

**İŞLEVSEL DERECELENDİRİLMİŞ KAPLAMALARA BAĞLI
İNCE FİLMLERİN MEKANİK MODELLENMESİ**

YUSUF FUAT GÜLVER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EYLÜL 2009

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin bütün gereksinimlerini sağladığımı onaylarım.

Prof. Dr. Ünver KAYNAK

Anabilim Dalı Başkanı

Yusuf Fuat GÜLVER tarafından hazırlanan İŞLEVSEL DERECELENDİRİLMİŞ KAPLAMALARA BAĞLI İNCE FİLMLEİN MEKANİK MODELLENMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali GÜLER

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

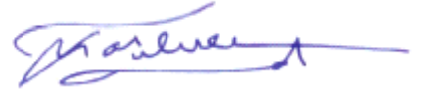
Başkan : Prof. Dr. Fevzi Suat Kadioğlu

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Güler

Üye : Yrd. Doç. Dr. İstemi Barış Özsoy

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Yusuf Fuat GÜLVER

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Makine Mühendisliği
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali GÜLER
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Eylül 2009

Yusuf Fuat GÜLVER

**İŞLEVSSEL DERECELENDİRİLMİŞ KAPLAMALARA BAĞLI İNCE
FİMLERİN MEKANİK MODELLENMESİ**

ÖZET

Bu tezde, sonlu boyda ince film, hemen altında işlevsel derecelendirilmiş kaplama ve en altta ise homojen yarım düzlem destek bulunan birleşik bir yapı, çeşitli yükleme şartları altında iki boyutlu lineer elastisite teorisi uygulanarak incelenmiştir. Bu tip yapılarda yükleme; film/kaplama üretimi işleminden dolayı kalıntı yüklerinden, yapının kullanımı esnasında maruz kaldığı mekanik veya termal yüklerden kaynaklı gerilmelerden oluşabilmektedir. Bu çalışmanın temel amacı, arayüzey veya kaplamada çatlak başlangıcı ve ilerlemesi sorununa neden olabilen film uçlarında oluşan gerilme yığılmalarını veya tekillik şiddetlerini incelemektir. Arka plandaki temas mekaniği problemi, ince film membran; işlevsel derecelendirilmiş malzemeli (İDM) kaplama ve homojen destek de elastik sürekli ortam kabul edilerek formüle edilmiştir. İDM kaplama ve homojen destek için elastisite çözümü ve arayüzeylerde yer değiştirmelerin sürekliliği kabulü sayesinde probleme hâkim tümlev (integral) denklemi bulunmuştur. Bu tümlev denklemi tekil olup, bilinmeyen film-kaplama arayüzey gerilmesi fonksiyonu için Çebişef polinomlarının özelliklerinden yararlanılarak doğrusal cebirsel bir denklem sistemine indirgenerek, sayısal olarak çözülmüştür. Hesaplanan sonuçlar, film-kaplama arayüzeyi boyunca oluşan kayma gerilmesi dağılımı, film uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti ve film eksenini boyunca oluşan normal gerilme dağılımıdır. Bu çalışma, yapının geometrik ve mekanik değiştirenlerinin (parametrelerinin) ve aynı zamanda yükleme tipinin, gerilme dağılımları ve film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti üzerinde ne kadar etkili olduğunu göstermiştir. Bu değiştirenlerin değerinin ayarlanması ve kaplama için doğru derecelendirme şekli seçilmesiyle kaplamanın yorulma veya kırılmasında ve filmin hasar görmesinde veya bozulmasında önemli rol oynayabilen film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti ve filmde oluşan aksenal normal gerilme değerlerinin düşürülmesi mümkündür.

Anahtar Kelimeler: İşlevsel derecelendirilmiş malzeme, ince film, kaplama, tekil tümlev (integral) denklem.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Mechanical Engineering
Supervisor : Assistant Professor Dr. Mehmet Ali GÜLER
Degree Awarded and Date : M.Sc. – September 2009

Yusuf Fuat GÜLVER

**MECHANICAL MODELING OF THIN FILMS BONDED TO
FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS
ABSTRACT**

In this thesis, a compound structure consisting of thin film bonded to the coating of functionally graded material (FGM) which resides on the homogeneous half plane is studied by applying two dimensional linear elasticity theory under various loading conditions. In these problems the loading consists of stresses caused by residual stresses resulting from film/coating processing and thermal or mechanical loadings during service life of the structure. The primary interest in this study is in examining stress concentrations or strength of singularities near the film ends, which may cause crack initiation and propagation in the coating or along the interface. The underlying contact mechanics problem is formulated by assuming that the film is a “membrane” and the FGM coating and homogeneous substrate are elastic continua. By using the elasticity solution for the FGM coating and the homogeneous substrate, and continuity of displacements at the interfaces, the governing integral equation for the problem is found. This integral equation comes out to be singular and may be reduced to a linear algebraic system of equations by using the properties of Chebychev polynomials, and then solved for the unknown interfacial shear stress numerically. The calculated results are the interfacial shear stress between the film and the graded coating, strength of stress singularity at the end of the film and the axial normal stress in the film. This study reveals that both mechanical and geometrical parameters of the structure as well as loading type have a great effect on the stress distribution and the strength of shear stress singularity at the film ends. By adjusting these parameters and the type of the grading, it is possible to lower the strength of shear stress singularity and the axial normal stress in the film that may have a bearing on the fatigue and fracture of the coating and damage or failure during or after the production stage of the thin film.

Keywords: Functionally graded material, thin film, coating, singular integral equation.

TEŞEKKÜR

Çalışma boyunca bilgi ve malumatını esirgemeyen tez hocam ve jüri üyesi Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Güler (Makine Müh. Bölümü Öğretim Üyesi (MAK-ÖÜ)); probleme en basit durumun incelenmesiyle başlanması tavsiyesinde bulunan ve Yüksek Başarımli Hesaplama Laboratuvarındaki Öbek-I bilgisayarıyla iletişim ve diğler yazılım konularında Avustralya'dan bile yardımlarını esirgemedten ulaştıran Prof. Dr. Turgut Baştuğ (Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik ÖÜ); çalışmaya devam etmemiz konusunda yüreklendiren ve moral destek veren Prof. Dr. Ünver Kaynak (MAK Anabilim Dalı Başkanı), Prof. Dr. Yücel Ercan (Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü), Prof. Dr. Sadık Kakaç (MAK-ÖÜ), Prof. Dr. İ. Burhan Türkşen (Endüstri Müh. (END) Anabilim Dalı Başkanı), Prof. Dr. Ömer Saatçioğlu (END-ÖÜ), Doç. Dr. Mustafa Übeyli (MAK-ÖÜ); yürütücülüğünü Yrd. Doç. Dr. M. A. Güler'in yaptığı 107M053 nolu "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Temas Mekaniği Analizi için Analitik ve Hesaplamalı Yöntemler" konulu projenin aylık toplantılarında çalışmalarını sunan veya fikirlerini paylaşan "(:)yesgalip/\^" meta-akronimiyle sembolize edilen ve sembollerdeki sırasıyla proje ekibinden Edip Ali Pehlivanlı (ERCİYES Üniversitesi, MAK Mezunu), Serra Topal (GAZİ, MAK Doktora Öğrencisi), Galip Keçelioğlu (ODTÜ, Makine Müh. YL Mezunu), Doç. Dr. Serkan Dağ (ODTÜ, MAK-ÖÜ), M. Burak Toparlı (ODTÜ, Metalürji Müh. Mezunu), Tunç Apatay (GAZİ, MAK Doktora Öğrencisi); Yrd. Doç. Dr. M. A. Güler'in danışmanlığında yapılan haftalık tez toplantılarına katılarak kendi konuları hakkında bilgi veren Levent Sözen (MAK Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi (BYL)), M. Emin Cerit (MAK-BYL); askerliğı sırasında aylarca kendi ofisindeki çalışma masasının kullanım iznini veren Yrd. Doç. Dr. Yiğit Taşçioğlu (MAK-ÖÜ); Yüksek Başarımli Hesaplama Laboratuvarındaki Öbek-I bilgisayarıyla iletişim konularında yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Osman Abul (Bilgisayar Müh. Bölümü (BİL) ÖÜ), Yrd. Doç. Dr. Nilay Sezer Uzol (MAK-ÖÜ), Abdulhamit Maboçoğlu (BİL-BYL); TEPAV Bilgisayar Laboratuvarına uzaktan erişim konusunda yardımcı olan Umur Erkut (TEPAV LAB Yöneticisi, BİL YL Öğrencisi); Almandan makale [16,21] çevirileri yapan Mehmet Ali Gülver (ODTÜ, Fizik YL Mezunu); Rusça Telaffuzlar konusunda yardımcı olan İgor Makarenko

(Beyazrusya, Rus Dili ve Edebiyatı Lisans Öğrencisi), Prof. Dr. Tahir Khaniyev (END ÖÜ); kendi dizüstü veya masaüstü bilgisayarında yaklaşık 60 saatlik kod çalıştırılmasına müsaade eden Engin Karataş (Elektrik ve Elektronik Müh. Böl. (ELE) BYL), Başak Ünal (END-BYL); Yüksek Başarımlı Hesaplama Laboratuvarındaki Öbek bilgisayarının sigortası attığında, bir hafta sonu, gece yarısı demeden Ümitköy'den kalkıp laboratuvar anahtarını getiren ve bilgisayardaki o günkü toplu komutların gecikmeden zamanında bitirilmesini sağlayan Sefa Yılmaztürk (MAK-BYL); Fortran kodunda değişken dizi ve çoklu dinamik dosya yaratma konulu deneme program çalışmasına fikren refaket eden Levent Sözen; tezinin dijital biçiminden yararlandığım Şeyma Ülker (BİL BYL Mezunu); tezin tamamını değerlendirip görüşleriyle katkıda bulunan jüri başkanı Prof. Dr. Fevzi Suat Kadioğlu (ODTÜ, MAK-ÖÜ), jüri üyesi Yrd. Doç. Dr. İstemi Barış Özsoy (MAK-ÖÜ); yedek jüri üyeleri Yrd. Doç. Dr. Hamza Kurt (ELE-ÖÜ), Yrd. Doç. Dr. Erdem Acar (MAK-ÖÜ); kendimize özgü oluşturduğumuz “Çoklu-Ofis Ortak Yaşam İlkeleri”ne (sükûnet, etkinlik, yenilenme, güven) uygun hareket eden 117 nolu ofis paydaşlarından Başak Ünal, Cengiz Aktaş (END-BYL), Levent Sözen, M. Emin Cerit, Ahmet Cücen (MAK-BYL), Ahmet Çubukçu (END-BYL), M. Sedat Şengül (END-BYL), Oytun Erden (END-BYL); 117 etkinlikleri arasında yer alan ve düzenlenmesinde gönüllü olduğu “Matematiksel Düşünme” ve “Bilim Okyanusundan Bir Damla Peşinde” adlı söyleşi dizileri; yeni kuramsal çalışmaların yapıldığı haftalık “Derin Düşünce” toplantılarına genelde katılan Oykun Gürkan (ODTÜ, PDR Mezunu), Cengiz Aktaş, Prof. Dr. İ. Burhan Türkşen; topluluklarının kurulmasında yardımcı olduğu veya antrenmanlarına katıldığı Hentbol, Yüzme, Badminton, Aikido ve Eskrim Toplulukları; burslu yüksek lisans öğrencisi olarak ders asistanlığı yaptığı sırada (2006-2008) burs veren TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi; TÜBİTAK 107M053 nolu projedeki asistanlığı sırasında (2007-2009) burs veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu; gece yarılarna kadar oğlunun okuldan dönüşünü bekleyen, oğluna yemeğini yedirmeden yatmayan bir Anne ve oğlu ders çalışırken her görüşünde istirahat etmesi gerektiğini hatırlatan bir Baba; 27 Ağustos 2009'daki Tez Savunma Toplantısını görevli olmadığı hâlde şereflendiren Oykun Gürkan, Cengiz Aktaş, Ahmet Cücen, Bilal Meto (BİL-BYL), M. Emin Cerit, Levent Sözen, Okan Topçu (MAK-BYL);

ve ismi gönlüne yazılan diğçerleri, elastisite alanında çalışma aşkıyla yüksek lisansa başlamış olan bu tez yazarının aşkının sürmesinde olumlu etken olmuş veya kaynaklar kısmında belirtilen kaynaklarla birlikte tezin fikir ve duygu kaynaklarını oluşturmuştur.

Y. F. Gülver

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
KISALTMALAR	xvii
SEMBOL LİSTESİ	xviii
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı	1
1.2 Problemin Tanımı	3
1.3 Varsayımlar	6
1.4 Literatüre Bakış	7
2. FORMÜLASYON	21
2.1 Düzlem Elastisite Probleminin Formülasyonu	22
2.1.1 Sınır Şartların Uygulanması	25
2.1.2 Film-Kaplama Arayüzeyi Boyunca Kaplama Yüzey Yer Değiştirme Gradyantlarının (Green Fonksiyonlarının) Bulunması	49
2.1.3 Probleme Hâkim Tümlev Denklemine Çıkarılması	57
2.1.4 Tümlev Denklemine Çözümü	61
2.1.4.1 Tek Uçlu Film Yükleme	62
2.1.4.2 Uzak Alandan Simetrik Yükleme	67
3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME	69
3.1 Sonuçların Literatürle Kıyaslanması (Filmden Yükleme)	73
3.2 Uzak Alan Yükleme Durumu (Sabit Gerinim)	91

4. SONUÇLAR	101
KAYNAKLAR	103
EKLER	107
EK 1: Genel Gösterim ve Adlandırma	107
EK 2: Türkçe-İngilizce Terimler	109
EK 3: Düzlem Gerilme ve Genelleştirilmiş Düzlem Gerilme Durumu	111
EK 4: Düzlem Gerinim ve Genelleştirilmiş Düzlem Gerilme Durumlarının Ortak Şekilde Gösterilmesi	112
EK 5: Asimptotik Açılım Sonuçları	114
EK 6: Tümlev Denklemlerindeki Çekirdekler	118
EK 7: Çebişef Polinomları	120
EK 8: Kodda Yapılan Değişikliklerden Örnekler	126
EK 9: TOBB ETÜ ÖBEK-1 Bilgisayarı için Geliştirilen İş Atama Kodu	127
EK 10: Literatür için Düzeltmeler	129
EK 11: Gerilme Tekillik Mertebesi	132
ÖZGEÇMİŞ	135

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1 Sistemdeki Temel Değişirgenler (parametreler)	72

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1 Problemin tasviri.	5
Şekil 1.2 Sadece uzak alandan mekanik yükleme.	5
Şekil 1.3 Tek uçtan film yüklemesi durumu.	5
Şekil 2.1 Kaplama yüzeyindeki yüzey gerilme vektörünün temsili gösterimi (sistem sınır şartı).	46
Şekil 2.2 Herhangi bir 'x' noktasından kesilmiş film için serbest cisim diyagramı.	58
Şekil 2.3 Filmde çift (a) ve tek uçlu (b) mekanik yüklemeler.	61
Şekil 3.1 Filmden tek uçlu yükleme ve homojen kaplama için, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$ için, film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Bu grafiklerdeki değerler, düzlem gerinim varsayılarak, $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 1/0.6$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = Q$ alınarak elde edilmiştir.	78
Şekil 3.2 Tek uçlu yüklemelerin (çekme, durum 1 ve 2) üst üste eklenmesiyle elde edilen simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler, homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{ref} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f) = 1/1.2$, $L/h_f = 2$ değerleri içindir.	79
Şekil 3.3 Simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{ref} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f) = 1/1.2$, $L/h_f = 2$, $F_0 = P\lambda_{ref}$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi dolu yuvarlaklar ise literatürde elde edilmiş sonuçlardır (bkz. kaynak [10], Fig.3).	80

Şekil 3.4 Simetrik yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B' 'nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değiştirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = F_0 = P\lambda_{\text{ref}}$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f)$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi dolu yuvarlaklar ise literatürde elde edilmiş sonuçlardır (bkz. kaynak [10], Fig.2). 81

Şekil 3.5 Tek uçlu yüklemelerin (bir uçtan çekme, durum 1, öteki uçtan basma, durum 2) üst üste eklenmesiyle elde edilen antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler, homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f) = 1/1.2$, $L/h_f = 2$ değerleri içindir. 82

Şekil 3.6 Antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f) = 1/1.2$, $L/h_f = 2$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi boş yuvarlaklar ise Erdogan ve Gupta [10]'da sayısal hesaplamada işaret hatâsı yapılarak elde edilmiş sonuçtur. 83

Şekil 3.7 Antisimetrik yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti A' 'nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değiştirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = Q$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f)$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmanın sonucu; içi boş yuvarlaklar ise Erdogan ve Gupta [10] tarafından sayısal hesaplamada işaret hatâsı yapılarak elde edilmiş sonuçtur. 84

Şekil 3.8 Simetrik (sürekli çizgi) ve antisimetrik (kesikli çizgi) yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B' 'nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değiştirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = P/h_f$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f)$ içindir. 85

Şekil 3.9 Simetrik (sürekli çizgi) ve antisimetrik (kesikli çizgi) yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B' nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değiştirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$,
 $p_1 = \lambda Q / (2h_f) = \lambda P / (2h_f)$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f)$, $F_0 = \lambda_{\text{ref}} P$, $Q_0 = \lambda_{\text{ref}} Q$ içindir. 86

Şekil 3.10 SEA için sınır şartlar: (a) simetrik film yüklemesi, (b) antisimetrik film yüklemesi. 87

Şekil 3.11 Sonlu elaman modeli için kafes yapı ve sınır şartları. 88

Şekil 3.12 Simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmde oluşan aksenal normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L_f / h_f = 100$, $P = 78$ N/mm değerleri içindir. Sürekli çizgiler analitik, noktalar ise SEA sonuçlarıdır. 89

Şekil 3.13 Antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmde oluşan aksenal normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L_f / h_f = 100$, $Q = 78$ N/mm değerleri içindir. Sürekli çizgiler analitik, noktalar ise SEA sonuçlarıdır. 90

Şekil 3.14 Uzak alan yüklemesi durumunda kaplama derecelendirme oranının ($\Gamma = \mu_s / \mu_0$) ve film boyunun kaplama kalınlığına oranının (L/h_c) değişik değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ grafiği. Bu grafiklerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L/h_f = 100$,
 $p_1 = \frac{4\mu_0 \varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir. 95

Şekil 3.15 Film uçlarından, uzak alan yüklemesine (bkz. Şekil 3.14) eş değer simetrik film yüklemesi durumunda kaplama oranının ($\Gamma = \mu_s / \mu_0$) ve film boyunun kaplama kalınlığına oranının (L / h_c) değişik değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ grafiği. Bu grafiklerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L / h_f = 100$, $p_1 = \frac{4\mu_0 \varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir. 96

Şekil 3.16 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve L / h_c değiştirgeninin farklı değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L / h_f = 100$, $p_1 = \frac{4\mu_0 \varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir. 97

Şekil 3.17 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve L / h_f değiştirgeninin farklı değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L / h_c = 5$, $p_1 = \frac{4\mu_0 \varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir. 98

Şekil 3.18 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve $\lambda = \mu_0 / \mu_f$ değiştirgeninin farklı değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L / h_f = 100$, $L / h_c = 5$, $p_1 = \frac{4\mu_0 \varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir. 99

Şekil 3.19 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken $\Gamma = \mu_s / \mu_0$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f$, L / h_f ve L / h_c değiştirgenlerinin farklı değerleri için film ucundaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti (A) değişimi. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$ alınarak elde edilmiştir. 100

- Şekil E7.1 Birinci tip Çebişef polinomları $T_n(x) = T(n, x)$, $n = 0..3$ ve $|x| \leq 1$ için. 121
- Şekil E7.2 Birinci tip Çebişef Polinomu $T_n(x) = T(n, x)$, $n = 20$ ve $|x| \leq 1$ için. 122
- Şekil E7.3 İkinci tip Çebişef Polinomları $U_n(x) = U(n, x)$, $n = -1..4$ ve $|x| \leq 1$ için. 122
- Şekil E7.4 İkinci tip Çebişef Polinomları $U_n(x) = U(n, x)$, $n = 5, 30$ ve $|x| \leq 1$ için. 123
- Şekil E7.5 Tümlev almada kullanılan trigonometrik dönüşümler için geometrik gösterim. 124
- Şekil E10.1 Guler ve arkadaşları [39] tarafından verilmiş filmdeki normal gerilme dağılımı şekli (soldaki, bkz. kaynak [39] Şekil 2) ve bu çalışmada ve Guler ve arkadaşları [38] tarafından düzeltilmiş hâli (sağdaki, bkz. Şekil 3.14). 130
- Şekil E11.1 Takviyeli (sürekli çizgi) ve takviyesiz (kesikli çizgi) durumlarda uygulanan bir kuvvetin (Q) homojen kaplama yüzeyinde ($0 \leq x < 1$) aralığında oluşturacağı kayma gerilmesi dağılımının (τ_{xy}) tekillik mertebesi (TM) açısından davranışı. 133

KISALTMALAR

Kısaltmalar	Açıklama
İDM	İşlevsel derecelendirilmiş malzeme/malzemeli
SEA	Sonlu Eleman Analizi
TM	Tekillik mertebesi
bkz.	bakınız
İng.	İngilizce
p.	page (sayfa)
pp.	pages (sayfalar)
s.	sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
e	Euler'e atfen verilmiş aşkın sayı, tanımlarından birisi şöyledir: $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cong 2.718\dots$
F_i	Gövde kuvveti (yer çekimi, v.s. kaynaklı), kütle kuvveti de denmektedir (mesela bkz. [61]).
\mathcal{F}	Fourier dönüşümü
i	Karmaşık sayı olup, $i = \sqrt{-1}$ olarak tanımlanmaktadır.
$i..j$	i 'den başlayıp j 'de biten tamsayılar dizisi olup, eşitlendiği değişkenin belirtilen aralıktaki tamsayı değerlerini alabildiğini göstermektedir.
n_i	Diferansiyel denklem sisteminin karakteristik kökleri
P_a, P_b	Filmin sırasıyla a ve b ucundaki sabit ve düzgün dağılı mekanik yükler (bkz. Şekil 1.1)
$T_n(x)$	Birinci Tip Çebişef ¹ Polinomları (bkz. EK 7)
$U_n(x)$	İkinci Tip Çebişef Polinomları (bkz. EK 7)
u, v	Sırasıyla x ve y yönünde yer değiştirmeler
x, y	Koordinat eksenleri (bkz. Şekil 1.1)
γ	Kaplama için heterojenlik sabiti (bkz. denklem (2.1))
Γ	Kaplama derecelendirme oranını/şeklini gösterir, kaplama üst yüzünün alt yüzüne göre uyarlıdır (bkz. Çizelge 3.1).
δ_{ij}	Kronecker delta $i = j$ ise $\delta_{ij} = 1$, diğer durumlarda sıfırdır.
$\delta(t-x)$	Dirac delta fonksiyonu $t = x$ olduğunda fonksiyonun değeri sonsuza giderken diğer durumlarda sıfır olmaktadır.
ε	Gerinim
ε_0	Kaplama ve destekteki sabit uzak alan gerinim yükü
κ	Kolasaf (İng. Kolosov) veya Muskhelishvili (İng.) sabiti

¹ Rus matematikçi (1821-1894), isminin orijinal yazılışı “Чебышев” olup, farklı dillerde farklı yazılışları vardır. Örneğin İngilizcede “Chebychev,” Almancada “Tschebyscheff” olarak yazılmaktadır; burada, Rusça söylenişi esas alınarak Türk abecesiyle yazılmıştır (bkz. mesela <http://dic.academic.ru/>).

λ	Filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlığı (bkz. denklem (2.114a)); denklem (2.2) ve (2.4)'te Lamé sabiti.
μ	Kayma modülü / Lamé sabiti
μ_0	Kaplama üst yüzeyinin kayma modülü
ν	Poisson oranı
σ	Normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi
{ }	Kıvrık parantez vektörleri temsil etmektedir.
[]	Köşeli parantez metin içerisinde kaynaklara yapılan atıfları, denklemlerde ise matrisleri temsil etmektedir.
()	Normal(yuvarlak) parantez denklem numaralarına atıfları ya da metin içerisinde varsa ek açıklamaları gösterir.
\Rightarrow	Sembolik Mantıktaki “ise” bağlacı
\Leftrightarrow	Sembolik Mantıktaki “ancak ve ancak” bağlacı
\rightarrow	Okun kuyruğundaki değişkenin/değiştirgenin ucundaki değere yaklaştığını gösteren “limit oku”dur.
\sim	EK 11’de sol tarafındaki fonksiyonun değerini sonsuza götüren (tekilliğe yol açan) terimi ifade etmek için kullanılmış olup diğer yerlerde yaklaşık değer belirtir.

İndisler

Açıklama

c	Kaplama (coating)
f	<i>İnce film</i>
i, j	Koordinat eksenleri 1, 2, 3 (Kartezyen sistemde sırasıyla x, y ve z)
s	<i>Destek</i> (substrate)

Üsler

Açıklama

c	Kaplama (coating)
f	<i>İnce film</i>
s	<i>Destek</i> (substrate)

Genel gösterim kuralları ve adlandırma için lütfen EK 1’e bakınız.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Teknolojik ilerlemeler, bir yandan kuramsal çalışmalara, öte yandan da geliştirilen yeni malzemelerle ilintilidir. Doğadaki mükemmel yapıları/sistemleri örnek alan mühendisler, nanoteknoloji ve akıllı üretim yöntemleri sayesinde daha akıllı² yapılar üretmeye çalışmaktadırlar. Üretilen bu yapıların enerji verimliliği, başarımları (performans), maliyet, ekolojik uyumluluk v.b. hususlarda iyileştirilebilmesi için çok küçük boyutlarda işlenmiş olmaları gerekmektedir. Bu yapılardan biri olan *ince filmler* veya kaplamalı yapılar, mikroelektronik bütünleşik devreler, manyetik bilgi saklama sistemleri, optik kaplamalar (filtreler), aşınma veya korozyon dayanımlı kaplamalar, seramik kompozitlerin takviye kaplamaları, güneş pili hücresi, yakıt pili, mikroelektromekanik sistemlerde kuvvet üretici, v.b. uygulama alanlarında kullanılmaya başlanmış ve günümüzde de artan bir hızla kullanılmaya devam edilmektedir [1-5].

İnce filmlerin üretimi sırasında veya sonrasında oluşan gerilmeden dolayı malzeme bozulma olasılığı – temel işlevsel karakteri yük taşıma olmayan malzemelerde bile – teknoloji sınırlayan bir bariyer olarak durmaktadır [6]. Üretilen *ince filmler* yapılarının yüksek dayanımlı olması gerekmektedir. Bu nedenle, *ince filmler* yapılarının mekanik olarak modellenmesi ve analitik/hesaplamalı yöntemlerle elde edilen sonuçların ışığında üretim yöntemlerinin iyileştirilmesi ve kullanım şartlarının belirlenmesi gerekmektedir.

² Akıllılık kavramı insanlara ait olup, erke demir (sert demir), dişi bakır (kolay işlenebilen), çeliğe su verme gibi birleşik terimlerde olduğu gibi malzemeler için de kullanılmaktadır. Belki de akıllı malzemedan ziyade, akıllıca tasarlanan, üretilen ve kullanılan malzemedan söz etmeliyiz. Kullandığımız/ürettiğimiz malzemelerin/yapıların performansı veya “akıllılığı” aslında bizim akıllılığımızın da bir göstergesidir.

Film gerilmeleri; iç kaynaklı ve dış kaynaklı gerilmeler olarak ikiye ayrılabilir. İç kaynaklı gerilmeler filmin *destek* malzemesi veya komşu katman üzerinde geliştirilmesi esnasında oluşan gerilmelerdir; dış kaynaklı gerilmelerse gelişimi takip eden süreçte çevre şartlarındaki fiziksel değişikliklerden dolayı oluşan gerilmelerdir. İç kaynaklı gerilmelerin giderilmesi için özel vakum pompaları ile aşırı yüksek vakum şartları oluşturularak ($\sim 10^{-10}$ Torr) film gelişim gerilmelerinin gerçek zamanda, mesela film eğrilik çapının değişiminden hareketle (Stoney formülü yardımıyla), gözlemlendiği ve kontrol edildiği “akıllı üretim yöntemleri” kullanılmaktadır [4, 6, 7].

Bu çalışmada, ayrıntıları problem tanımında (bkz. kısım 1.2) verilen birbirine bağlı üç malzemeli bir yapı, verilen varsayımlar (bkz. kısım 1.3) altında iki boyutlu elastik teori kullanılarak modellenmiş ve analiz edilmiştir. Yapılan analizle film ucunda oluşan kayma gerilmesi tekillik şiddeti, filmdeki aksenal normal gerilme ve film kaplama arayüzündeki kayma gerilmesi dağılımları için elde edilen analitik/hesaplamalı sonuçların (bkz. bölüm 3), sistemin ayırt edici özelliğini belirleyen değiştirgenlere (parametrelere) bağlı olarak nasıl değiştiğinin bulunması amaçlanmıştır. Bu çalışmanın temel amaçlarından biri film uçlarındaki gerilme tekillik şiddetlerinin incelenmesidir.

Tez çalışmasının birinci bölümünde genel bir literatür özeti ve problem tanımı verilmiş olup, çalışmadaki varsayımlar sıralanmıştır. İkinci bölümde ise karışık sınır değer problemi tekil tümlev denkleme indirgenerek, çözümü verilmiştir. Üçüncü bölümde muhtemel yükleme türleri için sayısal sonuçlar verilmiş olup bazı özel durumlar için Sonlu Elemanlar Analizi (SEA) sonuçlarıyla doğrulanmıştır. Dördüncü bölümde ise bütün sonuçlar genel bir bakış açısıyla yorumlanmış olup gelecekte yapılabilecekler sunulmuştur. Tez içerisinde eğik harflerle yazılı bütün kelimelerin/ifadelerin anlamları veya İngilizce karşılıkları EK 2’de verilmiş olup, formülasyon esnasındaki bazı açıklamalar da EKLER’e bırakılmıştır.

1.2 Problemin Tanımı

İşlevsel derecelendirilmiş malzemelerin (İDM) temas mekaniği genelde iki geniş ulamda (kategoride) incelenmektedir: “Batıcı uç problemi olarak da adlandırılan birincisi, yükleyen bileşenin rijit veya şekil değiştirebilir olduğu ve yüklenen bileşeninse genellikle şekil değiştirebilir olduğu sürtünmeli ya da sürtünmesiz standart yük aktarım problemleridir. Birinci tipe örnek olarak, rulmanlar, dişliler, kamlar, silindir yataklar/piston halkaları ve sabit gaz türbinlerindeki aşındırılabilir contalar (abradable seals), v.b. verilebilir. Bu uygulamalarda, malzeme özelliğini derecelendirme fikri, mekanik parçaları – genelde aşınma dayanımını iyileştirmek için – uygun İDM katmanlarıyla kaplanır. İkinci tip temas problemleri ise İDM *desteklere* yapıştırılmış *ince filmler* ve kaplama tabakalarından oluşmaktadır. Kaplama tabakaları genellikle havacılık ve inşaat mühendisliği alanlarında kuvvetlendirici veya sertleştirici olarak kullanılmaktayken *ince filmler* ise daha çok mikroelektronik uygulamalarda kullanılmaktadır [8,9].”

Problem geometrisinde en altta sonsuz homojen bir yarım *destek* malzemesi³, üzerinde işlevsel derecelendirilmiş kaplama ve en üstte de *ince film* bulunmaktadır (bkz. Şekil 1.1). Bu çalışmada, sadece film ve kaplama arasındaki temas problemi ele alınmaktadır. Bu problemlerde yükleme; düzgün sıcaklık değişimlerinden, ani sıcaklık dalgalanmalarından, uzak alan mekanik yüklerinden (kaplama ve *destekten* $|x| \rightarrow \infty$ iken), film üretimi veya bağlama işleminden dolayı kalıntı yüklerinden, sistemin kullanımı esnasında maruz kaldığı mekanik yüklerden kaynaklı gerilmelerin biri veya herhangi birkaçının birleşiminden oluşabilmektedir.

Film, işlevsel derecelendirilmiş kaplama ve *destek* malzemesinden oluşan bu üçlü sisteme mekanik yüklemeler ya filmde ya da altındaki kaplamadan/*destekten* uygulanabilir. Uygulanabilecek yüklemeler Erdogan ve Gupta'nın [10] kullandığı

³ “Yarı-sonsuz homojen bir *destek*” yerine “sonsuz homojen bir yarım *destek*” ifadesi kullanılmıştır. Ayrıca bkz. s.25 dipnot 6.

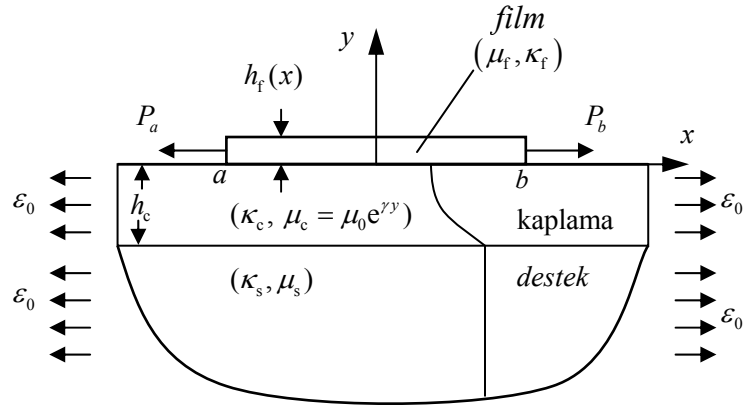
gibi simetrik (eşit büyüklükte ve karşılıklı zıt yönlerde) ve antisimetrik (eşit büyüklükte ve karşılıklı aynı yönlerde) bileşenlerine ayrılabilir. *Desteğe*/kaplamaya uygulanan uzak alan gerinim yüklerini de düşünürsek *mümkün* mekanik yükleme şekilleri dörde ayrılır: film uçlarından simetrik ve antisimetrik; kaplamadan/*destekten* simetrik (bkz Şekil 1.2) ve antisimetrik yüklemeler. Her bir yüklemenin etkisi tek tek incelenerek sonuçlar üst üste ekleme (süperpozisyon) yöntemiyle bulunabilir. Sistemin statik dengede kalabilmesi için *destekten*/kaplamadan antisimetrik yükleme durumu *-mümkün* olsa da- olasılık dışında tutulmalıdır. Öte taraftan filmde yerel olarak uygulanan antisimetrik mekanik yüklemenin etkisi *destekte*/kaplamada sonsuza giderken sönmüleneceğinden dolayı statik dengeyi bozmayacaktır.

Yukarıda yapılan sınıflandırmaya göre filmde yapılabilecek mekanik yükleme türleri filmin her iki ucundan da kuvvet uygulamayı gerektirmektedir. Biraz daha analiz edildiğinde, aslında bu yükleme türlerinin de temelde tek uçtan bir yükleme türünün yaratacağı etkilerin uygun şekillerde üst üste eklenmesiyle elde edilebileceği görünür. İki uçlu yüklemeden önce, tek uçlu yüklemenin (bkz. Şekil 1.3) incelenmesi, *ince filmli* modelin mekanik tepkisinin fiziksel açıdan daha açık anlaşılması bakımından da önemlidir.

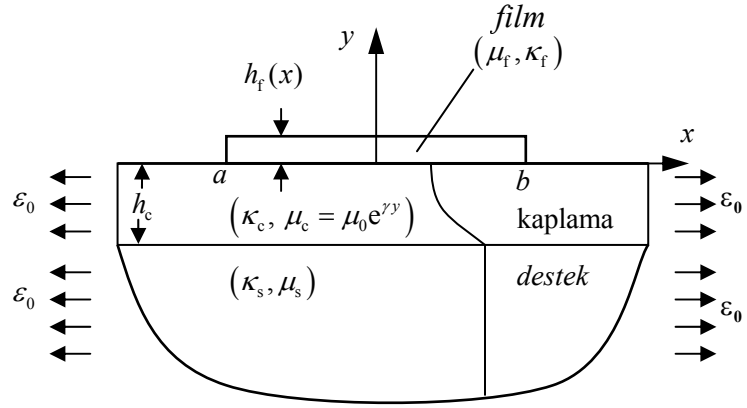
Problem formülasyonu bütün mekanik yükleri ve termal yükleri ortak bir yük fonksiyonuyla verecek şekilde yapılmış olup (bkz. bölüm 2); sayısal sonuçlar muhtemel mekanik yüklemeler için ayrı ayrı verilmiştir (bkz. bölüm 3).

Bu hâliyle, problem karışık sınır değer problemi olup, probleme hâkim denklemin elde edilmesi için uygulanacak fiziksel şart⁴, film-kaplama arayüzündeki ideal bağ varsayımından dolayı yer değiştirmelerin (dolayısıyla yer değiştirmelerin eksenel yöndeki gradyanlarının) eşitlenmesidir (bkz. denklem (5e,f)).

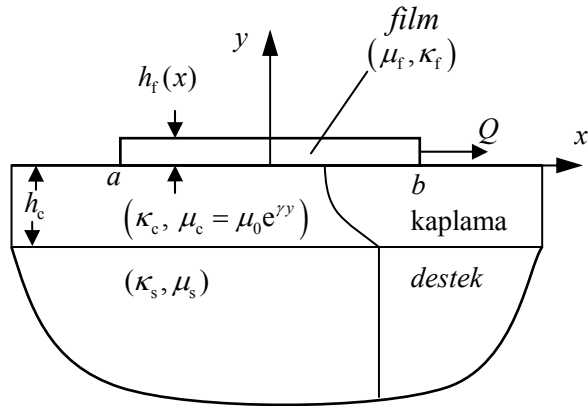
⁴ “Probleme hâkim fiziksel şart” (“The physical condition that governs the problem...”) tabiri daha önce Benscoter [11] tarafından kullanılmıştır.



Şekil 1.1 Problemin tasviri.



Şekil 1.2 Sadece uzak alandan mekanik yüklenme.



Şekil 1.3 Tek uçtan film yüklemesi durumu.

1.3 Varsayımlar

Şekil 1.1’de tasvir edilmiş olan problem aşağıdaki varsayımlar altında çözülmüştür (bkz. bölüm 2):

- Her üç malzeme için de doğrusal elastik teori (Hooke Yasası) geçerli,
- Malzemeler, ideal *sürekli ortam* olarak alınıyor (pürüzsüz, çatlaksız),
- İnce film membran gibi davranmakta,
- İnce film-kaplama arasındaki ve kaplama-*destek* malzemesi arasındaki arayüzey ideal bağlı (yani arayüzey noktalarının yer değiştirmeleri aynı ve arayüzeyde katmanlar arasında gerilme sürekliliği var),
- Kaplama malzemesi işlevsel derecelendirilmiş,
- Kaplamadaki malzemenin kayma modülü üstel bir değişim gösteriyor,
- Her üç malzemedede de Poisson oranları sabit kabul edilmekte,
- Düzlem gerinim veya genelleştirilmiş düzlem gerilme⁵ mevcut (formülasyon her iki durum için de ortak biçimde verilmiştir),
- Film kalınlığı boyunca yükler ve alan değişkenleri düzgün dağılı,
- Film kalınlığı x ’e bağlı olarak değişmektedir (analitik çalışmada değişken kabul edilen film kalınlığı, sayısal örneklerde sabit alınmıştır),
- Sistemdeki yüklemeler *Destek* ve kaplama malzemesinde sabit uzak alan (ön)gerinimleri ϵ_0 ; film uçlarında düzgün dağılı mekanik yükler (şekillerde-Şekil 3.11 dışında- bu yüklerin bileşkesi gösterilmiştir); ve film ve kaplama arasında termal uyumsuzluk yükünden oluşmaktadır,
- Gövde kuvvetleri sıfır kabul edilmektedir,
- Sistem statik dengededir,
- Kaplama üst yüzeyi film-kaplama arayüzeyi boyunca yer değiştirme gradyanlarının arayüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edilmesi esnasında, kaplama malzemesinde x - ekseninde artı ve eksi sonsuzda; homojen yarım *destek* malzemesinde x - ekseninde artı ve eksi sonsuzda, y -

⁵ Bkz. EK 3

ekseninde de eksi sonsuzda gerilmeler sıfır kabul edilmiştir (*Serbest yayılan etkinin sonsuzda sönümlenmesi şartı*). Bu kabul, *destek* ve kaplamada x - ekseninde artı ve eksi sonsuzda uygulanan uzak alan (ön)gerinimleri, ϵ_0 , ile çelişiyor gibi görünmektedir; halbuki bu safhada sadece film-kaplama arayüzeyindeki hayali yüzey gerilme vektörleri dış yük olarak düşünülmekte ve arayüzeydeki yer değiştirme gradyanları bunlar cinsinden hesaplanmaktadır. Gerçekte, uzak alan gerinimi veya film uçlarından uygulanan kuvvet gibi sisteme etkiyen dış yükler, bu film-kaplama arayüzeyindeki gerilme vektörlerine neden olmaktadır. Gerçek yükler, uyarlılık veya film denge denklemleri yazılırken sonradan ilgili denklemlere dâhil edilmektedir.

1.4 Literatüre Bakış

1970'li yıllara kadar [11-16] uçak yapımında kullanılan takviye çubuk bağlı levhalardan oluşan yapıların, 1970'li yıllardan itibaren [17-19] ise genelde elektronik devrelerin yapımında kullanılan film/kaplama bağlı *desteklerden* oluşan yapıların gerilme analizi, araştırmacıları bu konuda çalışmaya güdüleyen temel etkenlerden olmuştur. Bir diğer güdüleyici ise problemin doğasından kaynaklı ve yapının işlevini yitirmesine neden olabilen film veya çubuk uçlarında oluşan gerilme dağılımındaki tekillikler ve bunların geometrik ve mekanik değiştirgenlere (parametrelere) bağlı değişiminin açıklığa kavuşturulması isteği olmuştur. Yapılmış çalışmalar incelendiğinde, uğraşılan problemin yapılan varsayımlara veya analitik/nümerik yöntemle bağlı olarak farklı çözümlerinin mevcut olmasının da araştırmacıları daha basit ve etkili çözüm yöntemleri üretmeye teşvik ettiği görülebilir. Örneğin, Arutiunian [20] tarafından 1968'de çözülen problem, 1971'de Erdogan ve Gupta [10] tarafından tekrar ele alınarak çok daha basit ve etkili bir şekilde çözülmüştür.

