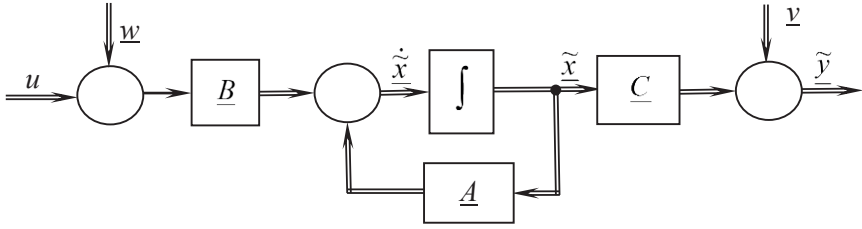
$$P.I. = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4u_1^2 + u_2^2) dt \quad (12.132)$$

gibi bir performans kriterini minimum yapması için optimum geri besleme katsayılarını belirleyin. Sistemde Şekil 12.32'deki blok diyagramında verildiği gibi gürültü vardır. Bu gürültüler,

$$E = [w^2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (12.133)$$

$$E = [v v^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (12.134)$$

şeklinde tanımlanmış olduğuna göre, bir Kalman filtresi tasarlayın.



Şekil 12.32

Optimum kontrol katsayılarını bulmak için önce aşağıda verilen matrix Riccati denkleminin negatif zaman yönünde integrali uygun bir başlangıç koşulundan başlayarak alınır ve durağan çözümü elde edilir.

$$\dot{\underline{R}} + \underline{R}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{R} - \underline{R}\underline{B}\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{R} + \underline{Q} = 0 \quad (12.135)$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{12} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{13} & \dot{r}_{23} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (12.136)$$

Bu denklemin durağan çözümü ve optimum geribesleme katsayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 1.3300 & 0.6266 & 0.1203 \\ 0.6266 & 1.1621 & 0.1787 \\ 0.1203 & 0.1787 & 0.2847 \end{bmatrix} \quad (12.137)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -0.3325 & -0.1567 & -0.0301 \\ -0.7469 & -1.3408 & -0.4634 \end{bmatrix} \quad (12.138)$$

Şimdi Kalman filteresinin tasarımına başlanabilir. Denklem (12.119) bu örnek için aşağıdaki gibi yazılır ve pozitif zaman yönünde integrali alınarak durağan çözümü elde edilir.

$$\dot{\underline{R}} = \underline{A}\underline{R} + \underline{R}\underline{A}^T - \underline{R}\underline{C}^T \underline{\Gamma}_v^{-1} \underline{C}\underline{R} + \underline{G}\underline{\Gamma}_w \underline{G}^T \quad (12.139)$$

ya da,

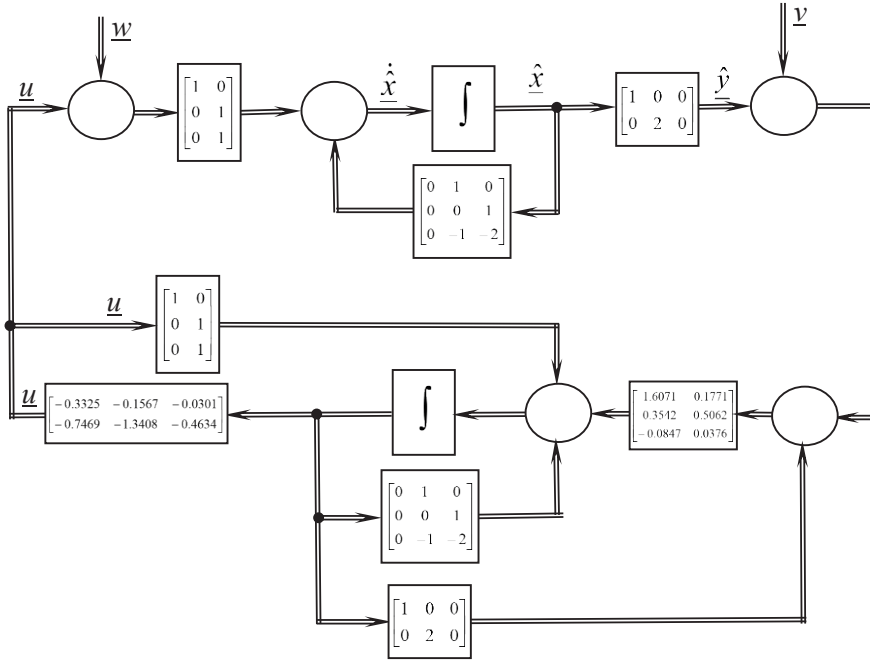
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{12} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{13} & \dot{r}_{23} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.140)$$

Bu denklemden elde edilen durağan çözüm \underline{R}_0 ve Kalman kazancı matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 1.6071 & 0.3542 & -0.0847 \\ 0.3542 & 1.0125 & 0.0753 \\ -0.0847 & 0.0753 & 0.2092 \end{bmatrix} \quad (12.141)$$

$$\underline{K}_f = \begin{bmatrix} 1.6071 & 0.1771 \\ 0.3542 & 0.5062 \\ -0.0847 & 0.0376 \end{bmatrix} \quad (12.142)$$

Kalman filtresi uygulanmış sistemin blok diyagramı Şekil 12.33'de verilmiştir.



Şekil 12.33

KAYNAKLAR

- [12.1] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, ISBN 13: 978-0-13-713337-6, Pearson, Boston, 2010.
- [12.2] Kalman, R.E., Bucy, R.S., *New Results in Linear Filtering and Prediction Problems*, ASME Journal of Basic Engineering (1961), 95-108.
- [12.3] Kalman, R.E., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, ASME Journal of Basic Engineering (1960), 35-45.
- [12.4] Wiener, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, Technology Press, Cambridge, 1949.
- [12.5] Athans, M., *A Direct Derivation of the Optimal Linear Filter Using the Maximum Principle*, IEEE Transactions on Automatic Control, sayfa 690-698, Aralık 1967.

- [12.6] Schultz, D.G., Melsa, J.L., *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [12.7] Pierre, D.A., *Optimization Theory with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [12.8] Bryson, A.E., Ho, Y.C., *Applied Optimal Control, Optimization, Estimation and Control*, Bleisdel, Watham Massachusetts, 1969.
- [12.9] Gelb, A., *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, 1974.

PROBLEMLER

Not: Problemlerin çözümünde MATLAB'den yararlanın.

