

KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP VE
SUPREMUM DEĞİŞKENLERİ

HATİCE ÇAKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2012

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

HATİCE ÇAKAR tarafından hazırlanan KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN
MAKSİMUM KAYIP VE SUPREMUM DEĞİŞKENLERİ adlı bu tezin Yüksek
Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeliz YOLCU OKUR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice ÇAKAR

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Ağustos 2012

Hatice ÇAKAR

KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP VE SUPREMUM DEĞİŞKENLERİ

ÖZET

Finansal piyasalarda, bir varlığın fiyatının supremum değeri ve bir risk ölçüsü olan maksimum kayıp değeri yatırımcılar için önemlidir. Literatürde, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri üzerine bazı sınırlar mevcuttur. Fakat, bilinen tekniklerle supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri için tam değerler hesaplanamamaktadır. Bu tezde, Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri üzerine teorik üst sınır bulunmuştur. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile kesirli Brown Hareketinin supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri üzerine nümerik alt sınırlar bulunmuştur. Cholesky benzetimler yöntemi kullanılarak kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri için simülasyon sonuçları elde edilmiştir. Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri üzerine elde edilen nümerik alt sınırlar, teorik sınırlar ve benzetim yöntemleri sonuçları literatürde yer alan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Brown Hareketi, Maksimum Kayıp, Sudakov-Fernique Eşitsizliği, Markov Eşitsizliği, Cholesky Benzetimler Yöntemi.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Ceren VARDAR ACAR
Degree Awarded and Date : M.Sc. – August 2012

Hatice ÇAKAR

THE MAXIMUM LOSS AND THE SUPREMUM OF
FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

ABSTRACT

In financial markets, the supremum of the price of an asset and the maximum possible loss as a measure of risk are important variables for investors. In literature, there are some bounds on the expected value of supremum and of maximum possible loss of fBm. For now, there are no exact solutions because with today's techniques, exact values are not possible to obtain. In this thesis, we provide a new theoretical bound on the expected value of maximum loss using Sudakov-Fernique inequality. Using discretization method and considering order statistics of multivariate normal variables, we obtain some numerical bounds on the expected value of maximum loss and of supremum of fBm. We also obtain some simulation results on the expected value of maximum loss and of supremum of fBm using Cholesky method. Finally we provide comparison of the established bounds.

Keywords: Fractional Brownian Motion, Maximum Loss, Sudakov-Fernique Inequality, Markov Inequality, The Cholesky Method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin danışmanlığını üstlenerek, tez çalışmalarım boyunca destek ve katkılarıyla beni yönlendiren çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR' a, engin tecrübelerinden faydalandığım TOBB ETÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine, yardımlarını esirgemeyen sevgili asistan arkadaşlarıma, hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak beni her zaman destekleyip bugünlere getiren biricik aileme, sevgili ZABUN ailesine ve her zaman yanımda olan müstakbel eşim Mehmet Akif BULUT'a manevi desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitimimdeki maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
SİMGE LİSTESİ	xiii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1 Standart Brown Hareketi	7
2.2 Kesirli Brown Hareketi	9

2.2.1	Stokastik İntegral Gösterimi	9
2.2.2	İki Artış Arasındaki Kovaryans	10
2.2.3	Özbenzerlik	10
2.2.4	Uzun Süreli Bağımlılık	10
2.3	Bazı Önemli Eşitsizlikler	11
3	SUPREMUM DEĞİŞKENİ ÜZERİNE LİTERATÜR ÖZETİ	13
3.1	Standart Brown Hareketinin Supremum Değişkeni	13
3.2	Kesirli Brown Hareketinin Supremum Değişkeni	15
4	KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN SUPREMUM DEĞİŞKENİ ÜZERİNE SONUÇLARIMIZ	19
4.1	Kesikli Süreç ve Birlikte Gauss Dağılımı ile Sınırlar Hesaplanması	19
4.1.1	FDSBS Gauss Değişkenleri	22
4.1.2	FDSTB Gauss Değişkenleri	22
4.1.3	Ross Hesaplama Yöntemi	23
4.2	Min-z Alt Sınırı	26
4.3	Simülasyon Sonuçları	28
5	MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE LİTERATÜR ÖZETİ	33
5.1	Standart Brown Hareketinin Maksimum Kayıp Değişkeni	33
5.2	Kesirli Brown Hareketinin Maksimum Kayıp Değişkeni	36

6 KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE SONUÇLARIMIZ	40
6.1 Kesikli Süreç ve Birlikte Gauss Dağılımı ile Sınırlar Hesaplanması	40
6.2 Min-z Alt Sınırı	44
6.3 Sudakov-Fernique Eşitsizliği ile Teorik Üst Sınır	45
6.4 Simülasyon Sonuçları	50
7 SONUÇ	55
7.1 Supremum Değişkeni Üzerine Karşılaştırma ve Sonuçlar	55
7.2 Maksimum Kayıp Değişkeni Üzerine Karşılaştırma ve Sonuçlar . .	60
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

1.1	Maksimum Kayıp ve Supremum Değişkenleri	3
-----	---	---

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

4.1	Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar	26
4.2	100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları .	28
4.3	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	29
4.4	Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	31
4.5	Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	31
6.1	Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar	43
6.2	100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	51
6.3	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	51

6.4	Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	53
6.5	Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	53
7.1	Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar	57
7.2	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	58
7.3	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için sonuçlar	59
7.4	Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar	62
7.5	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları	63
7.6	1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için sonuçlar	65