Literatüre, incelenen geometri açısından baktığımızda: bir taraftan tam ya da yarım levhaya⁶ bağlı tam takviye çubuğunun (Melan [21], 1932), yarım takviye çubuğunun (Buell [13], 1948; Koiter [14], 1955; Brown [15], 1957) ve sonlu uzunluktaki takviye çubuğunun (Reissner [12], 1940; Benscoter [11], 1949; Bufler [16], 1961; Arutiunian [20], 1968; Erdogan ve Gupta [10], 1971) incelendiğini; öte taraftan da- güdüleyicisi elektronik devreler olanlar tarafından- yarım *destek* ve ona bağlı film tabakasının (mesela Hu [17], 1979; Erdogan ve Joseph [18], 1990; Shield ve Kim [19], 1992; Alaca ve arkadaşları [22], 2002) incelendiğini görürüz. Üç boyutta incelendiğinde birbirinden ayrı olan bu iki geometri, düzlem elastisite açısından incelendiğinde aynı probleme dönüşmektedir. Bu nedenle tez içerisinde her iki problemde de “bu konu” olarak bahsedilmiştir. Ayrıca temas mekaniğinde incelenen bir batıcı uç vasıtasıyla yük aktarımını içeren kaplamalı yapılar da, lokal olarak düşünüldüğünde ve iki boyutlu analiz edildiğinde bir düzlem ve üzerinde zorlanmış kaplama kaplı olarak benzer geometri dâhilinde modellenebilmektedir (mesela bkz. [23-25]).

Bu konudaki ilk çalışma 1932’de Melan [21] tarafından yapılmıştır. Melan, kaynaklanmış bağlantılar kuramındaki gelişmelerin demir/çelik yapı uygulamasının gerisinde kaldığından bahsederek, bağlantılar kuramında yetersiz bazı denemeler dışında en basit iki boyutlu meselelerin bile o zamana kadar ele alınmadığını vurgulamıştır. Bağlantısız (takviyesiz) yarım levha durumu için kenarından uygulanan yatay noktasal kuvvet etkisi altında levhadaki gerilme dağılımı 1892’den beri bilinmekteydi (bkz. mesela [26]). Bağlantısız yarım levha için Boussinesq tarafından verilen bu çözümde, kuvvetin uygulama noktasında gerilme değerleri sonsuza giderken; Melan [21] yaptığı çözümle levhanın kenarından takviye edildiği durumda kuvvetin uygulama noktasındaki normal gerilmenin sonlu ve kayma gerilmesinin ise sadece logaritmik olarak sonsuza gittiğini göstermiştir.

⁶ Literatürde tam ya da yarı-sonsuz tabirleri de geçmektedir. Ancak burada ortamın büyüklüğü her iki durum için de sonsuz olduğundan, sadece tam ve yarım nitelendirme sıfatları tercih edilmiştir. Yarım levha/takviye dendiğinde yarı-sonsuz levha/takviye; benzer şekilde tam levha/takviye dendiğindeyse tam-sonsuz levha/takviye kastedilmektedir.

1940'da yarım levhaya bağı sonlu boydaki takviye çubuğu için ilk çalışmayı yapan Reissner (1940), çalışmasında bir yandan sonlu ve sonsuz uzunluktaki takviye elemanı için gerilme dağılımı formülasyonunu yaparken bir yandan da sistemde belirlenecek olan limit arayüzey kayma gerilmesi değeri için takviye elemanının kesit alanı için de bir formül çıkarmıştır. Çözümün levha ve takviyenin göreceli boyutlarına bağılılığını ulaşılan tümlev denklemle göstermiş olup, bu denklemin sonlu boyda hava kanadı teorisindeki denklemle aynı tipte olduğunu vurgulamış ve benzer şekilde ele alınabileceğini belirtmiştir [12].

Yarım takviye çubuklu yarım levhayı inceleyen Buell (1948) formülasyonunda Airy gerilme fonksiyonlarını kullanmış; levhayı karmaşık düzlem olarak alıp bir çemberin içine konformal dönüşüm uygulamıştır. Ardından bu fonksiyonları Fourier serilerine açarak soruyu cebirsel denklem sistemine indirgemıştır [13]. Tam, yarım takviye ve takviesiz durumları karşılaştıran Buell [13], takviyenin varlığının gerilme yığılmasını malzemesel⁷ olarak azalttığını; daha uzun takviyenin gerilme yığılmasını daha fazla azalttığını göstermiştir. Ayrıca Buell [13], etkili takviye boyunun takviye ve levha elastik modülleri ve levha et kalınlığı ile takviye kesit alanına bağı olduğu göstermiştir.

Tam levhaya bağı sonlu uzunlukta bir takviye çubuğunu inceleyen Bescoter (1949), probleme hâkim fiziksel şartın temas arayüzeyinde yatay yöndeki normal gerinimlerin eşitlenmesi olduğunu ve ardından da çözümü formüle etmek için levhadaki gerinim için etki fonksiyonlarının (influence func.) gerekliliğini vurgulamıştır. Uçak kanadındaki genişlik boyunca (spanwise) hava yükü dağılımına hâkim denklemle (Prandtl taşıma hattı denklemi) aynı biçimde bir tümlev denklem elde etmiş ve bilinen çözüm yöntemlerinden biri olan Multhopp'un yöntemini (1938)⁸ uygulamıştır. Bu yöntem sayesinde tümlev denklemini sonlu sayıda nokta

⁷ Aynı yüklemeye maruz kalan malzeme miktarının artmasıyla gerilme değerlerinde oluşacak düşüş kastedilmektedir.

⁸ [11] nolu kaynakta bahsedildiği şekliyle özetlenmiştir.

için doğrusal cebirsel denklem sistemine dönüştürmüştür. Simetrik ve antisimetrik çubuk yüklemesi durumu için ayrı ayrı formülasyon yapılmış; bir simetrik bir de antisimetrik yükleme durumu için malzeme elastik sabitleri aynı alınarak sayısal sonuçlar elde edilip takviye yarım uzanımı için eksenel kuvvet grafikleri gösterilmiştir [11].

Yarım ya da tam levhaya bağlı yarım takviyeli bir geometriyi inceleyen Koiter (1955), Buell [13]'in verdiği çözüme göre uzun fakat nümerik hesaplamaları kolaylaştıran bir analitik çalışma yapmıştır. Koiter bu çalışmasında [14], Mellin dönüşümünü tekil integro-diferansiyel denkleme uyguladıktan sonra karmaşık düzlemdeki bir şeritte fark denklemine dönüştürmüştür. Dönüşen bu denklem de Laplace dönüşümü sayesinde çözümlenip, ters Mellin dönüşümü (kontur tümlevi alınarak) yapılarak nihai çözüm elde edilmiştir. Takviyedeki eksenel kuvvet dağılımı boyutsuz şekilde grafikte gösterilmiştir.

Tam levhaya bağlı yarım takviye problemini inceleyen Brown (1957), Melan [21] ve Buell [13] tarafından yapılan çalışmaları analitik kesinlik açısından takdir etmiştir. Brown [15] çalışmasında, karışık sınır değer problemlerini yeni bir teknikle, Muskhelishvili (İng., 1953) karmaşık potansiyellerini kullanarak hâkim ikinci derece fonksiyonel diferansiyel denklemlere indirgemiş ve bunları seri biçiminde çözmüştür.

Yarım ya da tam levhaya bağlı sonlu uzunlukta takviye çubuğu ya da iki yarım levhaya bağlı takviye problemlerini inceleyen Bufler (1961), kendisine kadar yapılmış en kapsamlı ve sistematik çalışmayı yapmıştır. Ulaştığı tekil tümlev ve integro-diferansiyel denklemleri E. Carafoli'nin taşıma kanadı kuramında verilen yönteme göre yaklaşık olarak çözmüştür. Bu yönteme göre form sayıları uygun bir biçimde kararlaştırılarak takviyenin çeşitli profil formları elde edilmiş; bu esnada, diferansiyelinden, levha ile ekleme parçası arasında aktarılan kayma gerilmesi elde edilen, ekleme parçası kuvveti bir trigonometrik seri veya üs serisi olarak ifade

edilmiştir. Bu çalışmada [16] dikdörtgenel bir takviye elemanı (ekleme elemanı) çeşitli yükleme (zorlama) durumları altında incelenmiş ve sonuç gerilme eğrileriyle gösterilmiştir. Yaptığı analiz sonucunda Bufler [16], takviye parçasında aktarılan kayma ve normal gerilme bileşenleri ve takviyedeki aksel gerilme bileşenlerinin takviye ucuna doğru sınırsızca arttığını analitik olarak tespit etmiş ve fotoelastik (gerilme optiksel) bir yöntemle de sonucu doğrulamış olup sonlu uzunluktaki takviyenin bir tür çentik etkisi yarattığını vurgulamıştır.

Sonlu boyda elastik takviyeli yarım düzlemi inceleyen Arutiunian (1968), problemi, temas gerilmelerini belirlemeye müsaade eden Prandtl tipinde bir integro-diferansiyel denklem elde ettikten sonra bu denklem için sonsuz kuvvet serisi şeklinde bir cevap varsayarak sonsuz cebirsel denklem sistemine indirgeyerek çözmüştür. Arutiunian [20] bu denklem sisteminin düzenliliğinin malzemelerin elastik modüllerine ve takviye boyuna bağlı olduğunu göstermiştir. Takviye uçlarındaki gerilme durumunu karakterize eden tuhaflikları açıkça gösteren tam analitik (exact) çözümü hedeflemiş çalışmada nümerik ya da grafik sonuç verilmemiş olup konuya ilişkin tarihi çalışmalar etraflıca sıralanmaya çalışılmıştır.

Arutiunian [20] tarafından verilen çözümü çok karışık bulan ve örnek verilmemiş olmasından yakınan Erdogan ve Gupta (1971), aynı problemi daha basit ve etkili bir yöntemle çözmüştür. Elastik takviyeli yarım düzlem problemi arayüzey kayma gerilmesi cinsinden tekil bir tümlev denklemle ifade edildikten sonra, problem Çebişef polinomları vasıtasıyla sonsuz cebirsel denklem sistemi çözümüne indirgenmiştir. Bu denklem sisteminden Çebişef polinomlarının bilinmeyen katsayıları, ağırlıklı kalıntılar yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Yöntemin güçlü yanlarından birisi cebirsel denklem sisteminin çözülür çözülmez yeni kuadratür gerektirmeden arayüzey gerilme dağılımının ve uçlardaki tekilliklerin hemen bulunabilir olmasıdır. Sistem düzenliliği (regularity) malzeme mekanik özellikleri ve film kalınlığını içeren bir değıştirgene bağılı olarak bulunmuştur. Çalışmada [10] ana tümlev denklem genel *mümkün* yüklemelere göre ortak bir biçimde verilmiş olup,

sonuçlar arayüzey kayma gerilmesi ve gerilme tekillik şiddetini içeren tam nümerik bir örnek verilerek, şekille de gösterilmiştir.

Genel olarak baktığımızda, problem çubuk veya filmdeki normal gerilme cinsinden formüle edildiğinde integro-diferansiyel (tümlev-diferansiyel) denklem elde edilmekte; arayüzey kayma gerilmesi cinsinden elde edildiğinde ise tümlev denklemle ifade edilebilmektedir. Her iki denklem de tekil türden olup; tam açık biçimde çözümü henüz bilinmemektedir. Bu denklemin çözümü için (bkz. Muskhelishvili (İng.), 1953⁹) verilen klasik yaklaşım: tümlev denklemin baskın kısmının incelenmesiyle arayüzey gerilme fonksiyonunun uçlardaki tekil davranışını tam ifade eden temel fonksiyonunun bulunması ve ardından da temel fonksiyonun başka bir tekil işleple (operatörle) çarpılıp düzenli hâle getirilmesinden sonra tekil fonksiyonlar cinsinden Fredholm tümlev denklemi elde edilip çözülmesidir [27]. Bu yöntemin sayısal çözümünün zorluğu ve uzunluğuna karşıt olarak temelde Erdogan (1969) tarafından önerilmiş olan ve sonradan daha da geliştirilen Erdogan ve Gupta'nın (1972) önerdiği yöntem çok daha basit ve etkilidir. Erdogan ve Gupta [27], tekil tümlev denklemin uçlardaki tekil davranışını tam ifade eden temel fonksiyonun Çebişef polinomlarının ağırlık fonksiyonu olduğunu fark ederek, temel fonksiyon ve Çebişef polinomlarının birlikte çarpımlarını bilinmeyen arayüzey gerilme fonksiyonu yerine yazıp, tekil tümlev denklemi için Gauss-Çebişef tümlev formülünü elde edip seçtikleri özel noktalarda, birinci tip Çebişef polinomunun köklerinde, Çebişef polinomlarının bilinmeyen katsayıları için tekil tümlev denklemini cebirsel bir denklem sistemine indirgeyerek çözmeyi başarmıştır.

Elektronik parçalarda kullanılan *destek* ve iletken veya yalıtkan *ince filmli* çok katmanlı yapılarda *destek* üzerinde film ucu etkili büyük gerilmelerin oluşabilmesi Hu'yu (1979) yarısız *destek* üzerinde yarım film problemini incelemeye yönlendirmiştir. Önce tam filmde aksenal yönde düzgün dağılı iç gerilme kabul eden

⁹ Bilgiler [27] nolu kaynaktan özetlenmiştir.

Hu [17], aniden filmin yarısının kesilerek öteki yarısının ayrıldığını hayal etmiş ve bu durumda ortaya çıkan film ucu sebebiyle oluşmuş gerilme dağılımını sonlu farklar yöntemi kullanarak incelemiştir. Çalışmada [17] filmde film gerinimi rahatlamasından/boşalmasından kaynaklı dağılılı kuvvete müsaade edilmiştir (eksenel yönde). Tam film ucunda kuvvetin uygulandığı alanın sifıra gitmesinden dolayı film ucundaki tekilliğin *sürekli ortam hipotezinden/yaklaşımından* kaynaklı olduğunu söyleyen Hu [17]; bu tekilliğin, bağ başına kuvvetin alan başına kuvvetten daha uygun olduğu sadece ayrık atomsal analizle çözülebileceğini belirtmiştir.

Elastik *destek* üzerinde çok katmanlı veya çoklu filmlerin mekanik modellenmesini yapan Erdogan ve Joseph (1990) homojen sıcaklık değişimleri, yavaş döngüsel ısıl yükler veya uzak alandaki mekanik yüklerden dolayı zorlanan sistemin film uçlarındaki gerilme yığılmaları veya tekillikleri, film ayrılması/bağısızlaşması için gerinim enerjisi yayılım oranı ve *destekte mümkün* çatlak ilerlemesi şartlarını incelemiştir. Çalışmada [18] film, ortotropik membran; *destek*, elastik *sürekli ortam*; arayüzey ise, ideal veya homojen kayma tabakası olarak alınmış olup film kalınlığı değişken kabul edilmiştir.

Destek üzerine bağlı *ince filmlerde* kenar etkisiyle ayrışmayı araştıran Hutchinson ve arkadaşları (2001) üst üste ekleme yöntemini kullanarak kenarların (uç ve arayüzeydeki kenarlar) gerilme dağılımı ve arayüzey çatlaklarının enerji yayılım oranını büyük ölçüde etkilemekte olduğunu; uç kenarların arayüzey ayrışmalarının oluşumuna karşı kendiliğinden koruma sağladığını (farklı boyda ama uçlardan çeyrek film kalınlığı uzaklığına kadar eşit aralıkta hemen hemen aynı arayüzey gerilme dağılımına sahip iki film arasında daha kısa boylu olanı arayüzey ayrışmalarının oluşumuna karşı daha emniyetli olduğunu) göstermiştir [28].

Yaptığı analitik çalışmayı sonlu elemanlar yöntemi kullanarak doğrulayan ve deneysel çalışmayla da destekleyen Alaca ve arkadaşları (2002) analitik çözümde: *destek* üzerine bağlı değişken kalınlıklı film; deneysel çalışmada 152 µm kalınlıkta

polyamid *destek* üzerine bağılı 400 nm Al film şerit ve Sonlu Elemanlar Analizi çözümünde ise filmde 94 defa daha kalın bir *destek* kullanmıştır [22]. Çalışmada sistem üzerindeki yükleme aksel yönde ve *destekten* uzak alan çekme gerilmesi olup, aynı zamanda filmle *destek* arasındaki gerinimsel uygunsuzluğu da temsil edecek şekilde verilmiştir. Çalışmanın [22] analitik kısmında ısı yükleri de formüle edilmiş olup arayüzey kayma gerilmesi için ulaşılan tekil tümlev denklem Vekua'nın (1945) sonlu genişlikteki uçak kanadı teorisinde kullandığı çözümü kullanılarak Fredholm denkleminde indirgenerek çözülmüştür. Film uçlarındaki gerilme yığılmalarını inceleyen Alaca ve arkadaşları [22]: (i) serbest uçlarda karekök tekiliği olduğunu, (ii) verilen yük altında filmin narinlik (boy/kalınlık) oranı arttıkça ve film-*destek* rijitlik oranı azaldıkça kayma gerilmesi tekilik şiddetinin azalmakta olduğunu, (iii) film-*destek* rijitlik oranının ondan büyük olması durumunda filmin eğilme etkilerinin ihmal edilebilir olduğunu vurgulamıştır.

Filmin kayma cevabını oldukça iyi veren membran benzeşiminin arayüzeydeki kavrama/soyulma gerilmesi hakkında bilgi vermemesinden hareketle Shield ve Kim (1992), elastik yarım düzleme uyumlu hâlde bağılı sonlu uzunlukta *ince film* problemini filmin eğilme katılığını ihmal etmeden giriş teorisini uygulayarak çözmüştür. Shield ve Kim [19] film uçlarındaki akmayı modelleyebilmek için “yapışkan bölge” (cohesive zone) modeli uygulamış; kayma bölgesi olarak adlandırılan bu bölgede normal açılmasız sadece teğet kaymalara müsaade edilmiştir (film-*destek* arayüzeyinde yer değiştirmelerin eşitliği şartı yerine kaymanın film akma kaymasına eşitliği şartı getirilerek sınır şartı serbestleştirilmiştir). *Destekte* yanlardan düzgün dağılılı bası gerinimi (aynı zamanda termal uyumsuzluk gerinimini de temsil etmektedir) kabul eden Shield ve Kim [19], film için giriş teorisi kullanarak yazdıkları diferansiyel denklemleri tümlev denkleme dönüştürdükten sonra yarı düzlem için verilen tekil tümlev denklemle birleştirmiştir. Çalışmada [19] elde edilen sonuçlardan bazıları şunlardır: (i) desteğe göre film sertleştikçe eğilme etkisinin artması ve uçlarda düşey yönde çekme kuvvetlerinin (negatif basınç) oluşması, (ii) daha rijit filmlerde membran benzeşiminin – giriş modeli sonuçlarına göre – daha yakın sonuç vermesi, (iii) filmdeki aksel kuvvet dağılımının uzun filmlerde ortada

daha fazla olması, (iv) membran modelinin mod açısının yaklaşık $\pi/2$ olduğu katı durumlar için daha geçerli olduğu.

Çubuk takviyeli levha problemiyle uğraşan araştırmacılar tek uçtan [20] veya çift uçtan [11,12] çubuğa kuvvet uygulayarak, ya da levha uçlarından düzgün dağılı gerilme uygulayarak [15] yapı üzerindeki yüklemeyi verirken; film bağlı *destek* problemini inceleyenler ise genelde filmde [17] ya da *destekte* düzgün dağılı [19] bir ön gerilme/gerinim kabul etmektedirler. Film uçlarındaki herhangi bir yükleme durumunun simetrik (iki uçtan eşit büyüklükte zıt yönlere) ve antisimetrik (iki uçtan eşit ve aynı yönde) yük bileşenlerine ayrılabilceğini belirten Benscoter (1949) her iki durumu da ayrı ayrı incelemiştir. Çubuk takviyeli levha geometrisini inceleyenler arasında en sistematik çalışmayı Bufler (1961) yapmıştır. Bufler [16], takviye çubuğunun tek uçtan, iki uçtan (simetrik ve antisimetrik) *mümkün* yükleme durumlarını ayrı ayrı incelemiştir. Takviye bağlı yarım düzlem geometrisini inceleyenler arasında Erdogan ve Gupta (1971) hem düzlemden yükleme durumunu hem de takviye uçlarından simetrik veya antisimetrik yükleme durumlarını içeren bir yük fonksiyonu tanımlayarak problemin tümlev denklemini ortak bir biçimde gösterebilmiştir [10]. Biz bu çalışmada (tezde), problemi bütün mekanik yükleme durumları için formüle etmiş olup; problemin fiziğinin ve simetrik ve antisimetrik yükleme durumlarının farkının daha iyi anlaşılabilmesi açısından öncelikle film-*destek* yapısının tek uçlu filmde yüklenmesi durumunu inceledik ve sonuçların üst üste eklenmesiyle filmde iki uçlu yükleme durumları için sonuçlar elde ettik.

Takviye çubuk bağlı plaka geometrisini inceleyenler çeşitli varsayımlar yapmışlardır. Çubuğun eğilme katılığı ihmal edilmiş olup; ya tek boyutlu doğrusal elastisite teorisi kullanılarak [11-16,20,21] ya da membran benzeşimi [10] kabul edilerek çubuk modellenmiştir. Film bağlı *destek* problemini çözenlerinse çoğunda [8,18,22] *ince filmin* eğilme katılığı ihmal edilerek film için membran benzeşiminin kabul edildiğini görmekteyiz. Levha ya da *destek* ise 2-boyutlu incelenmiştir. Filmin eğilme katılığını varsayarak (kiriş teorisini uygulayarak) film-*destek* yapısındaki gerilme dağılımını

inceleyen Shield ve Kim (1992) ayrıca film uçlarındaki akmayı modelleyebilmek için normal açılmasız sadece teğet kaymaların müsaade edildiği yapışkan bölge (“cohesive zone”) modeli de uygulamış olup, yapışkan bölge modelinde arayüzeyde yer değiştirmelerin eşitliği şartı yerine kaymanın akma kaymasına eşitliği şartını koyarak sınır şartı serbestleştirmişlerdir [19].

Sistemdeki birbirine bağlı yapılar ve arayüzey çeşitli şekillerde modellenebilir. Arayüzey kalınlığı sıfır kabul edilirse bu durumda malzemeler arasında ilerlerken mekanik özelliklerde ani değişimlere (süreksizliğe) müsaade edilmiş olur. Bu süreksizliği sürekli hâle getirmenin yollarından birisi bağlanan malzemelerin mekanik özellikleri arasında derece derece geçiş oluşturacak şekilde bağlama işlemini gerçekleştirmektir. Normalde de, iki farklı mekanik özelliğe sahip malzeme çeşitli mekanik, ısıl veya kimyasal yöntemlerle birbirine bağlanmışsa arayüzeyde homojen olmayan bir durumla karşılaşırız. Arayüzeylerin kırılma mekaniği ile ilgili bildirisinde Erdogan [29] yaptığı sınıflandırmada arayüzey modellerini beşe ayırmıştır: (a) ideal, (b) kayma yayı, (c) kayma/çekme yayı, (d) homojen *sürekli ortam*, (e) homojen olmayan *sürekli ortam*. İdeal arayüzey dışındakilerin hepsi belli bir arayüzey kalınlığı gerektirmektedir. Aynı çalışmada [29] bağlananlar ise üçe ayrılmıştır: (i) membran, (ii) plaka veya kabuk, (iii) homojen veya homojen olmayan *sürekli ortam*. Erdogan [29] genelde analizi yapılacak bağlı yapının bazı geometrik değiştirgenleri ve problem çözümünde gerekecek analitik araçların yeterliliğinin bu modellerden hangisinin seçileceği konusunda belirleyici olduğunu vurgulamıştır. Biz, bu çalışmada ideal arayüzey kabul edip filmi membran, kaplama ve desteği ise *sürekli ortam* olarak kabul ettik.

Literatürdeki hızlı gelişmeler, bazı basit hatâları da beraberinde getirmiştir. Özellikle hesaplamalı yöntemlerin yeterince gelişmediği veya deneysel doğrulamanın zor olduğu dönemlerde yapılan analiz sonuçlarının doğrulaması yapılamadığından dolayı bazı araştırmacıların yaptığı hatâları sonradan gelenlerin düzelttiği görülmüştür. Arutiunian’ın [20] 1968’de integro-diferansiyel denklemin formülasyonunda yaptığı

işaret hatâsını 1971’de Erdogan ve Gupta [10] fark etmiş ve düzeltmiştir. Bu çalışmada ise Erdogan ve Gupta [10] tarafından antisimetrik yükleme durumu için verilen nümerik sonuçların (formülasyonun doğru olmasına rağmen) bir işaret hatâsından dolayı yanlış verildiği tespit edilmiş ve sonuçlar 38 sene aradan sonra düzeltilmiştir. Bu tez çalışması esnasında, kendi yaptığımız diğer bilimsel çalışmalardaki hatâları da fark edip düzeltme imkânı bulduk (bkz. EK 10). Kuramsal gelişim sırasında rastlanan bu tip hatâlara düşülmemesinin yolu analitik sonuçların doğrulamasının yapılmasından geçmektedir. Günümüzde, problemin içerdiği mekanik ve geometrik değiştirgenlerin (parametrelerin) çokluğu ve deney düzeneklerinin yüksek maliyeti nedeniyle deneyle doğrulama yerine genelde araştırmacılar yüksek hesaplama hızına sahip bilgisayarlar vasıtasıyla Sonlu Elemanlar Analizi yaparak sanal deney düzenekleri vasıtasıyla doğrulama yolunu tercih etmektedirler. Bu çalışmadaki homojen *destekli* durum için verilen sonuçlar Sonlu Elemanlar Yöntemiyle doğrulanmıştır.

Literatürde yarı-sonsuz desteğe bağlı film yapısı yerine birbirine bağlı sonlu boyutlardaki yapıları inceleyenler de vardır. Doğrusal elastisite teorisinin temel denklemlerinin iyi biliniyor olmasına rağmen çok katmanlı yapıların gerilme ve yer değiştirme durumunun analitik açıdan tam çözümünün zorluğunu vurgulayan Bufler (1971), temel doğrusal elastisite denklemleri kullanarak tümlev dönüşümleri ve matris analizine dayalı yaptığı çalışma sonucunda dönüşüm/eğilebilirlik matrisleri yoluyla düzlem elastik ve *yön bağımsız* katmanlı ortamlarda bulunan gerilme ve yer değiştirme durumunu incelemiştir [30]. Düzgün ısıtma veya soğutmaya maruz kalmış her ikisi de sonlu büyüklükte iki mükemmel bağlı metal şeritten oluşan bir termostatı inceleyen Sühr (1986), arayüzey kayma gerilmesi, ayrılma gerilmesi, termostat boyunca oluşan normal gerilme dağılımını arayüzeyin kendi eksenine düşey yönde yer değiştirmesinin olmadığı varsayımı altında incelemiş ve ayrılma ve arayüzey kayma gerilmelerinin uçlarda en büyük; aksenal normal gerilmenin ise ortada en büyük olduğunu göstermiştir [31]. Jain ve arkadaşları (1995) Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanarak film-*destek* yapısını tamamen iki boyutlu olarak incelemiş ve film ucuna yakın yerlerde film kalınlığı ince bile olsa enine gerilme dağılımındaki

değişimin ihmal edilemeyeceğini belirtmiştir. Benzer şekilde *destek* sonsuz büyüklükte de olsa şekil değişikliği ihmal edilemez diyen Jain ve arkadaşları [32] bunları ihmal eden analitik ya da Sonlu Elemanlar Analizi sonuçlarının doğru sonuç vermeyeceğini belirtmiştir. Başlangıçta yön-bağımlı ve yön-bağımsız modelleri karşılaştıran Jain ve arkadaşları [32] yön-bağımsız modellemenin %14'lük bir hatâ içerdiğini ve bu hatânın da farklı yazarlar tarafından verilen elastik modüllerin ve Poisson oranlarının dağılımından kaynaklı hatâ oranıyla aynı mertebede olduğunu görerek yön-bağımsız varsayımını kullanmışlardır. Desteğe bağlı *ince film* şeritli yapıların mikroelektronik aygıtlarda kullanılması, analitik sonuçların sonlu elemanlar analizi ve deney sonuçlarıyla kıyaslandığında yeterli olmaması ve bazı analitik modellerdeki karmaşık denklemlerin çözümü için hesaplamalı(nümerik) yöntemlerin gerekmesi gibi güdüleyicilerle hareket eden Hsueh (2000), uyumsuzluk gerinimi ile zorlanmış sonlu boyda film şeriti, sonlu kalınlıkta bir desteğe bağlı (derinlemesine sonsuz boyutlar) sistemdeki film ucu etkilerinin *destek* üzerindeki film şeritindeki kalıntı gerilme dağılımına etkisini araştırmış ve kapalı biçimde analitik çözüm elde etmiştir [33]. Silikon teknolojisindeki mikron ve mikron-altı özelliklere sahip homojen olmayan yapılardaki gerilme ve gerinim teorisi ve ölçümündeki gelişmelerden bahseden tarama makalelerinde Jain ve arkadaşları (1996) incelenen yapıları geometrik açıdan *destek* ve ona bağlı filmin aynı boyutlarda olduğu α (alfa), ve filmin kısmen desteğin çok küçük bir parçasını kapladığı ancak derinlemesine aynı boyutlarda oldukları β (beta) olarak ikiye ayırmışlardır. GeSi, β -yapılı şerit-*destek* yapılarında yapılan deneylerde şeritin tam ortasında enlemesine yöndeki normal gerilmelerin, yani ayrılma gerilmelerinin, pratik olarak sıfır olduğu aktarılmıştır [34]. Çalışmalarında Jain ve arkadaşları[34] şerit ucu kaynaklı gerinim rahatlaması/boşalması mekanizmalarını – bası yüklemesine maruz bırakılmış şerit desteğe bağlandıktan sonraki durum için – üçe ayırarak vermiştir: (i) şerit uçlarının *destek* “latis” düzlemini beraberinde sürükleyerek yanlara doğru genişlemesi durumu, (ii) arayüzeyin rijit, desteğin bozulmadan kaldığı, şerit üst kısmının alt kısmından yanlara doğru daha fazla genişlediği durum, (iii) şerit uçlarının aşağı doğru eğilerek hem şerit hem de *destek* “latis” düzleminde bir tümsek oluşturması durumu. Analitik modellerin bütün gerinim rahatlama mekanizmalarını dikkate almadığı ve kabul ettiği diğer bazı varsayımlardan dolayı yapılan deney sonuçları ya

da daha az sayıda varsayım kullanan SEA sonuçlarının örtüşmediği vurgulanmış; örnek olarak da: Jain ve arkadaşları [32] tarafından mikro-Raman ölçümleri sonucunda fark edilen ve Sonlu Eleman Analizi yöntemiyle de doğrulanan şeritin narinlik oranı (boy/en) azaldıkça *destekte* oluşan normal gerilme dağılımı eğrisinin ani bir şekilde çukur (konkav) yapıdan tümsek (konveks) yapıya geçtiğinin rapor edilmiş olması verilmiştir [34]. Jain ve arkadaşları tarafından yapılan bu çalışmanın [34] dışında gerilmeyle ilgili kavramsal bilgilerin de verildiği ve silikon teknolojisinde yaşanan birçok problemin sınıflandırılarak modellenmesi konusunda kapsamlı bir literatür taraması da Hu (1991) tarafından yapılmıştır [35].

Doğadaki yapılarda var olan ancak mühendislik tarihinde 1980'lerin ortalarından itibaren bilinçli olarak – Japonların uzay-havacılık sanayii araştırmalarına girmeleriyle birlikte – finans *destekleri* ve eş-güdümlü çalışmalarla birlikte Japonya'da başlatılan *işlevsel derecelendirilmiş malzemelerle* ilgili araştırmalar, temas mekaniğinin yüz yılı aşkın süredir uğraştığı birbirine bağlı yapılardaki gerilme problemlerinin çaresi olarak araştırmacılara yeni bir yol açmıştır. Bu sayede birbirine bağlı yapılardaki mekanik süreksizlik giderilebilecek ve derece derece istenilen yönde beklenen işlevi yerine getirecek şekilde oluşturulmuş sofistike yapılar doğadaki mükemmel yapılara bir derece daha yaklaşmamızı sağlayacaktır. 1995 ve 1997'de yazdıkları tarama makalelerini güncelleyerek geliştiren ve yazdıklarını “İşlevsel Derecelendirilmiş Malzemelerin Temelleri” adlı kitapta toplayan Suresh ve Mortensen (1998), Hein ve Erdogan [36] tarafından yapılan çalışmada çatlaksız ve pürüzsüz farklı malzemelerden yapılmış bağlı iki plakanın uçlardan uzak bölgelerde sadece düzlem doğrultusunda eşit iki eksenli normal gerilme durumunun (yani kayma ve düzlem dışı ayrılma gerilmeleri sıfır), uçlardaysa çok eksenli bir gerilme durumunun olduğunun (kayma ve ayrılma gerilmeleri mevcut) tespit edildiğini aktarmış, bağlı yapıların arasındaki bölgenin derecelendirilmesi durumunda film ucundaki gerilmelerin – mekanik özelliklerin süreklileştirilmesi sayesinde – sonlu büyüklüklere çekilebildiğini Hein ve Erdogan [36] ve Erdogan (1995, Comp. Eng. 5,pp.753-770) çalışmalarına atfen söylemiştir [37]. Schwarzer (2000) sert film malzemesi ve *destek* arasında elastik modülün işlevsel derecelendirilmiş olarak

değişmesinin oluşan birleşik yapının plastik deformasyona karşı korunmasını sağladığını ve çekme gerilmesi altındaki film çatlaklarına karşı da filmin üstünü daha esnek başka bir tabaka ile kaplamak gerektiğini vurgulamıştır [25]. Önceden incelenmiş homojen *destek* yerine 2008’de Güler [9], *destek* mekanik özelliklerini üstel bir şekilde değiştirdiğini kabul ederek işlevsel derecelendirdiği *destek*-film yapısında arayüzeyde oluşan kayma gerilmesi, filmde oluşan aksel gerilme ve film uçlarında oluşan gerilme şiddet çarpanı açısından film geometrisi, film ve *destek* üst yüzey elastik sabitlerini içeren bir mekanik değiştirgen ve derecelendirme sabiti değiştirgenlerine bağlı olarak değişimini inceleyerek derecelendirmenin bilinçli yapıldığında gerilmeler üzerindeki düşürücü etkisini göstermiştir [8,9]. İşlevsel derecelendirilmiş kaplamalara ait birçok çalışma yapılmış olup, analitik çalışmalara yeni en az iki değiştirgen (kaplama veya arayüzey kalınlığı ve derecelendirmeyi temsil eden sabit veya özellik) daha katılmıştır. *Destek* yapı üzerine bağlı kaplama üzerinde sonlu boyda film problemi ilk kez Güler ve arkadaşları (2008) tarafından ele alınmıştır [38,39]. Biz bu çalışmada 2008’de ele alınan geometriyi [38,39], farklı mekanik yüklemeler altında daha geniş kapsamlı inceleyip, homojen *destek* durumuna indirgendiği hâl için literatürde verilmiş sonuçlarla kıyaslayıp bu sonuçları Sonlu Elemanlar Analizi ile doğrulamaya çalışacağız.

2. FORMÜLASYON

Bu bölümde tanımı (kısım 1.2) ve varsayımları (kısım 1.3) verilmiş olan karışık sınır değer probleminin formülasyonu yapılacaktır. Problemin çözümüne düzlem elastisite denklemlerinin yer değiştirmeler cinsinden yazılmasıyla başlanılır. Bu denklemlere literatürde (mesela bkz. s.500, [40]) Navier denklemleri denmektedir. Daha sonra Navier denklemlerine (kısmi diferansiyel denklemler) Fourier dönüşümleri yapılarak bir değişken cinsinden homojen doğrusal adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Kısım 2.1.1’de elde edilen bu denklem sistemine sınır şartları uygulanarak; çözüm fonksiyonunun bilinmeyen katsayıları kaplama yüzeyindeki yüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edilir. Kısım 2.1.2’de kaplama üst yüzeyi, film-kaplama arayüzeyi boyunca, yer değiştirme gradyanları yüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edildikten sonra, kısım 2.1.3’te problemin fiziksel uyarlılık şartı olan film ve kaplama arayüzey yer değiştirme gradyanlarının eşitlenmesiyle probleme hâkim tümlev denklemi bulunur. Ardından kısım 2.1.4’te bu denklem Çebişef polinomları ve özellikleri kullanılarak doğrusal cebirsel bir denklem sistemine indirgenerek farklı yükleme durumları için çözülür.

Formülasyonun genelliği açısından başlangıçta film-kaplama arayüzeyinde normal gerilmeler var kabul edilmiş olup sonradan membran benzetimi uygulanarak sıfıra götürülmüştür. Benzer sebepten, kaplamanın *destekle* birleştiği yerde her iki malzemenin kayma modülleri farklı alınarak daha genel bir formülasyon yapılmış olup, çözüm safhasında kayma-*destek* arayüzeyinde kayma modülleri birbirine eşitlenmiştir.

Homojen *destek* malzeme üzerindeki İDM kaplamaların Green fonksiyonlarının elde edilmesi temelde Güler (2001) tarafından yapılan “İDM Kaplamaların Temas Mekaniği” adlı doktora tezinden yararlanılarak yazılmış olup; formüller genelde matris biçiminde veya indis gösterimiyle verilmiş ve analitik çıkarım esnasında mümkün olduğunca açıklama verilmeye çalışılmıştır. Güler’in doktora tezinde [23] farklı eğrilik çaplarıyla Coulomb sürtünmesi varsayımı altında temas eden iki

kaplamalı yüzey temas mekaniği açısından etraflıca incelenmiştir. Bu tezde, incelenen geometri kaplama ve *destek* açısından bahsedilen doktora tezindekiyle aynı olmasına rağmen [23], kaplamanın üzerine *ince film* bağlı olmasından dolayı farklıdır. Farklılık sadece geometriler arasında değil, aynı zamanda da sistemdeki yüklemeler arasındadır.

Bu bölümde kullanılan genel sembollerin açıklamaları “Sembol Listesi” kısmında verilmiş olup, kullanılan genel gösterim şekli için EK 1’e bakınız.

2.1 Düzlem Elastisite Probleminin Formülasyonu

Şekil 1.1’deki düzlem elastisite probleminde; en alttaki *destek*, homojen ve yarı uzanımlı sonsuz *sürekli ortam* olarak, onun üzerindeki kaplama h_c kalınlığında *işlevsel derecelendirilmiş malzeme* ve en üstteki malzeme $h_f(x)$ değişken kalınlıklı *ince film* olarak modellenmiştir (bkz. Şekil 1.1). İnce film ve kaplamanın kayma modülü sırasıyla μ_f ve $\mu_c(y)$ ’dir. μ_f sabit ve $\mu_c(y)$ şöyle kabul edilmiştir:

$$\mu_c(y) = \mu_0 e^{\gamma y}, \quad y < 0, \quad (2.1)$$

Burada γ malzeme heterojenliğini gösteren değiştirgen, μ_0 , $\mu_c(y)$ ’nin kaplama yüzeyindeki ($y=0$) değeridir.

Derecelendirilmiş ortamda $-\infty < y < 0$, Poisson oranı değerinin konumsal değişimi ihmal edildiği için $\nu_f = \nu_c(y) = \nu = \text{sabit}$ kabul edilmiştir.

3-boyutlu genel hâl için 1.3'te belirtilen varsayımlar çerçevesinde, sistemin yapısal ilişkisine yön-bağımsız Hooke yasası (2.2) hâkimdir ve sistem elastostatik denge denklemlerini (2.3) sağlamalıdır [40]. Bu denklemler indis gösterimiyle yazılırsa:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0; \quad (2.3)$$

buradaki i ve j indisleri 1, 2 ve 3 numaralı koordinat eksenlerini temsil etmekte olup Kartezyen koordinat sistemindeki x, y ve z eksenlerine karşılık gelmektedir. λ Lamé sabiti olup kayma modülü ve Poisson sabiti cinsinden şöyle yazılır [40]:

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}. \quad (2.4)$$

Kısım 1.3'te bahsedilen mükemmel arayüzey bağı varsayımı, katmanlar arası (film-kaplama ve kaplama-destek) ara yüzeylerinde yer değiştirmelerin aynı olması sınır şartını gerektirmektedir. Bu sınır şartını uygulayabilmek için denklem (2.2 ve 2.3)'ü yer değiştirmeler cinsinden ifade etmeye gerek vardır. Gerinimlerin yer değiştirmeler cinsinden tanımı indis gösterimiyle şöyledir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

İncelenen düzlem temas problemi için denklem (2.2-5) kullanılarak kaplama için Hooke Yasası yazılabilir:

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \frac{\mu_c(y)}{\kappa_c - 1} \left[(\kappa_c + 1) \frac{\partial u_c}{\partial x} + (3 - \kappa_c) \frac{\partial v_c}{\partial y} \right], \quad (2.6a)$$

$$\sigma_{yy}^c(x, y) = \frac{\mu_c(y)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) \frac{\partial u_c}{\partial x} + (\kappa_c + 1) \frac{\partial v_c}{\partial y} \right], \quad (2.6b)$$

$$\tau_{xy}^c(x, y) = \mu_c(y) \left[\frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right]; \quad (2.6c)$$

burada $-h_c < y < 0$ ve κ_c kaplama için Kolasaf sabiti¹⁰ olup; düzlem gerilme ve gerinim durumlarının aynı biçimde gösterilmesini sağlamaktadır. Düzlem gerinim durumunda $\kappa_c = 3 - 4\nu$, genelleştirilmiş düzlem gerilme durumundaysa $\kappa_c = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ alınır. Denklem (2.6), gövde kuvvetleri, F_i , sıfır kabul edilerek elastostatik denge denkleminde (2.3) yerine konursa Navier denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} (\kappa_c + 1) \frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} + (\kappa_c - 1) \frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x \partial y} + \gamma(3 - \kappa_c) \frac{\partial u_c}{\partial x} + \gamma(\kappa_c + 1) \frac{\partial v_c}{\partial y} = \\ = 0, \quad -h_c < y < 0, \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} (\kappa_c + 1) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + (\kappa_c - 1) \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_c}{\partial x \partial y} + \gamma(\kappa_c - 1) \frac{\partial u_c}{\partial y} + \gamma(\kappa_c - 1) \frac{\partial v_c}{\partial x} = \\ = 0, \quad -h_c < y < 0. \end{aligned} \quad (2.7b)$$

Denklem (2.7a,b)'deki heterojenlik sabitini (γ) sıfır alıp mekân koordinatı olan y 'nin tanım aralığını değiştirirsek, homojen *destek* malzemesi için kısmi diferansiyel denklemler elde edilmiş olur:

$$(\kappa_s + 1) \frac{\partial^2 v_s}{\partial y^2} + (\kappa_s - 1) \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial y} = 0, \quad -\infty < y \leq -h_c, \quad (2.7c)$$

$$(\kappa_s + 1) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + (\kappa_s - 1) \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial x \partial y} = 0, \quad -\infty < y \leq -h_c. \quad (2.7d)$$

¹⁰ İsmi Rusça orijinal yazılışı: Колосов Гурий Васильевич (bkz. <http://www.ras.ru/>). İngilizcede Kolosov olarak yazılmaktadır. Literatürde Muskhelishvili (İng.) sabiti olarak da geçmektedir [41]. EK 4'te düzlem elastisite denklemlerini ortak biçimde çok daha basit bir şekilde gösteren başka bir sabit de verilmiştir.