12.1 Bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] \underline{x}$$

Bu sistemin, $P.I. = \int_0^{\infty} (4x_1^2 + u^2) dt$ şeklinde tanımlanan bir

performans kriterini minimum yapması için kapalı çevrim kontrolü bulun. Sadece sistem çıkışı y ölçülebildiğine göre tam mertebeli bir gözleyici tasarlayın. Gözleyicisiz ve gözleyicili optimum sistemlerin $\underline{x}(0) = [1 \quad 1]^T$ başlangıç koşuluna cevaplarını karşılaştırın. Gözleyicili sistemin cevabını $\underline{e}(0) = [1 \quad 1]^T$ ve $\underline{e}(0) = [0.1 \quad 0.1]^T$ hata başlangıç şartları için elde edin. Sonuçları yorumlayın.

12.2 Bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} \quad y = [1 \quad 1] \underline{x}$$

Bu sistemin, $P.I. = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + 2u_2^2) dt$ şeklinde tanımlanan

bir performans kriterini minimum yapması için kapalı çevrim

kontrolü bulun. Sadece sistem çıkışı y ölçülebildiğine göre tam mertebeli bir gözleyici tasarlayın. Gözleyicisiz ve gözleyicili optimum sistemlerin $\underline{x}(0) = [1 \ 1]^T$ başlangıç koşuluna cevaplarını karşılaştırın. Gözleyicili sistemin cevabını $\underline{e}(0) = [1 \ 1]^T$ ve $\underline{e}(0) = [0.1 \ 0.1]^T$ hata başlangıç şartları için elde edin. Sonuçları yorumlayın.

12.3 Örnek 12.3'de incelenen sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıda tekrar verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.5 & -10.5 & -8.25 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \underline{C}\underline{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1$$

Aslında bu sistemde sistem çıkışı ölçülmekteydi ve tam mertebeli bir gözleyici kullanılabildi.

- Sistemin kapalı çevrim kutuplarının $p_{1,2} = -0.5 \pm 0.1j$ ve $p_{1,2} = -2 \pm 0.2j$ noktalarına taşıyacak geribesleme katsayılarını bulun.
- x_1 , yani sistem çıkışı ölçülebilmektedir. Durum değişkenlerini kestirmek için tam mertebeli bir gözleyici tasarlayın.
- Gözleyicili sisteme optimum kontrolü uygulayın. Elde edeceğiniz sonuçları Örnek 12.3'de elde edilenlerle karşılaştırın ve yorumlayın.

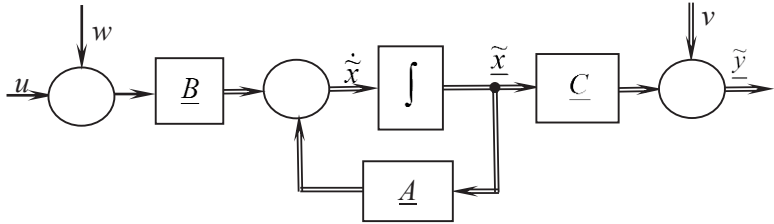
12.4 Bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -80 & -18 & -81 & -18 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \underline{C}\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin kutuplarını $p_{1,2} = -2$ ve $p_{3,4} = -1 \pm 0.1j$ noktalarına taşıyacak geri besleme katsayılarını bulun. Durum değişkenlerinden x_1 ve x_2 ölçülmekte, fakat x_3 ve x_4 ölçülememektedir. Ölçülemeyen x_3 ve x_4 değişkenlerini kestirmek için minimum mertebeli bir gözleyici tasarlayarak tüm sistemin blok diyagramını çizin.

12.5 Bir sistemin yapısı şekilde görülmektedir.



Matrisler aşağıdaki gibi verildiğine göre bir Kalman filtresi tasarlayın. Kalman filtresi eklenmiş sistemin blok diyagramını çizin.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E[w^2] = \delta(t) \quad E[\underline{v}\underline{v}^T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

12.6 Bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin,

$$P.I. = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + 2u_1^2 + u_2^2) dt$$

gibi bir performans kriterini minimum yapması için optimum geri besleme katsayılarını belirleyin. Sistemin yapısı problem 12.5'de verildiği gibidir. Gürültüler,

$$E[w^2] = \delta(t) \quad E[\underline{y}\underline{v}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \delta(t)$$

şeklinde tanımlanmış olduğuna göre, bir Kalman filtresi tasarlayın. Kalman filtresi eklenmiş sistemin blok diyagramını çizin.

12.7 Bir sistemin durum denklemleri ve çıkış ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sistemin yapısı problem 12.5'de verildiği gibidir. Gürültüler,

$$E[w^2] = \delta(t)$$

$$E[\underline{y}\underline{v}^T] = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

olarak tanımlandığına göre, bu sistem için bir Kalman filtresi tasarlayın. Kalman filtresi eklenmiş sistemin blok diyagramını çizin.

EK 1

MATRİS İŞLEMLERİ

Bu kitabın konularıyla ilgili matris işlemleri çeşitli kaynaklardan yararlanarak derlenmiş ve aşağıda sunulmuştur [E1.1-E1.4]

Bu kitapta matrisler alt çizgilerle gösterilmiştir. Satır sayısı m , sütun sayısı n olan, $m \times n$ boyutlu bir matrisin gösterim şekli aşağıdaki gibidir.

$$\underline{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.1})$$

Eğer \underline{x} gibi bir vektör söz konusuysa, üzerinde transpoz sembolü yoksa bu daima bir sütun matris olarak gösterilir.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{E1.2})$$

ya da,

$$\underline{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad x_n] \quad (\text{E1.3})$$

Eğer $m = n$ ise, matrise, kare matris denir. Bir kare matrisin diyagonal terimleri 1, diğer bütün terimleri 0 ise, özdeşlik matrisi \underline{I} elde edilir.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E1.4})$$

Transpoz:

Bir matrisin transpozu satır ve sütunlarını değiştirerek bulunur. Örneğin denklem (E1.1) ile verilen \underline{A} matrisinin transpozu aşağıdaki gibidir.