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
Ω	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
\mathcal{F}	Bir Ω 'nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş σ -cebiri
$\mathbf{P}(A)$	A olayının olma olasılığı
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$	Olasılık uzayı
$E(X)$	X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E(X Y = y)$	X rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
W	Brown Hareketi
P^+	Yansıtılmış Brown hareketinin olasılık fonksiyonu
E^+	Yansıtılmış Brown hareketi için beklenen değeri operatörü
H	Hurst parametresi
B^H	Kesirli Brown Hareketi
S^H	Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni
I^H	Kesirli Brown hareketinin infimum değişkeni
R^H	Kesirli Brown hareketinin menzil değişkeni
M^H	Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni
T	Üstel dağılıma sahip rastgele değişken
FDSB	Farklı dağılıma sahip ve bağımlı Gauss değişkeni
FDSBS	Farklı dağılıma sahip ve bağımsız Gauss değişkeni
FDSTB	Farklı dağılıma sahip ve tam bağımlı Gauss değişkeni
\mathcal{G}	Standart Brown hareketinin üretici
H_a	Sürecin a seviyesine ilk ulaştığı zaman

1. GİRİŞ

Kesirli Brown hareketi,

1. Zamanın bir fonksiyonu olan nehirdeki su seviyesinin,
2. Zamanın bir fonksiyonu olan belli bir yerin sıcaklığının,
3. Bir varlığın getirisinin,
4. Serbest piyasadaki elektrik fiyatlarının

modellemesinde kullanılmaktadır [4]. Finans matematiği uygulamalarında ise bir hisse senedinin getirisi için kesirli Brown hareketi ($H > 1/2$) kullanılarak elde edilen Black-Scholes Modeli,

$$Y_t = Y_0 e^{(r+\mu)t + \sigma B_t^H} \quad 0 \leq t \leq \tau$$

ile verilir. Burada Y_0 başlangıç değerini, r sabit faiz oranını, $\mu \in \mathbb{R}_+$ genel fiyat artış veya düşüş eğilimini, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ise oynaklık olarak adlandırılan sapma katsayısını gösterir. Literatürde, Brown hareketi gibi Markov süreçler ile kurulmuş Black-Scholes modelleri vardır. Fakat, kesirli Brown hareketi ile modellenen Black-Scholes modeli, kesirli Brown hareketi uzun süreli bağımlılık özelliği gösteren bir süreç olması ve bu bağımlılığın gerçek fiyat verilerinde görülen bağımlılıkla örtüşmesi nedeni ile Markov süreçleri ile modellenen Black-Scholes modeline göre gerçek hayata daha uygundur. Gerçek fiyat verilerindeki bu özellik piyasalarda fiyatların artmaya başladığı zaman uzun bir süre artması, düşmeye başladığı zaman ise fiyatların uzun bir süre düşüşte olması şeklinde kendini gösterir.

Finansal piyasalarda, hisse senedi fiyatının supremum değeri yatırımcıların hisse senedini ne zaman satacağı, infimum değeri ise yatırımcıların hisse senedini ne zaman alacağı konusunda bilgi verdiği için önemlidir. Ayrıca, yatırımcı riskini azaltmasını ve/veya riskten korunmasını sağlayacak her türlü bilgi ile ilgilenir. Bu nedenle, bir risk ölçüsü olan olası maksimum kayıp yatırımcının ilgisini çeker ve yatırımcıların karar verme süreçlerine etki eder.

Finansal piyasalarda, hangi durumlarda maksimum kayıp değişkeninin yatırımcının fon seçme problemini etkilediği üzerine Daehwan [14] tarafından yapılan çalışmaya göre, nakit akışında olağandışı fazlalık olması durumunda yatırımcı fonu en düşük fiyattan alma ve en yüksek fiyattan satma durumu haricindeki diğer durumlar için olasılıkları sıfır kabul eder. Yani, yatırımcının fon üzerindeki kararları maksimum kayıp değişkenine bağlıdır. Daehwan [14] yatırımcının faydasının maksimum kayıp değişkeninin beklenen faydasına bağlı olduğunu aşağıdaki teoremle ifade etmiştir:

Teorem 1. *Kazanç tamamen riskli olduğunda nakit akış belirsizliği olduğunu farzedelim. O halde, nakit akış belirsizliği aşırı ise yatırımcının faydası sadece maksimum kayıp değişkeninin beklenen faydasına bağlıdır.*

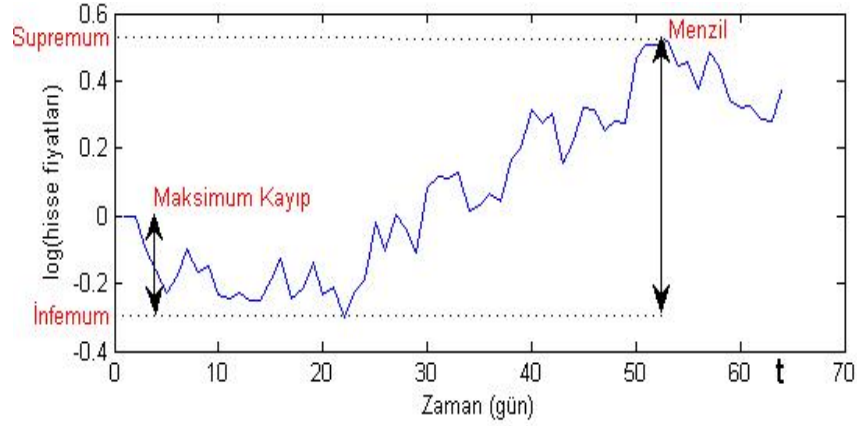
Literatürde, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri üzerine varolan yöntemlerle ancak sınırlı değerler bulunabilmektedir.