2.1.1 Sınır Şartların Uygulanması

Sistemdeki ortamların maruz kaldığı sınır şartları şöyledir:

Kaplama-*destek* arasındaki mükemmel arayüzey bağından dolayı yer değiştirme ve arayüzey gerilme vektörü bileşenleri sürekliliği vardır:

$$\begin{aligned} u_c(x, -h_c) &= u_s(x, -h_c), \\ v_c(x, -h_c) &= v_s(x, -h_c), \end{aligned} \quad (2.8a,b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^c(x, -h_c) &= \sigma_{yy}^s(x, -h_c), \\ \tau_{xy}^c(x, -h_c) &= \tau_{xy}^s(x, -h_c). \end{aligned} \quad (2.8c,d)$$

Film-kaplama arasındaki mükemmel arayüzey bağından dolayı uyarlılık denklemleri ve gerilme sürekliliği vardır:

$$\begin{aligned} u_c(x, 0) = u_f(x, 0) &\Rightarrow \varepsilon_{xx}^f(x, 0) = \varepsilon_{xx}^c(x, 0), \\ v_c(x, 0) = v_f(x, 0) &\Rightarrow \frac{\partial v_f(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial v_c(x, 0)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.8e,f)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^f(x, 0) = \sigma_{yy}^c(x, 0) &= 0, \\ \tau_{xy}^f(x, 0) = \tau_{xy}^c(x, 0). \end{aligned} \quad (2.8g,h)$$

Denklem (2.8f)'deki şart temas mekaniği problemlerinde batıcı uç profili eksenel yönde değişim gösterdiği zaman kullanılmaktadır (mesela bkz. [23]). Burada kaplamaya bağlı filmin profili ve kaplama üst yüzeyi yatayda düz kabul edildiğinden dolayı “düşey yer değiştirmenin film eksenine yönündeki gradyanı” sıfırdır ve denklem (2.8f)'deki şart kendiliğinden sağlanmaktadır. Dolayısıyla uyarlılık şartı

sadece film-kaplama arayüzeyinde film eksenini boyunca normal gerinimlerin eşitliği açısından sağlanmalıdır.

Kayma gerinimleri gerilme süreklilik şartından dolayı (2.8h), malzemelerin kayma modüllerine bağlı olduğundan sadece kaplama üst yüzeyinin kayma modülünün filmin modülüne eşit olduğu durumda birbirine eşittir, yani sembolik dille ifade

edersek $\varepsilon_{xy}^f = \varepsilon_{xy}^c \Rightarrow \frac{\tau_{xy}^f}{2\mu_f} = \frac{\tau_{xy}^c}{2\mu_c} \leftrightarrow \mu_f = \mu_c$. Benzer şekilde, düşey yöndeki normal

gerinim de film ile kaplama üst yüzeyinin mekanik özellikleri aynı olduğu ve gerilme süreklilik şartı (2.8g) sağlandığı sürece birbirine eşittir. Bizim ele aldığımız

problemdede film ve kaplama kayma modülleri birbirinden farklı olabildiğinden

($\mu_f \neq \mu_c$) dolayı, sadece film-kaplama arayüzeyinde film eksenini boyunca normal

gerinimlerin eşitliği ($\varepsilon_{xx}^f = \varepsilon_{xx}^c$) söz konusudur. Film eksenini boyunca normal

gerinimlerin eşit olması ve aynı zamanda birbirine bağlı film ve kaplama üst

yüzeyinin mekanik özelliklerinin farklı olması, film kaplama arayüzeyi boyunca

$x -$ yönündeki normal gerilme bileşeni süreksizliğine yol açmaktadır (yani

$\sigma_{xx}^f(x, 0) \neq \sigma_{xx}^c(x, 0)$). Dolayısıyla gerilme süreklilik şartı σ_{xx} için geçerli değildir.

Bu durum Newton'un etki-tepki prensibi açısından ters değildir; çünkü bu gerilme

bileşeni (σ_{xx}) film kaplama arayüzeyinde oluşmamaktadır ve film kaplama

arayüzeyinde oluşan gerilme bileşenleri de zaten süreklilik şartını sağlamaktadır

(2.8g,h). Özetlersek, Hooke yasası gereği, kaplama üst yüzeyinin mekanik

özelliklerinin filminkinden farklı olabilmesinden dolayı gerilmelerde süreklilik varsa ilgili gerinimlerde süreksizlik veya tam tersine gerinimlerde süreklilik olduğunda ilgili gerilmelerde süreksizlik olmaktadır.

Dikkat edilmesi gereken bir diğer husus da — kaynak [20]'de de bahsedildiği gibi —

yer değiştirme gradyanlarının eşitliği şartı ile yer değiştirmelerin eşitliği şartı

arasındaki farkın sadece tümlev sabiti olduğu ve bunun da kaplamanın rijit gövde

hareketine tekabül ettiği ve gerilme durumunu etkilemediğidir.

Destekte y -ekseninde eksi sonsuzda kaplama üst yüzeyine sınırlı boydaki filmde aktarılan kuvvetlerin (arayüzey gerilme vektörlerinin) zorlayıcı etkisinin filmde uzaklaştıkça sönümlenmesi beklendiğinden¹¹ gerilmelerin sifira gittiği kabul edilmiştir (benzer şekilde düşünülürse film kaynaklı zorlayıcı etkilerin yaratacağı yer değiştirmelerin de sonsuz uzakta sifira gideceği görülebilir). Fizik açısından *Serbest yayılan etkinin sonsuzda sönümlenmesi* olarak, matematik açısından çözümün sürekliliğini sağladığı için “düzenlilik şartı (regularity condition)” olarak adlandırabileceğimiz bu şarta göre:

$$y \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{yy}^s \rightarrow 0, \\ \tau_{xy}^s \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.8i,j)$$

(2.7)’de verilen homojen kısmi diferansiyel denklem sistemini çözmek için kullanılan yöntem: sistemin Fourier dönüşümlerini yaparak doğrusal adi diferansiyel denklem sistemi hâline getirmek ve ardından da bu denklem sistemi üzerinde (2.8)’de verilen sınır şartlarını uygulayarak gerekli asimptotik analizleri yapıp, yer değiştirmelerin gradyanlarını bulmaktır.

Yer değiştirmelerin Fourier dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) = F(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\alpha x} dx, \\ \mathcal{F}(v) = G(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{-i\alpha x} dx, \end{aligned} \quad (2.9a,b)$$

ters Fourier dönüşümleri şöyle olur:

¹¹Boussinesq’in yarım düzlem/plaka üzerine etkiyen açılı bir kuvvet için 1892’de verdiği gerilme dağılımına bakılırsa gerilme değerlerinin ilgili noktanın kuvvetin uygulama noktasına uzaklığıyla ters orantılı olduğu ve uygulama noktasından sonsuz uzaklıkta değerlerin sifira gittiği görülür [26].

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha, \\
v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha.
\end{aligned}
\tag{2.10a,b}$$

(2.9) ve (2.10)'da verilen tanımlar çerçevesinde yer değiştirmelerin kısmi turevleri yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= i\alpha \mathcal{F}(u) = i\alpha F(\alpha, y), \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{d}{dy} \mathcal{F}(u) = \frac{dF(\alpha, y)}{dy}, \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= -\alpha^2 \mathcal{F}(u) = -\alpha^2 F(\alpha, y), \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) &= i\alpha \frac{d}{dy} \mathcal{F}(u) = i\alpha \frac{dF(\alpha, y)}{dy}, \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \frac{d^2}{dy^2} \mathcal{F}(u) = \frac{d^2 F(\alpha, y)}{dy^2}.
\end{aligned}
\tag{2.11a-e}$$

Benzer şekilde y – eksenini yonundeki yer değiştirmelerin kısmi turevleri de şu hali alır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= i\alpha \mathcal{F}(v) = i\alpha G(\alpha, y), \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{d}{dy} \mathcal{F}(v) = \frac{dG(\alpha, y)}{dy}, \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) &= -\alpha^2 \mathcal{F}(v) = -\alpha^2 G(\alpha, y), \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) &= i\alpha \frac{d}{dy} \mathcal{F}(v) = i\alpha \frac{dG(\alpha, y)}{dy}, \\
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= \frac{d^2}{dy^2} \mathcal{F}(v) = \frac{d^2 G(\alpha, y)}{dy^2}.
\end{aligned}
\tag{2.12a-e}$$

Dikkat edilirse kısmi türevler adi türeve dönüşmüştür (dönüşüm parametresi olan α sabit gibi düşünülmektedir). Yukarıdaki Fourier dönüşümleri x – ekseninde sonsuzda yer değiştirme ve x' e göre yer değiştirme gradyanlarının (türevlerinin) sifıra gittiği (*düzenlilik şartı*) kabul edilerek yazılmıştır, yani $|x| \rightarrow \infty$ iken $u, v \rightarrow 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow 0$ (dönüşümlerle ilgili detaylı bilgi için mesela bkz. [42,43]). (2.7a,b)'deki kısmi diferansiyel denklemler, (2.11) ve (2.12)'deki eşitlikler yardımıyla yeniden yazılıp matris biçiminde düzenlenirse:

$$[\mathbf{L}_c(\mathbf{D})] \begin{Bmatrix} F_c(\alpha, y) \\ G_c(\alpha, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.13)$$

burada, köşeli parantez matrisi, kıvrık parantez ise vektörü temsil etmektedir. $[\mathbf{L}_c(\mathbf{D})]$ doğrusal diferansiyel işleç matrisi olup aşağıda içeriği verilmiştir:

$$[\mathbf{L}_c(\mathbf{D})] = (\kappa_c + 1) \begin{pmatrix} \frac{2i\alpha\mathbf{D} + \gamma(3 - \kappa_c)i\alpha}{(\kappa_c + 1)} & \mathbf{D}^2 + \gamma\mathbf{D} - \omega\alpha^2 \\ \omega\mathbf{D}^2 + \gamma\omega\mathbf{D} - \alpha^2 & 2i\alpha\mathbf{D} + \gamma\omega i\alpha \end{pmatrix}; \quad (2.14)$$

burada,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{d}{dy}, \\ \mathbf{D}^2 &= \frac{d^2}{dy^2}, \\ \omega &= \frac{\kappa_c - 1}{\kappa_c + 1}, \\ \kappa_c &\neq -1. \end{aligned} \quad (2.15a,d)$$

Böylece denklem (2.7a,b)'de verilen kısmi diferansiyel denklem, denklem (2.13)'de verilen doğrusal adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiştir. Bu denklem sistemi için uygun çözüm birinci ve ikinci dereceden türevi de sadece katsayı

farkıyla kendisine eşit olan üstel fonksiyonlardır. Bu sayede denklem (2.13)'deki türevlenen terimler ve türevi alınan çözüm fonksiyonunun ilgili katsayılarla çarpılıp toplanmasının sonucu sıfır çıkabilmektedir. Bu nedenle denklem (2.13) için aşağıdaki gibi üstel bir çözüm varsayılır:

$$\begin{Bmatrix} F_c(\alpha, y) \\ G_c(\alpha, y) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \begin{Bmatrix} A_{1j}^c(\alpha) \\ A_{2j}^c(\alpha) \end{Bmatrix} e^{n_j y}; \quad (2.16)$$

burada, n_j (2.13)'de verilen doğrusal diferansiyel denklem sisteminin karakteristik köklerdir. (2.13)'de verilen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için denklem (2.14)'deki diferansiyel işleç \mathbf{D} yerine n değişkeni konulduktan sonra diferansiyel işleç matrisi $[\mathbf{L}_c(n)]$ 'nin determinantının sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir [44]. Bu sayede, doğrusal diferansiyel denklem sisteminin karakteristik kökleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$n^4 + 2\gamma n^3 + (\gamma^2 - 2\alpha^2)n^2 - 2\alpha^2\gamma n + \alpha^4 + \delta^2\alpha^2\gamma^2 = 0; \quad (2.17)$$

burada,

$$\delta^2 = \frac{3 - \kappa_c}{\kappa_c + 1}. \quad (2.18)$$

Denklem (2.17)'deki dördüncü derece polinom (karakteristik denklemi) yeniden düzenlenirse:

$$(n^2 - \alpha^2 + \gamma n)^2 + \delta^2\alpha^2\gamma^2 = 0, \quad (2.19)$$

$$n^2 + \gamma n = \alpha^2 \pm i|\delta\alpha\gamma|, \quad (2.20)$$

denklem (2.20)'deki n cinsinden ikinci dereceden denklemin sol tarafını tam kareye dönüştürmek için her iki tarafa da $\frac{\gamma^2}{4}$ eklenip:

$$n^2 + \gamma n + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 \pm i|\delta\alpha\gamma|, \quad (2.21)$$

denklem (2.21)'in sol tarafı kare biçiminde yazılarak kökler bulunur:

$$\left(n + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 \pm i|\delta\alpha\gamma|, \quad (2.22)$$

$$n = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 \pm i|\delta\alpha\gamma|}. \quad (2.23)$$

Denklem (2.23)'de verilen karakteristik kökler, şöyle sıralanabilir:

$$n_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 + i|\delta\alpha\gamma|}, \quad (2.24)$$

$$n_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 + i|\delta\alpha\gamma|}, \quad (2.25)$$

$$n_3 = \bar{n}_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 - i|\delta\alpha\gamma|}, \quad (2.26)$$

$$n_4 = \bar{n}_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \alpha^2 - i|\delta\alpha\gamma|}. \quad (2.27)$$

Görüldüğü gibi karakteristik kökler karmaşık olup n_3 ve n_4 sırasıyla n_1 ve n_2 'nin eşleniği olarak yazılmıştır (bkz. denklem (2.26,27)).

Dört tane karakteristik kökü olan homojen doğrusal adi diferansiyel denklem sistemi (2.13) için denklem (2.16)'da varsayılan çözüm fonksiyonlarının türevleri alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_c(\alpha, y)}{dy} \\ \frac{dG_c(\alpha, y)}{dy} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^4 \left\{ \begin{array}{l} A_{1j}^c(\alpha) \\ A_{2j}^c(\alpha) \end{array} \right\} n_j e^{n_j y}, \quad (2.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_c(\alpha, y)}{dy^2} \\ \frac{d^2 G_c(\alpha, y)}{dy^2} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^4 \left\{ \begin{array}{l} A_{1j}^c(\alpha) \\ A_{2j}^c(\alpha) \end{array} \right\} n_j^2 e^{n_j y}. \quad (2.29)$$

Denklem (2.16)'da verilen çözüm ve (2.28)'de ve (2.29)'da verilen türevler denklem sistemi (2.13)'te yerine konulup üstel fonksiyonlar cinsinden ortak paranteze alınıp yeniden düzenlenirse denklem (2.13) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^4 e^{n_j y} \left(\begin{array}{l} n_j^2 \left\{ \begin{array}{l} (\kappa_c + 1)A_{2j}^c \\ (\kappa_c - 1)A_{1j}^c \end{array} \right\} + n_j \left\{ \begin{array}{l} 2i\alpha A_{1j}^c + \gamma(\kappa_c + 1)A_{2j}^c \\ \gamma(\kappa_c - 1)A_{1j}^c + 2i\alpha A_{2j}^c \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \gamma i \alpha (3 - \kappa_c) A_{1j}^c - (\kappa_c - 1) \alpha^2 A_{2j}^c \\ -(\kappa_c + 1) \alpha^2 A_{1j}^c + \gamma i \alpha (\kappa_c - 1) A_{2j}^c \end{array} \right\} \end{array} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Denklem (2.30)'daki üstel terim $e^{n_j y}$ 'in yanındaki vektörel terimin her bir satırı ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse; birinci ve ikinci satırdan sırasıyla (dikkat edilirse denklem (2.30)'da A_{1j}^c ve A_{2j}^c katsayıları α 'nın fonksiyonudur ancak yer tasarrufu için denklem (2.28-29)'daki gibi açıkça yanlarına yazılmamıştır):

$$A_{1j}^c = -\frac{(\kappa_c + 1)(n_j^2 + \gamma n_j) - (\kappa_c - 1)\alpha^2}{i\alpha(2n_j + \gamma(3 - \kappa_c))} A_{2j}^c, \quad (2.31a,b)$$

$$A_{1j}^c = -\frac{i\alpha(2n_j + \gamma(\kappa_c - 1))}{(\kappa_c - 1)(n_j^2 + \gamma n_j) - (\kappa_c + 1)\alpha^2} A_{2j}^c, \quad j = 1..4.$$

Burada birinci satırdan elde edilen denklem (2.31a) ile ikinci satırdan elde edilen denklem (2.31b) birbirine eşitlenip aralarında içler dışlar çarpımı yapıp karakteristik köklerle ilgili verilen denklem (2.20) ve tanım (2.18)'den yararlanılırsa her iki denklemin de (2.31a,b) aynı ilişkiyi ifade ettiği görülebilir.

Denklem (2.31a) daha sade biçimde yazılırsa:

$$A_{1j}^c = a_{cj}(\alpha) A_{2j}^c, \quad (2.32a,b)$$

$$a_{cj}(\alpha) = -\frac{(\kappa_c + 1)(n_j^2 + \gamma n_j) - (\kappa_c - 1)\alpha^2}{i\alpha(2n_j + \gamma(3 - \kappa_c))}, \quad j = 1..4,$$

olup karakteristik kökler arasında denklem (2.26)'da ve (2.27)'de verilen birbirlerinin eşleniği olma özellikleri hesaba katılırsa

$$a_{c3}(\alpha) = -\overline{a_{c1}(\alpha)}, \quad (2.33a,b)$$

$$a_{c4}(\alpha) = -\overline{a_{c2}(\alpha)}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde diferansiyel denklem sistemi (2.7c,d)'de verilen homojen *destek* malzemesi için denklem (2.23)'te heterojenlik sabitini (γ) sıfır alınırsa, homojen *destek* malzemesi için karakteristik kökler bulunur:

$$n_s = \pm|\alpha|, \quad (2.34)$$

her iki kök de sıralanarak yazılırsa:

$$\begin{aligned} n_{s1} &= |\alpha|, \\ n_{s2} &= -|\alpha|. \end{aligned} \quad (2.35a,b)$$

Homojen *destek* için şöyle bir çözüm varsayılırsa:

$$\begin{Bmatrix} F_s(\alpha, y) \\ G_s(\alpha, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}^s + A_{12}^s y \\ A_{21}^s + A_{22}^s y \end{Bmatrix} e^{|\alpha|y} + \begin{Bmatrix} A_{13}^s + A_{14}^s y \\ A_{23}^s + A_{24}^s y \end{Bmatrix} e^{-|\alpha|y} \quad (2.36)$$

$y \rightarrow -\infty$ iken *destekte* sınır şart olarak (2.8i,j) gerilmelerin ve yer değiştirmelerin sönümlendiği kabul edildiğinden dolayı denklem (2.36)'daki $e^{-|\alpha|y}$ teriminin önündeki katsayıların hepsi sıfır olmalıdır:

$$A_{13}^s = A_{14}^s = A_{23}^s = A_{24}^s = 0. \quad (2.37)$$

Denklem (2.37), (2.36)'da yerine konup denklem (2.36) yeniden yazılırsa:

$$\begin{Bmatrix} F_s(\alpha, y) \\ G_s(\alpha, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}^s + A_{12}^s y \\ A_{21}^s + A_{22}^s y \end{Bmatrix} e^{|\alpha|y}. \quad (2.38)$$

Denklem (2.38)'deki homojen *destek* için verilmiş olan çözümün türevleri alınırsa:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dF_s(\alpha, y)}{dy} \\ \frac{dG_s(\alpha, y)}{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}^s |\alpha| + A_{12}^s (|\alpha|y + 1) \\ A_{21}^s |\alpha| + A_{22}^s (|\alpha|y + 1) \end{Bmatrix} e^{|\alpha|y}, \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_s(\alpha, y)}{dy^2} \\ \frac{d^2 G_s(\alpha, y)}{dy^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A_{11}^s \alpha^2 + A_{12}^s (\alpha^2 y + 2|\alpha|) \\ A_{21}^s \alpha^2 + A_{22}^s (\alpha^2 y + 2|\alpha|) \end{array} \right\} e^{|\alpha|y}. \quad (2.40)$$

Kaplama için yazdığımız denklem sistemlerinden (2.13,14) yararlanarak homojen *destek* malzemesi için Fourier bölgesindeki doğrusal adi diferansiyel denklem sistemi yazılırsa:

$$[\mathbf{L}_s(\mathbf{D})] \begin{Bmatrix} F_s(\alpha, y) \\ G_s(\alpha, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.41)$$

burada, $[\mathbf{L}_s(\mathbf{D})]$ *destek* için doğrusal diferansiyel işleç matrisi olup aşağıda içeriği verilmiştir:

$$[\mathbf{L}_s(\mathbf{D})] = \begin{bmatrix} 2i\alpha D & (\kappa_s + 1)D^2 - (\kappa_s - 1)\alpha^2 \\ (\kappa_s - 1)D^2 - (\kappa_s + 1)\alpha^2 & 2i\alpha D \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Denklem (2.38)'deki çözümü ve (2.39,40)'da verilen türevlerini denklem (2.41)'de yerine koyup yeniden düzenlersek, homojen *destek* için diferansiyel denklem sistemi şu hâli alır:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2i\alpha A_{12}^s |\alpha| + 2A_{22}^s \alpha^2) y + 2i\alpha (A_{11}^s |\alpha| + A_{12}^s) + \\ (-2A_{12}^s \alpha^2 + 2i\alpha |\alpha| A_{22}^s) y + (\kappa_s - 1)A_{12}^s 2|\alpha| + \\ + (\kappa_s + 1)A_{22}^s 2|\alpha| + 2\alpha^2 A_{21}^s \\ - 2\alpha^2 A_{11}^s + 2i\alpha (A_{21}^s |\alpha| + A_{22}^s) \end{array} \right\} e^{|\alpha|y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

$y \rightarrow -\infty$ iken *destekte* sınır şart olarak denklem (2.8i,j)'de verilen gerilmelerin ve yer değiştirmelerin sönümlendiği kabul edildiğinden dolayı denklem (2.43)'de y 'nin yanındaki terim sıfıra götürülmelidir¹² (her iki satırdan da aynı sonuç elde edilir¹³):

$$A_{12}^s = i \frac{\alpha}{|\alpha|} A_{22}^s. \quad (2.44)$$

Denklem (2.44)'deki sonuç (2.43)'de yerine konup denklem (2.43) yeniden düzenlenerek yazılırsa:

$$\begin{cases} 2i\alpha|\alpha|A_{11}^s + 2|\alpha|\kappa_s A_{22}^s + 2\alpha^2 A_{21}^s \\ 2i\alpha\kappa_s A_{22}^s - 2\alpha^2 A_{11}^s + 2i\alpha A_{21}^s |\alpha| \end{cases} e^{|\alpha|y} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}. \quad (2.45)$$

Denklem (2.45)'deki eşitliğin sol tarafındaki ifadenin sıfıra eşit olabilmesi için üstel terimin önündeki katsayının sıfıra eşit olması gerekir. Denklem (2.45)'deki birinci ya da ikinci satır sıfıra eşitlenirse homojen *destek* için (2.38)'de yazılan çözümdeki katsayılar arasındaki bir ilişki daha bulunmuş olur (diğer ilişkiler de sınır şartların uygulanmasıyla bulunacaktır):

$$A_{11}^s = \frac{i}{\alpha} (|\alpha| A_{21}^s + \kappa_s A_{22}^s). \quad (2.46)$$

Hem denklem (2.16)'da kaplama, hem de denklem (2.36)'da *destek* için yazılan diferansiyel denklem sistemi çözüm fonksiyonlarında 8'er tane olmak üzere, toplamda 16 tane α 'ya bağlı bilinmeyen katsayı olup, şimdiye kadar bunlar arasında

¹² Üstel terimin yanındaki katsayının sıfır olabilmesi için de bu gereklidir.

¹³ Denklem (2.44), denklem (2.43)'teki ikinci satırın y 'nin yanındaki terimi sıfıra götürecekle şekilde yazılıysaydı, "mutlak değer alfa" payda olcaktı, alfa reel olduğundan dolayı, mutlak değer alfanın payda ya da paydada olması sonucu değiştirmez, çünkü alfa reel ise $\frac{|\alpha|}{\alpha} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$.

çeşitli bağıntılar bulunmuştur. Bu bağıntılar bulunurken (2.13)'teki kaplama denklem sistemi ve (2.41)'deki *destek* denklem sistemine, çözüm yerleştirildikten sonra (2.30,2.43) denklemin sol tarafının y ve α 'ya bağlı üstel bir fonksiyonla yanında çarpım hâlinde α 'ya bağlı katsayılardan oluşmuş birleşik bir terimin olduğu bir biçime indirgenmiştir. Denklem sistemlerinin türev aldığımız bağımsız değişkeni y olup, bütün y 'ler için denklemlerin sol tarafının da sağ tarafları gibi sıfır olabilmesi için ya üstel terimin ya da yanındaki birleşik katsayı teriminin sıfır olması gerekmektedir. Üstel terim y ve α 'ya bağlı olarak keyfi değerler alabildiği için denklem sistemleri çözülürken üstel terim yanındaki birleşik katsayı terimi sıfıra eşitlenmiş ve katsayılar arasında kaplama için (2.32)'de ve *destek* için de (2.44,46)'da verilen toplamda 6 tane bağıntı bulunmuştur. *Destek* için başlangıçta kabul edilen çözümdeki (2.36) ikinci üstel terim olan $e^{-|\alpha|y}$, $y \rightarrow -\infty$ iken sonsuza gittiğinden dolayı ilgili diferansiyel denklem sistemine (2.41) yerleştirilmeden önce *düzenlilik şartının* sağlanması için yanında çarpan olarak yer alan ifadedeki 4 tane katsayı denklem (2.37)'de sıfıra eşitlenmiştir. Böylece toplam 16 bilinmeyen katsayıdan 4'ü sıfır olarak bulunmuş olup, kalan 12'siyle ilgili de denklem (2.32)'de 4 kaplama katsayıları için, denklem (2.44,46)'da da iki tane *destek* katsayıları için olmak üzere toplam 6 tane bağıntı bulunmuştur. Buraya kadar diferansiyel denklemlerin homojenlik ve denklem (2.8i,j)'de verilen filmde aktarılan *serbest yayılan etkinin sonsuzda sönümlenmesi şartını* kullandık. Katsayıları tamamen bulmak için gereken diğer 6 bağıntı, her biri ikişer tane olan mükemmel bağ varsayımından kaynaklı kaplama *destek* arayüzeyindeki yer değiştirme (2.8a,b) ve gerilme süreklilik (2.8c,d) ve kaplama üst yüzeyindeki sınır (yüzey gerilme vektörü) şartlarının uygulanmasıyla bulunacaktır.

Yatay (2.8a) ve düşey (2.8b) yöndeki kaplama ve *destek* malzemesi arasındaki yer değiştirme süreklilik şartından sırasıyla:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\alpha, -h_c) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(\alpha, -h_c) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (2.47a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\alpha, -h_c) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_c(\alpha, -h_c) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (2.47b)$$

bulunur. Denklem (2.47)'nin sağlanabilmesi için tümlevlerdeki *çekirdekler* birbirine eşitlenirse:

$$\begin{aligned} F_s(\alpha, -h_c) &= F_c(\alpha, -h_c), \\ G_s(\alpha, -h_c) &= G_c(\alpha, -h_c), \end{aligned} \quad (2.48a,b)$$

olur; ardından (2.16)'da kaplama ve (2.38)'de *destek* için yazılan çözüm fonksiyonlarından yararlanarak (2.48) yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} (A_{11}^s - h_c A_{12}^s) e^{-|\alpha|h_c} &= \sum_{j=1}^4 A_{1j}^c(\alpha) e^{-n_j h_c}, \\ (A_{21}^s - h_c A_{22}^s) e^{-|\alpha|h_c} &= \sum_{j=1}^4 A_{2j}^c(\alpha) e^{-n_j h_c}. \end{aligned} \quad (2.49a,b)$$

Katsayılar arasında (2.32,33)'de kaplama için ve (2.44,46)'da *destek* için önceden bulunan bağıntılar da kullanarak, (2.49) matris biçiminde yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i \frac{\alpha}{|\alpha|} & \frac{i}{\alpha} (\kappa_s - |\alpha|h_c) \\ 1 & -h_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^{s*} \\ A_{22}^{s*} \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} a_{c1}(\alpha) & a_{c2}(\alpha) & \overline{-a_{c1}(\alpha)} & \overline{-a_{c2}(\alpha)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{22}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

burada,

$$\begin{aligned}
A_{21}^{s*} &= A_{21}^s e^{-|\alpha|h_c}, \\
A_{22}^{s*} &= A_{22}^s e^{-|\alpha|h_c}, \\
A_{2j}^{c*} &= A_{2j}^c e^{-n_j h_c}, \\
j &= 1..4.
\end{aligned} \tag{2.51a,d}$$

Denklem (2.50)'yi çözebilmek için denklemin sol ve sağ tarafındaki bilinen katsayı matrisleri sembolik olarak aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i \frac{\alpha}{|\alpha|} & \frac{i}{\alpha} (\kappa_s - |\alpha|h_c) \\ 1 & -h_c \end{bmatrix} &= [\mathbf{D}], \\
\begin{bmatrix} a_{c1}(\alpha) & a_{c2}(\alpha) & -\overline{a_{c1}(\alpha)} & -\overline{a_{c2}(\alpha)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= [\mathbf{K}],
\end{aligned} \tag{2.52a,b}$$

bu tanımlamalar altında soldaki bilinmeyen *destek* fonksiyonu katsayı vektörü için, denklem (2.50) çözülmüşse:

$$\begin{Bmatrix} A_{21}^{s*} \\ A_{22}^{s*} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{22}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix}; \tag{2.53}$$

burada,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}]^{-1} &= \frac{\text{Eklenik}[\mathbf{D}]}{\det[\mathbf{D}]}, \\
\text{Eklenik}[\mathbf{D}] &= (\text{Kofaktör}[\mathbf{D}])^T = \begin{pmatrix} -h_c & \frac{i}{\alpha} (|\alpha|h_c - \kappa_s) \\ -1 & i \frac{\alpha}{|\alpha|} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.54a,c}$$

$$\det[\mathbf{D}] = -i \frac{\kappa_s}{\alpha}.$$

Denklem (2.54a,c) ve (2.52b)'dekiler denklem (2.53)'te yerine konulup çarpma işlemi yapılırsa denklem (2.53) şu hâli alır:

$$\begin{Bmatrix} A_{21}^{s*} \\ A_{22}^{s*} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h_c b_1(\alpha) & 1+h_c b_2(\alpha) & 1+h_c \overline{b_1(\alpha)} & 1+h_c \overline{b_2(\alpha)} \\ b_1(\alpha) & b_2(\alpha) & \overline{b_1(\alpha)} & \overline{b_2(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{22}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix}; \quad (2.55)$$

burada,

$$\begin{aligned} b_1(\alpha) &= -\frac{|\alpha|}{\kappa_s} - i \frac{\alpha}{\kappa_s} a_{c1}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\kappa_s} \left(\frac{|\alpha|}{\alpha} + i a_{c1}(\alpha) \right), \\ b_2(\alpha) &= -\frac{|\alpha|}{\kappa_s} - i \frac{\alpha}{\kappa_s} a_{c2}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\kappa_s} \left(\frac{|\alpha|}{\alpha} + i a_{c2}(\alpha) \right), \end{aligned} \quad (2.56a,c)$$

$\kappa_s \neq 0$.

Denklem (2.55)'te matris gösterimiyle verilen ilişki indis gösterimiyle yeniden yazılırsa:

$$\begin{Bmatrix} A_{21}^{s*} \\ A_{22}^{s*} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \begin{Bmatrix} (1+h_c b_j(\alpha)) A_{2j}^{c*} \\ b_j(\alpha) A_{2j}^{c*} \end{Bmatrix}; \quad (2.57)$$

burada,

$$\begin{aligned} b_3(\alpha) &= \overline{b_1(\alpha)}, \\ b_4(\alpha) &= \overline{b_2(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$A_{2j}^{c*}, A_{2m}^{s*}, j=1..4, m=1,2$: bkz. denklem (2.51) .

Denklem (2.51) ve (2.57)'de verilen ilişkilerle birlikte *destek* fonksiyonu katsayıları kaplama fonksiyonu katsayıları cinsinden ifade edilmiş oldu. Böylece bilinmeyen katsayıların sayısı 4'e düşmüş oldu. Dördü de kaplama fonksiyonu katsayıları olup, bunlar da kaplama-*destek* arayüzeyindeki gerilme süreklilik (2 tane) ve kaplama üst yüzeyindeki yüzey gerilme vektörü sınır şartları (2 tane) yardımıyla bulunacaktır. Önce (2.8c)'deki düşey yöndeki gerilme sınır şartı denklem (2.6b)'de kaplama için

verilen Hooke yasası bağıntısı kullanılarak yazılırsa (aynı denklem kayma modülü sabit alınıp ve ortam adını belirten indisler değiştirilerek *destek* için de yazılmıştır):

$$\begin{aligned} \frac{\mu_c(-h_c)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) \frac{\partial u_c}{\partial x} + (\kappa_c + 1) \frac{\partial v_c}{\partial y} \right]_{y=-h_c} &= \\ &= \frac{\mu_s}{\kappa_s - 1} \left[(3 - \kappa_s) \frac{\partial u_s}{\partial x} + (\kappa_s + 1) \frac{\partial v_s}{\partial y} \right]_{y=-h_c} . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Denklem (2.59) denklem (2.11) ve (2.12) yardımıyla dönüşüm fonksiyonları cinsinden Fourier bölgesinde yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_c(-h_c)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) i \alpha F_c(\alpha, y) + (\kappa_c + 1) \frac{dG_c(\alpha, y)}{dy} \right]_{y=-h_c} &= \\ &= \frac{\mu_s}{\kappa_s - 1} \left[(3 - \kappa_s) i \alpha F_s(\alpha, y) + (\kappa_s + 1) \frac{dG_s(\alpha, y)}{dy} \right]_{y=-h_c} . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Denklem (2.16)'da kaplama ve denklem (2.38)'de *destek* fonksiyonları için verilen tanımlardan ve bu fonksiyonların türevlerinden (2.28,2.39) hareketle denklem (2.60) yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_c(-h_c)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) i \alpha \sum_{j=1}^4 A_{1j}^{c*} + (\kappa_c + 1) \sum_{j=1}^4 n_j A_{2j}^{c*} \right] &= \\ &= \frac{\mu_s}{\kappa_s - 1} \left[(3 - \kappa_s) i \alpha (A_{11}^{s*} - h_c A_{12}^{s*}) + (\kappa_s + 1) (|\alpha| A_{21}^{s*} + A_{22}^{s*} (1 - h_c |\alpha|)) \right]; \end{aligned} \quad (2.61)$$

burada,

$$\begin{aligned} A_{mn}^{s*} &= A_{mn}^s e^{-|\alpha| h_c} , \\ A_{mj}^{c*} &= A_{mj}^c e^{-n_j h_c} , \\ j &= 1..4 , \\ m, n &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2.62a,d)$$

Katsayılar arasında daha önceden bulduğumuz ilişkiler (2.32, 2.44, 2.46, 2.57) ve denklem (2.56) kullanılarak denklem (2.61) aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$s_2 A_{22}^{c*} + \bar{s}_2 A_{24}^{c*} = -s_1 A_{21}^{c*} - \bar{s}_1 A_{23}^{c*}; \quad (2.63)$$

burada,

$$\begin{aligned} s_j &= i\Lambda \alpha a_{cj}(\alpha) + Z(\kappa_c + 1)n_j \kappa_s - |\alpha|(\kappa_s + 1), \\ j &= 1, 2, \\ \Lambda &= (\kappa_s - 1) + \kappa_s Z(3 - \kappa_c), \\ Z &= \frac{X_{cs}}{(\kappa_c - 1)}, \\ X_{cs} &= \frac{\mu_c(-h_c)}{\mu_s}, \\ \mu_s &\neq 0, \\ \kappa_s &\neq 0, \\ \kappa_c &\neq 1. \end{aligned} \quad (2.64a,h)$$

Şimdi de (2.8d)'deki kaplama-*destek* arayüzündeki kayma gerilmelerinin eşitliği şartı denklem (2.6c)'de kaplama için verilen Hooke yasası bağıntısı kullanılarak yazılırsa (aynı denklem kayma modülü sabit alınıp ve ortam adını belirten indisler değiştirilerek *destek* için de yazılmıştır):

$$\mu_c(-h_c) \left[\frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right]_{y=-h_c} = \mu_s \left[\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right]_{y=-h_c}. \quad (2.65)$$

Denklem (2.65), denklem (2.11) ve (2.12) yardımıyla dönüşüm fonksiyonları cinsinden Fourier bölgesinde yeniden yazılırsa:

$$\mu_c(-h_c) \left[\frac{dF_c(\alpha, y)}{dy} + i\alpha G_c(\alpha, y) \right]_{y=-h_c} = \mu_s \left[\frac{dF_s(\alpha, y)}{dy} + i\alpha G_s(\alpha, y) \right]_{y=-h_c}. \quad (2.66)$$

Yukarıda verilen denklem (2.63)'ün çıkarımında olduğu gibi (2.16)'da kaplama ve (2.38)'de *destek* fonksiyonları için verilen tanımlar ve bu fonksiyonların (2.28,2.39)'da verilen türevleri denklem (2.66)'da yerine konulduktan sonra katsayılar arasında daha önceden (2.32, 2.44, 2.46, 2.57)'de bulunan ilişkiler ve denklem (2.56) kullanılarak, denklem (2.66) aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$t_2 A_{22}^{c*} - \bar{t}_2 A_{24}^{c*} = -t_1 A_{21}^{c*} + \bar{t}_1 A_{23}^{c*}; \quad (2.67)$$

burada,

$$\begin{aligned} t_j &= a_{cj}(\alpha) \left(X_{cs} \kappa_s n_j - |\alpha| (\kappa_s + 1) \right) + i\alpha \left(\kappa_s (X_{cs} - 1) + 1 \right), \\ j &= 1, 2, \\ X_{cs} &= \frac{\mu_c (-h_c)}{\mu_s}, \\ \mu_s &\neq 0, \\ \kappa_s &\neq 0, \\ \kappa_c &\neq 1. \end{aligned} \quad (2.68a,f)$$

Denklem (2.63) ve (2.67)'de verilen kaplama fonksiyonları arasındaki bağıntılar bir arada matris biçiminde yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} s_2 & \bar{s}_2 \\ t_2 & -\bar{t}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{22}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & -\bar{s}_1 \\ -t_1 & \bar{t}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

(2.69)'da verilen doğrusal denklem sistemindeki sol taraftaki katsayı vektörünü sağ taraftakiler cinsinden ifade edecek şekilde çözebilmek için denklemin sol ve sağ tarafındaki bilinen katsayı matrisleri sembolik olarak aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_2 & \bar{s}_2 \\ t_2 & -\bar{t}_2 \end{bmatrix} &= [\mathbf{S}_{T2}], \\ \begin{bmatrix} -s_1 & -\bar{s}_1 \\ -t_1 & \bar{t}_1 \end{bmatrix} &= [\mathbf{S}_{T1}]. \end{aligned} \quad (2.70a,b)$$

Bu tanımlamalar altında soldaki bilinmeyen kaplama fonksiyonu katsayı vektörü için denklem (2.69) çözülürse:

$$\begin{Bmatrix} A_{22}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}_{T2}]^{-1} [\mathbf{S}_{T1}] \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \end{Bmatrix}; \quad (2.71)$$

burada,

$$[\mathbf{S}_{T2}]^{-1} = \frac{\text{Eklenik}[\mathbf{S}_{T2}]}{\det[\mathbf{S}_{T2}]},$$

$$\text{Eklenik}[\mathbf{S}_{T2}] = (\text{Kofaktör}[\mathbf{S}_{T2}])^T = \begin{pmatrix} -\bar{t}_2 & -s_2 \\ -t_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad (2.72a,c)$$

$$\det[\mathbf{S}_{T2}] = \Delta_{st} = -(s_2 \bar{t}_2 + \bar{s}_2 t_2).$$

Denklem (2.72a,c) ve (2.70b)'dekileri denklem (2.71)'de yerine koyup çarpma işlemini yaparsak denklem (2.71) şu hâli alır:

$$\begin{Bmatrix} A_{22}^{c*} \\ A_{24}^{c*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{t1} & \bar{s}_{t2} \\ s_{t2} & \bar{s}_{t1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^{c*} \\ A_{23}^{c*} \end{Bmatrix}; \quad (2.73)^{14}$$

burada,

$$s_{t1} = \frac{1}{\Delta_{st}} (s_1 \bar{t}_2 + \bar{s}_2 t_1),$$

$$s_{t2} = \frac{1}{\Delta_{st}} (s_1 t_2 - s_2 \bar{t}_1), \quad (2.74a,c)$$

$$\Delta_{st} = -(s_2 \bar{t}_2 + \bar{s}_2 t_2),$$

$$A_{2j}^{c*}, j = 1..4: \text{ bkz. denklem (2.51c) .}$$

Denklem (2.73) ile birlikte denklem (2.16)'da kaplama ve (2.36)'da *destek* fonksiyonu için aranan bütün katsayılar sadece 2 katsayıya bağlı olarak bulunabilir

¹⁴ Bu denklemde küçük harflerle verilen s_{t1} , s_{t2} 'yi denklem (2.70,71)'de geçen $[\mathbf{S}_{T1}]$, $[\mathbf{S}_{T2}]$ matrisi ile karıştırmayınız.

hâle gelmiştir. Bu iki katsayı da kaplama üst yüzeyindeki bilinmeyen yüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edilerek bulunacaktır (bkz. Şekil 2.1'deki sınır şartlar). Denklem (2.6b,c)'de kaplama için verilen Hooke yasası bağıntılarından normal ve kayma gerilmeleri yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^c(x, y) &= \frac{\mu_c(y)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) \frac{\partial u_c}{\partial x} + (\kappa_c + 1) \frac{\partial v_c}{\partial y} \right], \\ \tau_{xy}^c(x, y) &= \mu_c(y) \left[\frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right].\end{aligned}\tag{2.75a,b}$$

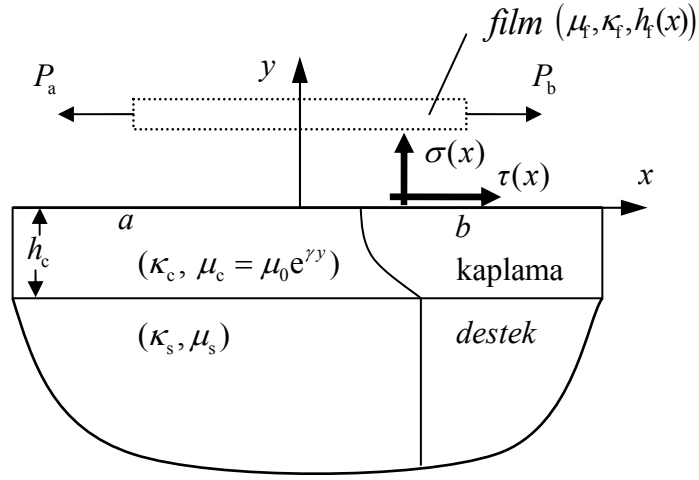
Denklem (2.75a) ve (2.75b) Fourier dönüşümü altında yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}^c(t, y) e^{-i\alpha t} dt &= \frac{\mu_c(y)}{\kappa_c - 1} \left[(3 - \kappa_c) i\alpha F_c(\alpha, y) + (\kappa_c + 1) \frac{dG_c(\alpha, y)}{dy} \right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}^c(t, y) e^{-i\alpha t} dt &= \mu_c(y) \left[\frac{dF_c(\alpha, y)}{dy} + i\alpha G_c(\alpha, y) \right].\end{aligned}\tag{2.76a,b}$$

Yüzeydeki temas gerilmeleri tanımlanırsa:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^c(x, 0) &= \sigma(x), \\ \tau_{xy}^c(x, 0) &= \tau(x).\end{aligned}\tag{2.77a,b}$$

Bu gerilmeler film-kaplama arayüzeyinde (iç ve dış kaynaklı) çeşitli sebeplerden dolayı oluşmuş kaplama ve film arasında aktarılan arayüzey gerilme bileşenleri olarak düşünülmelidir. Filmin bağlı olmadığı kısımlar serbest yüzey olup gerilme bileşenleri değeri buralarda sıfırdır (bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Kaplama yüzeyindeki yüzey gerilme vektörünün temsili gösterimi (sistem sınır şartı).