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.5})$$

Simetrik ve anti-simetrik matrisler:

Bir kare matrisin elemanları için $a_{ij} = a_{ji}$ eşitlikleri bütün i ve j 'ler için geçerli ise, matris simetriktir. Bu durumda matrisin transpozu kendisine eşittir.

$$\underline{A}^T = \underline{A} \quad (\underline{A} \text{ simetrik}) \quad (\text{E1.6})$$

Bir kare matrisin elemanları için $a_{ij} = -a_{ji}$ eşitlikleri bütün i ve j 'ler için geçerli ise, matris anti-simetriktir. Bu durumda matrisin transpozu kendisinin negatif işaretlisine eşittir.

$$\underline{A}^T = -\underline{A} \quad (\underline{A} \text{ anti-simetrik}) \quad (\text{E1.7})$$

Bir matris daima simetrik (\underline{A}_s) ve anti-simetrik (\underline{A}_{as}) kısımlarına ayrılabilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\underline{A} = \underline{A}_s + \underline{A}_{as} \quad (\text{E1.8})$$

$$\underline{A}_s = \frac{\underline{A} + \underline{A}^T}{2} \quad (\text{E1.9})$$

$$\underline{A}_{as} = \frac{\underline{A} - \underline{A}^T}{2} \quad (\text{E1.10})$$

Matrislerin Eşitliği:

İki matrisin boyutları aynı ise ve bütün i ve j değerleri için $a_{ij} = a_{ji}$ ise bu matrisler eşittir.

Matrislerin Toplanması ve Çıkarılması:

İki matris ancak boyutları aynıysa toplanabilir ya da çıkarılabilir.

Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \pm \underline{B} \\ c_{ij} &= a_{ij} \pm b_{ij} \end{aligned} \quad (\text{Bütün } i \text{ ve } j \text{ değerleri için}) \quad (\text{E1.11})$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} \quad (\text{E1.12})$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) \quad (\text{E1.13})$$

Matrisin Bir Sabitle Çarpımı:

Bir matris herhangi bir k sabitiyle çarpılırsa, bütün elemanları bu sabitle çarpılır. Örneğin denklem (E1.1) ile verilen \underline{A} matrisi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$k\underline{A} = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & ka_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.14})$$

Ayrıca aşağıdaki ifade de geçerlidir.

$$k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B} \quad (\text{E1.15})$$

Matrisin Türevi:

Bir matrisin türevini almak demek, bütün elemanlarının türevini almak demektir. Örneğin denklem (E1.1) ile verilen \underline{A} matrisi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\underline{A} = \left[\frac{d}{dt} a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_{11} & \frac{d}{dt} a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dt} a_{1n} \\ \frac{d}{dt} a_{21} & \frac{d}{dt} a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dt} a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dt} a_{m1} & \frac{d}{dt} a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dt} a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.16})$$

Ayrıca aşağıdaki ifadeler de geçerlidir.

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} + \underline{B}) = \frac{d}{dt}\underline{A} + \frac{d}{dt}\underline{B} \quad (\text{E1.17})$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{AB}) = \frac{d\underline{A}}{dt}\underline{B} + \underline{A}\frac{d\underline{B}}{dt} \quad (\text{E1.18})$$

Matrisin Integrali:

Bir matrisin integralini almak demek, bütün elemanlarının integralini almak demektir. Örneğin denklem (E1.1) ile verilen \underline{A} matrisi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\int \underline{A}dt = \left[\int a_{ij}dt \right] = \begin{bmatrix} \int a_{11}dt & \int a_{12}dt & \cdot & \cdot & \cdot & \int a_{1n}dt \\ \int a_{21}dt & \int a_{22}dt & \cdot & \cdot & \cdot & \int a_{2n}dt \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int a_{m1}dt & \int a_{m2}dt & \cdot & \cdot & \cdot & \int a_{mn}dt \end{bmatrix} \quad (\text{E1.19})$$

Ayrıca aşağıdaki ifade de geçerlidir.

$$\int (\underline{A} + \underline{B})dt = \int \underline{A}dt + \int \underline{B}dt \quad (\text{E1.20})$$

Matrislerin Çarpımı:

İki matrisin çarpılabilmesi için aralarında boyut uyumu olması gereklidir. Yani, \underline{AB} gibi bir matris çarpımı \underline{A} 'nın sütun sayısı \underline{B} 'nin satır sayısına eşitse mümkündür. Eğer,

$$\underline{AB} = \underline{C} \quad (\text{E1.21})$$

olarak verilmişse ve \underline{A} 'nın boyutu $n \times r$, \underline{B} 'nin boyutu $r \times m$ ise, \underline{C} 'nin boyutu $n \times m$ olur. \underline{C} 'nin elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj} \quad (\text{E1.22})$$

Özel durumlar dışında,

$$\underline{AB} \neq \underline{BA} \quad (\text{E1.23})$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu yüzden bir matris başka bir matrisle çarpılırken, sağ taraftan mı yoksa sol taraftan mı çarpılacağı bilinçli olarak yapılmalıdır. Matrisler cinsinden yazılmış bir denklemde iki tarafı da çarpan bir terimin birbirini götürmesi eğer bu terimler eşitliğin iki tarafını da aynı taraftan çarparsa mümkündür. Örneğin,

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{X} = (\underline{D} + \underline{E})\underline{X} \quad (\text{E1.24})$$

gibi bir ifadeye \underline{X} eşitliğin iki tarafını aynı taraftan çarptığı için birbirini götürür,

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{D} + \underline{E} \quad (\text{E1.25})$$

elde edilebilir. Buna karşılık,

$$\underline{X}(\underline{A} + \underline{B}) = (\underline{D} + \underline{E})\underline{X} \quad (\text{E1.26})$$

gibi bir ifadeye \underline{X} terimleri birbirini götürmez.

Matris çarpımı işlemlerinde,

- $\underline{AB} = 0$ olması, $\underline{A} = 0$ ya da $\underline{B} = 0$ olduğu sonucunu vermez.
- $\underline{AB} = \underline{AC}$ olması, $\underline{B} = \underline{C}$ sonucunu vermez.
- $(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC})$ eşitliği geçerlidir.
- $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$ eşitliği geçerlidir.
- $\underline{IA} = \underline{AI} = \underline{A}$ eşitliği geçerlidir.

Matrisin Minörleri:

Bir \underline{A} matrisi kare olsun veya olmasın, kare formdaki bütün alt matrislerine \underline{A} 'nın minörleri denir. Kare formundaki bir \underline{A} matrisinin ij -minorü \underline{M}_{ij} , \underline{A} matrisinde i 'inci satır ve j 'inci sütünü yok ederek elde edilen matristir.

Matrisin Determinantı:

Determinant sadece kare matrisler için tanımlıdır. $n \times n$ boyutlu bir matrisin determinantı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\det[\underline{A}] = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det[\underline{M}_{ij}] \quad (\text{E1.27})$$

Bu denklemde i terimi, 1 ile n arasında ($1 \leq i \leq n$) herhangi bir değer olabilir.