$\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış kesirli Brown hareketi olmak üzere;

- $S_t^H := \sup_{0 \leq v \leq t} B_v^H$, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni olsun.
- $I_t^H := \inf_{0 \leq v \leq t} B_v^H$, kesirli Brown hareketinin infimum değişkeni olsun.
- $R_t^H = S_t^H - I_t^H$, kesirli Brown hareketinin menzil değişkeni olsun.
- $M_t^H := \sup_{0 \leq u \leq v \leq t} (B_u^H - B_v^H)$, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni olsun.

Yukarıda belirttiğimiz değişkenler grafik üzerinde Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

Yukarıda belirttiğimiz değişkenler üzerine literatürde var olan sınırlar,



Şekil 1.1: Maksimum Kayıp ve Supremum Değişkenleri

1. Supremum değişkeninin beklenen değeri için

$$E(S_t^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H$$

şeklinde bir üst sınır elde edilmiştir [27].

2. 1.'de verilen üst sınır kullanılarak sürecin infimum değişkeninin beklenen değeri ve menzil değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki sınırlar elde edilmiştir [8],

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H \leq E(I_t^H), \quad E(R_t^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H.$$

3. 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

alt ve üst sınırları elde edilmiştir [8].

4. Sudakov-Fernique eşitsizliğini kullanılarak sürecin supremum değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki alt ve üst sınırlar elde edilmiştir [20],

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} t^H \leq E(S_t^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H.$$

Bu tez çalışmasının amacı, literatür taraması yapmanın yanı sıra, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için kesikli Gauss süreci kullanarak yeni nümerik alt sınırlar elde etmek, yeni teorik sınırlara ulaşmak ve bu sınırları karşılaştırmaktır. Bu amaçlar doğrultusunda çalışmamızda literatüre katkılarımızı aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

1. Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için kesikli Gauss süreci kullanılarak Min-z alt sınırı oluşturulmuştur.
2. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için kesikli Gauss süreci kullanılarak Min-z alt sınırı oluşturulmuştur.
3. Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon değerleri kullanılarak bilgisayar ortamında benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiş ve üretilen kesirli Brown hareketlerinden supremum değişkeninin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerleri gözlemlenmiştir.
4. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile sürece Gauss değişkenleri kullanılarak yaklaşmıştır. Ross [22] tarafından bağımlı Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri üzerine kullanılmış hesaplama yöntemi kesirli Brown hareketinin supremum ve maksimum kayıp değişkenlerine uyarlanmıştır.
5. Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için teorik üst sınır oluşturulmuştur.
6. Yukarıda bahsedilen nümerik alt sınırlarımız, teorik sonuçlarımız, literatürde varolan sınırlar ve simülasyon sonuçlarımız ile karşılaştırılarak elde ettiğimiz sınırların performansları değerlendirilmiştir.

Böylece kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değerinin ve maksimum kayıp değişkeninin beklenen değerinin ulaşabileceği en büyük ve en küçük değerler hakkında bilgilere sahip olunabilir. Bu bilgiler ışığında yatırımcılar

kesirli Brown hareketi kullanılarak modellenen varlıklar ile ilgili yatırımlarında kazançlarını ve risklerini kontrol edebilirler. Örneğin; maksimum kayıp değişkeni, portfolyo performansının riske göre uyarlanmış ölçülerinden biri olan Calmar oranının tanımlanmasında kullanılmaktadır. Calmar oranı; R_τ , $[0, \tau]$ zaman aralığındaki kazanç ve M_τ , $[0, \tau]$ zaman aralığındaki maksimum kayıp olmak üzere aşağıdaki formül ile verilmektedir:

$$Calmar(\tau) = \frac{R_\tau}{M_\tau}.$$

Finansal piyasalarda Calmar oranı kullanılarak portfolyoların performansı değerlendirilebilmektedir [2, 18].

Bu tez çalışmamız aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir;

İkinci bölümde, standart Brown hareketinin ve kesirli Brown hareketinin tanımları ile standart Brown hareketinin özellikleri ve kesirli Brown hareketinin özbenzerlik, uzun süreli bağımlılık, iki artış arasındaki kovaryans gibi özellikleri verilecektir.

Üçüncü bölümde, standart Brown hareketinin supremum değişkeninin dağılımı ve beklenen değeri için hesaplama yöntemleri verilecektir [5]. Ayrıca, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni için literatürde var olan sınırlar özetlenerek sınır değerleri ifade edilecektir [27, 20].

Dördüncü bölümde, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde ettiğimiz nümerik alt sınırlardan bahsedilecektir. Öncelikle, kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile sürece Gauss değişkenleri kullanılarak yaklaşım yapılacaktır. Ross [22] tarafından bağımlı Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri üzerine kullanılmış hesaplama yöntemi kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için uyarlanarak nümerik alt sınırlar elde edilecektir. Ayrıca, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için hesaplanan simülasyon sonuçları ifade edilecektir.

Beşinci bölümde, standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin dağılımı ve beklenen değeri için literatürde var olan sonuçlar verilecektir [5]. Ayrıca, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için literatürde var olan sınırlar özetlenecektir [8].

Altıncı bölümde, dördüncü bölümde kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri üzerine alt sınır elde etmek için kullanılan Ross [22]

hesaplama yöntemi kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için yeniden düzenlenerek nümerik alt sınırlar elde edilecektir. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için kesikli Gauss süreci kullanılarak bulunan Min-z alt sınırı ifade edilecektir. Ayrıca, Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için bulunan yeni teorik üst sınırdan bahsedilecektir. Son olarak, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için hesaplanan simülasyon sonuçlarına yer verilecektir. Sonuç bölümünde ise dördüncü ve altıncı bölümlerde elde edilen sınır değerleri karşılaştırılarak bu tez çalışmasının sonuçları sunulacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı ve $\tau \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $f : \Omega \times \tau \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(w, t)$ fonksiyonuna rastgele fonksiyon denir. Eğer $\tau = [0, \infty]$ ve $t \in \tau$ zaman olarak yorumlanırsa $f(w, t)$ ye stokastik süreç denir.