Denklem (2.77)'deki yüzey gerilme vektörlerinin Fourier dönüşümleri alınırsa:

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-i\alpha t} dt, \quad (2.78a,b)$$

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) e^{-i\alpha t} dt.$$

$y \rightarrow 0$ iken denklem (2.76)'nın limiti alınıp denklem (2.78) ve (2.1)'deki tanımlar kullanılarak son durum yazılırsa:

$$\frac{\kappa_c - 1}{\mu_0} P(\alpha) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(3 - \kappa_c) i \alpha F_c(\alpha, y) + (\kappa_c + 1) \frac{dG_c(\alpha, y)}{dy} \right], \quad (2.79a,b)$$

$$\frac{1}{\mu_0} Q(\alpha) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{dF_c(\alpha, y)}{dy} + i \alpha G_c(\alpha, y) \right].$$

Daha önce yukarıda verilen denklem (2.63)'ün ve (2.67)'nin çıkarımında olduğu gibi; (2.16)'da kaplama fonksiyonları için verilen tanımları ve bu fonksiyonların

(2.28)'de verilen türevlerini denklem (2.79)'da yerine koyduktan sonra denklem (2.32,2.73)'te katsayılar arasında bulduğumuz ilişkileri, karakteristik köklerin (2.26,27)'de ve katsayı çarpanlarının (2.33)'te verilen eşleniklik özellikleri ve (2.51c)'deki tanımlar kullanılarak denklem (2.79) katsayı vektörü solda olacak şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} r_1 & \bar{r}_1 \\ r_3 & -\bar{r}_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_{21}^c \\ A_{23}^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{Bmatrix} (\kappa_c - 1)P(\alpha) \\ Q(\alpha) \end{Bmatrix}, \quad (2.80)^{15}$$

burada,

$$\begin{aligned} r_1 &= z_{11} + z_{12}s_{11}e^{-h_c(n_1-n_2)} + \bar{z}_{12}s_{12}e^{-h_c(n_1-\bar{n}_2)}, \\ r_3 &= z_{21} + z_{22}s_{11}e^{-h_c(n_1-n_2)} + \bar{z}_{22}s_{12}e^{-h_c(n_1-\bar{n}_2)}, \\ z_{11} &= (3 - \kappa_c)i\alpha a_{c1}(\alpha) + (\kappa_c + 1)n_1, \\ z_{12} &= (3 - \kappa_c)i\alpha a_{c2}(\alpha) + (\kappa_c + 1)n_2, \\ z_{21} &= a_{c1}(\alpha)n_1 + i\alpha, \\ z_{22} &= a_{c2}(\alpha)n_2 + i\alpha, \\ n_1, n_2 &: \text{bkz. denklem (2.24, 25)}. \end{aligned} \quad (2.81a,f)$$

(2.80)'de verilen doğrusal denklem sistemindeki sol taraftaki katsayı vektörünü, sağ taraftakiler cinsinden ifade edecek şekilde çözebilmek için, sol taraftaki bilinen katsayı matrisi aşağıdaki gibi adlandırılırsa:

$$\begin{bmatrix} r_1 & \bar{r}_1 \\ r_3 & -\bar{r}_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \quad (2.82)$$

Bu tanım altında soldaki bilinmeyen kaplama fonksiyonu katsayı vektörü için denklem (2.80) çözülmüşse:

¹⁵ Bu denklemde A_{21}^c ve A_{23}^c katsayılarının ikinci indisleri olan 1 ve 3 ile uyumlu olması açısından birinci satırda r_1 , ikinci satırda da r_3 kullanılmıştır. Sıralı artan indis numaraları ya da başka semboller de verilebilirdi.

$$\begin{Bmatrix} A_{21}^c \\ A_{23}^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{R}]^{-1} \begin{Bmatrix} (\kappa_c - 1)P(\alpha) \\ Q(\alpha) \end{Bmatrix}; \quad (2.83)$$

burada,

$$[\mathbf{R}]^{-1} = \frac{\text{Eklenik}[\mathbf{R}]}{\det[\mathbf{R}]},$$

$$\text{Eklenik}[\mathbf{R}] = (\text{Kofaktör}[\mathbf{R}])^T = \begin{bmatrix} -\bar{r}_3 & -\bar{r}_1 \\ -r_3 & r_1 \end{bmatrix}, \quad (2.84a,c)$$

$$\det[\mathbf{R}] = \Delta_R = -(r_1 \bar{r}_3 + \bar{r}_1 r_3).$$

Denklem (2.84)'dekiler denklem (2.83)'te yerine konulup çarpma işlemi yapılırsa denklem (2.83) şu hâli alır:

$$\begin{Bmatrix} A_{21}^c \\ A_{23}^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_0 \Delta_R} \begin{Bmatrix} \bar{r}_3 (\kappa_c - 1)P(\alpha) + \bar{r}_1 Q(\alpha) \\ r_3 (\kappa_c - 1)P(\alpha) - r_1 Q(\alpha) \end{Bmatrix}; \quad (2.85)$$

burada,

$$r_1, r_3 : \text{bkz. denklem (2.81) ,}$$

$$\Delta_R : \text{bkz. denklem (2.84c) ,}$$

$$\mu_0 : \text{bkz. denklem (2.1) .}$$

Böylece denklem (2.85) ile beraber, (2.16)'da kaplama ve (2.36)'da *destek* fonksiyonu için aranan bütün katsayılar sadece kaplama üst yüzeyindeki bilinmeyen yüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edilmiş oldu (bkz. Şekil 2.1'deki sınır şartları; bağıntıları veren ilgili denklemler: (2.85), (2.73), (2.57), (2.46), (2.44), (2.32); tanım denklemleri: (2.51)).

Yüzey gerilme vektörü kaplama yüzeyinde filmle temas edilen bölgede film kaplama arasındaki elastik/termal gerinim uyumsuzluğu veya film veya kaplamadaki/*destekteki* başka dış yüklemeler nedeniyle oluşmaktadır. Bilinen yüklemelerden hareketle, bilinmeyen yüzey gerilme vektörü bulunabilir. Problemin fiziksel şartlarından biri

olan film-kaplama arayüzeyindeki gerinimlerin eşitlenebilmesi için filmdeki ve kaplama üst yüzeyindeki yer değiştirme gradyanlarının bulunması gerekir. Ardından bu yer değiştirme gradyanları kaplama üst yüzeyi gerilme vektörü cinsinden ifade edilebilir. Kaplama üst yüzeyindeki yer değiştirme gradyanları kısım 2.1.2'de bulunacaktır.

2.1.2 Film-Kaplama Arayüzeyi Boyunca Kaplama Yüzey Yer Değiştirme Gradyantlarının (Green Fonksiyonlarının) Bulunması

Kaplama ve film arayüzeyinde yer değiştirmeler, düşey ve yatay, her iki yönde birbirine eşittir. Arayüzey x -ekseni boyunca gittiğinden yer değiştirmelerin x' e göre türevleri de birbirine eşittir (y' ye göre türevleri ise malzeme mekanik özellikleri farklı olduğu ve gerilme süreklilik şartı (2.8g) sağlandığı sürece birbirine eşit değildir). Bu nedenle film ve kaplama arasında uyarlılık şartını yer değiştirmelerin x' e göre türevleri oluşturmaktadır. Bu kısımda, kaplama üst yüzeyindeki x' e göre yer değiştirme gradyanlarının çıkarımı yapılacaktır.

$y=0$ 'daki kaplama üst yüzeyindeki x' e göre yer değiştirme gradyanları verilmiş kabul edilip, kaplama için üst yüzeyde yer değiştirmelerin Fourier bölgesinde kısmi türevleri alınır:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial v_c(x, y)}{\partial x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha G_c(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (2.86a,b)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u_c(x, y)}{\partial x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha F_c(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

(2.16)'da kaplama fonksiyonları için verilen tanımları denklem (2.86)'da yerine koyduktan sonra (2.32, 2.73, 2.85)'de katsayılar arasında bulduğumuz ilişkileri ve (2.51c)'deki tanımları ve (2.78)'deki yüzey gerilme vektörü bileşenlerinin Fourier dönüşümleri kullanılarak denklem (2.86)'dan aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left(2\pi\mu_0 \frac{\partial v_c(x, y)}{\partial x} \right) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(x, y, t) \sigma(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x, y, t) \tau(t) dt \right), \end{aligned} \quad (2.87a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left(2\pi\mu_0 \frac{\partial u_c(x, y)}{\partial x} \right) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(x, y, t) \sigma(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x, y, t) \tau(t) dt \right); \end{aligned} \quad (2.87b)$$

burada,

$$\begin{aligned} K_{ij}(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\alpha, y) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \quad i, j = 1, 2, \\ h_{11}(\alpha, y) &= -\frac{i\alpha(\kappa_c - 1)}{\Delta_R} \left(\overline{r_3 \Omega_1(\alpha, y)} + r_3 \overline{\Omega_1(\alpha, y)} \right), \\ h_{12}(\alpha, y) &= -\frac{i\alpha}{\Delta_R} \left(\overline{r_1 \Omega_1(\alpha, y)} - r_1 \overline{\Omega_1(\alpha, y)} \right), \\ h_{21}(\alpha, y) &= -\frac{i\alpha}{\Delta_R} \left(\overline{r_1 \Omega_2(\alpha, y)} + r_1 \overline{\Omega_2(\alpha, y)} \right), \\ h_{22}(\alpha, y) &= -\frac{i\alpha(\kappa_c - 1)}{\Delta_R} \left(\overline{r_3 \Omega_2(\alpha, y)} - r_3 \overline{\Omega_2(\alpha, y)} \right), \\ \Omega_1(\alpha, y) &= e^{n_1 y} + s_{11} e^{h_c(n_2 - n_1) + n_2 y} + s_{12} e^{h_c(\overline{n_2 - n_1}) + \overline{n_2} y}, \\ \Omega_2(\alpha, y) &= a_{c1}(\alpha) e^{n_1 y} + a_{c2}(\alpha) s_{11} e^{h_c(n_2 - n_1) + n_2 y} - \overline{a_{c2}(\alpha)} s_{12} e^{h_c(\overline{n_2 - n_1}) + \overline{n_2} y}, \\ s_{11}, s_{12} &: \text{bkz. denklem (2.74)}, \\ r_1, r_3 &: \text{bkz. denklem (2.81)}, \\ \Delta_R &: \text{bkz. denklem (2.84c)}, \\ n_1, n_2 &: \text{bkz. denklem (2.24, 25)}, \\ \mu_0 &: \text{bkz. denklem (2.1)}. \end{aligned} \quad (2.88a,g)$$

(2.87)'deki tümlev denkleminin, asimptotik analizi yapılarak, $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken (alfanın mutlak değerinin sonsuza giderkenki) davranışı Taylor açılımları yoluyla incelenirse (bkz. EK 5):

$$\begin{aligned}
h_{11}(\alpha, y) &\rightarrow i \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y} \sum_{n=0}^{13} E_n r^n, \\
h_{12}(\alpha, y) &\rightarrow e^{|\alpha|y} \sum_{n=0}^{13} F_n r^n, \\
h_{21}(\alpha, y) &\rightarrow i \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y} \sum_{n=0}^{13} G_n r^n, \\
h_{22}(\alpha, y) &\rightarrow e^{|\alpha|y} \sum_{n=0}^{13} H_n r^n;
\end{aligned} \tag{2.89a,d)}^{16}$$

burada,

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{(\kappa_c + 1)}{4}, E_1 = \frac{(\kappa_c + 5)}{8} s, \dots, \\
F_0 &= -\frac{(\kappa_c - 1)}{4}, F_1 = -\frac{(\kappa_c + 1)}{8} s, \dots, \\
G_0 &= \frac{(\kappa_c + 1)}{4}, G_1 = \frac{(\kappa_c + 1)}{8} s, \dots, \\
H_0 &= \frac{(\kappa_c - 1)}{4}, H_1 = \frac{(\kappa_c + 1)}{8} s, \dots,
\end{aligned} \tag{2.90a,f}$$

diğerleri için bkz. EK 4

$$\begin{aligned}
r &= \frac{|\gamma|}{|\alpha|}, \\
s &= \frac{|\gamma|}{\gamma}.
\end{aligned}$$

$|\alpha| \rightarrow \infty$ iken denklem (2.89)'da $h_{ij}(\alpha, y)$ fonksiyonları $r = \frac{|\gamma|}{|\alpha|}$ 'nın polinomları şeklinde Taylor açılımları yapılarak verilmiş olup, bu durum, analitik kısımda sadece ilk terim kullanacağından dolayı sonucu değıştirmeyecek olup (diğer terimler $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğinden dolayı) sınır değerlerinden birisi sonsuz olan tümlev

¹⁶Bu 14 terimlik açılımlar sayısal analizde karşılaşılan sıfırdan sonsuza belirli tümlevlerin sıfırdan yeterince büyük bir A değerine, A değerinden de sonsuza parçalanarak hesaplanması esnasında, yani

$$\int_0^\infty = \int_0^A + \int_A^\infty,$$

A değerinden sonsuza uzanan tümlevin hesaplanmasında $h_{ij}(\alpha, y)$ fonksiyonlarının seri açılımları kullanılmış ve gerekli hassasiyet 14 terimle sağlanmıştır [23].

hesaplamalarında ise $h_{ij}(\alpha, y)$ fonksiyonlarının seri açılımlarının ilk 14 terimi – gerekli hassasiyeti sağladığından dolayı – yeterli bulunmuştur [23].

$$\begin{aligned}
h_{11\infty}(\alpha, y) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} h_{11}(\alpha, y) = i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y}, \\
h_{12\infty}(\alpha, y) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} h_{12}(\alpha, y) = -\frac{(\kappa_c - 1)}{4} e^{|\alpha|y}, \\
h_{21\infty}(\alpha, y) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} h_{21}(\alpha, y) = i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y}, \\
h_{22\infty}(\alpha, y) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} h_{22}(\alpha, y) = \frac{(\kappa_c - 1)}{4} e^{|\alpha|y},
\end{aligned} \tag{2.91a,d}$$

denklem (2.91)'deki sonuçlar (2.88a)'da yerine konulursa:

$$\begin{aligned}
K_{11\infty}(x, y, t) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} K_{11}(x, y, t) = \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
K_{12\infty}(x, y, t) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} K_{12}(x, y, t) = -\frac{(\kappa_c - 1)}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
K_{21\infty}(x, y, t) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} K_{21}(x, y, t) = \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
K_{22\infty}(x, y, t) &= \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} K_{22}(x, y, t) = \frac{(\kappa_c - 1)}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha.
\end{aligned} \tag{2.92a,d}$$

Denklem (2.87)'deki tümlev çekirdeklerine (2.92)'de verilen $|\alpha| \rightarrow \infty$ ikenki değerleri çıkarılıp sonra da eklenirse:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} \left(2\pi\mu_0 \frac{\partial v_c(x, y)}{\partial x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (K_{11}(x, y, t) - K_{11\infty}(x, y, t)) \sigma(t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} (K_{12}(x, y, t) - K_{12\infty}(x, y, t)) \tau(t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} K_{11\infty}(x, y, t) \sigma(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12\infty}(x, y, t) \tau(t) dt \right),
\end{aligned} \tag{2.93a}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} \left(2\pi\mu_0 \frac{\partial u_c(x, y)}{\partial x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (K_{21}(x, y, t) - K_{21\infty}(x, y, t))\tau(t)dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} (K_{22}(x, y, t) - K_{22\infty}(x, y, t))\sigma(t)dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} K_{21\infty}(x, y, t)\tau(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22\infty}(x, y, t)\sigma(t)dt \right). \tag{2.93b}
\end{aligned}$$

Denklem (2.93)'teki ilk tümlevler sınırlı olduğundan limit işlemi tümlev işaretinin içine alınabilir. Aşağıdaki tümlev eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} i \frac{|\alpha|}{\alpha} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha &= \frac{2(t-x)}{(t-x)^2 + y^2}, \quad y < 0; \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha &= -\frac{2y}{(t-x)^2 + y^2}, \quad y < 0,
\end{aligned} \tag{2.94a,b}$$

denklem (2.92) yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
K_{11\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c + 1)}{2} \frac{(t-x)}{(t-x)^2 + y^2}, \\
K_{12\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c - 1)}{2} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}, \\
K_{21\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c + 1)}{2} \frac{(t-x)}{(t-x)^2 + y^2}, \\
K_{22\infty}(x, y, t) &= -\frac{(\kappa_c - 1)}{2} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}.
\end{aligned} \tag{2.95a,d}$$

$y \rightarrow 0^-$ durumu için denklem (2.95)'teki ifadelerin limitleri alınır¹⁷:

¹⁷ Bundan önceki limitler de sıfıra soldan yaklaşılırken alınan limitler olarak düşünülmelidir; çünkü kaplama malzemesi y – ekseninin negatif kısmında tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^-} K_{11\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c + 1)}{2} \frac{1}{(t-x)}, \\
\lim_{y \rightarrow 0^-} K_{12\infty}(x, y, t) &= -\frac{(\kappa_c - 1)}{2} \pi \delta(t-x), \\
\lim_{y \rightarrow 0^-} K_{21\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c + 1)}{2} \frac{1}{(t-x)}, \\
\lim_{y \rightarrow 0^-} K_{22\infty}(x, y, t) &= \frac{(\kappa_c - 1)}{2} \pi \delta(t-x).
\end{aligned} \tag{2.96a,d}$$

Denklem (2.95b) ve (2.95d)'deki ifadelerin limiti alınırken sıfıra soldan yaklaştığımız için (2.96b) ve (2.96d)'de işaretleri ters dönmüş ve kesirli ifadeler de Dirac delta fonksiyonuyla gösterilebilir hâle gelmiştir.

Denklem (2.96)'daki ifadeler (2.88a, 2.91)'den de yararlanılarak (2.93)'te yerine konulursa, sınırlı tümlevlerde limit alma işlemiyle tümlev işleminin yer değiştirebilmesi sayesinde:

$$\begin{aligned}
\lambda_c \frac{\partial v_c(x, 0)}{\partial x} &= \frac{2}{\pi(\kappa_c + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) I_{11}(t, x) dt + \\
&+ \frac{2}{\pi(\kappa_c + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) I_{12}(t, x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(t)}{(t-x)} dt - \omega_c \tau(x),
\end{aligned} \tag{2.97a}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_c \frac{\partial u_c(x, 0)}{\partial x} &= \frac{2}{\pi(\kappa_c + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) I_{21}(t, x) dt + \\
&+ \frac{2}{\pi(\kappa_c + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) I_{22}(t, x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)}{(t-x)} dt + \omega_c \sigma(x);
\end{aligned} \tag{2.97b}$$

burada,

$$\begin{aligned}
I_{11}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(h_{11}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
I_{12}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(h_{12}(\alpha, 0) + \frac{(\kappa_c - 1)}{4} \right) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha,
\end{aligned} \tag{2.98a,b}$$

$$\begin{aligned}
I_{21}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(h_{21}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
I_{22}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(h_{22}(\alpha, 0) - \frac{(\kappa_c - 1)}{4} \right) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha, \\
\omega_c &= \frac{(\kappa_c - 1)}{(\kappa_c + 1)}, \\
\lambda_c &= \frac{4\mu_0}{(\kappa_c + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.98c,f}$$

Denklem (2.97)'deki $I_{ij}(t, x)$ çekirdeklerinin ($i, j = 1, 2$) denklem (2.98)'deki tanımlarına bakılarak ve

$$\begin{aligned}
\text{a) Euler açılımı } (e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\
\text{b) } f(-\theta) = f(\theta) &\Rightarrow \int_{-a}^a f(\theta) d\theta = 2 \int_0^a f(\theta) d\theta, \\
\text{c) } g(-\theta) = -g(\theta) &\Rightarrow \int_{-a}^a g(\theta) d\theta = 0, \\
\text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta) d\theta + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\infty} \cos(\theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{2.99a,d}$$

bilgilerini kullanarak, denklem (2.97)'deki $I_{ij}(t, x)$ çekirdeklerindeki ($i, j = 1, 2$) tümlevlerin (bkz. denklem (2.98)) sınırlarını eksi sonsuz yerine sıfırdan başlar hâle getirmek ve tümlevleri daha basit biçimde yazabilmek için $I_{ij}(t, x)$ fonksiyonlarının α dönüşüm değiştirgenine göre teklik çiftlikleri (2.99b,c) incelenebilir. $I_{ij}(t, x)$ fonksiyonları $h_{ij}(\alpha, 0)$ fonksiyonlarından (bkz denklem (2.98)) oluşmakta olduğundan dolayı, (2.88b-e)'deki fonksiyon tanımlarından hareketle önce onların teklik/çiftlikleri incelenirse:

$$\begin{aligned}
h_{11}(\alpha, 0) &\rightarrow \text{tek} , \\
h_{12}(\alpha, 0) &\rightarrow \text{\u00e7ift} , \\
h_{21}(\alpha, 0) &\rightarrow \text{tek} , \\
h_{22}(\alpha, 0) &\rightarrow \text{\u00e7ift fonksiyondur.}
\end{aligned}
\tag{2.100a,d}$$

Ardından denklem (2.100)'deki sonuçlar (2.99)'daki bilgiler ışığında denklem (2.98)'de uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
I_{11}(t, x) &= 2 \int_0^{\infty} (i^2 \Phi_{11}(\alpha)) \Im(e^{-i\alpha(t-x)}) d\alpha = 2 \int_0^{\infty} \Phi_{11}(\alpha) \sin(\alpha(t-x)) d\alpha , \\
I_{12}(t, x) &= 2 \int_0^{\infty} (\Phi_{12}(\alpha)) \Re(e^{-i\alpha(t-x)}) d\alpha = 2 \int_0^{\infty} \Phi_{12}(\alpha) \cos(\alpha(t-x)) d\alpha , \\
I_{21}(t, x) &= 2 \int_0^{\infty} (i^2 \Phi_{21}(\alpha)) \Im(e^{-i\alpha(t-x)}) d\alpha = 2 \int_0^{\infty} \Phi_{21}(\alpha) \sin(\alpha(t-x)) d\alpha , \\
I_{22}(t, x) &= 2 \int_0^{\infty} (\Phi_{22}(\alpha)) \Re(e^{-i\alpha(t-x)}) d\alpha = 2 \int_0^{\infty} \Phi_{22}(\alpha) \cos(\alpha(t-x)) d\alpha ;
\end{aligned}
\tag{2.101a,d}^{18}$$

burada,

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(\alpha) &= h_{11}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} = h_{11}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} , \\
\Phi_{12}(\alpha) &= h_{12}(\alpha, 0) + \frac{(\kappa_c - 1)}{4} , \\
\Phi_{21}(\alpha) &= h_{21}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} \frac{\alpha}{|\alpha|} = h_{21}(\alpha, 0) - i \frac{(\kappa_c + 1)}{4} , \\
\Phi_{22}(\alpha) &= h_{22}(\alpha, 0) - \frac{(\kappa_c - 1)}{4} ,
\end{aligned}
\tag{2.102a,d}$$

\Im : imajiner, \u00f6n\u00fcndeki karma\u00e7ık fonksiyonun imajiner(sanal) bile\u00eenini verir,

\Re : reel, \u00f6n\u00fcndeki karma\u00e7ık fonksiyonun reel bile\u00eenini verir,

$h_{ij}(\alpha, 0)$: bkz. denklem (2.88).

¹⁸ Burada, alfa i\u00e7in verilen t\u00fcmlev sınırları pozitif de\u00e7erlere indirgen-di\u011finden dolayı ileriki denklemlerde (2.102a ve c), $\frac{\alpha}{|\alpha|} = 1$ alınmı\u015ftır.

Kaplama üst yüzey yer değiştirme gradyantlarıyla yüzey gerilme vektörü bileşenleri arasındaki ilişkiyi içeren tümlev denklemi (2.97), (2.101) ve (2.102)'deki sonuçlar dikkate alınarak yeniden düzenlenip yazılırsa:

$$\begin{aligned} \lambda_c \frac{\partial v_c(x, 0)}{\partial x} &= \\ &= -\omega_c \tau(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-x} - k_{11}(t, x) \right) \sigma(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) k_{12}(t, x) dt, \end{aligned} \quad (103a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_c \frac{\partial u_c(x, 0)}{\partial x} &= \\ &= \omega_c \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-x} - k_{21}(t, x) \right) \tau(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) k_{22}(t, x) dt; \end{aligned} \quad (2.103b)$$

burada,

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{4\mu_0}{(\kappa_c + 1)}, \\ k_{ij}(t, x) &= -\frac{2}{(\kappa_c + 1)} I_{ij}(t, x), \\ i, j &= 1, 2, \\ I_{ij}(t, x) &: \text{bkz. denklem (2.101)}. \end{aligned} \quad (2.104a,d)^{19}$$

Denklem (2.103)'le birlikte kaplama üst yüzey gradyantları, yüzey gerilme vektörü bileşenleri cinsinden ifade edilmiş oldu.

2.1.3 Probleme Hâkim Tümlev Denkleminin Çıkarılması

Bu kısımda probleme hâkim tümlev denklemi bulunacaktır. Problemin fiziksel şartı olan filmle kaplama arasındaki uyarlılık şartını (2.8e) yazarak tümlev denklemine ulaşabiliriz.

¹⁹ Denklem (2.104b)'de verilen çekirdekler topluca EK 6'te gösterilmiştir.

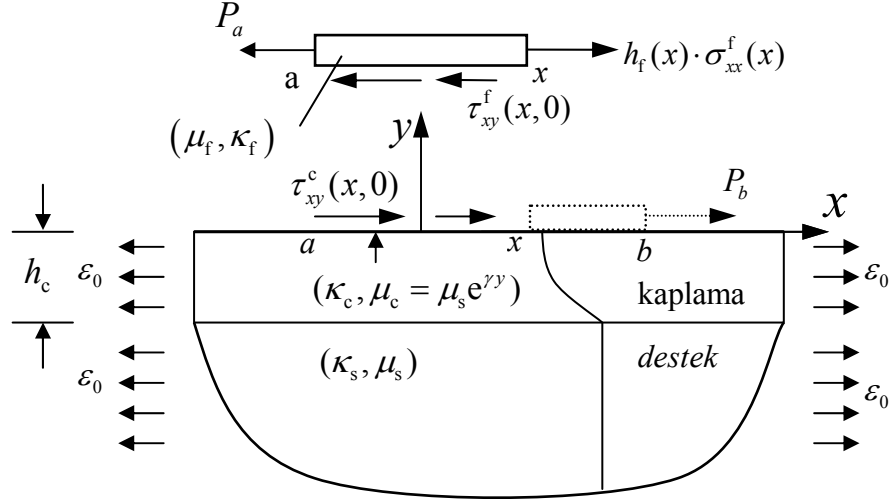
Film ve kaplama arasındaki kayma gerilmesi, $f(x)$ fonksiyonuyla tanımlanıp, normal gerilme sıfır alınırsa,

$$\tau_{xy}^c(x,0) = \tau_{xy}^f(x,0) = \tau_{xy}^f(x) = \begin{cases} 0 & \text{diğer yerlerde,} \\ f(x) & a < x < b, \end{cases} \quad (2.105a,b)$$

$$\sigma_{yy}^c(x,0) = \sigma_{yy}^f(x,0) = 0,$$

ve film için membran benzeşimi varsayımından (bkz. kısım 1.3) ve gerilmelerin sürekliliği şartından (2.8g) hareketle denklem (2.103b)'deki normal gerilmeleri sıfır olarak İDM'li kaplamadaki gerinim yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x} u_c(x,0) = \frac{\kappa_c + 1}{4\mu_0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x} - k_{21}(t,x) \right] \tau_{xy}^c(t,0) dt. \quad (2.106)$$



Şekil 2.2 Herhangi bir 'x' noktasından kesilmiş film için serbest cisim diyagramı.

Herhangi bir 'x' noktasından kesilmiş filmin denge denklemi (bkz. Şekil. 2.2):

$$P_a + \int_a^x \tau_{xy}^f(t,0) dt = P_a + \int_a^x f(t) dt = \sigma_{xx}^f(x) h_f(x), \quad (2.107)$$

burada, P_a kuvveti birim derinlik başına verilmiş olup, yönü “ $-x$ yönü” pozitif kabul edilerek yazılmıştır; geleneksel gerilme bileşenleri gösteriminde olduğu gibi filmin alt yüzeyindeki kayma gerilmesi yüzey vektörü de “ $-x$ yönünde pozitif kabul edilmiştir.

Film-kaplama arayüzeyi için uyarlılık şartı (2.8e) yazılırsa

$$\varepsilon_{xx}^f(x, 0) = \varepsilon_{xx}^c(x, 0). \quad (2.108)$$

Film için membran benzeşimi kabul edildiğinden (bkz. kısım 1.3), (2.6)’da verilen düzlem elastisite denklemlerinde normal gerilme sıfır alınarak filmdeki eksenel normal gerilme bulunur:

$$\sigma_{xx}^f = \frac{8\mu_f}{1 + \kappa_f} \frac{\partial}{\partial x} u_f(x, 0). \quad (2.109)$$

Denklem (2.107) ve (2.109) birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} P_a + \int_a^x f(t) dt &= \frac{8\mu_f}{1 + \kappa_f} \frac{\partial}{\partial x} u_f(x, 0) h_f(x), \\ \int_a^b f(t) dt &= P_b - P_a. \end{aligned} \quad (2.110a,b)$$

Filmdeki gerinim (2.110a)’dan bulunursa,

$$\frac{\partial}{\partial x} u_f(x, 0) = \frac{1 + \kappa_f}{8\mu_f} \frac{1}{h_f(x)} \left[P_a + \int_a^x f(t) dt \right]. \quad (2.111)$$

Denklem (2.106)’ya aradaki kayma gerilmesi, $f(x)$, dışındaki diğer yüklerden kaynaklı ve uzak alan gerinimini (ε_0) de içeren *mümkün* gerinim yüklerini temsilen $g(x)$ eklenirse,

$$\frac{\partial}{\partial x} u_c(x,0) = \frac{\kappa_c + 1}{4\mu_0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x} - k_{21}(t,x) \right] f(t) dt + g(x), \quad (2.112)$$

Denklem (2.111) ve (2.112)'deki sonuçlar, denklem (2.108)'de yerine konup yeniden düzenlenirse probleme hâkim tümlev denklemi bulunmuş olur:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x} - k_{21}(t,x) \right] f(t) dt - \frac{\lambda}{2h_f(x)} \int_a^x f(t) dt = -\frac{4\mu_0}{\kappa_c + 1} g(x) + \frac{\lambda P_a}{2h_f(x)}; \quad (2.113)$$

burada,

$$\lambda = \frac{1 + \kappa_f}{1 + \kappa_c} \frac{\mu_0}{\mu_f}, \quad g(x) = \varepsilon_0 + (\alpha_c - \alpha_f) \Delta T, \quad a < x < b,$$

$$\Delta T : \text{sıcaklık farkı}, \quad (2.114a,e)$$

α_c, α_f : sırasıyla kaplama ve filmin ısıl genleşme katsayıları.

(2.113)'te ulaşılan probleme hâkim tümlev denklemi denklem (2.110b)'de verilen film için genel denge denklemiyle birlikte kullanılmalıdır.

Denklem (2.113)'teki $g(x)$, ε_0 gibi kaplama ve *destekteki* uzak alan gerinim yüklemesi ve ısıl gerinimlerin bileşkesi olarak alınmıştır. Arayüzeyde $f(x)$ dışında başka mekanik yükler varsa onlar da $g(x)$ fonksiyonuna eklenebilir [10]. Hesaplamalı çözümlerde sadeliği açısından $g(x)=\text{sabit}$ alınmaktadır. Sabit gerinim yüklemesi ε_0 yerine düzlem elastisite için Hooke yasası denklemlerinde (2.6a,b) $\sigma_{yy}^c(x,0)=0$ koyarak elde edeceğimiz eş değer gerilme yüklemesi ($\sigma_{xx} = \sigma_0$) de kabul edilebilir (kaplama için $\sigma_0^c(y) = 8\mu_c(y)\varepsilon_0 / (1 + \kappa_c)$; *destek* için $\sigma_0^s = 8\mu_s\varepsilon_0 / (1 + \kappa_s)$). Kaplama ve *destek* uzak alanında sabit gerinim yükü etkisini oluşturabilmek için eşdeğer değişken uzak alan gerilme yüklemesi uygulanmalıdır; çünkü kaplama kayma modülü sabit değildir. Başka bir ifadeyle, kaplama uzak alanda sabit bir gerinim ile yüklendiğinde, kaplama kenarlarında üstel profilli bir gerilme dağılımı; *destekte* ise homojen olduğundan dolayı sabit bir gerilme oluşacaktır.

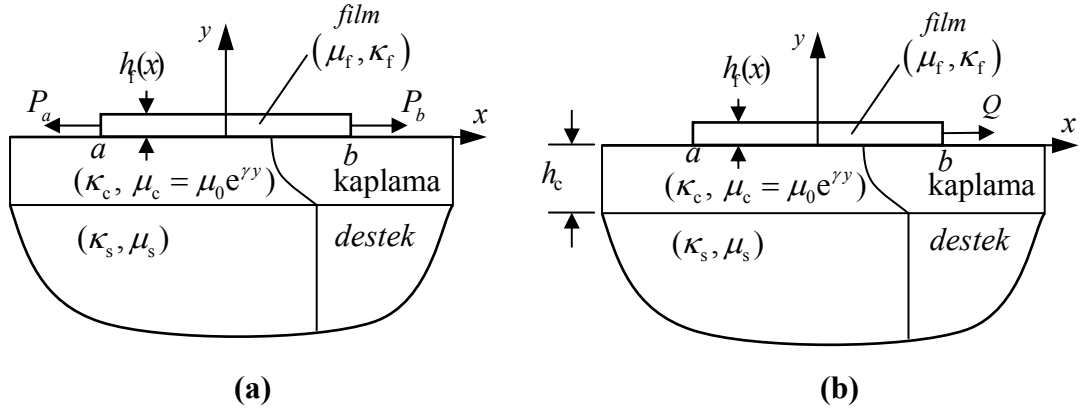
Denklem (2.113)'teki “ t ” ve “ x ” değerleri a ile b arasında değer alabilmektedir ve denklemin ilk terimindeki tümlevlenendeki paydanın değerini sıfıra götürebilmektedirler; bu nedenle bu denklem “tekil (aykırı) tümlev denklemi” olarak adlandırılmaktadır. Böylece modellenen İDM kaplamalı homojen *destekli* sistem, karışık sınır değer probleminin analitik çözümü sonucunda tekil tümlev denklemi (2.113) türetmiştir.

Denklem (2.113)'teki tekil tümlev denkleminin çözümü olan film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi fonksiyonu, $f(x)$, film uçlarında, $x = a, b$, tümlevlenebilir tekilliğe sahiptir. Filmin a ve b ucundaki gerilme tekillik şiddeti sırasıyla şöyle tanımlanabilir:

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(x-a)} f(x), \quad (2.115)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2(b-x)} f(x). \quad (2.116)$$

2.1.4 Tümlev Denkleminin Çözümü



Şekil 2.3 Filmde çift (a) ve tek uçlu (b) mekanik yüklemeler.

Film, işlevsel derecelendirilmiş kaplama ve *destek* malzemesinden oluşan sisteme mekanik yüklemeler ya filmde ya da altındaki kaplamadan/*destekten* uygulanabilir. Uygulanabilecek yüklemeler Erdogan ve Gupta'nın [10] kullandığı gibi simetrik (karşılıklı zıt yönlerde) ve antisimetrik (karşılıklı aynı yönlerde) bileşenlerine ayrılabilir. Desteğe uygulanan yüklerin etkisinin de denklem (2.113)'teki $g(x)$

fonksiyonuyla kaplama üst yüzeyinde ifade edildiği düşünülürse *mümkün* mekanik yükleme şekilleri üçe ayrılır: film uçlarından simetrik ve antisimetrik; uzak alandan (kaplama ve *destekten* $|x| \rightarrow \infty$ iken) simetrik yüklemeler. Dikkat edilirse uzak alandan antisimetrik yükleme statik denge şartını bozacağından dolayı varsayımlar açısından incelenmesi *mümkün* değildir. Film için yukarıda bahsedilen yükleme tipleri her iki uçtan da yükleme gerektirmektedir (bkz. Şekil 2.3a). Aslında, çift uçlu film yüklemesinin sonuçları tek uçlu film yüklemesinin (bkz. Şekil 2.3b) sonuçlarının üst üste eklenmesiyle bulunabilir. Sistemin mekanik davranışının daha iyi anlaşılması açısından da tek uçlu yüklemenin önce incelenmesinde fayda vardır. Bu nedenle tümlev denklemi tek uçlu film yüklemesi ve uzak alanda simetrik yükleme durumu için ayrı ayrı ele alınacaktır. Ardından her hangi bir bileşke yükleme durumu için incelenen her bir yüklemenin etkisi üst üste eklenerek bileşke etki bulunması *mümkün* olacaktır.

2.1.4.1 Tek Uçlu Film Yüklemesi

(2.113) ve (2.110b)'deki tümlev denklemlerinde ve takip eden (2.114b)'de

$$\begin{aligned} P_a &= 0, \\ P_b &= Q, \\ g(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.117)$$

alınırsa Şekil 2.3b'de verilen tek uçlu yükleme için aşağıdaki tümlev denklemi bulunur:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x} - k_{21}(t, x) \right] f(t) dt - \frac{\lambda}{2h_f(x)} \int_a^x f(t) dt = 0, \quad (2.118a)$$

$$\int_a^b f(t) dt = Q; \quad (2.118b)$$

burada,

$$a < x < b, \quad \lambda = \frac{1 + \kappa_f \mu_0}{1 + \kappa_c \mu_f}. \quad (2.119a,b)$$

Yeni boyutsuz değerler tanımlanırsa ve film kalınlığı sabit , $h_f(x) = h_f$, kabul edilirse:

$$x = \frac{b-a}{2}r + \frac{b+a}{2}, \quad (2.120a,b)$$

$$t = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}, \quad a < (x,t) < b, \quad -1 < (r,s) < 1;$$

$$\tau_{xy}^f(x,0) = p_1 p(r), \quad p_1 = \frac{Q}{h_f}, \quad (2.120c,d)$$

ve ardından şöyle bir çözüm varsayılırsa:

$$p(s) = \phi(s) \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(s), \quad (2.121a,b)$$

denklem (2.118a)'da verilen tümlev denklemi şu hâle dönüşür:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-r} - K_{21}(s,r) \right] p(s) ds - \frac{\lambda L}{4h_f} \int_{-1}^{\frac{L}{2}r + \frac{a+b}{2}} p(s) ds = 0; \quad (2.122)$$

burada,

$$K_{21}(s,r) = \frac{L}{2} k_{21}(t,x), \quad (2.123a,b)$$

$$L = b - a,$$

$k_{21}(t,x)$ çekirdeği denklem (2.104b)'de verilmiştir (ayrıca bkz. EK 6).

(2.120b-d) kullanılarak (2.118b)'de verilen denge denklemi şu hâli alır:

$$\int_{-1}^1 p(s) ds = \frac{2Q}{(b-a)p_1} = \frac{2h_f}{L}. \quad (2.124)$$

Birinci, $T_n(x)$, ve ikinci tip, $U_n(x)$, Çebişef polinomlarının aşağıdaki özellikleri (bkz. Ek 7)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} ds = \begin{cases} 0, & n=0 \\ U_{n-1}(r), & n>0 \end{cases} \quad |r| < 1, \quad (2.125a,b)$$

$$\int_{-1}^r \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \begin{cases} \pi - \cos^{-1}(r), & n=0 \\ -\frac{1}{n} U_{n-1}(r)\sqrt{1-r^2}, & n>0 \end{cases} \quad |r| < 1,$$

ve denklem (2.121) birlikte kullanılırsa, (2.122)'de verilen tümlev denklemi doğrusal cebirsel bir denklem sistemine indirgenir:

$$\sum_1^{\infty} A_n [U_{n-1}(r) + R_n(r)] = F(r), \quad -1 < r < 1; \quad (2.126)$$

burada,

$$R_n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} K_{21}(s,r) ds + \frac{\lambda}{n} \frac{L}{4h_f} U_{n-1}(r)\sqrt{1-r^2}, \quad (2.127a,b)$$

$$F(r) = A_0 \left[\frac{\lambda L}{4h_f} \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{L}{2}r + \frac{a+b}{2}\right) \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K_{21}(s,r)}{\sqrt{1-s^2}} ds \right].$$

A_0 denklem (2.124)'ten bulunabilir:

$$A_0 = \frac{Q}{\pi a} \frac{1}{p_1} = \frac{2h_f}{\pi L}. \quad (2.128)$$

(2.128) denklem (2.127b)'de yerine konulursa sağ taraf vektörü $F(r)$ şöyle olur:

$$F(r) = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(r) \right) + \frac{2h_f}{\pi^2 L} \int_{-1}^1 \frac{K_{21}(s,r)}{\sqrt{1-s^2}} ds. \quad (2.129)$$

Denklem (2.126) sayısal olarak çözülürken toplama işlemi, sonsuz yerine sonuçların yeterince kararlı olduğu bir N değerine kadar yapılır ve film uçlarındaki tekillikler daha hassas incelenebilsin diye Erdogan ve Gupta'nın [27] yaptığı gibi r değerleri

Çebişef polinomlarının köklerinden seçilir (yani $T_N(r_i) = 0$). Denklem (2.126) hesaplamalı yöntemlerde kullanabilecek biçimde yeniden yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{n-1}(r_i) + R_n(r_i)] = F(r_i); \quad (2.130)$$

burada,

$$r_i = \cos \left[(2i-1) \frac{\pi}{2N} \right], \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.131)$$

Her bir r_i değeri için denklem (2.130) yazılırsa N bilinmeyenli N tane denklem elde ederiz. Bu denklem sisteminin çözümünden bilinmeyen A_1, \dots, A_N katsayıları bulunur. A_0 da denklem (2.124,2.128)'den yararlanılarak bulunur ve bulunan katsayılar denklem (2.121)'de yerine konarak film ve kaplama arayüzeyindeki kayma gerilmesinin boyutsuzlandırılmış hâli elde edilir. Film-kaplama arayüzeyindeki kayma gerilmesi yeniden, boyutsuzlandırılmış biçimde yazılırsa:

$$\frac{\tau_{xy}^f(r, 0)}{P_1} = \frac{h_f \tau_{xy}^f(r, 0)}{Q} = \frac{\sum_0^N A_n T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (2.132)$$

Dikkat edilirse denklem (2.132)'deki toplama işleminin indisi sıfırdan başlamakta; çünkü $A_0 \neq 0$ (bkz. denklem (2.128)). Yükleme durumu simetrik olsaydı $A_0 = 0$ olacaktı.