Determinantla ilgili aşağıdaki ifadelerin kullanılması kolaylık sağlar.

$$\det[\underline{AB}] = \det[\underline{A}]\det[\underline{B}] \quad (\text{E1.28})$$

$$\det[k\underline{A}] = k^n \det[\underline{A}] \quad (\underline{A} \text{ matrisi } n \times n \text{ boyutlu}) \quad (\text{E1.29})$$

Matrisin Tersi:

Bir matrisin tersini alınması ancak kare matrislerde mümkündür. Eğer bir \underline{A} matrisinin tersi \underline{A}^{-1} olarak gösterilirse aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I} \quad (\text{E1.30})$$

Bir kare matris \underline{A} 'nın tersinin alınabilmesi için tekil olmaması, yani determinantının sıfır olmaması gereklidir. \underline{A} 'nın tersi aşağıdaki denklemden bulunabilir.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{A})}{\det(\underline{A})} \quad (\text{E1.31})$$

Bu denklemden $\text{adj}(\underline{A})$, ek matristir (adjoint matris) ve kofaktör matrisinin transpozudur. Ek matris aşağıdaki denklemlerle gibi ifade edilir.

$$\text{adj}(\underline{A}) = [\text{cof } a_{ij}]^T = \begin{bmatrix} \text{cof } a_{11} & \text{cof } a_{12} & \text{cof } a_{1n} \\ \text{cof } a_{21} & \text{cof } a_{22} & \text{cof } a_{2n} \\ \text{cof } a_{n1} & \text{cof } a_{n2} & \text{cof } a_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (\text{E1.32})$$

$$\text{cof } a_{ij} = (-1)^{i+j} \det[\underline{M}_{ij}] \quad (\text{E1.33})$$

Örnek:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{E1.34})$$

matrisinin tersini bulun.

Matris tersi almak için yukarıdaki işlemler yürütülürse, sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\det[\underline{A}] = -19 \quad (\text{E1.35})$$

$$[\text{cof } a_{ij}] = \begin{bmatrix} -6 & -9 & 7 \\ 2 & 22 & -15 \\ 1 & -8 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{E1.36})$$

$$\begin{aligned} \underline{A}^{-1} &= \frac{[\text{cof } a_{ij}]^T}{\det(\underline{A})} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -9 & 22 & -8 \\ 7 & -15 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6/19 & -2/19 & -1/19 \\ 9/19 & -22/19 & 8/19 \\ -7/19 & 15/19 & -2/19 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E1.37})$$

\underline{A} matrisinin boyutu büyük olduğunda tersini elle hesaplamak oldukça emek gerektirir. Bu amaçla uygun bir yazılım kullanılabilir. Örneğin MATLAB yazılımında **inv(a)** komutu bir **a** matrisinin tersini alır.

Bir kare matris daha küçük boyutlu kare matrisler cinsinden kompozit bir biçimde verilmişse, aşağıda verilen formül çok kullanışlıdır [E1.2]. \underline{P} matrisi $2n \times 2n$ boyutlu olsun. Bu matris aşağıdaki gibi $n \times n$ boyutlu alt matrisler cinsinden yazılsın.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{S} \\ \underline{T} & \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.38})$$

\underline{P} 'nin tersi için aşağıdaki ifade yazılabilir [E1.3].

$$\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{S} \\ \underline{T} & \underline{R} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (\text{E1.39})$$

Burada \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} ve \underline{D} matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\underline{A} = (\underline{Q} - \underline{S}\underline{R}^{-1}\underline{T})^{-1} \quad (\text{E1.40})$$

$$\underline{C} = -\underline{R}^{-1}\underline{T}\underline{A} \quad (\text{E1.41})$$

$$\underline{D} = (\underline{R} - \underline{T}\underline{Q}^{-1}\underline{S})^{-1} \quad (\text{E1.42})$$

$$\underline{B} = -\underline{Q}^{-1}\underline{S}\underline{D} \quad (\text{E1.43})$$

Aşağıda matrislerle ilgili diğer bazı faydalı formüller verilmiştir.

$$(\underline{AB})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T \quad (\text{E1.44})$$

$$(\underline{AB})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1} \quad (\text{E1.45})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}) = 2\underline{Q}\underline{x} \quad (\text{E1.46})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}^2} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}) = 2\underline{Q} \quad (\text{E1.47})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{w} \underline{z}) = \underline{z}^T \frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} \underline{w}^T \quad (\text{E1.48})$$

KAYNAKLAR

- [E1.1] Wylie, C.R., Barrett, L.C., *Advanced Engineering Mathematics*, ISBN 0-07-113543-X, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [E1.2] Westphal, L.C., *Handbook of Control Systems Engineering 2nd Ed.*, ISBN 0-7923-7494-0, Kluwer, Norwell, Massachusetts, 2001.
- [E1.3] Hsu, J.C., Meyer, A.U., *Modern Control Principles and Applications*, ISBN 07-030635-4, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [E1.4] Petersen, K.B., Pedersen, M.S., *The Matrix Cookbook*, <http://matrixcookbook.com>, 2008.

EK 2

MATLAB KOMUTLARI

Bu kitabın giriş bölümünde kontrol sistemi tasarım yöntemlerinin teorisini bilmeden, kısıtlarını kavramadan *kapalı kutu* karakterindeki hazır programları kullanmanın sakıncalarından söz edilmişti. Ancak bu yazılımların tasarım sürecine getirdiği hız ve verimlilik artışı da göz ardı edilemez. Burada kitapta verilen tasarım yöntemlerine ilişkin MATLAB komutları hakkında bilgi verilmektedir. Bölümlerin sonunda verilen problemlerin çözümünde MATLAB'den aşağıdaki kurallar içinde yararlanabilirsiniz.

- Amacınız, yapmanız gereken tasarımı esaslarını anlamadan MATLAB'e yaptırmak değildir. Kendi *m*-dosyalarınızı hazırlayın.
- Aksi belirtilmemişse yer eğrisi çizimi, Bode diyagramları çizimi, diferansiyel denklem çözümü, matris işlemlerinin yapılması, sonuçların grafik hale getirilmesi gibi, size hız ve verimlilik artışı sağlayacak komutları kullanabilirsiniz. Buna karşılık, verilen girdileri kullanarak doğrudan tasarım sonuçlarını veren komutları kullanmaktan kaçınım. Bu tür komutlar yeri geldiğinde işaretlenmiştir.

Aşağıdaki çizelgede ihtiyacınız olabilecek bazı MATLAB komutları ve kullanım amaçları çizelge halinde özetlenmiştir. Bu liste komutları hatırlatma amaçlıdır. Komutların kullanım ayrıntıları için MATLAB yardım dosyasına başvurunuz.