Tanım 2. $\{X_t : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı ve \mathbb{R}^n de değerler alan bir stokastik süreç ve $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, X tarafından üretilen σ -cebiri olsun. $\tau < \infty$, \mathcal{F}_t 'ye göre durma zamanı olsun. \mathcal{B} , \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı Borel σ -cebiri ve $A \in \mathcal{B}$ olmak üzere; her $s \geq 0$ için

$$P(X_{\tau+s} \in A | \mathcal{F}_\tau) = P(X_{\tau+s} \in A | X_\tau)$$

eşitliği sağlanıyor ise X stokastik sürecine Markov süreci denir.

Tanım 3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(Af)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_x f(X_t) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} E_x f(X_t) |_{t=0}$$

limiti mevcut olsun. O halde, $(Af)(x)$, x 'in bir fonksiyonudur. A 'ya X 'in üretici denir.

f iki kez türevlenebilen sürekli bir fonksiyon ise

$$(Af)(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''$$

dir.

2.1 Standart Brown Hareketi

Tanım 2.1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış x noktasından başlayan standart Brown hareketi,

1. $W_0 = x$ dir.
2. $s \rightarrow W_s$ süreklidir.
3. Bütün $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ artışları normal dağılıma sahiptir. $E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0$ ve $E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t_i - t_{i-1}$ dir.

şartlarını sağlayan bir stokastik süreçtir.

Standart Brown Hareketi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$ 'dir.
- τ , W tarafından üretilen filtrasyona bağlı durma zamanı ve \mathcal{F}_τ , τ zamanından önce olan olayların oluşturduğu σ -cebiri olsun. Buna göre her $t \geq 0$ için $A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$ ve $\{A \cap \{\tau \leq t\}\} \in \mathcal{F}_t$ 'dir. Brown hareketi için Markov özelliği sağlanır:

$$E(f(W_{t+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) = E_{W_\tau}(f(W_t))$$

Burada f ölçülebilir ve sınırlı bir fonksiyondur.

- $t \geq 0$ olmak üzere, $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ ve $\{W_t - W_{t-s} : 0 \leq s \leq t\}$ değişkenlerinin dağılımları özdeşdir. Bu özelliğe durağan aralıklar özelliği denir.
- Her $c > 0$ için $\{\sqrt{c}W_{t/c} : t \geq 0\}$ süreci de bir Brown hareketidir. Bu özelliğe yeniden ölçeklendirme özelliği denir.
- $-W$ süreci de bir Brown hareketidir. Bu özelliğe simetri özelliği denir.
- $\{|W_t| : t \geq 0\}$ sürecine yansıtılmış Brown hareketi denir.

2.2 Kesirli Brown Hareketi

Tanım 2.2.1. Hurst parametresi $H \in (0, 1)$ olsun. Kesirli Brown hareketi $(B^H(t))_{t \geq 0}$, $\forall s, t \geq 0$ için kovaryans fonksiyonu

$$E [B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

olan, 0 'da ortalananmış, sürekli bir Gauss sürecidir [4].

Tanım 2.2.1'den standart kesirli Brown hareketinin aşağıdaki özellikleri sağladığı söylenebilir:

1. $B^H(0) = 0$ ve $E[B^H(t)] = 0$, $\forall t \geq 0$.
2. B^H homojen artış aralıklarına sahiptir; yani, $\forall s, t \geq 0$ için $B^H(t+s) - B^H(s)$ ile $B^H(t)$ aynı dağılıma sahiptir.
3. B^H Gauss sürecidir ve $\forall H \in (0, 1)$ için $E[(B^H(t))^2] = t^{2H}$, $t \geq 0$.
4. B^H sürekli yörüngelere sahiptir.

2.2.1 Stokastik İntegral Gösterimi

Kesirli Brown hareketi, 1968 yılında Mandelbrot ve Van Ness [19] tarafından aşağıdaki integral gösterimi ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} B^H(t) &= \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{\mathbb{R}} ((t - s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}) dW_s \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^0 ((t - s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) dW_s \\ &\quad + \int_0^t (t - s)^{H-1/2} dW_s \end{aligned}$$

W_s , standart Brown hareketi ve Γ , gamma fonksiyonu olmak üzere Hurst parametresi $H \in (0, 1)$ olan kesirli Brown hareketidir.

2.2.2 İki Artış Arasındaki Kovaryans

$H = 1/2$ için B^H standart Brown hareketidir ve sürecin artışları bağımsızdır. Fakat, $H \neq 1/2$ için artışlar bağımlıdır. Kesirli Brown hareketinin tanımından, $s + h \leq t$ ve $t - s = nh$ olmak üzere $B^H(t + h) - B^H(t)$ ve $B^H(s + h) - B^H(s)$ arasındaki kovaryans fonksiyonu

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}]$$

ile verilir. $B^H(t + h) - B^H(t)$ ve $B^H(t + 2h) - B^H(t + h)$ formundaki iki artışın arasındaki ilişki $H > 1/2$ iken pozitif, $H < 1/2$ iken negatiftir.