Filmin kesilen kısmının denge denkleminde (denklem (2.107)'de $P_a = 0, h_f(x) = h_f$ alınır) ve denklem (2.132)'den filmdeki normal gerilme bulunur:

$$\frac{\sigma_{xx}^f(r)}{p_1} = \frac{L}{2h_f} \int_{-1}^r \frac{\sum_0^N A_n T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds. \quad (2.133)$$

Denklem (2.133)'teki tümlev Çebişef polinomlarının özellikleri kullanılarak alınabilir. Denklem (2.125b) kullanılırsa,

$$\frac{\sigma_{xx}^f(r)}{p_1} = \frac{L}{2h_f} A_0 (\pi - \cos^{-1}(r)) - \frac{L}{2h_f} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}; \quad (2.134)$$

A_0 değeri denklem (2.128)'den alınıp (2.134)'te yerine konulursa filmdeki aksenal normal gerilme aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\sigma_{xx}^f(r)}{p_1} = 1 - \frac{\cos^{-1}(r)}{\pi} - \frac{L}{2h_f} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}. \quad (2.135)$$

Kuvvet uygulanmayan (a -ucu) ve uygulanan uçtaki (b -ucu) kayma gerilmesi tekillik şiddeti (2.105a, 2.115,116)'daki tanımlar ve (2.8h, 2.120,121) denklemleri kullanılarak yeniden boyutsuzlandırılmış biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{A}{p_1 \sqrt{L/2}} &= \sum_0^N A_n T_n(-1), \\ \frac{B}{p_1 \sqrt{L/2}} &= \sum_0^N A_n T_n(1) = \sum_0^N A_n. \end{aligned} \quad (2.136a,b)$$

Dikkat edilirse denklem (2.136b)'de tanımlanan kayma gerilmesi tekillik şiddeti filmin b -ucu içindir. Yük b -ucundan uygulandığı için (bkz. Şekil 2.3b) a -ucuna göre b -ucunda daha yüksek gerilme tekillik şiddeti değeri beklenir (yani tek uçlu film yüklemesi durumunda $B > A$ olmalıdır).

2.1.4.2 Uzak Alandan Simetrik Yükleme

Uzak alandan simetrik yükleme durumunu incelemek için (2.113) ve (2.110b)'deki tümlev denklemlerinde ve takip eden (2.114b)'de

$$\begin{aligned} P_a &= 0, \\ P_b &= 0, \\ g(x) &= \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.137a-c)$$

konulmalıdır.

Tek uçlu film yüklemesi durumunda Q yükü yeniden boyutsuzlandırma değiştirgeni p_1 'de kullanılmıştı (bkz. denklem (2.120d)). Bu yükleme durumunda yük sabit uzak alan gerinimi kabul edilmiş ve boyutsuzlandırma/boylandırma da gerinimi içeren gerilme boyutunda aşağıda verilen terimle yapılmıştır ki bu terim sisteme hâkim tümlev denkleminin içerisinde aynen yer almaktadır (bkz. denklem (2.113)) :

$$\tau_{xy}^f(x, 0) = -p_1 p(r), \quad p_1 = \frac{4\mu_0}{\kappa_c + 1} \varepsilon_0, \quad (2.138a,b)$$

ve tümlev denklemi (2.113) için şöyle bir çözümler varsayılırsa

$$p(s) = \phi(s) \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(s), \quad (2.139a,b)$$

ardından tek uçlu film yüklemesi durumundaki çıkarımlardaki gibi Çebişef polinomlarının denklem (2.125)'te verilen özellikleri kullanılırsa (burada yükleme durumu simetrik olduğundan dolayı $a_0 = 0$) tümlev denklemi (2.113), doğrusal cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur:

$$\sum_1^{\infty} a_n [U_{n-1}(r) + R_n(r)] = 1, \quad -1 < r < 1; \quad (2.140)$$

burada,

$$R_n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} K_{21}(s, r) ds + \frac{\lambda}{4n} \frac{L}{h_f} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}. \quad (2.141)$$

Tek uçlu film yüklemesindeki çıkarım takip edilirse aşağıdakileri elde ederiz:
film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi:

$$\frac{\tau_{xy}^f(r, 0)}{p_1} = -\frac{\sum_{n=1}^N a_n T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (2.142)$$

filmdeki eksenel normal gerilme:

$$\frac{\sigma_{xx}^f(r)}{p_1} = \frac{L}{2h_f} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}. \quad (2.143)$$

a ve b uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti sırasıyla:

$$\begin{aligned} \frac{A}{p_1 \sqrt{L/2}} &= -\sum_1^N a_n T_n(-1), \\ \frac{B}{p_1 \sqrt{L/2}} &= -\sum_0^N a_n T_n(1) = -\sum_1^N a_n. \end{aligned} \quad (2.144a,b)$$

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME

Bölüm 2’de analitik olarak Çebişef polinomları yardımıyla tekil tümlev denklemi film-kaplama arayüzeyi hattı boyunca geçerli doğrusal cebirsel bir denklem sistemine indirgenmiştir. Bu denklem sistemi, temelde, Guler tarafından 1999 yılında geliştirilen [23], nümerik yöntemler kullanılarak yazılmış olan FORTRAN77 kodu ile gerekli uyarlamalar yapıldıktan sonra çözülmüştür. Yaklaşık 5000 satır olarak yazılmış olan temel kod, iki ayrı programdan oluşmaktaydı. Bu programlar tek bir programda birleştirilerek sonuçların otomatik birbirine geçişi sağlandı. Ayrıca, başlangıçta komut satırından girilen değiştirgen değerlerinin, otomatik, sonuç verilerini içeren metin dosyalarına ad olarak konması (çoklu dinamik dosya yaratma), değişken boyutlu dizi yaratma, komut satırından çoklu parametre girişi gibi yeniliklerle FORTRAN90 derleyicisinde derlenebilir hâle getirilen kod ile TOBB ETÜ Yüksek Başarımlı Hesaplama Laboratuvarındaki Solaris işletim sistemli Öbek-I bilgisayarına toplu komut işlemi verilebilir hâle getirilmiştir (bkz. EK 9). Bu yenileme çalışmaları esnasında karşılaştığımız sorunlardan en ilginç : “başlangıçta, farklı iki donanımın/yazılımın (Microsoft Developer Studio ve SunSystems-Solaris) derleyicisi ile koşturulan aynı kodun farklı sonuç vermesi” sorunu olmuştur. İlk başta şaşkınlığa yol açan bu sorun yapılan araştırmalar²⁰ ve dikkatli denemeler sonucunda çözülmüştür. Bu duruma eski kodda fazladan bulunan bir tanımlamanın yol açtığı tespit edilmiş olup ilgili satır çıkarılarak kod her iki donanım derleyicisinde de aynı sonucu verir duruma getirilmiştir (Bkz. EK 8). Bu problemle ilgili o tarihlerde TOBB ETÜ Bilgisayar Bölüm Başkanı Prof. Dr. Ali Yazıcı ile yaptığımız görüşme sonucunda “aynı kodun farklı derleyicilerde farklı sonuç vermesi sorununun zaman zaman başkaları tarafından da yaşanabildiği bunların kimi zaman derleyicilerin otomatik yaptığı optimizasyonlardan kaynaklı da olabileceği ortaya çıkmıştır.”

İlk kısımda, literatürdeki bize en yakın çalışmanın [10] sonuçları ile bir karşılaştırma yapıp bu çalışmanın sonuçları sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak doğrulanacaktır

²⁰ Bu noktada Tez Hocam M. A. Güler’in kod kontrol tecrübesi ve tavsiyeleri işimizi kolaylaştırmıştır.

(bkz. Kısım 3.1). İkinci kısımda ise işlevsel derecelendirilmiş kaplama için uzak alan yüklemesi durumu detaylı olarak incelenecektir (bkz. Kısım 3.2). Her iki kısımda da sonuçlar bulunurken düzlem gerinim durumu varsayılmış olup koordinat ekseninin başlangıç noktası (orijini) film-kaplama arayüzeyinde film boyunun tam ortasında kabul edilmiştir, yani a yerine $-b$ alınmıştır (bkz. Şekil 1.1 ve 3.19d). Şekillerdeki negatif film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi değerleri ilgili kayma gerilmesi bileşeninin yönünün kaplama üst yüzeyinde sola, film alt yüzeyinde ise sağa doğru olduğunun göstergesidir; değer pozitif olduğu yerlerde de tam tersi yönelimler söz konusudur. Film uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti işareti de o uçtaki kayma gerilmesinin işareti ile aynı olup, filmin her iki ucunda da mutlak değerce aynı ise pozitif olduğu uçtaki değeri grafiklerde gösterilmiştir. Filmden iki uçlu (simetrik ve antisimetrik) yükleme ve uzak alan yüklemesi durumlarında arayüzey kayma gerilmesi tekillik şiddeti her iki uçta da mutlak değerce aynıdır. Aynı olmayan tek durum filmden tek uçlu yükleme durumudur ki bu durumda kuvvet uygulanan uçtaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti değeri diğer uçtakinden çok daha fazladır.

İşlevsel derecelendirilmiş kaplama için detaylı olarak incelenen yükleme durumu uzak alan yüklemesidir. Aslında uzak alan yüklemesi durumu için bulunan sonuçlardan hareketle simetrik film yüklemesi durumu için de aynı sonuçlara ulaşabiliriz yeter ki probleme hâkim tümlev denklemin (2.113) sağ tarafındaki yük terimi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$g(x) = 0, \quad (3.1a,b)$$

$$P_a = \frac{-2h_f}{\lambda} \frac{4\mu_0}{\kappa_c + 1} \varepsilon_0.$$

Bu sayede, Kısım 3.2’de uzak alan yüklemesi durumu için verilen sonuçlar, arayüzey bölgesi ve arayüzey kayma gerilmesi açısından aynen örtüşecektir. Denklem (3.1b)’deki negatif işareten dolayı uzak alandan uygulanacak olan çekme yükünün film-kaplama arayüzeyine etkisi film uçlarından uygulanacak ilgili bası kuvvetleriyle sağlanacaktır veya benzer şekilde uzak alandan uygulanacak bası yükünün film-

kaplama arayüzeyine etkisi film uçlarından uygulanacak ilgili çeki kuvvetleriyle sağlanacaktır. Arayüzey kayma gerilmesinin aynı çıkmasına rağmen filmdeki normal gerilmeler farklı çıkacaktır. Simetrik film yüklemesinde film uçlarından kuvvet uygulandığı için sınır şart olarak film uçlarında normal gerilme en büyük olacaktır; oysa uzak alan yüklemesi durumuna film uçlarından bir yük uygulanmadığından, film uçlarında normal gerilme sıfır olacaktır. (2.107)'deki film için yazılan denge denkleminde film kalınlığı sabit alınarak denklem (3.1b) yerine konulduktan sonra (2.125b) ve (2.138) kullanılarak simetrik film yüklemesi (film uçlarından bası) durumu için filmdeki normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$ şöyle bulunabilir:

$$\frac{\sigma_{xx}^f(x)}{p_1} = \frac{-2}{\lambda} + \frac{L}{2h_f} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}. \quad (3.2)$$

Uzak alandan simetrik yükleme durumu ve filmde eş değer simetrik yükleme durumunda filmde oluşan normal gerilme dağılımlarının örnekleri sırasıyla Şekil 3.14 ve Şekil 3.15'te verilmiştir.

Yükleme yönü değiştiğinde, sadece gerilme boyutsuzlandırma değiştirgenin (p_1) işareti değişeceğinden dolayı, filmdeki aksenal normal gerilme ve film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi (ve dolayısıyla film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti) değerlerinin sadece işareti değişecektir. Dolayısıyla şekillerde (Şekil 3.14-3.19) verilen sonuçlar, mutlak değerce düşünüldüğünde, zıt yöndeki yükleme tipleri için de geçerlidir. Mesela, Şekil 3.15'te verilen film uçlarından simetrik bası kuvveti yüklemesinde, ($0 \leq x/b < 1$) aralığı için bütün gerilme değerleri ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) negatifken; iki uçtan simetrik çekme kuvveti yüklemesi durumunda, gerilme değerleri mutlak değerce bası yüklemesi durumundakiyle aynı olup işareti pozitif olacaktır. Birbirine zıt yönlü yükleme tiplerinde (yani yapıya etkiyen bütün yüklerin yönlerinin zıt yöne çevrildiği durumlarda), sonuçların mutlak değerce aynı olmasına rağmen, malzemelerin çeki ve bası yüklemesi altındaki mukavemetleri ve hasar şekilleri aynı olmayabileceğinden dolayı dikkatli olunmalıdır.

Modellenen problemde (bkz. Şekil 1.1), ikisi mekanik ikisi de geometrik olmak üzere, dört tane temel değiştirgen (parametre) vardır (bkz. Tablo 3.1). Mekanik değiştirgenler, işlevsel derecelendirilmiş kaplamanın kayma modülü veya derecelendirme oranı, $\Gamma = \mu_s / \mu_0$, ve kaplama üst yüzeyinin filme göre kayma modülü oranı, $\lambda = \mu_0 / \mu_f$. Geometrik değiştirgenler ise film narinlik oranı, L / h_f , ve film boyunun kaplama kalınlığına oranı, L / h_c 'dir. Burada, Γ değiştirgeni kaplamanın üst yüzeyinin alt yüzeyine göre uyarlılığını (compliance), ve λ değiştirgeni ise filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlılığını göstermektedir. Tam değiştirgensel (parametrik) çalışma pratikte *mümkün* olarak gözükmemektedir. Bunu yapabilmek için bu dört değiştirgen için 4, bir de bu değiştirgenlerin etkilediği alan değiştirgeni (gerilme v.s.) için olmak üzere toplam 5 boyutlu bir grafik gerekmektedir. Bunu aşmanın bir yolu iki değiştirgeni her seferinde temel değiştirgen olarak alıp önemli alan değiştirgenlerini bunlara göre hesaplatıp çizmektir. Değiştirgenlerin değerleri şimdiye kadar literatürde benzer modeller için alınmış değerleri [22,32,33,45-50] kapsayacak ve hesaplamalı tekniğin verimliliğinin müsaade ettiği [45] ölçüde seçilmiştir.

Çizelge 3.1 Sistemdeki Temel Değiştirgenler (parametreler)

Türü	Değiştirgenler	Semboller
Geometrik	Film narinlik oranı **	L / h_f
	Film boyunun kaplama kalınlığına oranı	L / h_c
Mekanik	Kaplama üst yüzeyinin altına göre uyarlılığı	$\Gamma = \mu_s / \mu_0$
	Filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlılığı *	$\lambda = \mu_0 / \mu_f$

* $\nu_f = \nu_c = \nu_s = 0.3$ alınır. ** $h_f(x) = h_f$ alınır.

3.1 Sonuçların Literatürle Kıyaslanması (Filmden Yükleme)

Bu kısımda üst üste ekleme yöntemiyle simetrik ve antisimetrik film yükleme durumları için kayma gerilmesi dağılımı ve film uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti değerleri bulunmuştur. Yöntemin uygulanma şekli simetrik (uçlardan eşit büyüklükte ve zıt yönde) yükleme için Şekil 3.2’de, antisimetrik (uçlardan eşit büyüklükte ve yöndeş) yükleme içinse Şekil 3.5’te gösterilmiştir.

Ulaştığımız sonuçların teorik açıdan doğruluğunu test etmenin yollarından birisi bu çalışmanın bazı özel durumlarındaki sonuçlarını literatürde yapılmış benzer çalışmaların sonuçları ile kıyaslamaktır. Homojen *destek* durumu için literatürde yapılmış çalışmalar arasında bizimkine en yakın olanı Erdogan ve Gupta’nın (1971) çalışmasıdır. Sonuçların literatürdekilerle [10] kıyaslanabilmesi için değiştirgenlerin bir kısmı aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır:

$$\begin{aligned} L / h_f &= 2, \\ b &= 1, \\ a &= -1, \\ \lambda_{\text{ref}} &= \frac{\lambda}{2}, \\ \Gamma &= 1. \end{aligned} \tag{3.3a,e}$$

Bu çalışmada incelenen problem, kaplama homojen, film kalınlığı bir, film boyu iki birim alındığında ve lambdalar arasındaki tanım farkı dikkate alındığında, Erdogan ve Gupta’nın (1971) incelediği probleme indirgenmektedir. Bu nedenle incelenen problemin öncelikle homojen kaplama için çözümüne bakılacaktır. Homojen kaplama ve tek uçlu film yükleme durumu için hesaplanan film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki aksenal normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımları Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Şekil 3.1’de kullanılan değiştirgenlerin değerleri Erdogan ve Gupta’nın (1971) kullandığı değerlerle örtüşecek şekilde alınmıştır.

Filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlılığını gösteren ve tanımı (2.119b)'de verilen λ değiştirgeni Erdogan ve Gupta (1971) tarafından farklı tanımlanmış olup film kalınlığı da tanıma katılmıştır. İlgili referanstaki tanım λ_{ref} olarak gösterilmiştir. Tanımlar arasındaki tam ilişki $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2h_f$ olup film kalınlığı bir birim kabul edildiğinden dolayı denklem $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2$ şekline indirgenmektedir.

Arayüzey kayma gerilmesi dağılımı ve film uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddetini bulmak için tek uçlu film yüklemesi durumu sonuçlarından hareketle üst üste ekleme yöntemi²¹ kullanılmıştır. Simetrik ve antisimetrik yükleme durumları için üst üste ekleme yönteminin kullanım mantığı sırasıyla Şekil 3.2 ve 3.5'te gösterilmiştir.

Antisimetrik yükleme durumundaki sonuçların Erdogan ve Gupta'nın (1971) sonuçlarıyla karşılaştırılabilmesi için denklem (2.120d)'deki boylandırma film kalınlığı bir alınarak aynen kullanılabilir (yani $p_1 = Q$). Karşılaştırmalı sonuçlar Şekil 3.6 ve 3.7'de verilmiştir. Şekillere bakıldığında sonuçların örtüşmediği görülmüştür. Şekil 3.7'de film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti sonuçlarına bakıldığında, her iki sonucun da kaplamaya göre filmin uyarlılığı azaldıkça (yani film rijitleştikçe) aynı asimptot değerine²² ($2/\pi$) yaklaşmasına rağmen, bu çalışmanın sonucunun asimptot değerine yukarıdan, Erdogan ve Gupta'nınkinin ise aşağıdan yaklaştığı görülmektedir. Film uyarlılığının kaplamaya göre sonsuza gittiği durumda (Şekil 3.7'deki orijin noktası) veya sadece kaplamanın rijit olduğu durumda bu çalışmanın sonucuna göre kayma gerilmesi tekillik şiddeti değeri en büyük değerine ulaşmaktayken Erdogan ve Gupta'nın sonuçlarına göre en küçük değerine (sıfıra) ulaşmaktadır. Film (elastik kuvvetlendirici/takviye) uyarlılığının kaplamaya göre sonsuz olduğu durumda filmde uygulanan kuvvet sanki film yokmuş, mükemmel

²¹ Doğrusal Elastik Teori varsaydığımızdan dolayı üst üste ekleme yöntemi doğru sonuç verecektir.

²² Rijid film için bu asimptot değer için kapalı formda çözüm, tekil tümlev denklemler üzerine Muskhelishvili (İng.) tarafından yazılmış kitapta [63] verilmiş olup, asimptotun değeri Erdogan ve Gupta [10] tarafından $2/\pi$ olarak bulunmuştur.

arayüzey bağı varsayımından dolayı, doğrudan kaplamaya noktasal olarak uygulanıyormuş gibi bir etki yaratacaktır. Bu durumda, kuvvetin uygulama noktası olan film ucunda, gerilme değerleri film bağılyken olduğundan daha hızlı bir şekilde sonsuza gidecektir ve dolayısıyla burada film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti de en büyük değerine ulaşacaktır²³.

Literatürde (Erdogan ve Gupta, 1971) film ucundaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti, simetrik ve antisimetrik yükleme durumları için farklı boyutsuzlandırmalarla gösterilmiştir. Film ucu tekillik şiddeti, simetrik yükleme durumunda bir taraftan $p_1 = \lambda_{ref} P = F_0$, ile boyutsuzlandırılırken; öte taraftan da, antisimetrik yükleme durumunda sadece $p_1 = Q$ ile boyutsuzlandırılmaktadır. Bu şekilde farklı boyutsuzlandırma, farklı yükleme tipleri uygulandığında fiziksel görüngünün (fenomenin) yanlış yorumlanmasına neden olabilir. Bu nedenle bu çalışmada simetrik ve antisimetrik yükleme tipleri için aynı boyutsuzlandırma kullanılmıştır. Sonuçlar Şekil 3.8 ve 3.9'da görülmektedir. Şekil 3.8 ve 3.9'daki sonuçlar incelendiğinde antisimetrik yükleme durumunda kayma gerilmesi tekillik şiddeti değerinin simetrik yüklemenin ilgili değerinden daima daha yüksek olduğu görülür. Bu mantıksal olarak da doğrudur; çünkü antisimetrik yükleme durumunda filmin her iki ucundaki yükler aynı yönde etki etmekte ve dolayısıyla birbirinin etkisini artırmaktalar (bkz. Şekil 3.5); öte taraftan simetrik yüklemeye yükler film uçlarında zıt yönlerde etkilediğinden birbirinin etkisini azaltmakta ve uçlardaki gerilme tekillik şiddeti değerini azaltmaktadır (bkz. Şekil 3.2).

Antisimetrik yükleme durumundaki uyuşmazlığın nedenini araştırdığımızda Erdogan ve Gupta (1971) tarafından verilen antisimetrik yükleme sonuçlarının bir işaret

²³ Melan [21] 1932'de yaptığı çözümle levhanın kenarından takviye edildiği durumda kuvvetin uygulama noktasındaki kayma gerilmesinin sadece logaritmik olarak sonsuza gittiğini (bkz. Kısım 1.4) göstermiştir. Boussinesq'in 1892'de takviyesiz yarım levhaya kenarından etki eden yatay kuvvet için verdiği çözümle (bkz. mesela [26]) karşılaştırılırsa, levhaya takviye bağlanınca kayma gerilmesinin kuvvetin uygulandığı noktada sonsuza gidişinin yavaşladığı görülmektedir. Bu nedenle, takviyenin olmaması veya sanki yokmuş gibi bağılı olduğu levhaya göre sonsuz uyarlı davranması durumlarında film ucu tekillik şiddeti değerinin en büyük olması beklenir.

hatasından dolayı farklı çıktığı tespit edildi. Bu tespit, probleme hâkim tümlev denkleminde (2.126) sağ tarafın işaretini değiştirdiğimizde antisimetrik sonuçların örtüşüğünü görmemiz, yardımcı ve doğrulayıcı olmuştur. Bu tezdeki formülasyonun ve yaptığımız tespitin doğru olduğunu ispat etmek için aynı zamanda sonlu eleman analizi (SEA) yapılmıştır.

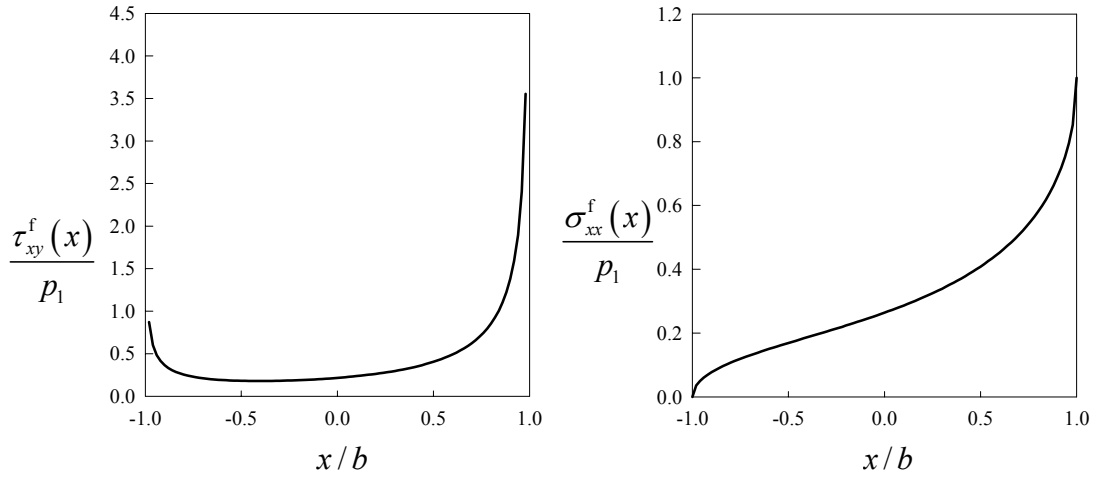
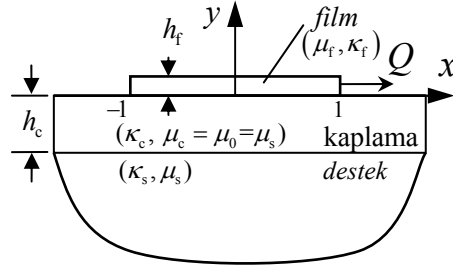
Sonlu eleman programı olarak genel amaçlı ANSYS (1997) yazılımı kullanılmıştır. Sonlu eleman modellerinin kafes yapısı ön işlemci yazılımı olan ANSA (2005) kullanılarak oluşturulmuştur. Oluşturulan kafes yapı Şekil 3.11’de gösterilmiş olup içerisinde 95436 tane dörtgen yapısal eleman bulunmaktadır. İncelenen geometri ANSYS’te 8 düğüm noktalı PLANE82 tipli yapı elemanları kullanılarak modellenmiştir. Arayüzey mükemmel bağ varsayımı altında kafes yapıda süreklilik sağlanacak şekilde modellenmiştir. Modelde film ucuna doğru bölüntüleme sayısı artırılmış olup kafes yapı her yerde sadece dörtgenlerden oluşmaktadır. Sonlu eleman modelindeki yatayda ve düşeyde *destek* boyutları sırasıyla L_s ve h_s olarak gösterilmiştir (bkz. Şekil 3.10). SEA modelinde sınır şart olarak film uçlarında düzgün dağılılı yük ve desteğin alt köşelerinde yatay ve düşey yöndeki yerdeğiştirmeler sabitlenmiştir (bkz. Şekil 3.10 ve 3.11).

SEA modelindeki sonlu *destek* boyutları analitik modeldeki yarım desteğin sonsuz derinliğini benzetim açısından yeterince büyük ve arayüzeydeki temas gerilme sonuçlarını etkilemeyecek şekilde seçilmiştir. Bu nedenle L_f/h_f , L_f/L_s ve h_s/L_s sırasıyla 100, 1/17 ve 1/2 olarak seçilmiş olup $L_s = 1326$ birim alınmıştır (bkz. Şekil 3.10). Sistemde film uçlarından düzgün dağılılı $P = 78$ N/mm değerinde bir yük uygulanmaktadır (bkz. 3.11).

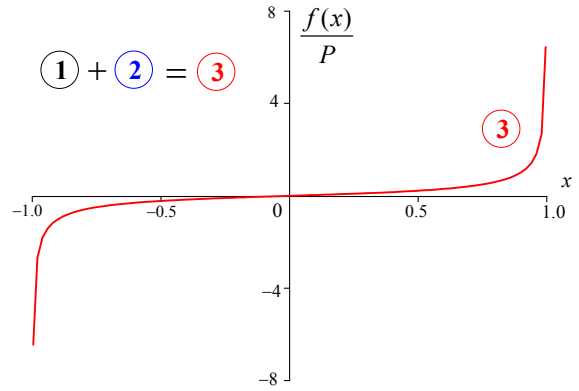
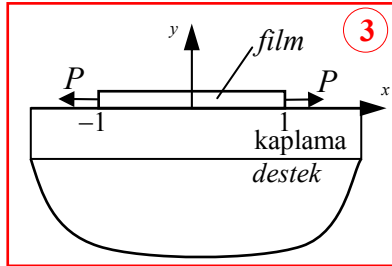
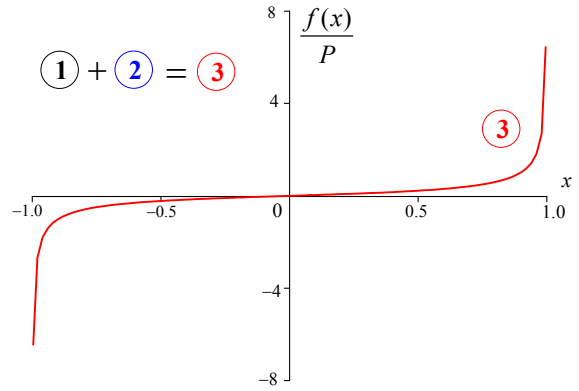
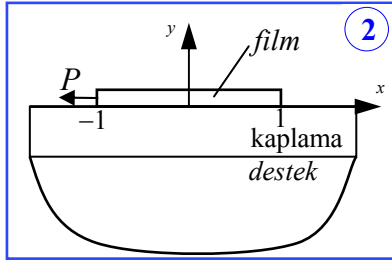
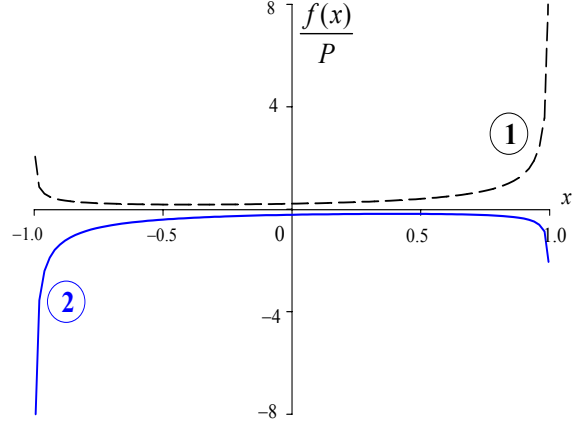
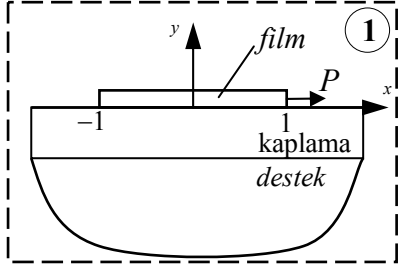
Yapılan sonlu eleman analizi sonucunda ulaşılan film-*destek* arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki aksenal normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımları filmde simetrik ve antisimetrik yükleme durumları için sırasıyla Şekil 3.12 ve 3.13’te gösterilmiştir. SEA esnasında kayma gerilemeleri tam film-kaplama arayüzeyinde

alınırken, normal gerilmeler filmin tam ortasındaki yatay ekseninde alınmıştır. Dolayısıyla $\sigma_{xx}^f(x)$ yerine gerçekte $\sigma_{xx}^f(x, \frac{h_f}{2})$ konmalıdır. Ancak gösterim kolaylığı ve film için yaptığımız membran benzeşiminden dolayı normal gerilmeler sadece yatay eksen değişkeni olan x ile gösterilmiştir. SEA sonuçları ile analitik sonuçlar oldukça yakın örtüşmüştür. Bu da bu tezde yapılan analitik formülasyon ve sonuçların homojen kaplama durumu için doğru sonuç verdiğinin işaretlerinden birisidir²⁴.

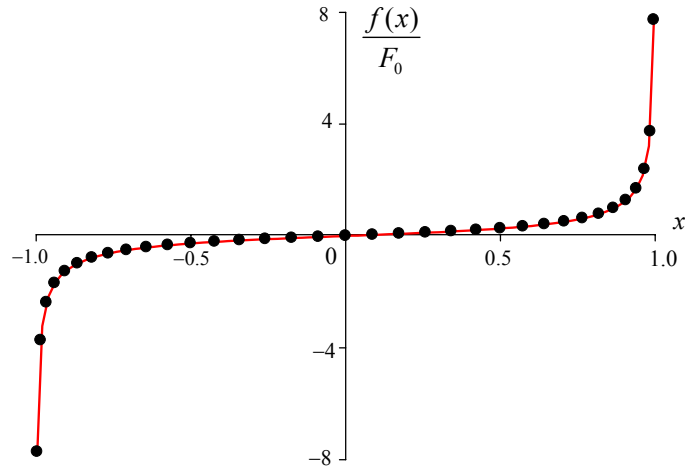
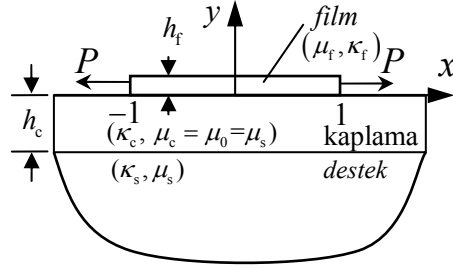
²⁴ Başka bir doğrulama yöntemi de gerçek deney yapmak olabilirdi.



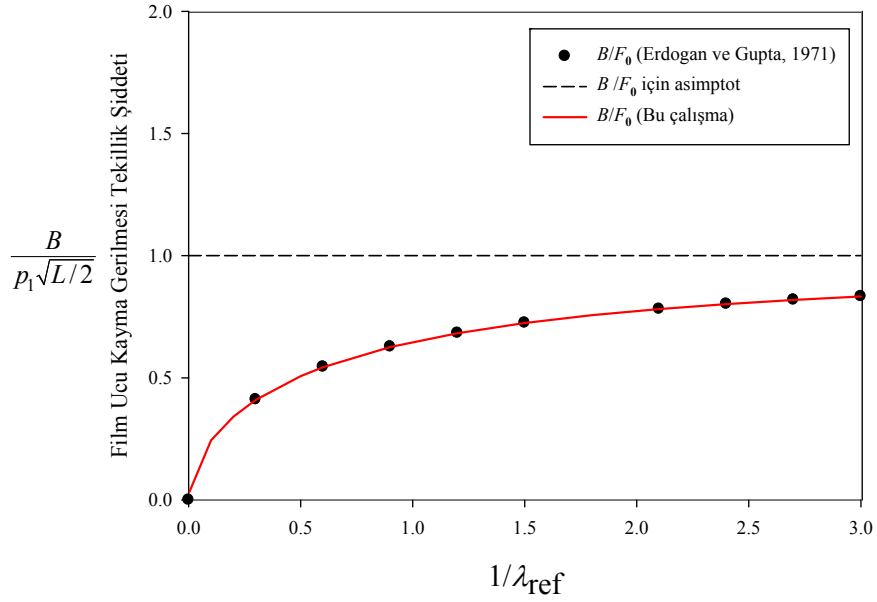
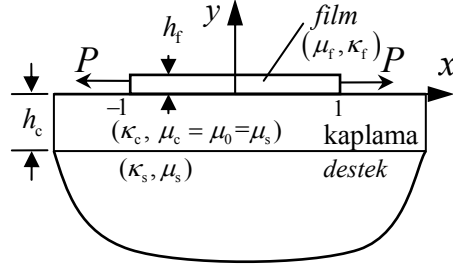
Şekil 3.1 Filmden tek uçlu yükleme ve homojen kaplama için, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$ için, film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Bu grafiklerdeki değerler, düzlem gerinim varsayılarak, $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 1/0.6$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = Q$ alınarak elde edilmiştir.



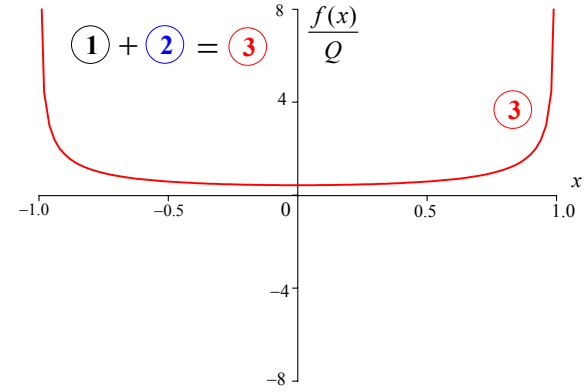
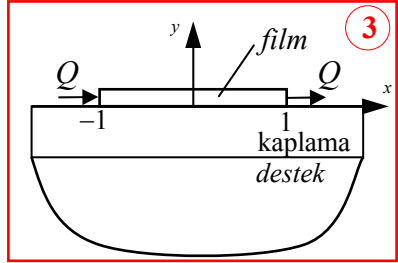
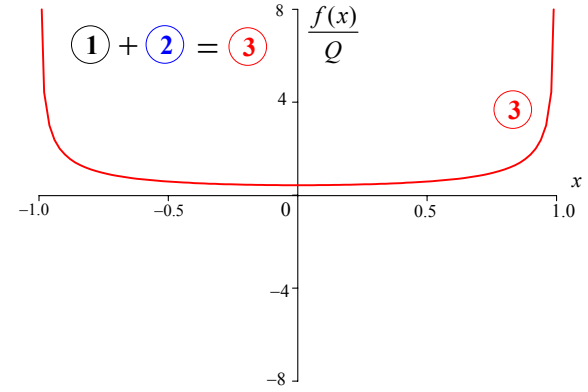
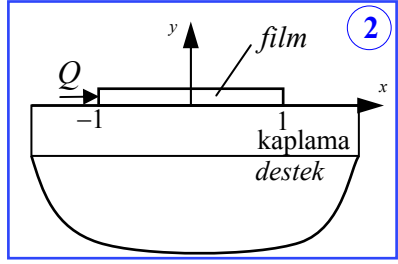
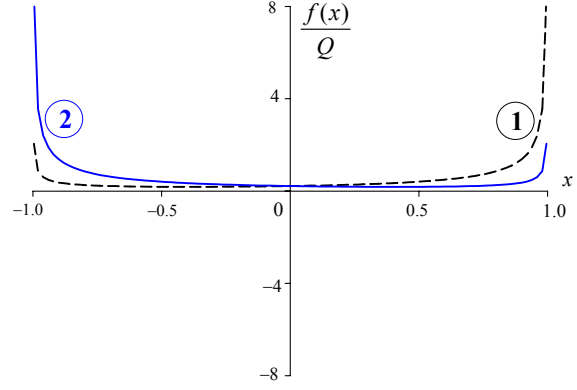
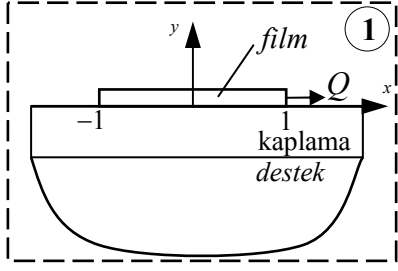
Şekil 3.2 Tek uçlu yüklemelerin (çekme, durum 1 ve 2) üst üste eklenmesiyle elde edilen simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler, homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{ref} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f) = 1/1.2$, $L / h_f = 2$ değerleri içindir.



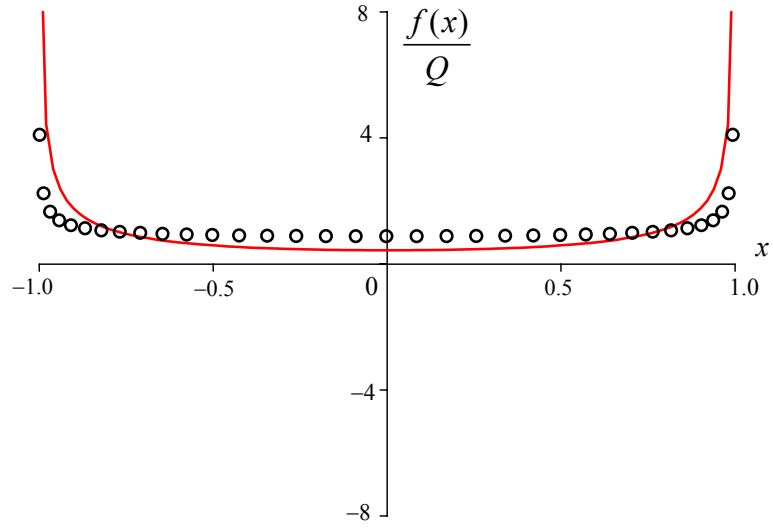
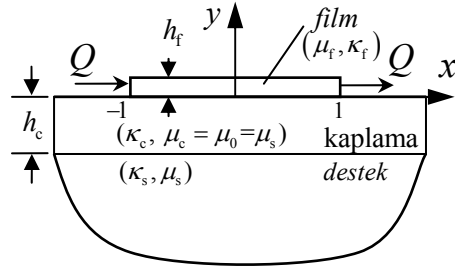
Şekil 3.3 Simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f) = 1/1.2$, $L / h_f = 2$, $F_0 = P\lambda_{\text{ref}}$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi dolu yuvarlaklar ise literatürde elde edilmiş sonuçlardır (bkz. kaynak [10], Fig.3).



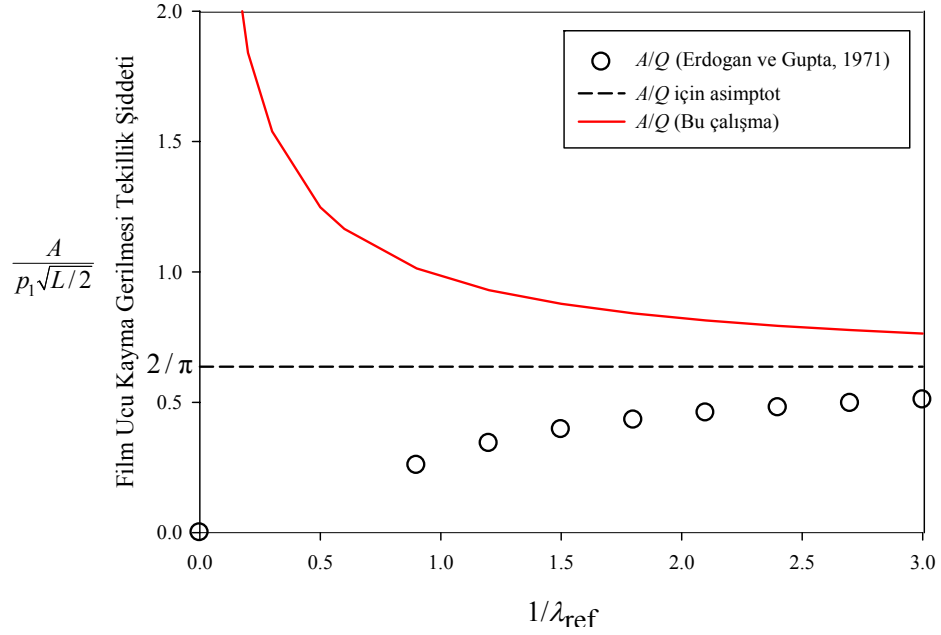
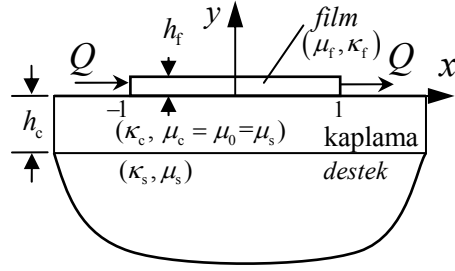
Şekil 3.4 Simetrik yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B' 'nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değiştirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = F_0 = P\lambda_{\text{ref}}$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0 / (2\mu_f)$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi dolu yuvarlaklar ise literatürde elde edilmiş sonuçlardır (bkz. kaynak [10], Fig.2).