Komut	Kullanım Amacı
$a = [2 \ 3 \ 1; 3 \ 1 \ 0]$ $a = [1; 3; 4]$ $a = [1 \ 3 \ 4]$ v.b.	Matris tanımı
$a = [1 \ 3 \ 4 \ 2]$ v.b.	Polinom tanımı
$a=b*c$	Matris çarpımı
abs	Mutlak değer

acker	Ackerman yöntemiyle kutup yerleştirme (Problemlerin çözümünde kullanmayın.)
bode	Bode diyagramları çizimi
conv	Konvolüsyon Polinom çarpımı
ctrb	Kontrol edilebilirlik matrisi
det	Determinant bulunması
eig	Matris özdeğerleri
figure	Yeni grafik açmak
for	Döngü oluşturmak
function	Fonksiyon <i>m</i> -dosyası oluşturmak
hold	Çizilen grafiği korumak
icare	Matris Riccati denklemi çözümü (Problemlerin çözümünde kullanmayın.)
if	Şartlı işlem
impulse	İmpuls cevap
initial	Durum denklemlerinin başlangıç şartına cevabı
inv	Matris (kare) tersi alınması
kalman	Kalman filtresi tasarımı (Problemlerin çözümünde kullanmayın.)
length	Vektör uzunluğu
lsim	Herhangi giriş zaman cevabı
lqg	Lineer karesel Gaussian kontrol (Problemlerin çözümünde kullanmayın.)
lqr	Lineer karesel kontrol (Problemlerin çözümünde kullanmayın.)
obsv	Gözlenebilirlik matrisi
ode23s, ode45 ve diğer ode fonksiyonları	Adi diferansiyel denklem çözümü

place	Kutup yerleştirme (Problemlerin çözümlünde kullanmayın.)
plot	Grafik çizmek
poly	Karakteristik polinom
rank	Matris rankı
residue	Kalıntı bulunması
rlocus	Yer eğrisi çizimi
roots	Polinom kökleri bulunması
size	Vektör veya matris boyutu
step	Basamak cevap
tf	Transfer fonksiyonu tanımı
transpose	Matris transpozu

İNDEKS

A

- Açı şartı, 41, 43
- Açık çevrim transfer fonksiyonu kutupları, 41
- Açık çevrim transfer fonksiyonu sıfırları, 41
- Açık çevrim transfer fonksiyonu, 9, 41
- Ackermann formülü, 329
- Ackermann, J., 332
- Akım değişkenleri, 216
- Asemptot açısı, 43
- Aström, K.J., 207
- Athans, M., 263, 303, 406
- Atherton, D.P., 207
- Ayrılma açısı, 47
- Ayrılma noktası, 46

B

- Bant genişliği, 135
- Bant genişliği, birinci mertebe sistem, 136
- Bant genişliği, ikinci mertebe sistem, 136
- Barrett, L.C., 418
- Basamak fonksiyon, 10, 11
- Baskın kutuplar, 22
- Birinci mertebe sistem, performans parametreleri, 33
- Birinci mertebe sistem, zaman sabiti, 33
- Birinci varyasyon, 237
- Birleşme açısı, 47
- Birleşme noktası, 46
- Bode diyagramları, 18, 107
- Bode diyagramları, açık çevrim transfer fonksiyonu, 125

- Bode diyagramları, büyüklük-faz ilişkisi, 129
- Bode diyagramları, çarpanlar, 112
- Bode diyagramları, çizim örneği, 121
- Bode diyagramları, durağan davranış, 127
- Bode diyagramları, elle çizim, 111
- Bode diyagramları, faz-geriletici denkleştirici, 145, 157
- Bode diyagramları, faz-ilerletici denkleştirici, 146
- Bode diyagramları, faz-ilerletici-geriletici denkleştirici, 148,179
- Bode diyagramları, gerçek kutuplar, 115
- Bode diyagramları, gerçek sıfırlar, 115
- Bode diyagramları, hata katsayıları, 128
- Bode diyagramları, integral kontrol, 143
- Bode diyagramları, kazanç artırımı, 142
- Bode diyagramları, kompleks kutuplar, 117
- Bode diyagramları, kompleks sıfırlar, 117
- Bode diyagramları, kontrol sistemi tasarımı, 152
- Bode diyagramları, kutup eklenmesi, 143
- Bode diyagramları, MATLAB ile çizim, 124
- Bode diyagramları, orijinde kutuplar, 114
- Bode diyagramları, orijinde sıfırlar, 114
- Bode diyagramları, PD kontrol, 143

Bode diyagramları, PI kontrol, 143
 Bode diyagramları, PID kontrol, 151
 Bode diyagramları, sabit kazanç, 113
 Bode diyagramları, şekillendirme çarpanları, 142
 Bode diyagramları, tasarım örnekleri, 159, 163, 169, 174, 182
 Bode diyagramlarıyla tasarım, 103
 Boltyanskii, V.G., 253, 303
 Bryson, E.E., 253, 407
 Bucy, R.S., 406
 Buluşma problemi, 243
 Büyüklük geçme frekansı, 135
 Büyüklük geçme frekansı, ikinci mertebe sistem, 136
 Büyüklük şartı, 41, 42
 Büyüklük, 17

C

Cebirsel Riccati denklemi, 312
 Cevap, durağan sinüsoidal, 17
 Cevap, frekans cevabı, 17
 Cevap, sinüsoidal, 16
 Chen, Y.Q., 207
 Chever, E.W., 96
 Chien, K.L., 207
 Chien-Hrones-Reswick yöntemi, 205
 Cohen, G.H., 207
 Cohen-Coon yöntemi, 204
 Coon, G.A., 207
 Craig, 192

Ç

Çözücü matris, 219
 Çember biçiminde yer eğrisi, 51

D

D'Azzo, J.J. 4, 37, 96
 Değişken uç noktası problemi, 240
 Değişken uç sınır şartları, 242
 Değişken uç sınır şartları, kesişme sınır şartı, 243
 Değişken uç sınır şartları, transversalite sınır şartı, 243
 Denkleştirici, faz-geriletici, 145, 157
 Denkleştirici, faz-ilerletici, 146, 167
 Denkleştirici, faz-ilerletici-geriletici, 148, 179
 Desibel, 107
 Dinamik davranış özellikleri, 6
 Durağan davranış iyileştirilmesi, 6, 60, 65
 Durağan davranış, 5, 6
 Durağan hatanın azaltılması, 60
 Durağan sinüsoidal cevap, 17, 104
 Durum değişkenleri, 214
 Durum değişkenleri, akım ve gerilim değişkenleri cinsinden, 216
 Durum değişkenleri, faz değişkenleri, 216
 Durum değişkenleri, kanonik değişkenler, 217
 Durum değişkenleri, lineer dönüşümle türetme, 221
 Durum denklemleri, 213, 214,
 Durum denklemleri, A -matris formu, 215
 Durum denklemleri, lineer, 215
 Durum denklemleri, non-lineer, 214
 Durum denklemleri, transfer fonksiyonuyla ilişkisi, 218
 Durum dönüştürme matrisi, 219, 225