2.2.3 Özbenzerlik

Kesirli Brown hareketi özbenzerlik özelliğine sahiptir, yani herhangi bir $c > 0$ sabiti için

$$(B_{ct}^H)_{t \geq 0} \stackrel{law}{=} (c^H B_t^H)_{t \geq 0}$$

$H = 1/2$ alınarak standart Brown hareketi $(W_t)_{t \geq 0}$ için özbenzerlik özelliği elde edilir:

$$(W_{at})_{t \geq 0} \stackrel{law}{=} (a^{1/2} W_t)_{t \geq 0}$$

2.2.4 Uzun Süreli Bağımlılık

Tanım 2.2.2. Sabit bir $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sürecinin kovaryans fonksiyonu

$\rho(n) := cov(X_k, X_{k+n})$, c sabit ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa X_n uzun süreli bağımlılık özelliği gösterir denir [4].

Kesirli Brown hareketinin uzun süreli bağımlılık özelliğini sağladığı kovaryans fonksiyonu kullanılarak gösterilebilir. Artışlar arasındaki kovaryans fonksiyonu

$$\begin{aligned} \rho_H(n) &:= E[(B^H(t+h) - B^H(t))(B^H(s+h) - B^H(s))] \\ &= \frac{h^{2H}}{2}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}] \end{aligned}$$

ile verilir.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots$$

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} - \dots$$

açılımları kullanılarak

$$\begin{aligned} \rho_H(n) &= 1 + 2H\frac{1}{n} + \frac{2H(2H-1)}{2}\frac{1}{n^2} + 1 - 2H\frac{1}{n} + \frac{2H(2H-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \dots \\ &\cong \frac{n^{2H}}{2}(2H(2H-1))\frac{1}{n^2} \\ &= H(2H-1)n^{2H-2} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Uzun süreli bağımlılık özelliğinin tanımında, $c = H(2H-1)$ ve $\alpha = 2 - 2H$ olmak üzere $H > 1/2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{H(2H-1)n^{2-2H}} = 1$$

elde edilir. Yani $H > 1/2$ için kesirli Brown hareketinin artışları uzun süreli bağımlılık özelliği gösterir.

2.3 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1. (*Jensen Eşitsizliği*) X , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı, integrallenebilir ve reel değerli bir rastgele değişken ve φ konveks bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$$

dir.

Teorem 2.3.2. (*Markov Eşitsizliği*) X negatif değerler almayan rastgele bir değişken olsun. Her $c > 0$ için

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3.3. (Sudakov-Fernique Eşitsizliği) X ve Y , τ üzerinde tanımlı ortalanmış Gauss süreçleri olsun. $s, t \in \tau$ olmak üzere

$$E(X_s - X_t)^2 \leq E(Y_s - Y_t)^2$$

şartı sağlanıyor ise

$$E(\sup_{\tau} X_t) \leq E(\sup_{\tau} Y_t)$$

eşitsizliği sağlanır [3].

3. SUPREMUM DEĞİŞKENİ ÜZERİNE LİTERATÜR ÖZETİ

3.1 Standart Brown Hareketinin Supremum Değişkeni

Bu bölümdeki amacımız, standart Brown hareketinin supremum değişkeninin dağılımı ve beklenen değeri üzerine literatürde var olan sonuçları ayrıntılı anlatmaktır.

Teorem 3.1.1. W , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış standart Brown hareketi ve $S_1 = \sup_{0 \leq v \leq 1} W_v$ standart Brown hareketinin supremum değişkeni olsun.

O halde,

$$E(S_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (3.1)$$

dir [5].

İspat. W , 0 zamanından başlayan standart Brown hareketi ve T , λ parametrelili üstel dağılıma sahip ve W Brown hareketinden bağımsız bir rastgele değişken olsun. T zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin supremum değişkeni

$$S_T := \sup\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$$

şeklinde tanımlanır. Standart Brown hareketinin supremum değişkeninin dağılım

fonksiyonu

$$\begin{aligned}
P(S_T > b) &= P(H_b < T) = \int_0^\infty P(H_b < t | T = t) P(T = t) dt \\
&= \int_0^\infty E I_{(H_b < t | T = t)} P(T = t) dt \\
&= E \int_0^\infty I_{(H_b < t | T = t)} P(T = t) dt \\
&= EP(T > H_b) = E(e^{-\lambda H_b})
\end{aligned}$$

dir. Burada I indikatör fonksiyonudur ve $H_b := \inf\{t > 0 : X_t = b\}$ sürecin belirli bir $b > 0$ seviyesine ulaştığı ilk zamandır.

H_b 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{H_b}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} e^{-b^2/2t}, t > 0$ olduğundan supremum değişkenin dağılım fonksiyonu

$$P(S_T > b) = E(e^{-\lambda H_b}) = \int_0^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{b^2}{2t} - \lambda t} dt = e^{-b\sqrt{2\lambda}}$$

dır. T zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri, olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak

$$E(S_T) = \int_0^\infty b\sqrt{2\lambda} e^{-b\sqrt{2\lambda}} db$$

şeklinde hesaplanır. O halde, kısmi integrasyon yöntemi ile beklenen değer kolaylıkla hesaplanır ve

$$E(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

olarak bulunur.

Şimdi Brown hareketinin ölçeklendirme özelliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri bulunabilir. Standart Brown hareketinin ölçeklendirme özelliğinden

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= E(\sup_{0 < v < T} W_v) = E(\sup_{0 < v/T < 1} W_v) \\
&= E(\sup_{0 < u < 1} W_{uT}) = E(\sup_{0 < u < 1} \sqrt{T} W_u) \\
&= E(\sqrt{T}) E(\sup_{0 < u < 1} W_u) = E(\sqrt{T}) E(S_1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

yazılır.