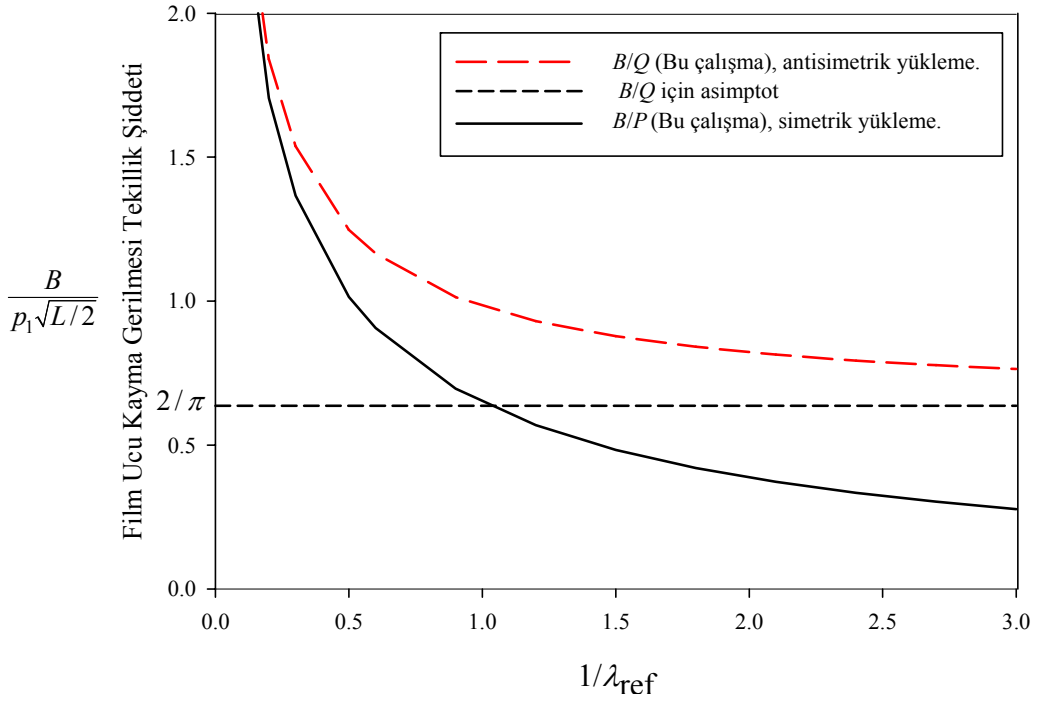
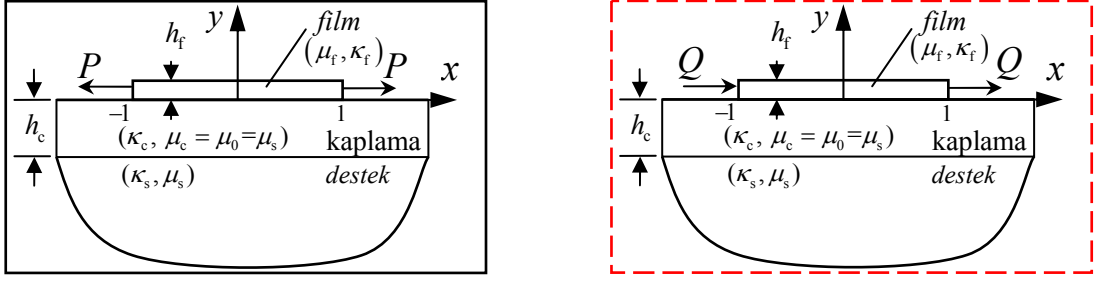
Şekil 3.5 Tek uçlu yüklemelerin (bir uçtan çekme, durum 1, öteki uçtan basma, durum 2) üst üste eklenmesiyle elde edilen antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler, homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{ref} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f) = 1/1.2$, $L / h_f = 2$ değerleri içindir.



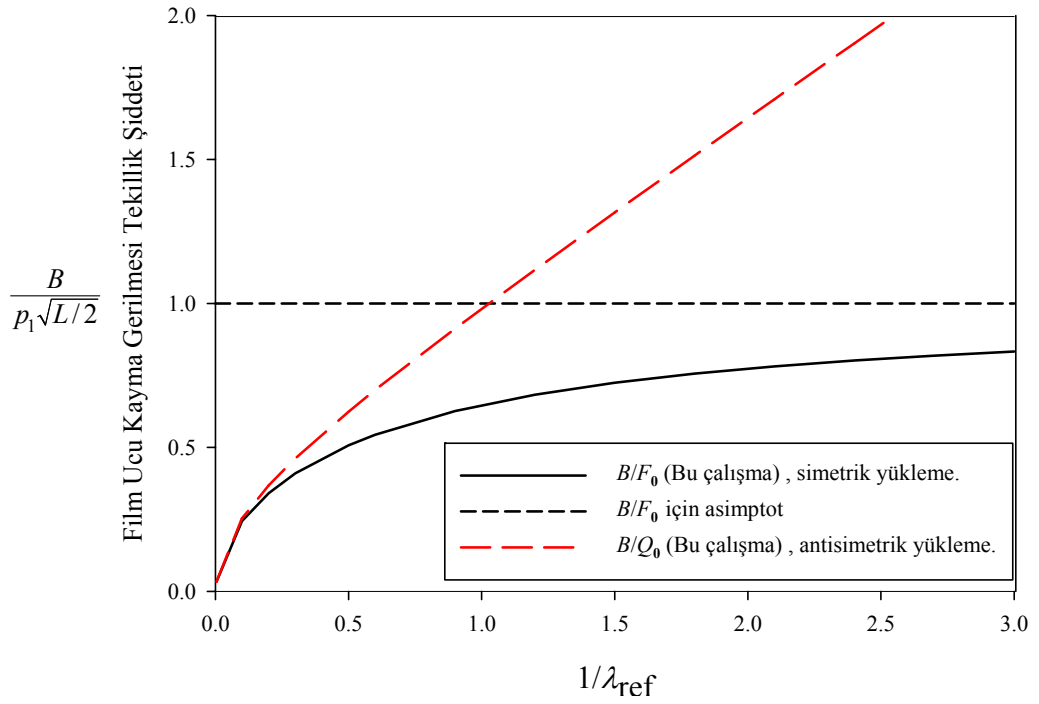
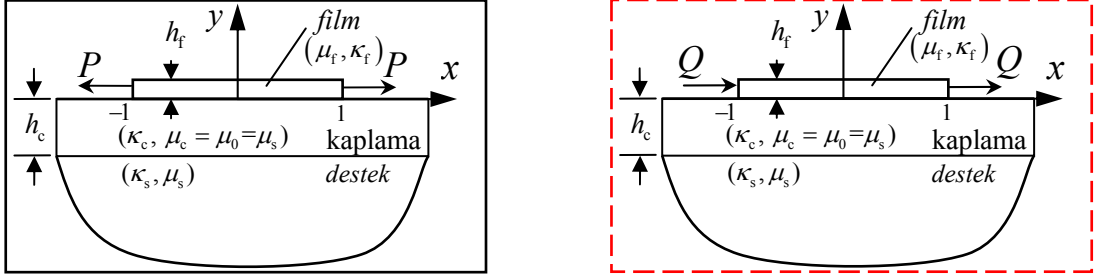
Şekil 3.6 Antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x) = f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f) = 1/1.2$, $L / h_f = 2$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmada elde edilen sonuç, içi boş yuvarlaklar ise Erdogan ve Gupta [10]'da sayısal hesaplamada işaret hatâsı yapılarak elde edilmiş sonuçtur.



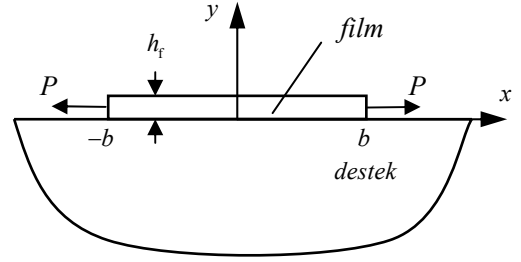
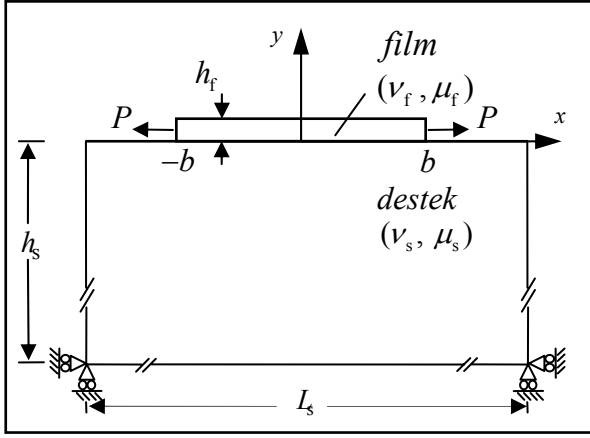
Şekil 3.7 Antisimetrik yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti A 'nın $1/\lambda_{ref}$ değıştirgeni ile değışimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = Q$, $\lambda_{ref} = \lambda/2 = \mu_0 / (2\mu_f)$ içindir. Sürekli çizgi bu çalışmanın sonucu; içi boş yuvarlaklar ise Erdogan ve Gupta [10] tarafından sayısal hesaplamada işaret hatâsı yapılarak elde edilmiş sonuçtur.



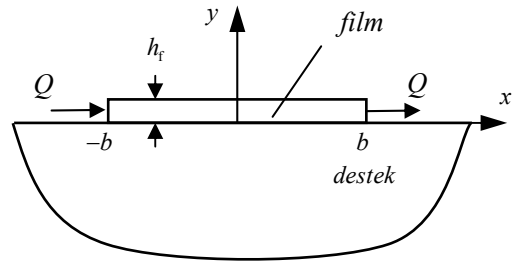
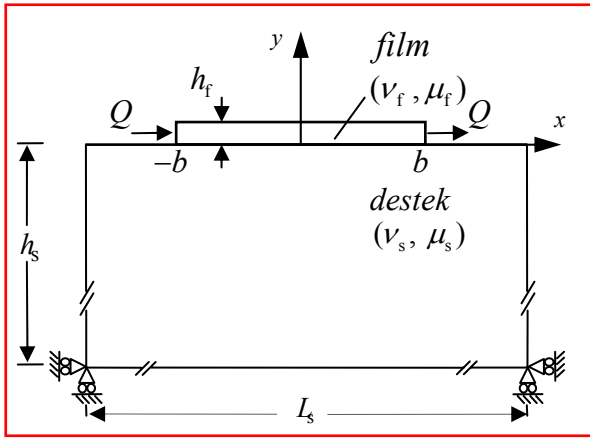
Şekil 3.8 Simetrik (sürekli çizgi) ve antisimetrik (kesikli çizgi) yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B 'nin $1/\lambda_{\text{ref}}$ değişirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = Q/h_f = P/h_f$, $\lambda_{\text{ref}} = \lambda/2 = \mu_0/(2\mu_f)$ içindir.



Şekil 3.9 Simetrik (sürekli çizgi) ve antisimetrik (kesikli çizgi) yükleme durumundaki film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti B 'nin $1/\lambda_{ref}$ değişirgeni ile değişimi. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 2$, $p_1 = \lambda Q / (2h_f) = \lambda P / (2h_f)$, $\lambda_{ref} = \lambda / 2 = \mu_0 / (2\mu_f)$, $F_0 = \lambda_{ref} P$, $Q_0 = \lambda_{ref} Q$ içindir.

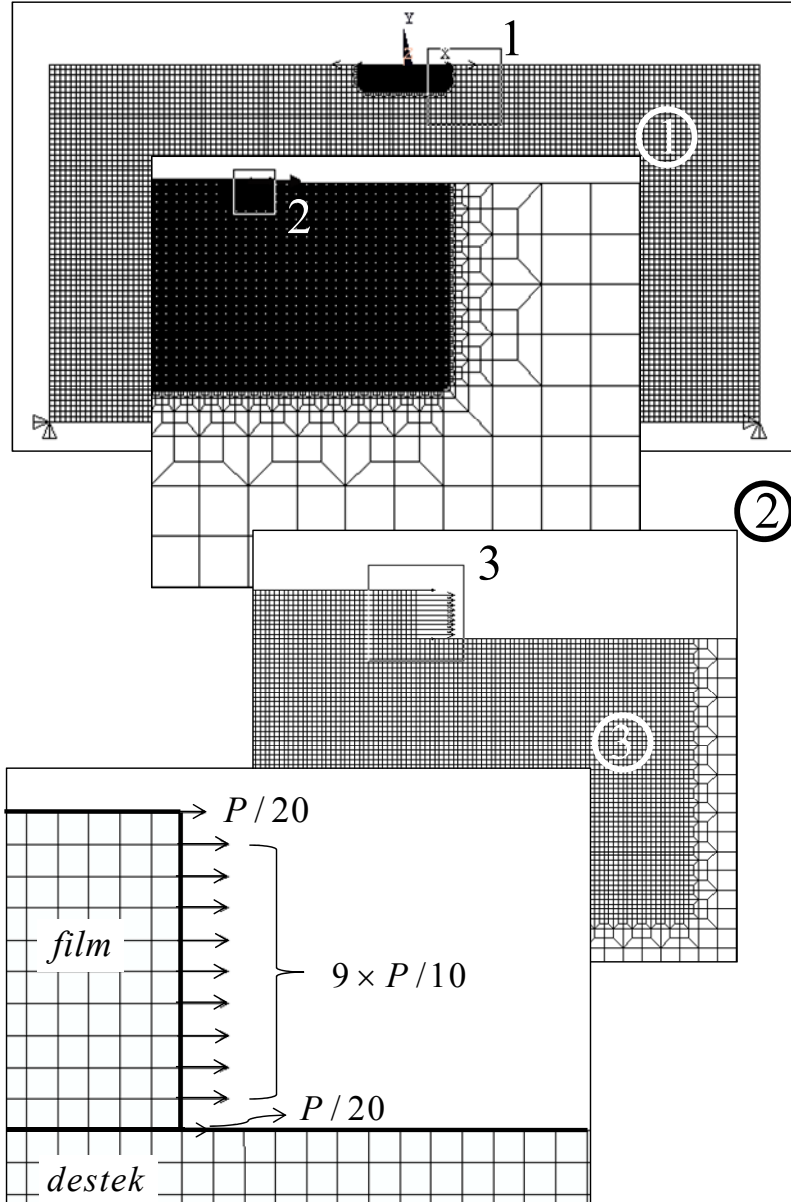


(a)

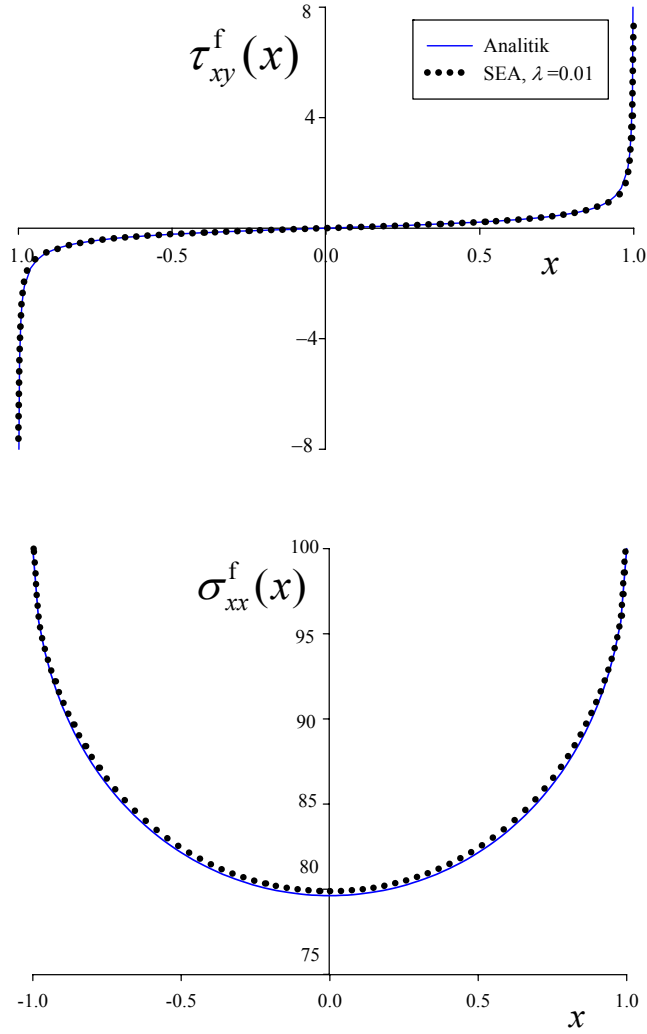
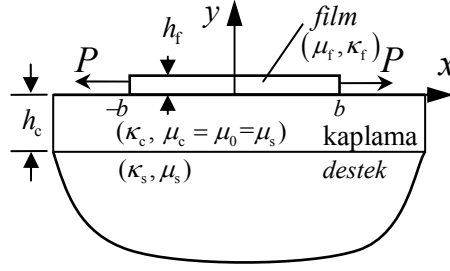


(b)

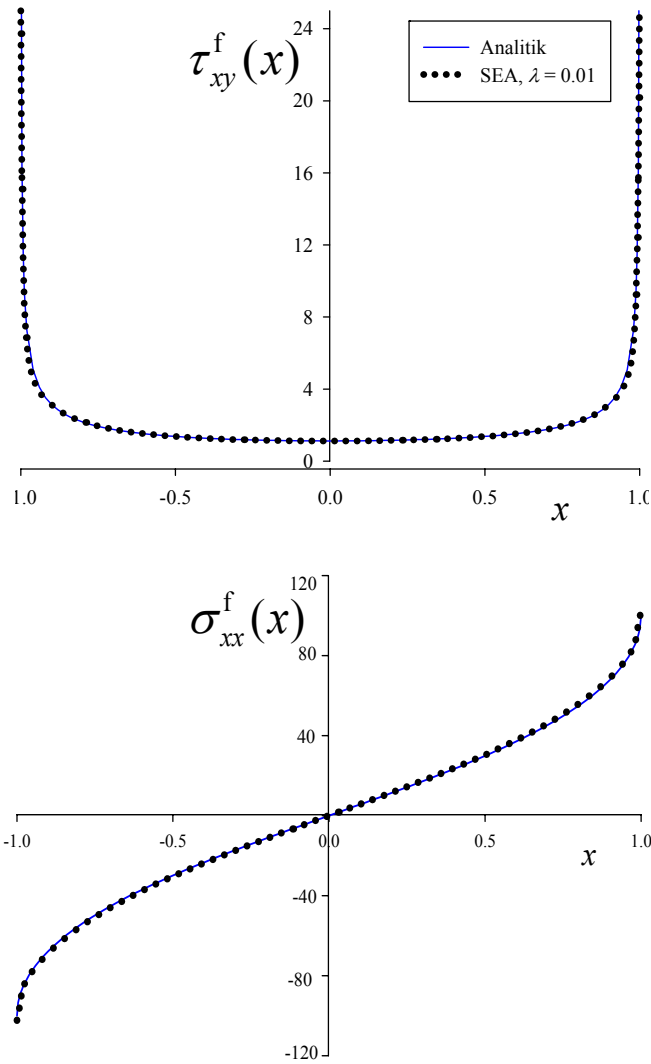
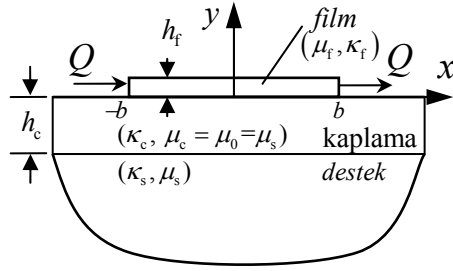
Şekil 3.10 SEA için sınır şartlar: (a) simetrik film yüklemesi, (b) antisimetrik film yüklemesi.



Şekil 3.11 Sonlu elaman modeli için kafes yapı ve sınır şartları.



Şekil 3.12 Simetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmde oluşan aksenal normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L_f / h_f = 100$, $P = 78$ N/mm değerleri içindir. Sürekli çizgiler analitik, noktalar ise SEA sonuçlarıdır.



Şekil 3.13 Antisimetrik yükleme durumu için film-kaplama arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmde oluşan eksenel normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımı. Grafikteki değerler homojen kaplama durumu, yani $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1$, ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L_f / h_f = 100$, $Q = 78$ N/mm değerleri içindir. Sürekli çizgiler analitik, noktalar ise SEA sonuçlarıdır.

3.2 Uzak Alan Yükleme Durumu (Sabit Gerinim)

Film normal gerilimi $\sigma_{xx}^f(x)$ 'deki, ve film-kaplama arayüzündeki kayma gerilimi, $\tau_{xy}^f(x)$ 'deki değişimler, Şekil 3.14 ve 3.15'te Γ , Şekil 3.16'da L/h_c , Şekil 3.17'de L/h_f ve Şekil 3.18'de λ değiştirgenlerinin farklı değerleri için çizilmiştir. Film kalınlığı boyunca alan değişkenleri düzgün dağılı kabul edildiğinden dolayı filmdeki aksenal normal gerilme sadece x 'in fonksiyonu olarak yazılmıştır. Arayüzey kayma gerilmesi yazılırken de y koordinatının sıfır olduğu varsayıldığından $\tau_{xy}^f(x, 0) = \tau_{xy}^f(x)$ olarak gösterilmiştir. Film uçlarındaki gerilme tekillik şiddetindeki değişim, farklı kaplama derecelendirme oranı Γ 'ya karşı Şekil 3.19a'da farklı λ değerleri, Şekil 3.19b'de farklı L/h_f değerleri ve Şekil 3.19c'de de farklı L/h_c değerleri için çizilmiştir. Şekillerdeki grafikler koordinat sisteminin sadece çeyrek kısmında (bir dördülünde) gösterilmiştir; çünkü, sistemdeki simetrik yükleme simetrik gerilme dağılımına neden olmaktadır. Şekillerdeki oklar ilgili parametrenin artan yönünü göstermektedir.

Uzak alan yüklemesi durumunda genel şekil itibariyle film-kaplama arayüzey gerilme dağılımı, kolunu bir uçta yukarı, öteki uçta aşağı indirmiş kafası y -ekseninde olan bir insanın omuzuyla kollarının oluşturduğu profili andırmaktadır. Omuz bölgesi düze yakın olup filmin ortasına denk gelmektedir. Filmdeki normal gerilmeler ise film ortasında zirvesi olan bir tümsek şeklindedir.

Film boyunun kaplama kalınlığına oranı, L/h_c , arttıkça, gerilme değerlerini ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) artırma veya azaltmada kaplama malzemesini derecelendirme daha da etkili olmaktadır (bkz. Şekil 3.14). Sabit film boyu için kaplama kalınlığı azaldıkça (yani L/h_c arttıkça) kaplama uyarlığının içeri doğru arttığı durumlarda (yani $\Gamma < 1$) gerilme değerlerinin ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) azalmasına rağmen; kaplama uyarlığının içeri doğru azaldığı durumlarda (yani $\Gamma > 1$) gerilme değerleri artmaktadır (bkz. Şekil 3.14 ve 3.16). Bu nedenle gerilme değerlerinin

düşürülmesinde kaplamanın derecelendirilme şekli (içeri doğru mu yoksa dışarı doğru mu uyarılığının artacağı) önem kazanmaktadır. Şekil 3.14'teki kaplamanın farklı derecelendirme şekilleri/değerleri için çizilmiş film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ çoklu-grafiklerine bakarsak gülen bir insan ağzı şeklini görebiliriz: dudağın ortasındaki çizgi homojen kaplama durumunu temsil etmekte ve film boyunun kaplama kalınlığına oranı, L/h_c , arttıkça dudağın daha fazla açılarak gülümseyiş derecesinin arttığını yani ilgili grafik çizgilerinin daha fazla saçıldığını görebiliriz. Bu nedenle bu şekilleri, müsadenezle, “Güler şekil” olarak adlandıracağız.²⁵ Şimdi bu gülümseyiş benzeşimi ışığında baktığımızda: arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ grafikleri açısından sabit film boyu için kaplama kalınlığı azaldıkça çoklu-grafik şekli daha da “Güler” hâle gelmektedir (bkz. Şekil 3.14).

Bölüm 3'ün baş kısmında bahsedildiği üzere uzak alandan simetrik yükleme durumuna filmde eş değer simetrik yükleme durumu sonuçları Şekil 3.15'te gösterilmiştir. Eş değer yükleme durumunda, film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ açısından sonuçlar tamamen Şekil 3.14'tekiyle aynı olup, filmdeki normal gerime $\sigma_{xx}^f(x)$ dağılımlarında kaplama derecelendirme oranı Γ 'nın artış yönünü gösteren okun yönü ters dönmüş ve bütün derecelendirme oranları için mutlak değerce en büyük normal gerilme değeri aynı olup, bu değer kuvvetin filme uygulandığı uçlarda oluşmuştur. Kayma gerilmesi açısından uzak alan yüklemesine eş değer film yüklemesi durumunda, filmdeki en küçük normal gerilme değeri bile uzak alandan yükleme durumundaki ilgili en büyük normal gerilme değerinden daha büyük çıkmıştır (bkz. Şekil 3.14 ve 15). Film uçlarından yükleme durumunda, normal gerilmenin en büyük değeri açısından bir etkisi olmasa da, film ortasında ($x = 0$) oluşan normal gerilmenin en küçük değerleri açısından kaplamanın kalınlığı ve derecelendirme oranı/şekli Γ etkili olmaktadır (bkz. Şekil 3.15).

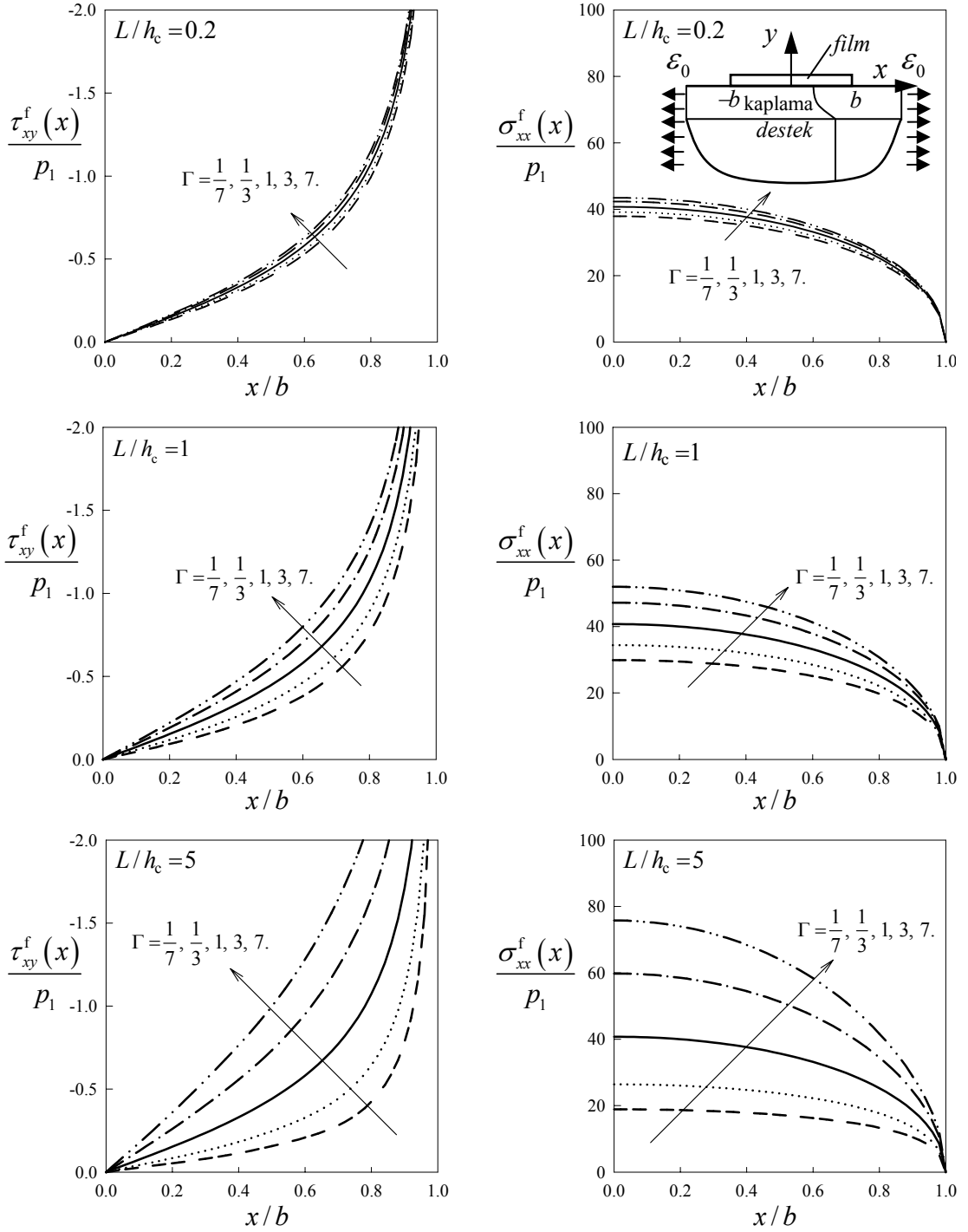
²⁵ Bu aynı zamanda soyadı Güler olan tez hocamın yüzündeki -her görüşümde beni çalışma konusunda isteklendiren- gülümseyişlere bir atıftır.

Kaplama uyarlılığının içeri doğru azaldığı ($\Gamma = 7$) veya arttığı ($\Gamma = 1/7$) durumlarda sabit film boyu ve $\lambda = 0.01$, $L/h_c = 5$ değerleri için film kalınlığı azaldıkça (yani L/h_f arttıkça) arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ düşmekteyken filmdeki normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ artmaktadır (bkz.Şekil 3.17). Bu davranış filmdeki aksel normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ ile film kalınlığı h_f arasındaki ters bağıntıdan kaynaklanmaktadır (bkz. denklem (2.107)). Filmdeki aksel normal gerilme aynı zamanda kayma gerilmesinin tümlevine de bağlıdır fakat bu durumda film kalınlığındaki artışın yarattığı artırıcı etki kayma gerilmesindeki azalışın yaratacağı azaltıcı etkiden daha baskın çıkmaktadır. Kaplama uyarlılığının içeri doğru arttığı ($\Gamma = 1/7$) durumda gerilme değerleri kaplama uyarlılığının içeri doğru azaldığı ($\Gamma = 7$) durumdaki ilgili değerlerden daha düşüktür.

Kaplama uyarlılığının içeri doğru azaldığı ($\Gamma = 7$) veya arttığı ($\Gamma = 1/7$) durumlarda $L/h_f = 100$, $L/h_c = 5$ değerleri için filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlılığı (λ) artıkça gerilme değerleri ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) azalmaktadır (bkz.Şekil 3.18). Burada da Şekil 3.17’de olduğu gibi kaplama uyarlılığının içeri doğru arttığı ($\Gamma = 1/7$) durumda gerilme değerleri kaplama uyarlılığının içeri doğru azaldığı ($\Gamma = 7$) durumdaki ilgili değerlerden daha düşüktür.

Film uçlarındaki kayma gerilmesi aykırılık şiddetindeki (A) değişim Şekil 3.19’da verilmiştir. Film boyunun kaplama kalınlığına oranı L/h_c ve film narinlik oranı L/h_f ’nin sabit değerleri için, film altındaki malzemeden daha sert oldukça kayma gerilmesi tekillik şiddeti, A , artmakta ve kaplama derecelendirme oranı Γ ’nın etkisi daha da önem arz etmektedir (bkz. Şekil 3.19a). Film boyunun kaplama kalınlığına oranı $L/h_c = 1$ ve filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlılığı $\lambda = 0.01$ iken, film narinlik oranı L/h_f arttıkça film uçlarındaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti değeri, A , düşmekte ve kaplama derecelendirme oranı $\Gamma < 1$ olduğu yerlerde düşüş oranının daha da arttığı görülmektedir (bkz. Şekil 3.19b). L/h_f ve λ sabit ve $\Gamma = 1$ iken film

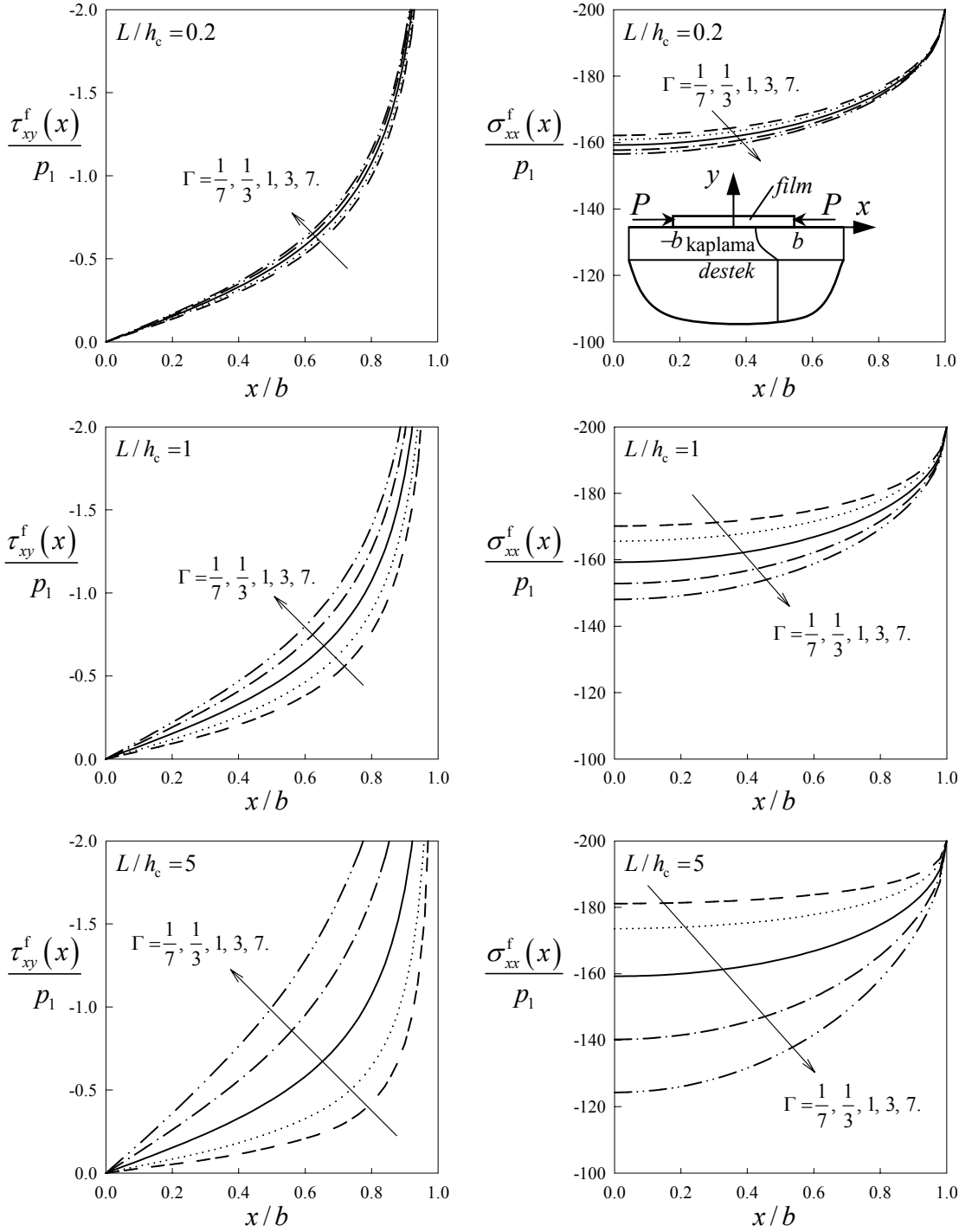
boyunun kaplama kalınlığına oranı L/h_c 'deki değişimin film ucundaki gerilme tekillik şiddeti , A , üzerinde hiçbir etkisi yoktur. Film boyunu sabit kabul edersek, film uçlarındaki gerilme tekillik şiddeti A 'nın düşürülmesi için kaplama uyarlığının içeri doğru arttığı durumda (yani $\Gamma < 1$) daha ince, azaldığı durumdaysa (yani $\Gamma > 1$) daha kalın bir kaplama seçilmelidir (bkz. Şekil 3.19c).



Şekil 3.14 Uzak alan yüklemesi durumunda kaplama derecelendirme oranının ($\Gamma = \mu_s / \mu_0$) ve film boyunun kaplama kalınlığına oranının (L/h_c) değişik değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ grafiği. Bu grafiklerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L/h_f = 100$,

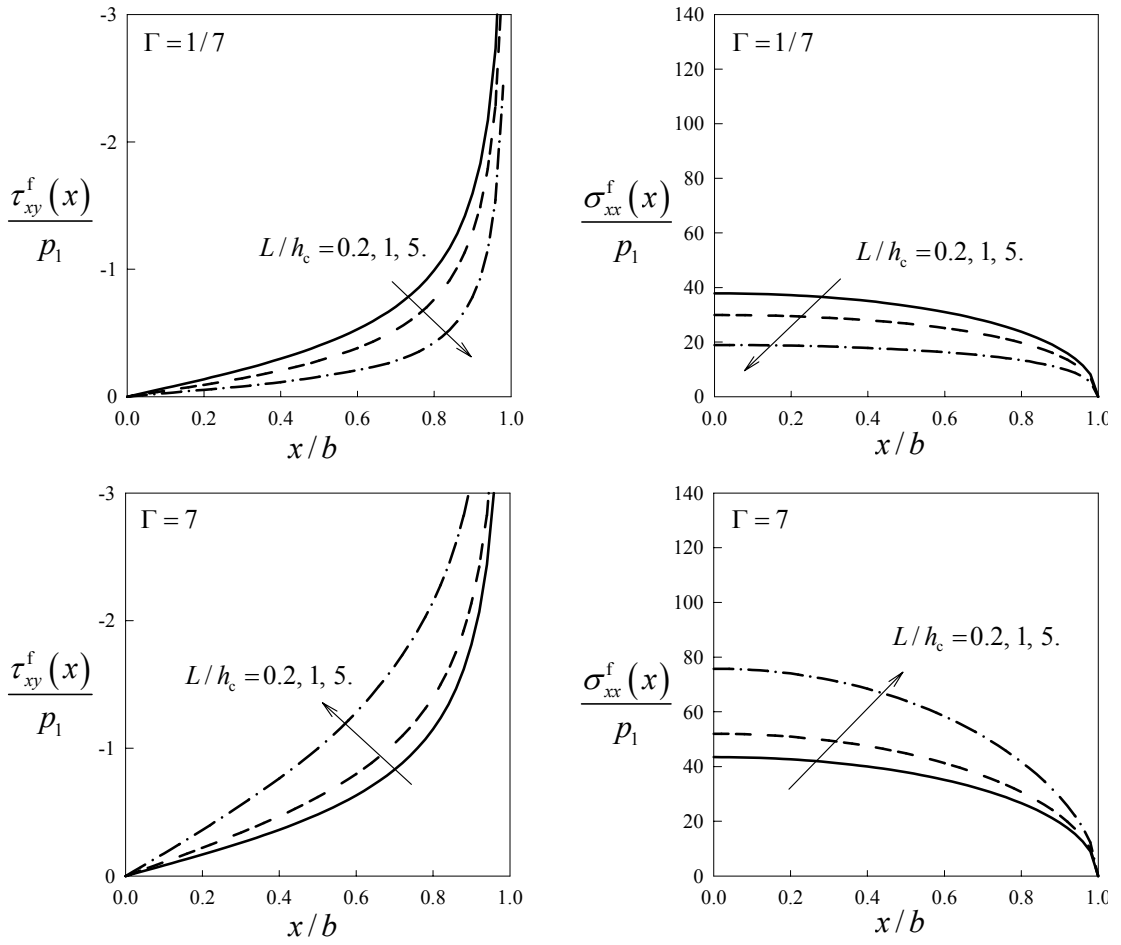
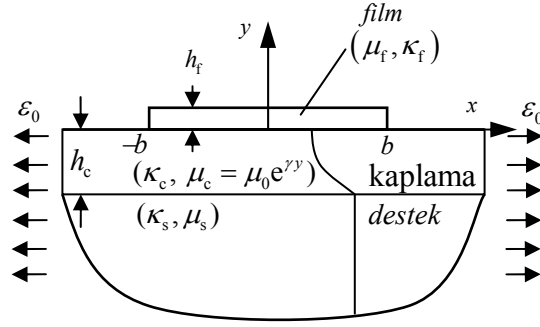
$$p_1 = \frac{4\mu_0\epsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$$

alınarak elde edilmiştir.