Durum dönüştürme matrisi,
bulunması, 226
Durum dönüştürme matrisi,
özellikleri, 226
Durumla belirlenen lineer
sistem, zaman cevabı, 222
Durumla belirlenen lineer
sistem, zaman cevabı,
örnekler, 227, 229, 230
Durumla belirlenen sistem, 214

E

Efe, M.Ö., 4
Emami-Naeini, A, 4, 96, 192, 332
Ercan, Y., 232
Euler denklemi, 236, 239
Euler denklemi, değişken uç
noktası problemi, 240
Euler denklemi, değişken
uç sınır şartları, 242
Euler denklemi, örnekler,
239, 244
Euler denklemi, sabit
uç noktası problemi, 238
Evans, W.R., 39, 96

F

Falb, P.L., 253, 303
Faz açısı, 17
Faz değişkenleri, 216
Faz-geriletici denkleştirici,
61, 145, 157
Faz-geriletici kontrol, 61
Faz-ilerletici denkleştirici,
64, 146, 167
Faz-ilerletici-geriletici
kontrol, 66
Faz-ilerletici kontrol, 64
Faz-ilerletici-geriletici
denkleştirici, 66, 148, 179
Faz payı, 16, 126, 134
Faz payı, ikinci mertebe
sistem, 134

Fonksiyon fonksiyonu, 235
Franklin, G.F., 4, 96, 192, 332
Frekans cevabı transfer
fonksiyonu, 105
Frekans cevabı, 17
Frekans cevabı, büyüklük,
17, 106
Frekans cevabı, deneysel, 197
Frekans cevabı, faz açısı,
17, 106
Frekans cevabı, sistem
tanımlaması, 198
Frekans cevabıyla tasarım,
performans parametreleri, 133

G

Gamkrelidze, R.V., 253, 303
Gauss dağılımlı gürültü, 399
Geçici davranış, 20
Geçici davranış, performans
parametreleri, 20
Geçici davranışın
iyileştirilmesi, 63, 65
Gecikme zamanı, 21
Geçme zamanı, ikinci mertebe
sistem, 26
Gelb, A., 407
Gerilim değişkenleri, 216
Goodwin, G.C., 4
Gökbulut, M., 4
Göreceli kararlılık, 16
Gözlenebilirlik matrisi, 221
Gözlenebilirlik, 220
Gözleyici, 362
Gözleyici, minimum mertebeli,
362
Gözleyici, minimum mertebeli,
örnekler, 379, 388
Gözleyici, tam mertebeli, 362
Gözleyici, tam mertebeli,
örnekler, 366, 370

Graebe, S.F., 4
 Grant kuralı, 50
 Grant, A.J., 96
 Gürültü, beyaz, 399

H

Hagglund, T., 207
 Harriott, P., 207
 Hassasiyet, 13
 Hata, 7, 9
 Hatanın karesinin integrali
 kriteri, 34
 Hatanın karesinin zamanla
 çarpımının integrali kriteri, 34
 Hata katsayıları, 128
 Hatanın mutlak değerinin
 integrali kriteri, 34
 Hatanın mutlak değerinin
 zamanla çarpımının integrali
 kriteri, 35
 Hataya bağlı integral kriterler,
 hatanın karesinin integrali, 34
 Hataya bağlı integral kriterler,
 hatanın karesinin zamanla
 çarpımının integrali, 34
 Hataya bağlı integral kriterler,
 hatanın mutlak değerinin
 integrali, 34
 Hataya bağlı integral kriterler,
 hatanın mutlak değerinin
 zamanla çarpımının
 integrali, 35
 Hatanın integral kriterleri, 34
 Hız hata katsayısı, 128
 Ho, Y., 253, 407
 Houpis, C.H., 4, 37, 96
 Hrones, J.A., 207
 Hsu, J.C., 253, 303, 418

İ

İki uçlu sınır değer problemi,
 254
 İkinci mertebe az sönümlü

sistem, 22
 İkinci mertebe az sönümlü
 sistem, geçme zamanı, 26
 İkinci mertebe az sönümlü
 sistem, maksimum aşma, 30
 İkinci mertebe az sönümlü
 sistem, tepe zamanı, 27
 İkinci mertebe az sönümlü
 sistem, yerleşme zamanı, 31
 İndirgenmiş performans
 kriteri, 342
 İndirgenmiş Riccati
 denklemi, 312