T , λ parametrelili üstel dağılıma sabit bir rastgele değişken olduğundan

$$E(T^{p/2}) = \lambda \int_0^\infty t^{p/2} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(\frac{2+p}{2})}{\lambda^{p/2}} \tag{3.3}$$

dir. O halde, 1 zamanına kadar tanımlı olan Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$E(S_1) = \frac{E(S_T)}{E(\sqrt{T})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

olarak bulunur. □

Teorem 3.1.1 ve ölçeklendirme özelliği kullanılarak herhangi bir t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(S_t) = E(\sqrt{t}S_1) = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}}.$$

3.2 Kesirli Brown Hareketinin Supremum Değişkeni

Bu bölümde, literatürde kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için var olan üst sınırlardan bahsedilecektir. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $S_t^H = \sup_{0 < v < t} B_v^H$ kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni olsun. Sabit bir a zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için

$$E(S_a^H) \leq \frac{a^H \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

üst sınırı elde edilmiştir [27]. Aşağıda verilen teorem ile kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin dağılımı için bir üst sınır ifade edilmiştir [27].

Teorem 3.2.1. *Hurst parametresi $H > 1/2$ olan ve a zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini ele alalım. O halde,*

$$P(S_a^H > x) \leq \frac{\sqrt{2}a^H}{x\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. T , λ parametrelili üstel dağılıma sahip ve T zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinden bağımsız bir rastgele değişken olmak üzere, T zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini ele alalım.

$H_a := \inf\{t > 0 : B_t^H = a\}$ sürecin belirli bir $a > 0$ seviyesine ulaştığı ilk zaman olmak üzere

$$E(e^{-\lambda H_a^{2H}}) \leq e^{-a\sqrt{2\lambda}} \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır [13]. Kesirli Brown hareketinin özbenzerlik özelliği ve (3.4) eşitsizliği kullanılarak

$$P(H_a^{2H} \leq T) = P(S_{T^{\frac{1}{2H}}} \geq a) = E(e^{-\lambda H_a^{2H}}) \leq e^{-a\sqrt{2\lambda}} \quad (3.5)$$

yazılır. (3.5) eşitsizliği kullanılarak

$$E(S_{T^{\frac{1}{2H}}}) = \int_0^\infty P(S_{T^{\frac{1}{2H}}} \geq a) da \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yine kesirli Brown hareketinin özbenzerlik özelliğinden

$$E\left(\sup_{0 \leq u \leq T^{\frac{1}{2H}}} B_u\right) = E\left(\sup_{0 \leq v \leq 1} (T^{1/2} B_v)\right) = E(\sqrt{T})E(S_1)$$

olduğu görülür. Burada, T üstel dağılıma sahip rastgele değişken olduğundan $E(T^{p/2}) = \frac{\Gamma(\frac{2+p}{2})}{\lambda^{p/2}}$, dir. O halde,

$$E(S_1) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Markov eşitsizliğinden, her $x > 0$ için

$$P(S_1 \geq x) \leq \frac{E(S_1)}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{\pi}}$$

yazılabilir.

Kesirli Brown hareketinin özbenzerlik özelliği ve Markov eşitsizliği kullanılarak herhangi bir sabit a zamanı için

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0 \leq u \leq a} B_u^H \geq x\right) &= P\left(a^H \sup_{0 \leq v \leq 1} B_v^H \geq x\right) \\ &= P\left(a^H S_1^H \geq x\right) \\ &= P\left(S_1^H \geq \frac{x}{a^H}\right) \\ &\leq \frac{a^H \sqrt{2}}{x\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Özbenzerlik özelliği ve (3.6) eşitsizliği birleştirilerek sabit bir a zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki üst sınıra ulaşılır [27],

$$E(S_a^H) = E\left(\sup_{0 \leq u \leq a} B_u^H\right) = E\left(a^H \sup_{0 \leq v \leq 1} B_v^H\right) = a^H E(S_1) \leq \frac{a^H \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için Norros [20] tarafından alt sınır değeri hesaplanmıştır. Bu sonuca ulaşmak için aşağıda verilen önerme kullanılmıştır.

Önerme 3.2.1. $\{X_u : 0 \leq u \leq t\}$, beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan rastgele değişkenler olmak üzere

$$P\{\max_{0 \leq u \leq t} X_u > x\} \geq 1 - \Phi\left(\min_{0 \leq u \leq t} \frac{x - \mu}{\sigma^2}\right) \quad (3.7)$$

dir [22].

Teorem 3.2.2. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $S_t^H = \sup_{0 < u < t} B_u^H$ kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni olsun. O halde,

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(S_t^H)$$

eşitsizliği sağlanır [20].

İspat. $E\left(\sup_{0 < u < t} B_u^H\right) = \int_0^\infty P\left(\sup_{0 < u < t} B_u^H > x\right) dx$ dir. $E(B_t^H) = 0, t \geq 0$ ve $Var(B_t^H) = t^{2H}, t \geq 0$ olduğundan Önerme 3.2.1'den

$$\begin{aligned} E(S_t^H) &= \int_0^\infty P\left(\sup_{0 < u < t} B_u^H > x\right) dx \\ &\geq \int_0^\infty \left(1 - \Phi\left(\min_{0 < u < t} \frac{x}{u^{2H}}\right)\right) dx \\ &= \int_0^\infty P\left(z > \min_{0 < u < t} \frac{x}{u^{2H}}\right) dx \\ &= \int_0^\infty P\left(z > \frac{x}{\max_{0 < u < t} u^{2H}}\right) dx \\ &= \int_0^\infty P\left(z > \frac{x}{t^{2H}}\right) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada $z \in N(0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(S_t^H) &\geq \int_0^\infty P(z > \frac{x}{t^{2H}}) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\frac{x}{t^{2H}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dx \\ &= \frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

elde edilir. □

4. KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN SUPREMUM DEĞİŞKENİ ÜZERİNE SONUÇLARIMIZ

Bu bölümde, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni için elde ettiğimiz nümerik sınırları ve simülasyon sonuçlarımızı inceleyeceğiz.