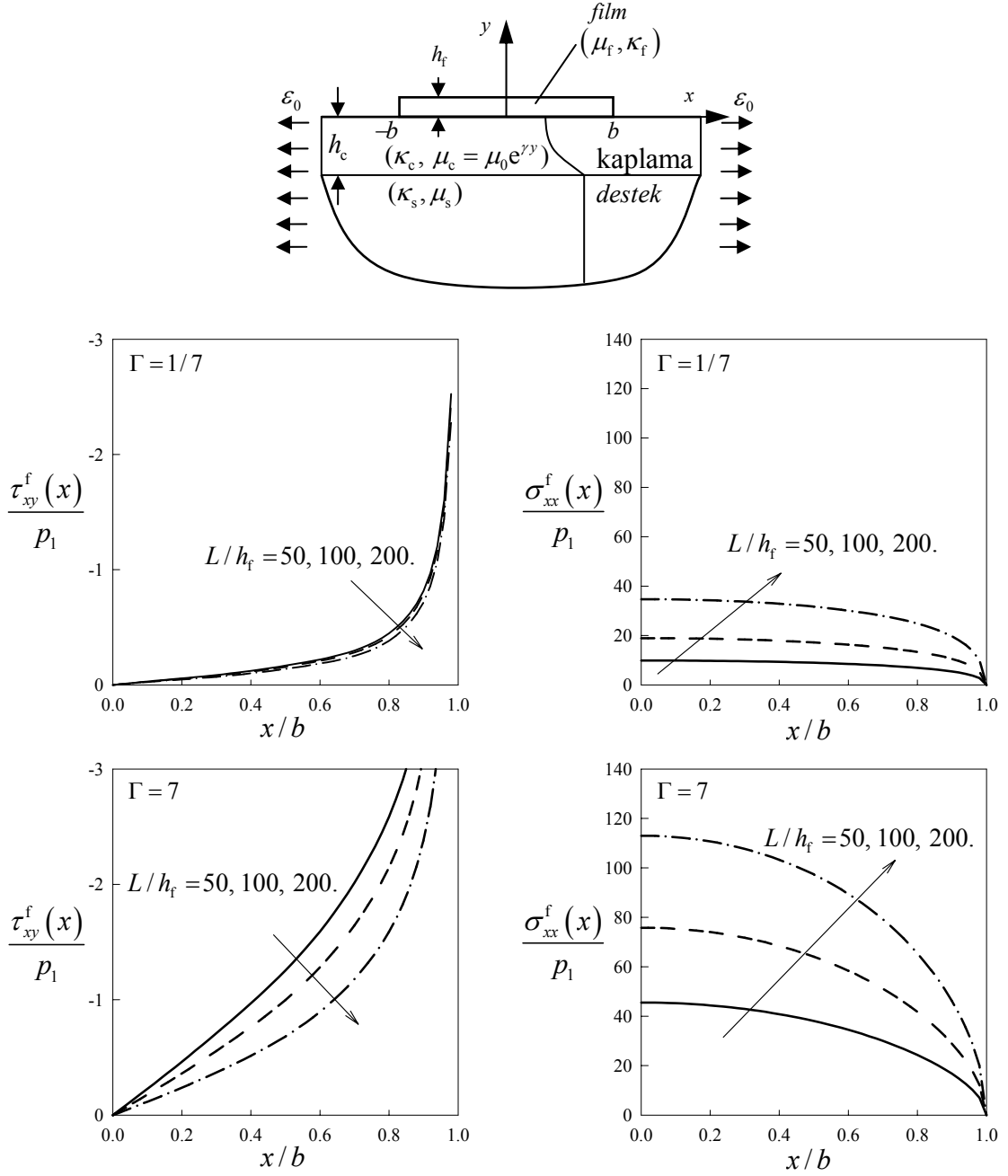


Şekil 3.15 Film uçlarından, uzak alan yüklemesine (bkz. Şekil 3.14) eş değer simetrik film yüklemesi durumunda kaplama oranının ($\Gamma = \mu_s / \mu_0$) ve film boyunun kaplama kalınlığına oranının (L/h_c) değişik değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki normal gerilme $\sigma_{xx}^f(x)$ grafiği. Bu grafiklerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve

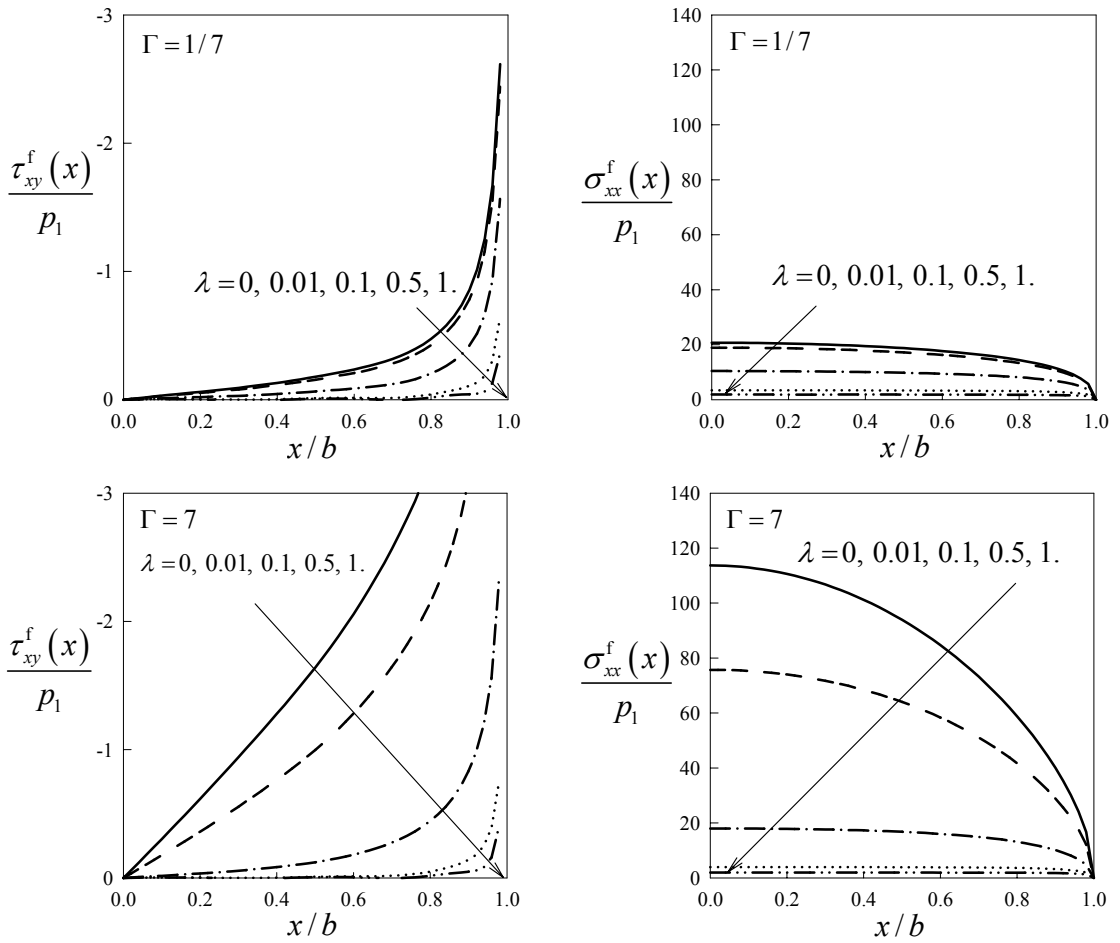
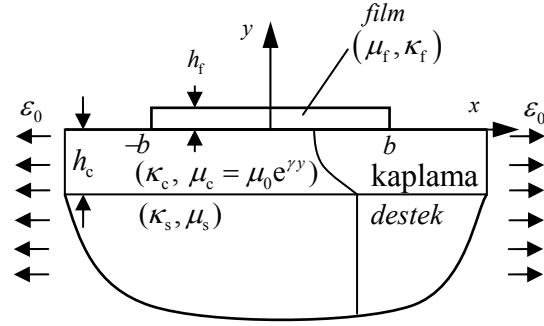
$$v_s = v_c = v_f = 0.3, \lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01, L/h_f = 100, p_1 = \frac{4\mu_0\varepsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$$



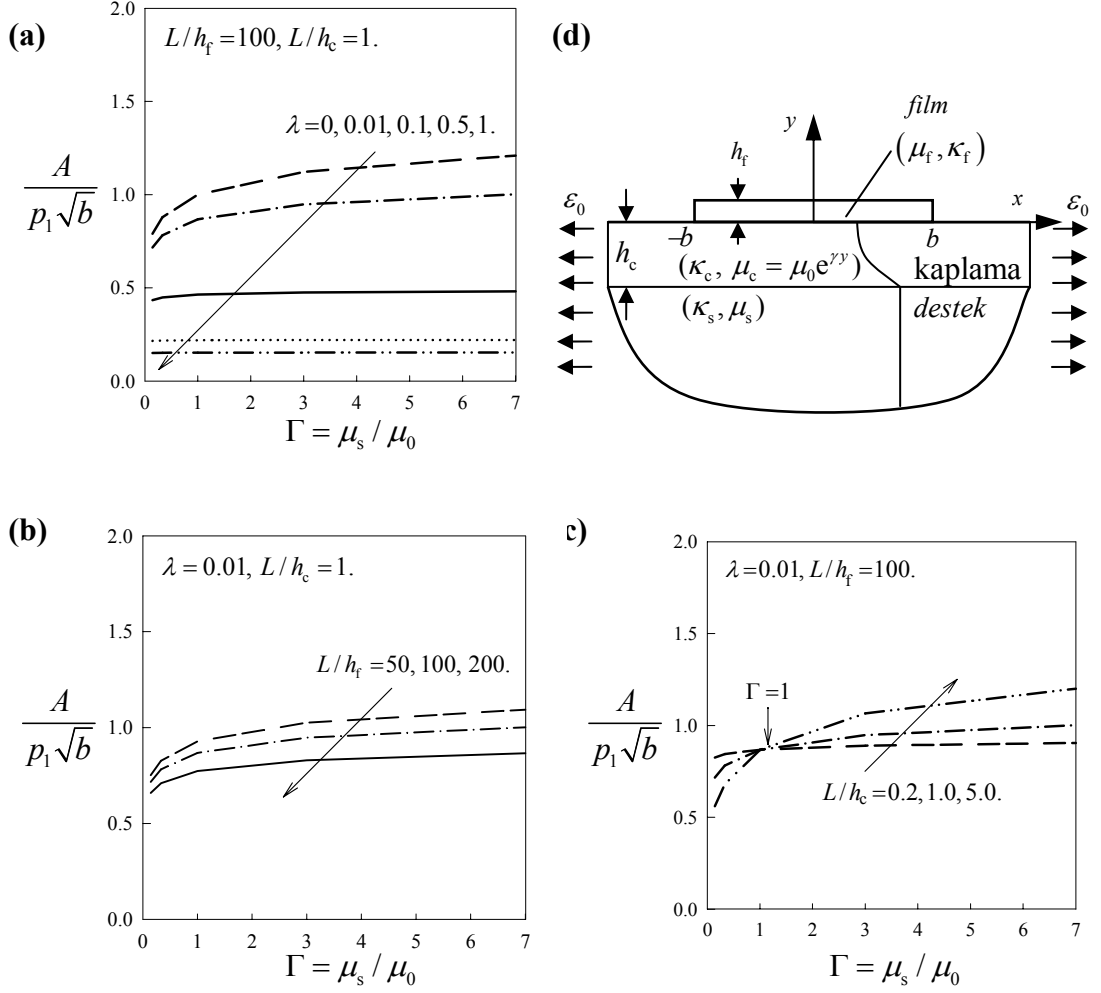
Şekil 3.16 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve L/h_c değıştireninin farklı değeri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki aksel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L/h_f = 100$, $p_1 = \frac{4\mu_0\epsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir.



Şekil 3.17 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve L/h_f değerlerinin farklı değerleri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki eksenel normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f = 0.01$, $L/h_c = 5$, $p_1 = \frac{4\mu_0 \epsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir.



Şekil 3.18 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken, kaplama derecelendirme oranı $\Gamma = \mu_s / \mu_0 = 1/7$ ve $\Gamma = 7$ ve $\lambda = \mu_0 / \mu_f$ değıştirgeninin farklı değeri için film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi $\tau_{xy}^f(x)$ ve filmdeki aksenal normal gerilme dağılımı $\sigma_{xx}^f(x)$. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$, $L/h_f = 100$, $L/h_c = 5$, $p_1 = \frac{4\mu_0\epsilon_0}{(\kappa_c + 1)}$ alınarak elde edilmiştir.



Şekil 3.19 Sistem uzak alan gerinim yüklemesi altındayken $\Gamma = \mu_s / \mu_0$, $\lambda = \mu_0 / \mu_f$, L/h_f ve L/h_c değişirgenlerinin farklı değerleri için film ucundaki kayma gerilmesi tekillik şiddeti (A) değişimi. Şekillerdeki sonuçlar düzlem gerinim varsayılarak ve $\nu_s = \nu_c = \nu_f = 0.3$ alınarak elde edilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yapılan analiz ve ulaşılan bulgulara (Bölüm 3) dayanılarak işlevsel derecelendirilmiş kaplamalara bağlı *ince filmlerle* ilgili aşağıdaki yargılara varabiliriz:

- İşlevsel derecelendirilmiş kaplamalara/malzemelere bağlı *ince filmlerle* yapılarda film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi fonksiyonunun asimptotik davranışını ifade eden ağırlık fonksiyonları filmin her iki ucunda da kareköksel tekilliğe sahiptir (bkz. EK 11).
- Uzak alan yüklemesi durumu için elde edilen sonuçlar (bkz. kısım 3.2), arayüzey bölgesi ve arayüzey kayma gerilmesi (ve dolayısıyla kayma gerilmesi tekillik şiddeti) açısından ele alındığında, aynı zamanda simetrik film yüklemesi için de geçerlidir.
- Yükleme yönü değiştiğinde (yani yapıya etkiyen bütün yüklerin yönlerinin zıt yöne çevrildiği durumda) gerilme değerleri ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) ve dolayısıyla film ucu kayma gerilmesi tekillik şiddeti değeri mutlak değerce önceki yükleme durumundakilerle aynı olup sadece işaret değiştirmektedir. Sonuçların mutlak değerce aynı olmasına rağmen, malzemelerin çeki ve bası yüklemesi altındaki mukavemetleri ve hasar şekilleri aynı olmayabileceğinden dolayı dikkatli olunmalıdır.
- Uzak alan yüklemesi ve simetrik film yüklemesi durumlarında, film uçlarındaki arayüzey kayma gerilmesi tekillik şiddetinin daha az olması için kaplamanın derecelendirilme şekli ve filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlığı önem kazanmaktadır. Kaplama uyarlığının içeri doğru artırılması (yani $\Gamma < 1$ seçilmesi) ve filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlığının *mümkün* olduğunca yüksek seçilmesi gerekmektedir (yani $\lambda \geq 1$ seçilmelidir).
- Tek uçlu film yüklemesi durumunda arayüzey kayma gerilmesi dağılımının film uçlarında gradyanının arttığı ve kuvvetin uygulandığı uçta en büyük değerine ulaştığı görülmüştür. Filmdeki aksenal normal gerilme kuvvet uygulanmayan uçta sıfır iken kuvvetin uygulandığı uçta en büyük değerindedir.

- Filmden çift uçlu (simetrik ve antisimetrik) yükleme durumunda, hem arayüzey kayma gerilmesi hem de filmdeki aksenal normal gerilme film uçlarında mutlak değerce en büyük değerlerine ulaşmaktadır.
- Uygulanan kuvvetlerin büyüklüğü aynı olduğu sürece antisimetrik yükleme (uçlardan eş büyüklükte ve yöndeş kuvvetlerle yükleme) simetrik yüklemeye (uçlardan eş büyüklükte ve zıt yönlü kuvvetlerle yükleme) göre film uçlarında daha fazla kayma gerilmesi tekillik şiddetine yol açacaktır (literatürde [10] verilen sonucun aksine).
- Film kalınlığını veya filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlık değiştirgenini (λ) özellikle film uçlarında değiştirerek oluşan kayma gerilmesi tekillik şiddetinin azaltılması veya daha düzgün arayüzey kayma gerilmesi dağılımının elde edilmesi *mümkün* görünmektedir (bkz. denklem (2.113)). Filmin kaplama üst yüzeyine göre uyarlık değiştirgeni (λ) film veya kaplama malzemesinin yatay doğrultuda derecelendirilmesiyle değiştirilebilir.

Geleneksel malzemelerde, mekanik temas içerisinde olanların aşınma dayanımını artırmak, kimyasal temas içerisinde bulunanlarda ise çevresel etkilere karşı koruma sağlamak amacıyla; kompozit malzemeler veya akıllı sistemler gibi alanlarda ise yerden/enerjiden tasarruf, özgül mukavemet yüksekliği, hafiflik gibi amaçlarla ince *film* ve *işlevsel derecelendirilmiş malzeme* içeren çok katmanlı yapılar kullanılmaktadır. Bu çok katmanlı yapılardan biri olan film-kaplama-*destek* üçlü yapısı bu tezde incelenmiş olup katmanların geometrik veya mekanik özelliklerinin seçiminde tasarım safhasında benzeri analitik çalışmalara başvurulmasının faydalı olacağı düşünülmektedir. Bu çalışmanın sonuçları – ilgili uygulama için buradaki hipotezler yeterince geçerli olduğu sürece – kaplamalara bağlı *ince filmlerin* tasarım veya üretimi açısından başlangıç olarak alınabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Grummon, D.S., Pence T.J., Thermotractive Titanium-Nickel Thin Films for Microelectromechanical Systems and Active Composites, Materials for Smart Systems II: Symposium, 331-343, Boston, Massachusetts, USA, December 1996.
- [2] Takagi, T., A perspective of the intelligent materials, Proceedings of the the First International Conference on Intelligent Materials, *Technomic Pub.* , 1993, pp.4-7.
- [3] Nix, W.D., Mechanical Properties of Thin Films, Class Notes, *Stanford University*, January 2005.
- [4] Esmaili, N., Talaie, A., Pattern Recognition in Clasification of Intelligent Composites during Smart Manufacturing, Springer-Verlag, 944-958, 2003 pp. 944-958.
- [5] "Machine Design/Ceramic Matrix Composites," erişim adresi: http://www.machinedesign.com/BDE/materials/bdemat3/bdemat3_5.html, erişim tarihi: Aralık 2007.
- [6] Freund, L.B., Suresh, S., Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution, *Cambridge University Press*, 2003.
- [7] Lüth, H., Solid Surfaces, interfaces, and Thin Films, 4th ed., *Springer*, 2001, pp.1-18.
- [8] Guler, M.A., Erdogan, F., Dag, S., Modeling of thin films and cover plates bonded to graded substrates, Proceedings of the Multiscale and Functionally Graded Materials Conference, Honolulu, Hawaii, 2006, Editors G. H. Paulino, M.-J. Pindera, R. H. Dodds, Jr., F. A. Rochinha, E. V. Dave, and L. Chen, American Institute of Physics, 978, 790 - 795, 2008.
- [9] Guler, M.A., Mechanical Modeling of Thin Films and Cover Plates Bonded to Graded Substrates, *J. Appl. Mech.*, Transactions ASME 75 5, Article Number: 051105, 2008.
- [10] Erdogan, F., Gupta G.D., *J. Appl. Mech.*, The Problem of an Elastic Stiffener Bonded to a Halfplane, 38(4), 937, 1971;.
- [11] Bescoter, S.U., Analysis of a Single Stiffener on an Infinite Sheet, *J. Appl. Mech.*, 16(3), 242-246, 1949.
- [12] Reissner, E., Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet, *Proc. N.A.S.*, USA, 26, 300-305, 1940.
- [13] Buell, E.L., On the Distribution of Plane Stress in a Semi-infinite Plate with Partially Stiffened Edge, *J. Math. Phys.* 26, 223-233, 1948.
- [14] Koiter, W.T., On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 8, 164-178, 1955.
- [15] Brown, E.H., The Diffusion of Load from a Stiffener into an Infinite Elastic Sheet, *Proc. R. Soc. London, Ser. A.*, 239(1218), 296-310, 1957.
- [16] Bufler, H., Scheibe mit endlicher elastischer Versteifung, *VDI-Forschungsh.*, 485, 1961.
- [17] Hu, S. M., Film-edge-induced Stress in Substrates, *J. Appl. Phys.*, 50(7), 4661-4666, 1979.

- [18] Erdogan, F., Joseph, P.F., Mechanical Modeling of Multilayered Films on an Elastic Substrate – Part I: Analysis, *J. Electron. Packag.*, 112:309, 1990.
- [19] Shield, T.W., Kim, K.S. *Int. J. Solids Struct.*, 29(9), 1085, 1992.
- [20] Arutiunian, N. Kh., Contact Problem for a Half Plane with Elastic Reinforcement, *J. Appl. Math. Mech.* (Translation of *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*), *PMM*, 32(4), 652-665, 1968.
- [21] Melan, E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen, *Ing. Arch.*, 3(2), 1932.
- [22] Alaca, B.E., Saif, M.T.A., Sehitoglu, H, *Acta Mater.*, 50, 1197, 2002.
- [23] Guler, M.A., 2001, Contact Mechanics of FGM Coatings, PhD Thesis, Lehigh University, Bethlehem, PA, USA.
- [24] Guler, M.A., Erdogan, F., Contact Mechanics of Graded Coatings,” *Int. J. Solids Struct.*, 41, 3865-3889, 2004.
- [25] Schwarzer, N., Coating Design due to Analytical Modelling of Mechanical Contact Problems on Multilayer Systems, *Surface and Coatings Technology*, 133-134, 397-402, 2000.
- [26] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., *McGraw-Hill*, 1970, p.97.
- [27] Erdogan, F, Gupta, G.D., On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, *Quart. Appl. Math.*, 29, 525-534, 1972.
- [28] Hutchinson, J.W., Yu, H.H., He, M.Y., Edge effects in Thin Film Delamination,” *Acta Mater.*, 49, 93-107, 2001.
- [29] Erdogan, F., Damage and Failure of Interfaces, in *Proceedings of the First International Conference on Damage and Failure of Interfaces*, Vienna, Austria, September 1997.
- [30] Bufler, H., Theory of Elasticity of a Multilayered Medium, 1971, *J. Elast.*, 1, 125-143, 1971.
- [31] Suhir, E., Stresses in Bi-metal Thermostats, *J. Appl. Mech.*, 53, 657-660, 1986.
- [32] Jain, S.C. , Harker, A.H., Atkinson, A. and Pinaridi, K., Edge-induced stress and strain in stripe films and substrates: A two-dimensional Finite Element Calculation, *J. Appl. Phys.*, 78 (3), 1630-1637, 1995.
- [33] Hsueh, C-H, Analyses of Edge Effects on Residual Stresses in Film Strip/Substrate Systems, *J. Appl. Phys.*, 88(5), 3022-3028, 2000.
- [34] Jain, S.C., Maes, H.E., Pinaridi, K., De Wolf, I., Stresses and Strains in Lattice-Mismatched Stripes, Quantum Wires, Quantum Dots, and Substrates in Si Technology, *J. Appl. Phys.*, 79 (11), 8145-8165, 1996.
- [35] Hu, S.M., Stress-related Problems in Silicon Technology, *J. Appl. Phys.*, 70 (6), R53-R80, 1991.
- [36] Hein, V.L., Erdogan, F., Stress Singularities in a Two-Material Wedge, *Int. J. Fract. Mech.*, 7(3), 317-330, 1971.
- [37] Suresh, S. and Mortensen, A., *Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*, *IOM Communications Ltd*, 1998.
- [38] Güler, M.A., Gülver, Y.F., Dağ S., İşlevsel Derecelendirilmiş Malzemelere Bağlı İnce Filmlerin Mekanik Modellenmesi, *Uluslararası Toz Metalürjisi Konferansı-5*, TOBB ETÜ, 369-378, Ankara, Eylül 2008.

- [39] Guler, M.A., Gülver, Y.F., Dag S., Mechanical Modeling of Thin Films Bonded to Functionally Graded Materials, *Mater. Sci. Forum*, 631-632, 333-338, 2010.
- [40] Malvern, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, *Prentice-Hall*, 1969.
- [41] Linkov, A.M., Boundary Integral Equations in Elasticity Theory, *Kluwer Academic Publishers*, 2002, p.9.
- [42] Spiegel M.R., Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems, *Schaum's Outlines, McGRAW-HILL*, 1974, p.92.
- [43] Churchill, R.V. , Operational Matematics, *McGraw-Hill*, 3rd. ed., 1972, pp.383-400.
- [44] Akyıldız, E., Alpay, Ş., Erkip A., Differential Equations, *METU Press*, Ankara, 1990.
- [45] Erdogan, F., Joseph, P.F., Mechanical Modeling of Multilayered Films on an Elastic Substrate – Part II: Results and Discussion, *J. Electron. Packag.*, 112, 317, 1990.
- [46] Finot, M., Suresh, S., Small and Large Deformation of Thick and Thin-Film Multi-Layers: Effects of Layer Geometry, Plasticity and Compositional Gradients, *J. Mech. Phys. Solids*, 44 (5), 683-721, 1996.
- [47] Liu, X.H., Suo, Z., Ma, Q., Split Singularities: Stress Field Near the Edge of a Silicon Die on a Polymer Substrate, *Acta Mater.*, 47 (1), 67-76, 1999.
- [48] Takahashi, M., Yotsugi, S., Thermoelastic Analysis of Interfacial Stress and Stress Singularity Between a Thin Film and Its Substrate, *J. Therm. Stresses*, 26, 963–976, 2003.
- [49] Zhang, X.C., Xu, B.S., Wang, H.D., Wu, Y.X., Analytical Modeling of Edge Effects on the Residual Stresses Within the Film/Substrate Systems. II. Normal Stresses, *J. Appl. Phys.*, 100 (11), 113525-1-113525-8, 2006.
- [50] Zhang, X.C., Xu, B.S., Wang, H.D., Wu, Y.X., Jiang, Y., Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings, *Mater. Des.*, 28, 47–54, 2007.
- [51] “Meriam-Webster Online Dictionary,” erişim adresi: <http://www.m-w.com/dictionary/substrate+>, erişim tarihi: Aralık 2007.
- [52] Tez Hocam M. A. Güler ile 06 Ağustos 2009'daki görüşme.
- [53] Thin film, “Dictionary of Materials Science,” *McGraw-Hill*, 2003, pp.346-347.
- [54] “FGMs DataBase, Japonya” erişim adresi: http://fgmdb.nal.go.jp/e_whatsfgm.html#3, erişim tarihi: 2007.
- [55] “Torr,” Büyük Larousse Sözlük ve Ansiklopedisi, *Milliyet Gazetecilik A.Ş.*, 1992, c.22, s.11646.
- [56] “Türk Dil Kurumu, Bilim ve Sanat Terimleri Ana Sözlüğü,” erişim adresi: <http://www.tdk.gov.tr/>, erişim tarihi: 2008-2009.
- [57] Andrews, G.E., Ashey, R., Roy, R., Special Functions, *Cambridge University Press*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 2006, p.101.
- [58] Filon, L.N.G., On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load, with Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 201, 63-155, 1903.

- [59] Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., *Dover Pub.*, 1944, pp 138, 207-208.
- [60] Sokolnikoff, I.S., Matematik Elastisite Teorisi, çeviri: Şuhubi E.S., *İTÜ Kütüphanesi*, sayı 613, İstanbul, 1965, s.299-303.
- [61] Amenzade, Yu.A., Theory of Elasticity, çeviri: Konyaeva M., *MIR Publishers*, Moscow, 1979, pp.111-115.
- [62] Erdelyi, A., ed., Higher Transcendental Functions, Vol.2, *McGraw-Hill*, New York, 1953.
- [63] Muskhelishvili, N.I., Singular Integral Equations, translated from 1946 Moscow 2nd edition, *P. Noordhoff N.V.*, Groningen-Holland, 1953.
- [64] Erdogan, F., Mixed Boundary-value Problems in Mechanics, *Mechanics Today*, Vol.4, ed. by Nemat-Nasser, S., *Pergamon Press Inc.*, New York, 1978, pp.1-86.

EKLER

EK 1: Genel Gösterim ve Adlandırma

Formülasyon bölümünde – büyük Grek harfleri dışındaki – bütün skaler değişkenler ve değiştirgenler (parametreler) eğik harflerle; sabit sayılar (e, π, i gibi), büyük Grek harfleri ve ortamın adına ilişkin bilgi vermek amacıyla kullanılan üs veya indisler ve metinsel açıklamalar ise dik harflerle; vektör ve matrisler ise dik ve kalın harflerle gösterilmiştir. Bu şekilde gösterim uluslararası bilimsel yayınlarda – herkes aynı hassasiyeti göstermese de – genelde kullanıldığı için tercih edilmiştir (kısmen mantıksal kısmen de estetik sebeplerden kullanılıyor olsa gerek). Formül numaraları verilirken abecesel sıralama kullanılmış olup harfler arasına konulan virgül ilk harften başlayıp ikinci harfe kadar formülün devam ettiğini göstermektedir. Tezle ilgili yapılan/yapılacak uluslararası çalışmalarda da aynen kullanılabilmesi için (Latin alfabesiyle uyumlu olması açısından) Türkçe aksanlı harfler formül adı olarak kullanılmamıştır.

Metin içerisinde geçen taksim işareti (/) yakın anlamlı veya birbirinin yerine geçebilecek kelimeleri/ifadeleri belirtmek için kullanılmıştır.

Metin içerisinde eğik harflerle gösterilmiş kelimeler/ifadeler EK 2’de Türkçe-İngilizce Terimler kısmında açıklamasıyla birlikte verilmiş olanlardır.

Özel isimlerden kendi dillerinde Latin harfleriyle yazılanlar aynen; diğer alfabelerde (örneğin Kiril alfabesi) yazılanlar ise ana dillerindeki telaffuzu esas alınarak Türk abecesiyle yazılmıştır. Ana dilindeki telaffuzu bilinmeyenler, parantez içerisinde hangi dilde yazıldıkları belirtilerek verilmiştir.

Fen Bilimleri Enstitüsü “Lisansüstü Tez Yama Kılavuzu”ndaki öneriye uygun olarak bu tezdeki terimler “web” sayfasından yayınlanan Türk Dil Kurumu’nun (TDK) “Bilim ve Sanat Terimleri Ana Sözlüğü”nde geçen Türkçe kelimeler esas alınarak yazılmıştır. Aynı terim için TDK sözlüğünde birden fazla kelime geçtiği durumda (mesela vektör ve yöney; matris ve dizey gibi), o terimin yaygın kullanımı (vektör ve matris) tercih edilmiştir. Yaygın olmasına rağmen (integral gibi) TDK sözlüğünde geçmeyen yabancı kökenli kelimeler yerine sözlükte geçen Türkçe karşılıkları (tümlev gibi) kullanılmıştır.

EK 2: Türkçe-İngilizce Terimler

Alan: **field**

Tekil: aykırı, singüler; **singular**

Boylandırma: normalizasyon; **normalisation**

Çekirdek: Tümlev(integral) dönüşüm denklemlerinde üstel terimin yanında olan fonksiyon; **Kernel**

Destek: Altlık, arkalık gibi anlamlara gelen, Latince ‘substratum’ kelimesinden türemiş ‘substrate’ yerine kullanılmıştır [51]. **Substrate**

Değiştirgen: parametre; **parameter**

Dış kaynaklı: **extrinsic**

Düzenlilik şartı: Bkz. “Serbest yayılan etkinin sonsuzda sönümlenmesi şartı;” **Regularity condition** [52].

Eklenik: **adjoint**

Gerilme tekillik şiddeti: **strength of stress singularity** [10] (gerilme tekillik mertebesi ile karıştırılmamalı, bkz. EK 11).

Gerinim: **strain**

Gerinim rahatlama: **strain relaxation**

İç kaynaklı: **intrinsic**

İnce film: Bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok küçük olan malzeme katmanı (analitik tanım, bkz. [3]). Bir’den birkaç yüz molekül kalınlığına kadar katı (cam, seramik, yarı iletken v.b.) *destek* malzemesi üzerine biriktirilmiş film malzeme veya *destek* sıvısı üzerinde bir katman (malzeme bilimsel tanım, bkz. [53]). “Zar” olarak da adlandırabiliriz. Metin içerisinde ince sıfatı kullanılmadan da bazı yerlerde sadece film olarak kullanılmıştır, kastedilen *ince film*dir; **Thin film**

İşleç: **operator**

İşlevsel derecelendirilmiş malzeme (İDM): İşlev veya kompozisyonu sürekli veya ayrık bir şekilde bir taraftan diğer tarafa değişen malzeme [54]; **functionally graded material (FGM)**

Kavlama/soyulma gerilmesi: **peeling stress**

EK 2: Türkçe-İngilizce Terimler – Devam

Mümkün: Olabilir (Olası/muhtemel kelimesi ile karıştırılmamalıdır. Bir şey mümkün olmasına rağmen o şeyin gerçekleşme olasılığı çok düşük hatta hiç olmayabilir); **possible (Different from probable. A thing can be possible but maynot be probable)**

Serbest yayılan etkinin sonsuzda sönümlenmesi şartı: Yön-bağımsız ve homojen bir ortamda sınırlı büyüklükte ve serbestçe yayılan etkinin büyüklüğünün enerji korunumu gereği etki kaynağından uzaklaştıkça sönümlenmesi beklenir. Ancak, yön bağımlı ve enerji korunumlu homojen olmayan ortamlarda bu şart bozulabilir. Bu maddedeki açıklamalar, bir tanım önerisi olup analitik olarak incelenip doğrulanması gerekmektedir. Bu şarta matematik açısından “düzenlilik şartı” da denmektedir.

Sürekli ortam hipotezi/yaklaşımı: ortamdaki malzemenin moleküler/atomik yapısı ihmal edilir ve boşluksuz sürekli bir malzemedan oluşmuş ortam olarak kabul edilir. Ayrıca birleşme yüzeyleri dışındaki bütün yerlerde teoriye giren bütün fonksiyonların sürekli olduğu kabul edilir. Bu kabul, teoride yer alan fonksiyonların türevlerinin de sürekli kabul edildiğine işaret eder [40]. **Continuum (or continuous medium) hypothesis**

Taşıma Hattı: lifting line

Torr: 1 mm’lik normal cıva yüksekliğine denk düşen basınç. Torricelli’ye atfen verilmiştir [55]; **Torr**.

Tümlev: İntegral (bkz. [56]); **Integral**

Uyarlık: compliancy

Uyarlılık: compatibility

Uyumsuzluk gerinimi: mismatch strain

Üst üste ekleme yöntemi: superposition principle

Yer değiştirme: displacement

Yön-bağımsız: Aynı nokta için her yönde aynı mekanik özellikleri gösteren, izotropik; **isotropic**

EK 3: Düzlem Gerilme ve Genelleştirilmiş Düzlem Gerilme Durumu

Düzlem gerilme durumunda düzlem dışı yönlerde gerilme bileşeni tanım gereği sıfır kabul edilir. Düzlem gerilme durumu sadece bu şekilde tanımlandığında alan değişkenleri düzleme dik koordinat eksenine de bağımlı olabilmektedir²⁶. Bu bağımlılığı aşır, pratikte karşılanabilen bazı problemlere çözüm getirebilmek için 1903'te Filon [58] tarafından dikdörtgen kesitli prizmatik kirişlerin eğilme analizinde düzlem eksenine dik kalınlık boyunca ortalama alan değişkenleri kullanılmıştır. Bu durum özellikle ince plakalarda ve simetri düzlemine göre kenarlardan düzgün dağılı ve simetrik yükleme durumunda (düzleme dik yüklemeler yokken ve düzlem taban ve tavanı serbest yüzeyken) doğru bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım sayesinde “düzlem gerinim (şekil değiştirme)” durumunda olduğu gibi, genelleştirilmiş düzlem gerilme durumunda da alan değişkenleri sadece düzleme paralel koordinatlara bağılı olarak ifade edilebilmektedir. Bu durum, düzlem gerinim ve genelleştirilmiş düzlem gerilme durumlarının aynı biçimde gösterilmesini sağlamaktadır.

“Genelleştirilmiş düzlem gerilme” tabirinin, Love A.E.H. (1944)'nin yazdığı kitapta [59] kullanıldığı görülmüş; Sokolnikoff (İng.) [60] ve Amanzade [61] tarafından yazılan kitaplarda da bu ayrımla ve tabirin çıkışıyla ilgili açıklamalara rastlanmıştır. Ancak literatürde, Timaşenka (İng.Thimoshenko) ve Goodier 'in (1970) genelleştirilmiş düzlem gerilme tabiri yerine sadece “düzlem gerilme” dediği ve düzlem gerilme tanımını diğer yazarların (Love, Sokolnikoff (İng.), Amanzade) kullandığı “genelleştirilmiş düzlem gerilme” durumu için kullandığı tespit edilmiştir (bkz. kaynak [26] s.15).

²⁶ Düzlem gerinim durumunda tanımı gereği, yer değiştirmeler sadece düzlemdeki eksen koordinatlarına bağılı olup; düzleme dik yer değiştirme sabit veya sıfır kabul edilmekte olup, bütün alan değişkenleri de düzlemdeki eksenlere bağılı çıkmaktadır.

EK 4: Düzlem Gerinim ve Genelleştirilmiş Düzlem Gerilme Durumlarının Ortak Şekilde Gösterilmesi

Gerinimleri gerilmeler cinsinden ifade edersek:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2\mu} \left((1-\varphi)\sigma_{xx} - \varphi\sigma_{yy} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2\mu} \left((1-\varphi)\sigma_{yy} - \varphi\sigma_{xx} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy};\end{aligned}\tag{E3.1a,c}$$

burada,

$$\varphi = \begin{cases} \nu, & \text{düzlem gerinim,} \\ \frac{\nu}{1+\nu}, & \text{genelleştirilmiş düzlem gerilme.} \end{cases}\tag{E3.2a,b}$$

$$\nu: \text{Poisson oranı}\tag{E3.2c}$$

Yukarıda tanımlanan “ φ ” (fi) değiştirgeni ile gerinim ve genelleştirilmiş gerilme durumları ortak şekilde gösterilmiştir. Bu gösterimin üstün yanı gerilmeler önündeki katsayıların (pozitif işaretilerini alırsak) toplamının bir yapmasıdır. Kullanılagelen yapı malzemeleri için $0 < \nu < 1/2$ (bkz. s.293 kaynak [40]) olduğunu düşünürsek; bu şekilde gösterim aksenal yöndeki normal gerinime, gerinimle aynı yöndeki gerilmenin etkisinin hangi ağırlıkta olduğunu gösterecektir. Örneğin, $\nu = 0.3$ için düzlem gerinim durumunda $\varphi = 0.3$ olacaktır ve dolayısıyla

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2\mu} \left(0.7\sigma_{xx} - 0.3\sigma_{yy} \right) \text{ olacaktır; fiziksel olarak beklediğimiz gibi, gerinimle}$$

(ε_{xx}) aynı yöndeki gerilmenin (σ_{xx}) artırıcı, dik yöndeki gerilmenin (σ_{yy}) ise önündeki negatif işaretinden dolayı gerinimi azaltıcı etkisi vardır. Bu şekilde gösterimin açıkca ortaya koyduğu bir başka gerçek de genelleştirilmiş düzlem gerilme durumunda gerinimle aynı yöndeki gerilmenin etkisi düzlem gerinim durumundakine göre daha fazladır. Biraz önceki örneğimizdeki değerlerden hareket

edersek genelleştirilmiş düzlem gerilme durumunda $\varphi = 0.3/1.3 \cong 0.231$ ve

dolayısıyla $\varepsilon_{xx} \cong \frac{1}{2\mu} (0.769\sigma_{xx} - 0.231\sigma_{yy})$ olacaktır.