İndirgenmiş Riccati denklemi,
 örnek, 312

İntegral kontrol, yer eğrisi, 61
 İntegral kontrol, Bode
 diyagramları, 143

İvme hata katsayısı, 128

İzoperimetrik kısıtlama, 256

İzoperimetrik kısıtlı kontrol, 299

İzoperimetrik kısıtlı kontrol,
 örnek, 300

K

Kalman denklemi, 315

Kalman denklemi, örnek, 317

Kalman filtresi, 398

Kalman filtresi, örnekler,
 401, 402

Kalman, 398

Kalman, R.E., 406

Kalman-Bucy filtresi, 398

Kanonik değişkenler, 217

Kanonik form blok diyagramı, 9

Kapalı çevrim bang-bang test
 yöntemi, 205

Kapalı çevrim transfer
 fonksiyonu, 6

Kararlılık payı, 16, 19

Kararlılık, 5, 13, 125

Kararlılık, Bode
diyagramlarından, 125

Kararlılık, faz payı, 16, 19

Kararlılık, göreceli, 16

Kararlılık, kazanç payı, 16, 19

Kararlılık, Liapunov kriteri, 15

Kararlılık, marjinal, 18

Kararlılık, mutlak, 14

Kararlılık, Routh-Hurwitz
kriteri, 15

Kararlılık, şartı, 15

Kazanç payı, 16, 19, 126,
134

Kesişme sınır şartı, 243

Kesme frekansı, 135

Kirk, D.E., 253, 303

Kök yerleştirme, bkz. kutup
yerleştirme, 323

Köklerin yer eğrisi, 39

Kontrol girişi optimizasyonu,
279

Kontrol girişi optimizasyonu,
izoperimetrik kısıtlı
kontrol, 299

Kontrol sistemi tasarımı,
Chien-Hrones-Reswick
yöntemi, 205

Kontrol sistemi tasarımı,
Cohen-Coon yöntemi, 204

Kontrol sistemi tasarımı,
deneysel yöntemler, 197

Kontrol sistemi tasarımı,
kapalı çevrim bang-bang
test yöntemi, 205

Kontrol sistemi tasarımı,
sönümlü titreşim yöntemi, 203

Kontrol sistemi tasarımı,
Tyreus-Luyben yöntemi, 205

Kontrol sistemi tasarımı,
Ziegler ve Nichols yöntemi,
201

Kontrol sistemi tasarımı,
Bode diyagramıyla, 103

Kontrol sistemi tasarımı,
yer eğrisiyle, 59

Kontrol edilebilirlik matrisi, 220

Kontrol edilebilirlik, 220

Kutup yerleştirme, 323

Kutup yerleştirme,
Ackermann yöntemi,, 329

Kutup yerleştirme,
MATLAB kullanımı, 331

Kutup yerleştirme,
örnekler, 328, 330

Kutuplar, açık çevrim
transfer fonksiyonunun, 41

Kutupların korunumu kuralı, 50

L

Liapunov kriteri, 15

Lineer dönüşümle durum
değişkeni türetme, 221

Lineer karesel Gaussian
kontrol, 403

Lineer karesel Gaussian
kontrol, örnek, 403

Lineer karesel kontrol, 307

LQG kontrol, 403

LQG kontrol, örnek, 403

LQR kontrol, 307

Luyben, M.L., 207

Luyben, W.L., 207

M

Maksimum aşma, ikinci
meritebe sistem, 30

Maksimum aşma, 22

Marjinal kararlılık, 18

MATLAB komutları, 419

MATLAB, 2, 52, 124, 331, 419

MATLAB, Bode diyagramı
çizimi, 124

MATLAB, yer eğrisi çizimi, 52

Matris işlemleri, 411

Matris Riccati denklemi, 308
 Matris Riccati denklemi,
 örnek, 310
 Melsa, J.L., 37, 232, 253,
 319, 407
 Meyer, A.U., 253, 303, 418
 Minimum enerji kontrolü, 269,
 294
 Minimum enerji kontrolü,
 örnek, 295
 Minimum fazlı sistem, 129
 Minimum mertebeli gözleyici,
 362
 Minimum mertebeli gözleyici,
 örnek, 379, 388
 Minimum yakıt kontrolü,
 269, 280
 Minimum yakıt kontrolü,
 örnekler, 281, 285, 290
 Minimum zaman kontrolü, 269
 Minimum zaman kontrolü,
 kompleks kutuplu kararlı
 sistem, 278
 Minimum zaman kontrolü,
 örnekler, 273, 276
 Minimum zaman kontrolü,
 sabit parametrelili lineer
 sistem, 270
 Model sistem, 335
 Model sistem, faz
 değişkenlerinden, 335
 Model sistem, faz
 değişkenlerinden, örnekler,
 337, 339, 342
 Modele dayalı tasarım, 353
 Modele dayalı tasarım,
 örnek, 356
 Modern kontrol, integral
 performans kriteri, 36
 Murray, E.W., 96
 Mutlak kararlılık, 14

N

Neuman, C.P., 96

Nichols diyagramı, 18, 107
 Nichols, N.B., 37, 207
 Nise N.S., 4, 37
 Non-minimum fazlı sistem, 129
 Nyquist diyagramı, 18, 107

O

Ogata, K., 4, 37, 406
 Ölçülemeyen durum
 değişkenleri, 361
 Optimizasyon, klasik kontrolde,
 33
 Optimizasyon, modern
 kontrolde, 35
 Optimum kontrol girişi kontrolü,
 279
 Optimum kontrol, genel, 235, 246
 Optimum kontrol, lineer karesel,
 307
 Optimum kontrol, modele
 dayalı tasarım, 354
 Optimum kontrol, modele
 dayalı tasarım, örnek, 356
 Optimum kontrol, modele
 dayalı, 335
 Optimum kontrol, non-lineer
 sistem için çözüm, 253
 Optimum kontrol, non-lineer
 sistem için örnekler, 257, 259
 Optimum kontrol, non-lineer
 sistem, 249
 Optimum kontrol, indirgenmiş
 performans kriteri,
 örnekler, 342, 344, 346, 349
 Oransal + integral kontrol, 61
 Oransal+integral+türevsel
 kontrol, 65
 Oransal + türevsel kontrol, 63
 Oransal kontrol, 61, 63

P

Parabolik fonksiyon, 10, 11
 Parametre hassasiyeti, 5, 12

PD kontrol, yer eğrisi, 63
 Performans değerlendirme ölçütleri, 5
 Performans kriteri, integral form, 235
 Performans parametreleri, 20
 Performans parametreleri, birinci mertbe sistem, 33
 Performans parametreleri, ikinci mertbe sistem, 22
 PI kontrol, yer eğrisi, 61
 PID kontrol, yer eğrisi, 65
 Pierre, D.A., 253, 407
 Pinch, E.R., 253
 Pontryagin fonksiyonu, 249, 252
 Pontryagin minimum prensibi, 255
 Pontryagin, L.S., 253, 303
 Powell, J.D., 4, 96, 192, 332
 Pozisyon hata katsayısı, 128

R

Rampa fonksiyon, 10, 11
 Reswick, J.B., 207
 Rezonans frekansı, 138
 Rezonans frekansı, ikinci mertbe sistem, 138
 Rezonans tepe yüksekliği, 138
 Rezonans tepe yüksekliği, ikinci mertbe sistem, 138
 Riccati denklemi, matris, 308
 Riccati denklemi, cebirsel, 312
 Riccati denklemi, indirgenmiş, 312
 Routh-Hurwitz kriteri, 15

S

Sabit uç noktası problemi, 238
 Saldago, S.F., 4
 Schultz, D.G., 37, 232, 253, 319, 407

Sıfır, açık çevrim transfer fonksiyonunun, 41
 Sınırlayıcı şartlar, Lagrange çarpanları yöntemi, 247
 Sınırlayıcı şartlar, uygulama yöntemleri, 246
 Sinüsoidal cevap, 16
 Sistem cevabı, genel hal, 105
 Sistem tanımlaması, 197
 Sistem tipi, 8, 128
 Sönüm oranı, 24
 Sönümlü sistem doğal frekansı, 26
 Sönümsüz sistem doğal frekansı, 24
 Sönümlü titreşim yöntemi, 203
 Sylvester açılım teoremi, 227