4.1 Kesikli Süreç ve Birlikte Gauss Dağılımı ile Sınırlar Hesaplanması

$\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $S_t^H := \sup_{0 < u < t} B_u^H$ kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni olsun. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile, yani $[0, t]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek sürece Gauss değişkenleri kullanarak yaklaşmıştır. Böylece supremum değişkeninin değerine yaklaşmak amaçlanmıştır. $n \rightarrow \infty$ iken sürece daha da yaklaşılır. $[0, t]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = t/n$ olmak üzere elde edilen $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış birlikte Gauss dağılımına sahiptir. Kesirli Brown hareketinin kovaryans tanımından birlikte Gauss dağılımının kovaryans matrisi

aşağıdaki fonksiyon ile oluşturulur:

$$Cov(B_{i\delta}^H, B_{j\delta}^H) = E(B_{i\delta}^H B_{j\delta}^H) = \frac{1}{2}[(i\delta)^{2H} + (j\delta)^{2H} - |i\delta - j\delta|^{2H}]$$

Burada $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ şeklinde alınmıştır. Kovaryans matrisine baktığımızda görüyoruz ki, $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri birbirinden bağımsız değildir. $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H) \leq S_t^H. \quad (4.1)$$

Yukarıda verilen (4.1) eşitliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E(\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H)) \leq E(S_t^H)$$

elde edilir.

Literatürde, bağımlı Gauss değişkenlerin maksimum değerinin dağılımı ve beklenen değeri hakkında pek çok çalışma vardır, fakat açık bir teorik cevap mevcut değildir. Bu konu ile ilgili ilk çalışmalar Tippett [25], Teichroew [24], Clark ve Williams [10], Bose ve Gupta [6] tarafından yapılmıştır. Bağımlı ancak aynı dağılıma sahip Gauss değişkenleri ile ilgili sonuçlar [21]'de verilmiştir. Clark [11] farklı dağılıma sahip ve bağımlı iki Gauss değişkeninin ilk dört momentini hesaplamıştır. Ross [23] farklı dağılıma sahip ve bağımlı Gauss değişkenleri için bir üst sınır elde etmiştir. Lai ve Robbins [17] tarafından aynı dağılıma sahip ve bağımlı Gauss değişkenleri için sınır oluşturulmuştur. Brodtkorb [7] singular kovaryans matrisine sahip Gauss değişkenleri üzerine bir yöntem geliştirmiştir. Ross [22] tarafından farklı dağılıma sahip ve bağımlı (FDSB) Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri için alt ve üst sınır oluşturmak üzere nümerik hesaplama yöntemleri geliştirmiştir. Ross [22] tarafından geliştirilen hesaplama yöntemleri [28]'de verilen aşağıdaki teorem kullanılarak oluşturulmuştur.

Teorem 4.1.1. $\{V_i, X_i, Y_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ 0'da ortalanmış, farklı dağılıma sahip ve bağımlı Gauss değişkenleri olsun. Bütün i ve j değerleri için

$$E((V_i - V_j)^2) \leq E((X_i - X_j)^2) \leq E((Y_i - Y_j)^2)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise herhangi bir sabit $\{m_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ için

$$E(\max_i V_i + m_i) \leq E(\max_i X_i + m_i) \leq E(\max_i Y_i + m_i)$$

eşitsizliği sağlanır. m_i , \bar{X}_i nin beklenen değeri olarak alınrsa,

$$E(\max_i \bar{V}_i) \leq E(\max_i \bar{X}_i) \leq E(\max_i \bar{Y}_i)$$

eşitsizliği de yazılır. Burada $\bar{X}_i = X_i + m_i$ dir.

Ross [22], çalışmasında maksimum değişkeninin beklenen değeri kolay hesaplanabilen yeni Gauss değişkenleri kümesi belirlemiş (farklı dağılıma sahip ve tam bağımlı (FDSTB) Gauss değişkenleri ile farklı dağılıma sahip ve bağımsız (FDSBS) Gauss değişkenleri) ve yeni Gauss değişkenleri ile Teorem 4.1.1 kullanılarak elde edilen değerler FDSB Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri için sınırlar oluşturmuştur. Ross [22] hesaplama yöntemi aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

- FDSB Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri hesaplanmak isteniyor, fakat bu değer teorik olarak hesaplanamıyor.
- FDSTB Gauss değişkenlerinin ve FDSBS Gauss değişkenlerinin supremum değişkenlerinin beklenen değerleri teorik olarak hesaplanabilir.
- Teorem 4.1.1'e göre

$$E[\max(FDSTB_1)] \leq E[\max(FDSB)] \leq E[\max(FDSTB_2)]$$

ve

$$E[\max(FDSBS_1)] \leq E[\max(FDSB)] \leq E[\max(FDSBS_2)]$$

şartlarını sağlayan FDSTB ve FDSBS Gauss değişkenleri bulunabilir.

Öncelikle ikinci adımda bahsedilen FDSTB Gauss değişkenlerinin ve FDSBS Gauss değişkenlerinin supremum değişkenlerinin beklenen değerlerinin nasıl hesaplandığından bahsedilecektir.