Benzer şekilde, gerilmeleri 2 boyutta gerinimler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\mu}{1-2\varphi} ((1-\varphi)\varepsilon_{xx} + \varphi\varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu}{1-2\varphi} ((1-\varphi)\varepsilon_{yy} + \varphi\varepsilon_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{E3.3a,c}$$

Kolasaf (İng. Kolosov) sabiti (κ) ile arasındaki ilişki şöyledir:

$$\varphi = \frac{3-\kappa}{4}.\tag{E3.4}$$

EK 5: Asimptotik Açılım Sonuçları

$$E_0 = \frac{(\kappa_c + 1)}{4},$$

$$E_1 = \frac{(\kappa_c + 5)}{8} s,$$

$$E_2 = \frac{5}{8},$$

$$E_3 = \frac{s}{4},$$

$$E_4 = \frac{1}{32} \frac{(5\kappa_c - 8)}{(\kappa_c + 1)},$$

$$E_5 = \frac{1}{16} \frac{(\kappa_c - 3)}{(\kappa_c + 1)} s,$$

$$E_6 = \frac{1}{128} \frac{(5\kappa_c^2 - 36\kappa_c + 57)}{(\kappa_c + 1)^2},$$

$$E_7 = \frac{1}{64} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)}{(\kappa_c + 1)^2} s,$$

$$E_8 = \frac{1}{512} \frac{(5\kappa_c^3 - 84\kappa_c^2 + 375\kappa_c - 493)}{(\kappa_c + 1)^3},$$

$$E_9 = \frac{1}{256} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^2 - 18\kappa_c + 61)}{(\kappa_c + 1)^3} s,$$

$$E_{10} = \frac{1}{2048} \frac{(5\kappa_c^4 - 152\kappa_c^3 + 1318\kappa_c^2 - 4324\kappa_c + 4783)}{(\kappa_c + 1)^4},$$

$$E_{11} = \frac{1}{1024} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)(\kappa_c^2 - 26\kappa_c + 85)}{(\kappa_c + 1)^4} s,$$

$$E_{12} = \frac{5}{8192} \frac{(\kappa_c^5 - 48\kappa_c^4 + 682\kappa_c^3 - 4026\kappa_c^2 + 10479\kappa_c - 9958)}{(\kappa_c + 1)^5},$$

$$E_{13} = \frac{1}{4096} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^4 - 52\kappa_c^3 + 734\kappa_c^2 - 3748\kappa_c + 6217)}{(\kappa_c + 1)^5} s;$$

EK 5: Asimptotik Açılım Sonuçları-Devam

$$\begin{aligned}F_0 &= -\frac{(\kappa_c - 1)}{4}, \\F_1 &= -\frac{(\kappa_c + 1)}{8} s, \\F_2 &= -\frac{1}{4}, \\F_3 &= -\frac{s}{16}, \\F_4 &= -\frac{1}{16} \frac{(\kappa_c - 3)}{(\kappa_c + 1)}, \\F_5 &= -\frac{1}{64} \frac{(\kappa_c - 4)}{(\kappa_c + 1)} s, \\F_6 &= -\frac{1}{64} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)}{(\kappa_c + 1)^2}, \\F_7 &= -\frac{1}{256} \frac{(\kappa_c^2 - 12\kappa_c + 29)}{(\kappa_c + 1)^2} s, \\F_8 &= -\frac{1}{256} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^2 - 18\kappa_c + 61)}{(\kappa_c + 1)^3}, \\F_9 &= -\frac{1}{1024} \frac{(\kappa_c^3 - 24\kappa_c^2 + 147\kappa_c - 257)}{(\kappa_c + 1)^3} s, \\F_{10} &= -\frac{1}{1024} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)(\kappa_c^2 - 26\kappa_c + 85)}{(\kappa_c + 1)^4}, \\F_{11} &= -\frac{1}{4096} \frac{(\kappa_c^4 - 40\kappa_c^3 + 446\kappa_c^2 - 1844\kappa_c + 2531)}{(\kappa_c + 1)^4} s, \\F_{12} &= -\frac{1}{4096} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^4 - 52\kappa_c^3 + 734\kappa_c^2 - 3748\kappa_c + 6217)}{(\kappa_c + 1)^5}, \\F_{13} &= -\frac{1}{16384} \frac{(\kappa_c^5 - 60\kappa_c^4 + 1050\kappa_c^3 - 7530\kappa_c^2 + 23535\kappa_c - 26610)}{(\kappa_c + 1)^5} s;\end{aligned}$$

EK 5: Asimtotik Açılım Sonuçları-Devam

$$G_0 = \frac{(\kappa_c + 1)}{4},$$

$$G_1 = \frac{(\kappa_c + 1)}{8} s,$$

$$G_2 = \frac{1}{8},$$

$$G_3 = 0,$$

$$G_4 = \frac{1}{32} \frac{(\kappa_c - 4)}{(\kappa_c + 1)},$$

$$G_5 = 0,$$

$$G_6 = \frac{1}{128} \frac{(\kappa_c^2 - 12\kappa_c + 29)}{(\kappa_c + 1)^2},$$

$$G_7 = 0,$$

$$G_8 = \frac{1}{512} \frac{(\kappa_c^3 - 24\kappa_c^2 + 147\kappa_c - 257)}{(\kappa_c + 1)^3},$$

$$G_9 = 0,$$

$$G_{10} = \frac{1}{2048} \frac{(\kappa_c^4 - 40\kappa_c^3 + 446\kappa_c^2 - 1844\kappa_c + 2531)}{(\kappa_c + 1)^4},$$

$$G_{11} = 0,$$

$$G_{12} = \frac{1}{8192} \frac{(\kappa_c^5 - 60\kappa_c^4 + 1050\kappa_c^3 - 7530\kappa_c^2 + 23535\kappa_c - 26610)}{(\kappa_c + 1)^5},$$

$$G_{13} = 0;$$

EK 5: Asimptotik Açılım Sonuçları-Devam

$$H_0 = \frac{(\kappa_c - 1)}{4},$$

$$H_1 = \frac{(\kappa_c + 1)}{8} s,$$

$$H_2 = \frac{1}{4},$$

$$H_3 = \frac{s}{16},$$

$$H_4 = \frac{1}{16} \frac{(\kappa_c - 3)}{(\kappa_c + 1)},$$

$$H_5 = \frac{1}{64} \frac{(\kappa_c - 4)}{(\kappa_c + 1)} s,$$

$$H_6 = \frac{1}{64} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)}{(\kappa_c + 1)^2},$$

$$H_7 = \frac{1}{256} \frac{(\kappa_c^2 - 12\kappa_c + 29)}{(\kappa_c + 1)^2} s,$$

$$H_8 = \frac{1}{256} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^2 - 18\kappa_c + 61)}{(\kappa_c + 1)^3},$$

$$H_9 = \frac{1}{1024} \frac{(\kappa_c^3 - 24\kappa_c^2 + 147\kappa_c - 257)}{(\kappa_c + 1)^3} s,$$

$$H_{10} = \frac{1}{1024} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c - 7)(\kappa_c^2 - 26\kappa_c + 85)}{(\kappa_c + 1)^4},$$

$$H_{11} = \frac{1}{4096} \frac{(\kappa_c^4 - 40\kappa_c^3 + 446\kappa_c^2 - 1844\kappa_c + 2531)}{(\kappa_c + 1)^4} s,$$

$$H_{12} = \frac{1}{4096} \frac{(\kappa_c - 3)(\kappa_c^4 - 52\kappa_c^3 + 734\kappa_c^2 - 3748\kappa_c + 6217)}{(\kappa_c + 1)^5},$$

$$H_{13} = \frac{1}{16384} \frac{(\kappa_c^5 - 60\kappa_c^4 + 1050\kappa_c^3 - 7530\kappa_c^2 + 23535\kappa_c - 26610)}{(\kappa_c + 1)^5} s.$$

EK 6: Tümler Denklemlerindeki Çekirdekler

$$\begin{aligned}
 k_{11}(t, x) &= -\frac{4}{\kappa_c + 1} \int_0^\infty \Phi_{11}(\alpha) \sin(\alpha(t-x)) d\alpha, \\
 k_{12}(t, x) &= -\frac{4}{\kappa_c + 1} \int_0^\infty \Phi_{12}(\alpha) \cos(\alpha(t-x)) d\alpha, \\
 k_{21}(t, x) &= -\frac{4}{\kappa_c + 1} \int_0^\infty \Phi_{21}(\alpha) \sin(\alpha(t-x)) d\alpha, \\
 k_{22}(t, x) &= -\frac{4}{\kappa_c + 1} \int_0^\infty \Phi_{22}(\alpha) \cos(\alpha(t-x)) d\alpha;
 \end{aligned} \tag{E5-1,4}$$

burada,

$$\begin{aligned}
 \Phi_{11}(\alpha) &= -\frac{i\alpha(\kappa_c - 1)}{\Delta_r} (\Omega_1 \bar{r}_3 + \overline{\Omega_1 r_3}) - i \frac{\kappa_c + 1}{4}, \\
 \Phi_{12}(\alpha) &= -\frac{i\alpha}{\Delta_r} (\Omega_1 \bar{r}_1 - \overline{\Omega_1 r_1}) + \frac{\kappa_c - 1}{4}, \\
 \Phi_{21}(\alpha) &= -\frac{i\alpha}{\Delta_r} (\Omega_2 \bar{r}_1 + \overline{\Omega_2 r_1}) - i \frac{\kappa_c + 1}{4}, \\
 \Phi_{22}(\alpha) &= -\frac{i\alpha(\kappa_c - 1)}{\Delta_r} (\Omega_2 \bar{r}_3 - \overline{\Omega_2 r_3}) - \frac{\kappa_c - 1}{4},
 \end{aligned} \tag{E5-5,8}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= 1 + s_{t1} e^{-h_c(n_1 - n_2)} + s_{t2} e^{-h_c(n_1 - \bar{n}_2)}, \\
 \Omega_2 &= a_{c1} + a_{c2} s_{t1} e^{-h_c(n_1 - n_2)} - \overline{a_{c2} s_{t2}} e^{-h_c(n_1 - \bar{n}_2)},
 \end{aligned} \tag{E5-8,10}$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= z_{11} + z_{12} s_{t1} e^{-h_c(n_1 - n_2)} + \overline{z_{12} s_{t2}} e^{-h_c(n_1 - \bar{n}_2)}, \\
 r_3 &= z_{21} + z_{22} s_{t1} e^{-h_c(n_1 - n_2)} - \overline{z_{22} s_{t2}} e^{-h_c(n_1 - \bar{n}_2)}, \\
 \Delta_r &= -(r_1 \bar{r}_3 + \overline{r_1 r_3}),
 \end{aligned} \tag{E5-11,13}$$

$$\begin{aligned}
 z_{11} &= (3 - \kappa_c) i \alpha a_{c1} + (\kappa_c + 1) n_1, \\
 z_{12} &= (3 - \kappa_c) i \alpha a_{c2} + (\kappa_c + 1) n_2, \\
 z_{21} &= a_{c1} n_1 + i \alpha, \\
 z_{22} &= a_{c2} n_2 + i \alpha,
 \end{aligned} \tag{E5-14,17}$$

EK 6: Tümlev Denklemlerindeki Çekirdekler-Devam

$$\begin{aligned} s_{t1} &= \frac{1}{\Delta_{st}} (s_1 \bar{t}_2 + s_2 \bar{t}_1), \\ s_{t2} &= \frac{1}{\Delta_{st}} (s_1 t_2 - s_2 t_1), \end{aligned} \quad (\text{E5-18,20})$$

$$\Delta_{st} = - (s_2 \bar{t}_2 + s_2 \bar{t}_2),$$

$$\begin{aligned} t_1 &= a_{c1} [X_{cs} \kappa_s n_1 - |\alpha| (\kappa_s + 1)] + i\alpha [\kappa_s (X_{cs} - 1) + 1], \\ t_2 &= a_{c2} [X_{cs} \kappa_s n_2 - |\alpha| (\kappa_s + 1)] + i\alpha [\kappa_s (X_{cs} - 1) + 1], \end{aligned} \quad (\text{E5-21,22})$$

$$\begin{aligned} s_1 &= i\Lambda \alpha a_{c1} + Z(\kappa_c + 1) n_1 \kappa_s - |\alpha| (\kappa_s + 1), \\ s_2 &= i\Lambda \alpha a_{c2} + Z(\kappa_c + 1) n_2 \kappa_s - |\alpha| (\kappa_s + 1), \end{aligned} \quad (\text{E5-23,24})$$

$$Z = \frac{X_{cs}}{\kappa_c - 1}, \quad X_{cs} = \frac{\mu_c (-h_c)}{\mu_s}, \quad \Lambda = \kappa_s [Z(3 - \kappa_c) + 1] - 1 \quad (\text{E5-25,27})$$

$$a_{cj} = - \frac{(\kappa_c + 1)(n_j^2 + \gamma n_j) - (\kappa_c - 1)\alpha^2}{i\alpha [2n_j + \gamma(3 - \kappa_c)]}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (\text{E5-28})$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2} \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha^2 + i|\alpha||\gamma|\delta)} \right), \\ n_2 &= \frac{1}{2} \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha^2 + i|\alpha||\gamma|\delta)} \right), \\ n_3 &= \frac{1}{2} \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha^2 - i|\alpha||\gamma|\delta)} \right), \\ n_4 &= \frac{1}{2} \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha^2 - i|\alpha||\gamma|\delta)} \right), \end{aligned} \quad (\text{E5-29,32})$$

$$\delta^2 = \frac{3 - \kappa_c}{\kappa_c + 1}. \quad (\text{E5-33})$$

EK 7: Çebişef Polinomları

Birinci ve ikinci tip Çebişef polinomları sırasıyla şöyle tanımlanmaktadır [57]:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad (\text{E7.1})$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}; \quad (\text{E7.2})$$

burada,

$$x = \cos(\theta), \quad (\text{E7.3})$$

$$T_n(x) \text{ için } n = 0, 1, \dots \quad (\text{E7.4})$$

$$U_n(x) \text{ için } n = -1, 0, 1, \dots \quad (\text{E7.5})$$

Bunların dışında ikinci ve üçüncü tip Çebişef fonksiyonları da tanımlanmaktadır (bkz. [57] nolu kaynak s.102). Birinci ve ikinci tip Çebişef polinomlarının tanım ve grafiklerdeki davranışlarından hareketle (bkz. Şekil E7.1-4):

Birinci tip Çebişef fonksiyonlarının

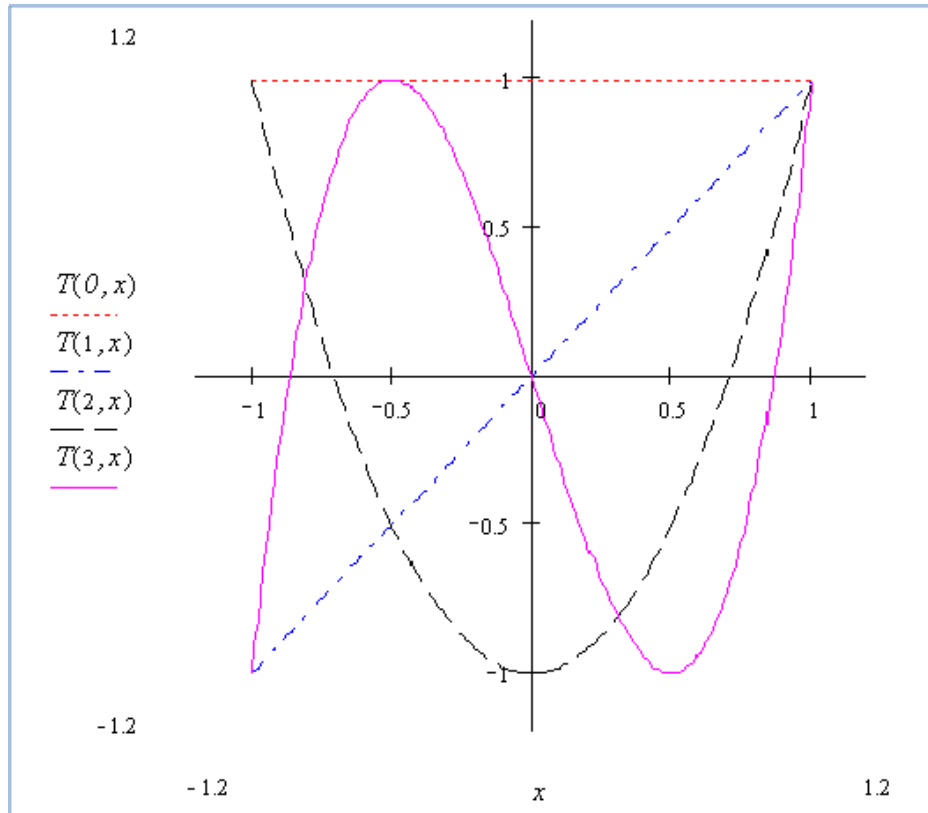
- x 'e bağlı n 'nci dereceden bir polinom olduğu (denklem E7.1'deki tanımdan hareketle ve denklem 2.99a'daki Euler açılımı kullanılarak " $\cos(n\theta)$ " terimi " $\cos\theta = x$ " cinsinden polinomsal olarak ifade edilebilir),
- değerinin artı eksi bir arasında değiştiği, yani $|T_n(x)| \leq 1$,
- köklerinin n tane olduğu ve uçlara doğru ($x \rightarrow \pm 1$) köklerinin sıklaştığı (bu nedenle sayısal çözüm esnasında cebirsel denklem sistemine indirgenen tümlev denklemi film ucundaki gerilme değerlerindeki büyük değişiklikleri kaçırmamak için sayısal açıdan Çebişef polinomunun köklerinde hesaplatılmıştır, bkz. denklem (2.131)),
- $x = +1$ için değerinin bir olduğu, yani $T_n(1) = 1$,
- $x = -1$ için değerinin n çift iken bir, tek iken de eksi bir olduğu, yani

$$T_n(-1) = \begin{cases} +1, & n : \text{çift}, \\ -1, & n : \text{tek}; \end{cases}$$

İkinci tip Çebişef fonksiyonlarının

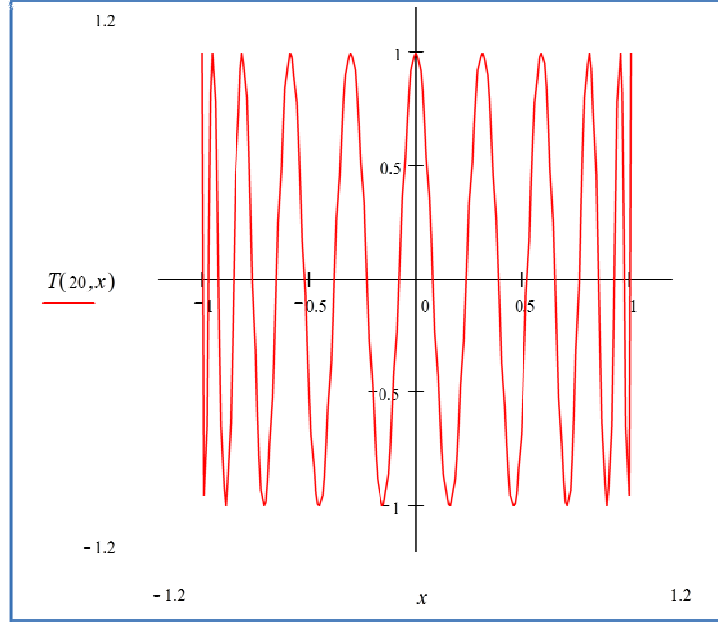
- x 'e bağlı n 'nci dereceden bir polinom olduğu ($n = -1$ dışında, bu durumda $U_{-1}(x) = 0$),
- değerinin uçlara doğru ($x \rightarrow \pm 1$) ve $n \rightarrow \infty$ iken sınırsızca artabileceği,
- köklerinin n tane olduğu ve uçlara doğru ($x \rightarrow \pm 1$) köklerinin sıklaştığı,
- $x = -1$ için değerinin n çift iken pozitif, tek iken de negatif olduğu, yani
 $U_n(-1) > 0$, n : çift,
 $U_n(-1) < 0$, n : tek;
- $x = +1$ için değerinin sıfır veya pozitif olduğu, yani
 $U_n(1) \geq 0$,

görülebilir.

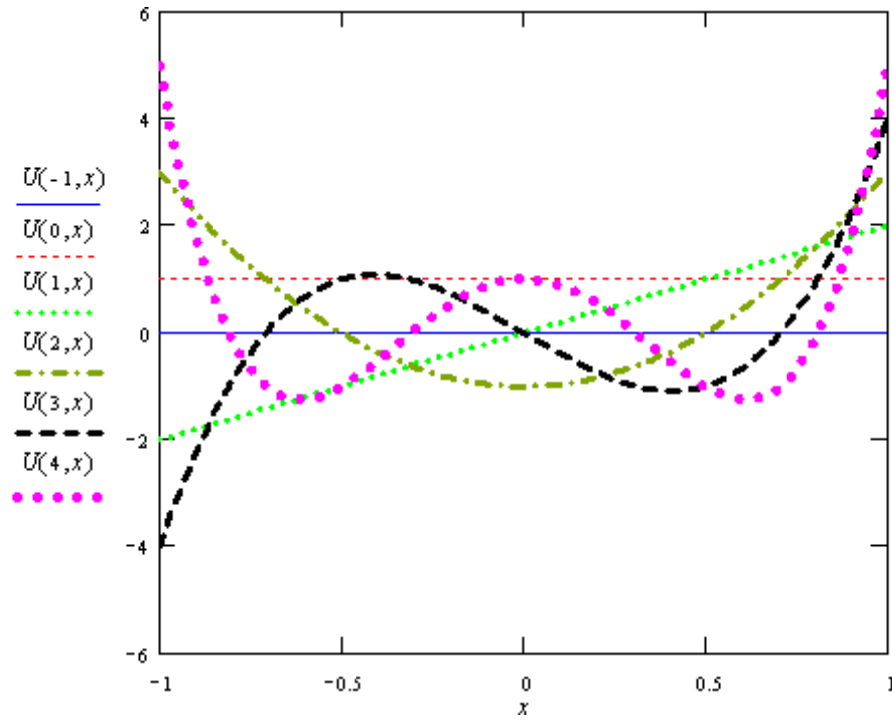


Şekil E7.1 Birinci tip Çebişef polinomları $T_n(x) = T(n, x)$, $n = 0..3$ ve $|x| \leq 1$ için.

EK 7: Çebişef Polinomları – Devam

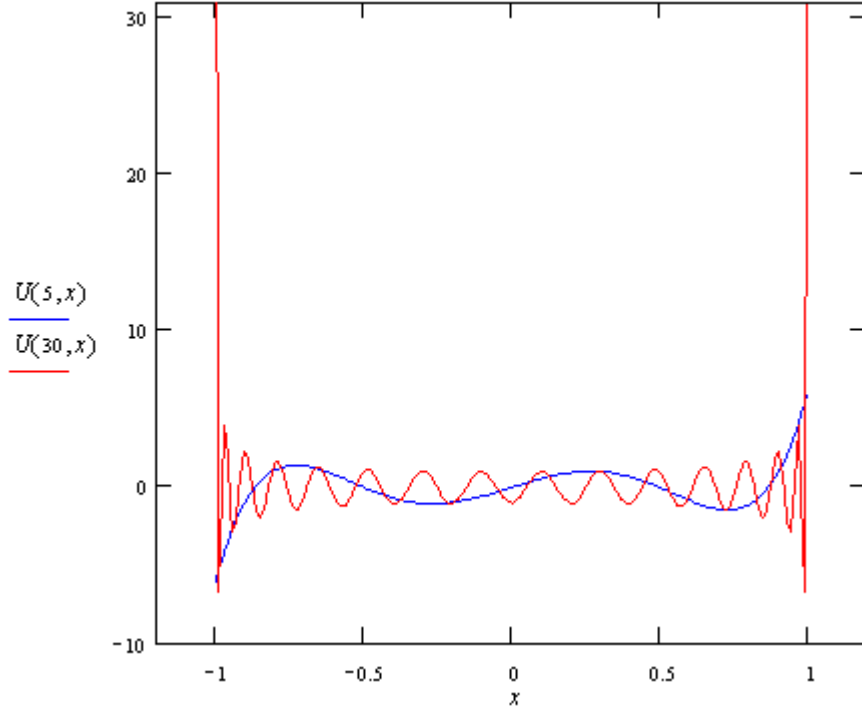


Şekil E7.2 Birinci tip Çebişef polinomu $T_n(x) = T(n, x)$, $n = 20$ ve $|x| \leq 1$ için.



Şekil E7.3 İkinci tip Çebişef polinomları $U_n(x) = U(n, x)$, $n = -1..4$ ve $|x| \leq 1$ için.

EK 7: Çebişef Polinomları – Devam

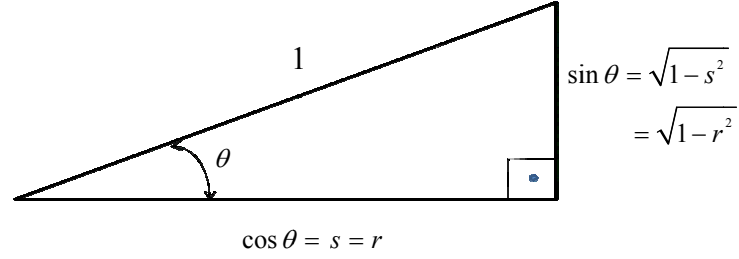


Şekil E7.4 İkinci tip Çebişef Polinomları $U_n(x) = U(n, x)$, $n = 5, 30$ ve $|x| \leq 1$ için.

Denklem (2.125b)'de verilen tümlevin alınması:

Probleme hâkim tümlev denkleminin çözümünde kullanılan ve Çebişef polinomlarının özellikleri yardımıyla alınan denklem (2.125b)'deki tümlev aşağıda verilmiştir:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds, \quad (\text{E7.6})$$



Şekil E7.5 Tümler almada kullanılan trigonometrik dönüşümler için geometrik gösterim.

(E7.6)'da verilen tümleri alabilmek Şekil E7.5'te gösterilen aşağıdaki trigonometrik dönüşümler yapılırsa:

$$s = \cos \theta, \quad r = \cos \theta, \quad (\text{E7.7a,b})$$

bu dönüşümler altında

$$ds = -\sin \theta d\theta \quad (\text{E7.8})$$

$$\sqrt{1-s^2} = \sin \theta, \quad \sqrt{1-r^2} = \sin \theta \quad (\text{E7.9a,b})$$

olur. (E7.7, 8 ve 9)'dakiler (E7.6)'da yerleştirilip tümler alınırsa:

$$\int_{-1}^r \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = - \int_{\pi}^{\cos^{-1}(r)} \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} -\frac{1}{n} \sin(n\theta), & n \neq 0; \\ - \int_{\pi}^{\cos^{-1}(r)} 1 d\theta = \pi - \cos^{-1}(r), & n = 0 \end{cases} \quad (\text{E7.10a,b})$$

şeklinde bir ara sonuç bulunur. Denklem (E7.10a)'da ulaşılan sonucu “ $\sqrt{1-r^2}$ ” ile çarpıp “ $\sin \theta$ ”ya bölersek, “ $\sin \theta = \sqrt{1-r^2}$ ” olduğundan sonuç değişmeyecektir (bkz. (E7.9b)) ve denklem (E7.10a) şu hâle gelecektir:

$$\int_{-1}^r \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = -\frac{1}{n} \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \sqrt{1-r^2}, \quad n \neq 0, \quad |r| < 1. \quad (\text{E7.11})$$

Ardından (E7.2)'de verilen ikinci tip Çebişef polinomunun tanımı kullanılarak (E7.11)'deki tümlev denklemini aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_{-1}^r \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = -\frac{1}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}, \quad n \neq 0, \quad |r| < 1. \quad (\text{E7.12})$$

Denklem (E7.10b) ve (E7.12)'deki sonuç birlikte yazılırsa:

$$\int_{-1}^r \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \begin{cases} -\frac{1}{n} U_{n-1}(r) \sqrt{1-r^2}, & n \neq 0, \quad |r| < 1; \\ \pi - \cos^{-1}(r), & n = 0. \end{cases} \quad (\text{E7.13a,b})$$

Böylece (E7.6)'da verilen tümlev analitik olarak alınmış olur.

Denklem (2.125a)'nın ispatı için bkz. kaynak [62]²⁷.

²⁷ Kaynak [62]'deki ispat, bir yere kadar götürülmüş olup, başka bir kaynağa atıfta bulunularak bitirilmiştir.

EK 8: Kodda Yapılan Değişikliklerden Örnekler

```
...  
  parameter (M1 = 14, M3=15)  
  real*8 c0, kappa, X(M3)  
  integer n,i,j  
  Pi = dacos(-1.0d0)  
...  
  c0 = - 4.0d0/(kappa + 1.0d0)  
  do 5 j = 1, M1  
    X(j) = dcos((2.d0*j-1.0d0) * Pi / (2.d0*M1))  
5  continue  
  X(0)=X(1)  
...  
  end do  
...
```

Yukarıdaki FORTRAN kodu başlangıçta, farklı iki donanımın/yazılımın (Microsoft Developer Studio ve SunSystems-Solaris) derleyicisi ile koşturulmuştur. Microsoft Developer Studio'nun derleyicisinin "X(0)=X(1)" satırına gelince otomatik olarak "X(1)" mekân koordinat değerini kullanıcı tarafından belirlenmiş olan "c0" değiştirgenine (parametresine) atadığı tespit edilmiştir. SunSystems-Solaris Öbek-I derleyicisi ise böyle bir atama yapmayıp doğru sonuç vermiştir. Microsoft Developer Studio'nun derleyicisi muhtemelen X(M3) dizisinin boyutunu 1'den 13'e kadar algılamış ve "X(0)" çıkınca tanımsız bırakıp en yakın satırdaki değişken olan "c0" ın değeri olarak "X(1)"i atamış gözükmektedir. Bu durum kodda "X(0)=X(1)" satırı kaldırılarak çözülmüş ve her iki derleyicide de aynı sonuç alınır hâle getirilmiştir.

EK 9: TOBB ETÜ ÖBEK-1 Bilgisayarı için Geliştirilen İş Atama Kodu

```
#!/bin/sh
#####
# Job Name
#####
#$ -N scriptBastug
#
#####
# Send mail when jobs starts and finishes
#####
#$ -M yfgulver@etu.edu.tr
#$ -m be
#####
# Use current working directory
#####
#$ -cwd
#
#####
# Join stdout and stderr
#####
#$ -j y
#
#####
# Declare job re-runnable
#####
#$ -r y
#####
# Run job through bash shell
#####
#$ -S /bin/bash
#####
# Full command path of your program
# --- Use full pathname to your executable ---
#####
#
/export/home/gulver/fgm_runs_53/a.out<<EOI
$@
$@
EOI
```

Yukarıdaki işletilebilir dosya (“scriptBastug” isimli)²⁸ TOBB ETÜ Yüksek Başarımlı Hesaplama Laboratuvarındaki SunSystems-Solaris Öbek-I bilgisayarına aşağıdaki gibi içerisinde problemdeki değişirgenlerin ($\lambda = \mu_0 / \mu_f$, L / h_c , L / h_f ve $\Gamma = \mu_s / \mu_0$)

²⁸ Dosya adı kodun yazımında yardımcı olan Prof. Dr. Turgut Baştuğ’a atfen konmuştur.

sırasıyla boyutları (kaç farklı değer için koşturulacağı); yükleme tipi (uzak alandan yükleme için “ss”, filmden simetrik yükleme için “sf,” filmden antisimetrik yükleme için “af” ve filmden tek uçlu yükleme için “nf” yazılıyor); ve, değerlerinin yer aldığı aşağıdaki gibi bir iş atama emriyle yollanmaktadır:

```
qsub scriptBastug 1 1 1 5 ss 0.01 0.2 100 0.142857142857143 0.3333333333333333  
1 3 7
```

EK 10: Literatür için Düzeltmeler

Literatüre Bakış kısmında (kısım 1.4) bahsettiğimiz gibi literatürdeki hızlı gelişmeler bazı hatâları da beraberinde getirmiştir.

Arutiunian'ın [20] 1968'de integro-diferansiyel denklemin formülasyonunda yaptığı işaret hatâsını 1971'de Erdogan ve Gupta [10] fark etmiş ve düzeltmiştir.

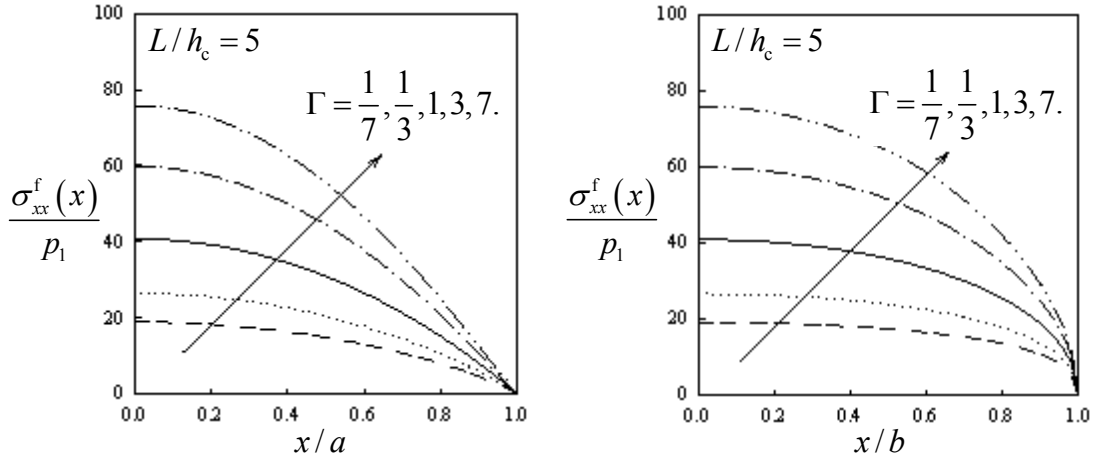
Bu çalışmada ise Erdogan ve Gupta [10] tarafından antisimetrik yükleme durumu için verilen nümerik sonuçların (formülasyonun doğru olmasına rağmen) bir işaret hatâsından dolayı yanlış verildiği tespit edilmiş ve sonuçlar 38 sene aradan sonra Erdogan Hocanın tez öğrencisinin (M. A. Güler) bir tez öğrencisi tarafından yazılan bu tezde düzeltilmiştir (bkz. Kısım 3.1).

Bu hızlı süreçte, dönüp geriye, biraz sükûnetle baktığımızda, kendi çalışmalarımızdaki bazı hatâları da fark ettik. Bunlar şekilsel ve içeriksel olarak aşağıda sınıflandırılmış olup, düzeltilmiş hâlleriyle birlikte verilmiştir.

Dikkatli ve uzun analitik çalışma gerektiren konularla ilgili bizim dışımızdakilerin hatâlarını ve kendi hatalarımızı bulmamız, çalışma bittikten sonra kontrolün/doğrulamanın (*mümkünse* farklı yöntemlerle mesela SEA, deney yapmak veya mantıksal yorumlarla) ne kadar önemli ve gerekli olduğunu göstermiştir.

1) Şekilsel Hatâ

Bunlardan biri, kaynak [39] Şekil 2'de ve kaynak [9] Şekil 4, 6, 8 ve 9'da uzak alan yüklemesi durumunda denklem (2.143)'te verilen filmdeki normal gerilme dağılımı grafiğinin denkleme uygun çizilmiş olmamasıdır. Şekil E10.1'deki solda hatâlı çizdirilen grafiğe bir örnek (bkz. kaynak [39] Şekil 2), sağda ise bu örneğin düzeltilmiş şekli görünmektedir.



Şekil E10.1 Guler ve arkadaşları [39] tarafından verilmiş filmdeki normal gerilme dağılımı şekli (soldaki, bkz. kaynak [39] Şekil 2) ve bu çalışmada ve Guler ve arkadaşları [38] tarafından düzeltilmiş hâli (sağdaki, bkz. Şekil 3.14).

Aslında, filmde oluşan en büyük eksenel normal gerilme değerleri açısından her iki grafik de bir farklılık arz etmemekle birlikte, özellikle film ucundaki çıkış eğimleri açısından sağdaki grafiğin daha dik olduğu görülür. (2.107)'de film için yazılan denge denkleminde hareketle sabit film kalınlığı için, filmde oluşan eksenel normal gerilmenin film-kaplama arayüzey kayma gerilmesinin tümlevi ile, ya da eksenel normal gerilmenin türevinin arayüzey kayma gerilmesi değeriyle doğru orantılı olduğu görülür. Grafikselleştirildiğinde, film-kaplama arayüzey kayma gerilmesi değerleri, filmdeki eksenel normal gerilme dağılımının eğimi ile orantılıdır. Arayüzey kayma gerilmesinin film ucuna doğru (mesela $0.8 < x/a < 1$ aralığında) artan bir eğimle sonsuza gittiği düşünülürse (bkz. Şekil 3.14 ve denklem (2.142)), aynı aralıkta ($0.8 < x/a < 1$) filmdeki eksenel normal gerilme grafiği eğiminin de film ucuna doğru artış göstermesi gerekmektedir. Hâlbuki, Şekil E10.1'deki soldaki grafikte ilgili aralıkta ($0.8 < x/a < 1$) film ucuna doğru eğimin neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Bu nedenle de Şekil E10.1'deki soldaki grafiğin film ucundaki çıkış eğimleri açısından yanlış olduğu söylenebilir.

Bu hatânın nedeninin denklem (2.143)'te verilen filmdeki normal gerilme dağılımındaki kareköksel terimin "Fortran kodunda" karekökünün, yanlışlıkla,

alınmamış olmasından kaynaklı olduğu tespit edilmiştir. Kaynak [39]'daki grafiklerin düzeltilmiş hâlleri tezde Şekil 3.14'te ve kaynak [38] Şekil 2'de verilmiştir.

2) İçeriksel Hatâ

Kaynak [39]'da sonuç kısmındaki ilk yorumda aynı kaynaktaki Şekil 2'ye atfen söylenmiş aşağıdaki yorumda:

“As the film length to coating thickness ratio, l/h_c , increases, **the normal stress ($\sigma_{xx}^f(x)$) in the film increases, and** the grading gets more effective to increase or decrease the stress values (see Fig. 2).”

kalın harflerle yazılı kısım kısmen doğru olup sadece kaplama uyarlığının içeri doğru azaldığı durumlarda (yani $\Gamma > 1$) geçerlidir. Kalın harflerle yazılı kısım için tam doğru açıklama şöyle olmalıdır (bkz. Kısım 3.2'de Şekil 3.14'ün açıklaması):

“Kaplama uyarlığının içeri doğru arttığı durumlarda (yani $\Gamma < 1$) gerilme değerlerinin ($\sigma_{xx}^f(x)$, $\tau_{xy}^f(x)$) azalmasına rağmen; kaplama uyarlığının içeri doğru azaldığı durumlarda (yani $\Gamma > 1$) gerilme değerleri artmaktadır.”

EK 11: Gerilme Tekillik Mertebesi

Film $(-1 \leq x \leq 1)$ aralığında uzanımına sahip olsun; bu durumda, film-kaplama arayüzeyinde oluşacak kayma gerilmesi dağılımında tekilliğe/aykırılığa yol açan terim probleme hâkim tekil tümlev denklemin (2.113) baskın kısmının çözümündeki temel fonksiyonundan gelmekte olup, paydada aşağıdaki gibi yer alacaktır [63, 64]²⁹:

$$\tau_{xy} \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}. \quad (\text{E11.1})$$

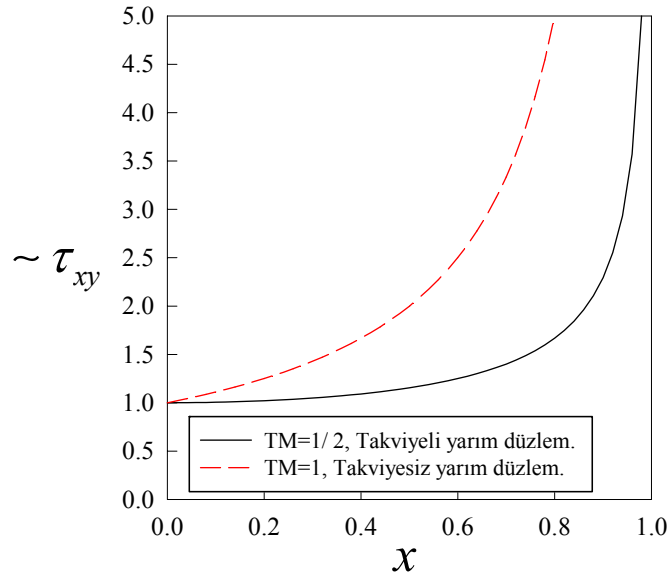
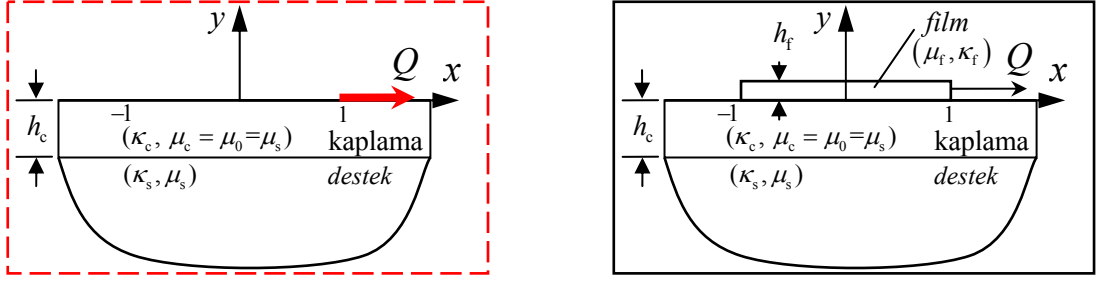
Burada, temel fonksiyon olarak tanımlanan (E11.1)'in sağ tarafındaki fonksiyon, aynı zamanda diklik özelliğine sahip Jacobi polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ durumu bu tezde ele alınan karışık sınır değer problemi için olup, temel fonksiyon Çebişef polinomlarının³⁰ ağırlık fonksiyonuna indirgenmektedir. Tekilliğe yol açan paydadaki $(1-x)$ 'in üssü olan α filmin $x = +1$ ucundaki; $(1+x)$ 'in üssü olan β ise filmin $x = -1$ ucundaki tekilik mertebesini ifade etmektedir. Bu üslerin (α, β) değerleri sadece matematiksel değil aynı zamanda da fiziksel değerlendirmeler sonucunda belirlenmektedir[64]. Bu tezde incelediğimiz durum için tekilik mertebesi filmin her iki ucunda da “0.5” değerindedir. Dolayısıyla film-kaplama arayüzeyindeki kayma gerilmesi dağılımını uçlarda sonsuza götüren kısım şöyledir (bkz. Şekil E11.1'deki düz çizgi):

$$\tau_{xy} \sim \frac{1}{(1+x)^{0.5} (1-x)^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}. \quad (\text{E11.2})$$

(E11.1)'de $\alpha = 1$, $\beta = 0$ konulduğunda homojen kaplama durumunda film yokken kaplama yüzeyinden doğrudan uygulanan kayma kuvveti durumu için kayma

²⁹ $\tau_{xy} \sim (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ şeklinde de tanımlanabilir; öyle tanımlanırsa α ve β negatif olacaktır.

³⁰ Jacobi polinomlarının özel bir türüdür. Çebişef polinomları probleme hâkim tekil tümlev denklemin çözümünde de seri formda kullanılmıştır (bkz denklem (2.121)).



Şekil E11.1 Takviyeli (sürekli çizgi) ve takviyesiz (kesikli çizgi) durumlarda uygulanan bir kuvvetin (Q) homojen kaplama yüzeyinde ($0 \leq x < 1$) aralığında oluşturacağı kayma gerilmesi dağılımının (τ_{xy}) tekillik mertebesi (TM) açısından davranışı.

gerilmesi dağılımında kuvvetin uygulandığı noktada tekilliğe yol açan terim oluşacaktır. Bu durumdaki tekillik mertebesi “1” dir. Bu problemin çözümü literatürde Boussinesq (1892) tarafından verilmiştir (bkz. mesela kaynak [26] s.100)³¹ Boussinesq çözümüne göre $x=1$ noktasında uygulanan kuvvet (Q) için kayma gerilmesi dağılımında tekilliğe yol açan terim şöyledir (bkz. Şekil E11.1’deki kesikli çizgi):

³¹ Normal kuvvet yüklemesi durumunun çözümü de Boussinesq’in geliştirdiği çözüm yöntemi kullanılarak Flamant (1892) tarafından verilmiştir (kaynak [26] s.97).

$$\tau_{xy_takviyesiz} \sim \frac{1}{(1-x)}. \quad (E11.3)$$

Dikkat edilirse gerilme tekillik mertebesi arttıkça kayma gerilmesi değerleri tekilliğin olduğu noktaya doğru daha da hızlı bir şekilde sonsuza gitmektedir (bkz. Şekil E11.1). Yani tekillik mertebesi ilgili gerilmenin sonsuza gidiş şeklini/hızını belirlemektedir.

Ayrıca, Melan[21] tarafından 1932’de belirtildiği ve kısım 1.4’te ifade edildiği üzere, yarım düzlem veya plakaya bir kuvveti doğrudan uygulamak yerine ona bağlı bir takviyeye (çubuk/film) uygulayarak kuvvetin takviye üzerinden aktarılmasını sağlamak birleşik yapıda oluşacak gerilme değerlerinin düşürülmesi açısından önemli olup en azından tekil noktalarda gerilme değerlerinin sonsuza gidişini yavaşlatmaktadır.

Problem çözümünde kullandığımız kuram, doğrusal elastik kuram olduğundan, sonuçlar doğrusal elastik bölgede geçerlidir. Tekil noktalarda (film ucu veya kuvvetin doğrudan uygulandığı noktada) pratikte malzemede gerilme değerleri sonsuza çıkmak yerine akma/kırılma sınırına kadar artacak ve malzeme aktıktan sonra olabilecek kestirmek için yeni bir kuram/model uygulamak gerekecektir. Buna rağmen, doğrusal elastik kuram uygulayarak elde edilen tekil noktalardaki tekillik şiddeti³² değerlerine bakarak hangi durumun hasara yol açma riskinin daha fazla olduğu söylenebilir.

³² Tekillik şiddeti bu ekte anlatılan tekillik mertebesi ile karıştırılmamlı; tanımı için bkz. denklem (2.115, 116).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı: GÜLVER, Yusuf Fuat
Uyruğu: T.C.
Doğum tarihi ve yeri: 20.01.1977, Ankara
Medeni hâli: Bekâr
Telefon: 0 (505) 354 85 24
e-posta: yfgulver@etu.edu.tr; gulveryf@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	ODTÜ Makine Müh. Bölümü	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2006	KHO/ İstihkam Şube Md.lüğü	Makine Sistemleri İdame Subayı
2006-2008	TOBB ETÜ	Burslu Yüksek.Lisans Öğrencisi
2007-2009	TOBB ETÜ	TÜBİTAK Proje Asistanlığı

Yabancı Dil

İngilizce(İleri), Almanca (Başlangıç), Fransızca (Başlangıç),Latince (Başlangıç).

Yayınlar

- [1] Güler, M.A., Gülver, Y.F., Dağ S., İşlevsel Derecelendirilmiş Malzemelere Bağlı İnce Filmlerin Mekanik Modellenmesi, Uluslararası Toz Metalürjisi Konferansı-5, TOBB ETÜ, 369-378, Ankara, Eylül 2008.
- [2] Guler, M.A., Gülver, Y.F., Dag S., Mechanical Modeling of Thin Films Bonded to Functionally Graded Materials, Materials Science Forum, 631-632, 333-338, 2010.

Hobiler

Sanat: resim (çiziresim, akrilik), sanat ve müzik tarihi, üflemeli çalgı aletleri (blok/yan flüt, ney, kaval);
Spor: judo (kahverengi kuşak), eskrim (yardımcı antrenör, bölge hakemi).