T

Tam mertebeli gözleyici, 362
 Tam mertebeli gözleyici, örnekler, 366, 370
 Tepe zamanı, 21
 Tepe zamanı, ikinci mertbe sistem, 27
 Test girişleri, 9
 Tip, 8, 128
 Toplam varyasyon, 236
 Tou, J.T., 253, 303
 Transfer fonksiyonu, 6
 Transfer fonksiyonu, açık çevrim, 9
 Transfer fonksiyonu, durum denklemleriyle ilişkisi, 218
 Transfer fonksiyonu, kapalı çevrim, 6
 Transversalite sınır şartı, 243
 Tyreus, B.D., 207
 Tyreus-Luyben yöntemi, 205

V

Varyasyon alma kuralları, 237
 Varyasyon, 236

W

Westphal, L.C., 418
 Wiener, 398
 Wiener, N., 406
 Wylie, C.R., 418

X

Xue, D., 207

Y

Yang, Z., 96
 Yardımcı durum
 denklemleri, 253
 Yer eğrisi çizim kuralları, 42
 Yer eğrisi, 39
 Yer eğrisi, ağırlık merkezi, 44
 Yer eğrisi, asemptotlar, 43
 Yer eğrisi, ayrılma açısı, 47
 Yer eğrisi, ayrılma noktası, 46
 Yer eğrisi, birleşme açısı, 47
 Yer eğrisi, birleşme noktası, 47

Yer eğrisi, çember
 biçiminde, 51

Yer eğrisi, gerçek eksen
 üzerinde, 46

Yer eğrisi, Grant kuralı, 50

Yer eğrisi, kontrol sistemi
 tasarımı, 59

Yer eğrisi, kutupların
 korunumu kuralı, 50

Yer eğrisi, MATLAB ile
 çizim, 52

Yer eğrisi, ölçeklendirme, 50

Yer eğrisi, sanal eksen
 geçme noktası, 49

Yer eğrisi, tasarım örnekleri, 66 - 95

Yerleşme zamanı, 22

Yerleşme zamanı, ikinci
 mertebe sistem, 31

Yüksel, İ., 4

Yükselme zamanı, 21

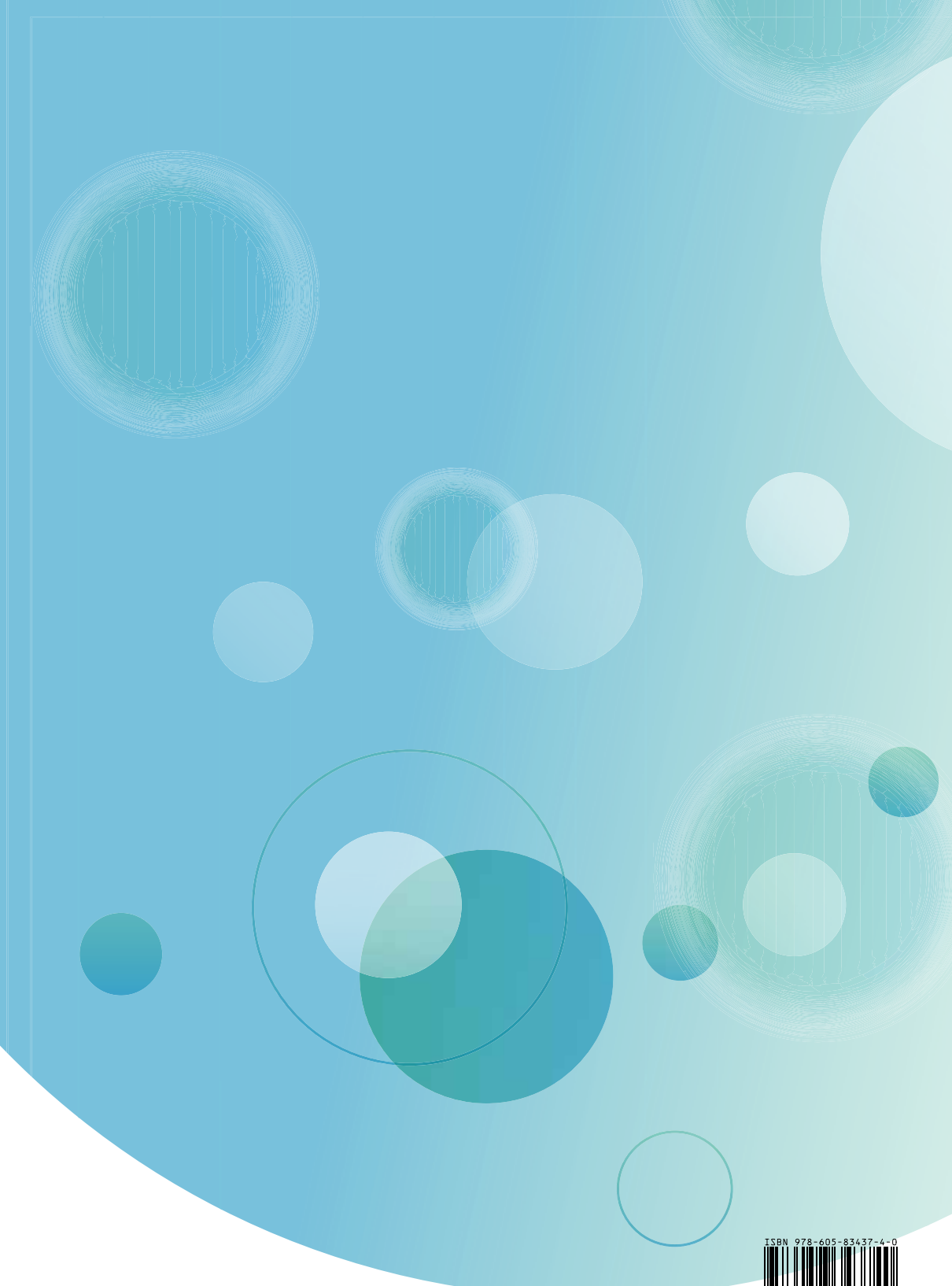
Yüzde aşma, 22

Z

Zaman sabiti, birinci mertebe
 sistem, 33

Ziegler ve Nichols yöntemi, 201

Ziegler, J.G., 37, 207



ISBN: 978-605-83437-5-7 (Elektronik sürüm)

ISBN 978-605-83437-4-0



9 786058 343740