4.1.1 FDSBS Gauss Değişkenleri

$\{Y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ farklı beklenen değerlere ve farklı varyans değerlerine sahip bağımsız değişkenler olsun. Y_i değişkenlerinin maksimum değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu

$$P(\max_i Y_i \leq w) = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq w) \quad (4.2)$$

dir.

David [12] tarafından verilmiş olan moment hesaplama yöntemine göre bir rastgele değişkeninin n . momentini kümülatif dağılım fonksiyonu kullanılarak

$$E[X_n] = \int_0^\infty nx^{n-1}(P\{X > x\} + (-1)^n P\{X < -x\})dx \quad (4.3)$$

eşitliği ile elde edilir. (4.2) ve (4.3) eşitlikleri kullanılarak Y_i değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri

$$E[\max_i Y_i] = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^n P(Y_i \geq w) - \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq -w)\right) dw \quad (4.4)$$

şeklinde hesaplanabilir. Eşitlik (4.4) kullanılarak FDSBS Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri kolayca hesaplanabilir.

4.1.2 FDSTB Gauss Değişkenleri

$\{V_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ tam bağımlı ve farklı normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olsun. Bu değişkenler standart normal dağılıma sahip Z değişkeni kullanılarak

$$V_i = s_i Z + m_i$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada $s_i \in \mathbb{R}$ 'dir. V_i değişkenleri tam bağımlı olduklarından ikili kovaryansları $+1$ veya -1 'dir. V_i değişkeninin supremum değişkeninin beklenen değeri Z 'ye koşullandırılarak hesaplanabilir.

$E[\max_i V_i | Z = z]$ deterministik bir fonksiyondur ve bu fonksiyon $h(z)$ olsun. Ayrıca, $h(z)$ konveks ve parçalı doğrusal bir fonksiyondur. V_i değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri

$$E[\max_i V_i] = E[E[\max_i V_i | Z = z]] = \int_{-\infty}^\infty h(z)\phi(z)dz \quad (4.5)$$

şeklinde hesaplanabilir. Eşitlik (4.5) kullanılarak FDSTB Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri kolayca hesaplanabilir.

4.1.3 Ross Hesaplama Yöntemi

Bu bölümde, FDSBS ve FDSTB Gauss değişkenleri kullanılarak FDSB Gauss değişkeninin supremum değişkeninin beklenen değeri için nasıl sınır oluşturduğu anlatılacaktır. $\{X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 0'da ortalananmış FDSB Gauss değişkeni olsun. O halde,

$$E[(X_i - X_j)^2] = \sigma_{X_i}^2 + \sigma_{X_j}^2 - 2\sigma_{X_i}\sigma_{X_j} = b_{ij}$$

dir. FDSTB Gauss değişkenleri için $E(X_i) = m_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ olduğundan

$$E[(V_i - V_j)^2] = E[((s_i Z + m_i) - (s_j Z + m_j))^2] = (s_i - s_j)^2$$

ve FDSBS Gauss değişkenleri için

$$E[(Y_i - Y_j)^2] = \sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 - 2\sigma_{Y_i}\sigma_{Y_j} = \sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2$$

olarak hesaplanır.

- FDSTB Gauss değişkenleri kullanılarak alt sınır oluşturmak için çözülmesi gereken matematiksel program

$$\begin{aligned} & maks \ E[\underset{i}{maks} V_i] \\ \ni \quad & \forall i, j : (s_i - s_j)^2 \leq b_{ij} \\ & \forall i : s_i > 0 \end{aligned}$$

dir. Buna göre, ilk olarak Teorem 4.1.1 şartını $((s_i - s_j)^2 \leq b_{ij})$ sağlayan s_i değerleri bulunur ve bu değerlere göre hesaplanan $E[\underset{i}{maks} V_i]$ değeri maksimize edilir. Yani, s_i değerlerinin herbiri için Bölüm 4.1.2'de verilen yöntemle $E[\underset{i}{maks} V_i]$ değeri hesaplanır ve $E[\underset{i}{maks} V_i]$ değerlerinin maksimum değeri aradığımız alt sınırı verir.

- FDSTB Gauss değişkenleri kullanılarak üst sınır oluşturmak için

$$\begin{aligned} & min \ E[\underset{i}{maks} V_i] \\ \ni \quad & \forall i, j : (s_i - s_j)^2 \geq b_{ij} \\ & \forall i : s_i > 0 \end{aligned}$$

matematiksel programı çözümlenmelidir. Buna göre, ilk olarak Teorem 4.1.1 şartını $((s_i - s_j)^2 \geq b_{ij})$ sağlayan s_i değerlerinin herbiri için $E[\max_i V_i]$ değeri Bölüm 4.1.2'de verilen yöntemle hesaplanır ve $E[\max_i V_i]$ değerlerinin minimum değeri aradığımız üst sınırı verir.

- FDSBS Gauss değişkenleri kullanılarak alt sınır oluşturmak için

$$\begin{aligned} & maks \ E[\max_i Y_i] \\ \ni \quad & \forall i, j : \sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 \leq b_{ij} \end{aligned}$$

matematiksel programı çözümlenmelidir. Buna göre, ilk olarak Teorem 4.1.1 şartını $(\sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 \leq b_{ij})$ sağlayan σ_{Y_i} değerleri bulunur ve bu değerlere göre Bölüm 4.1.1'de verilen yöntemle $E[\max_i Y_i]$ değerleri hesaplanır. $E[\max_i Y_i]$ değerlerinin maksimum değeri aradığımız alt sınırı verir.

- FDSBS Gauss değişkenleri kullanılarak üst sınır oluşturmak için çözümlenmesi gereken matematiksel program

$$\begin{aligned} & min \ E[\max_i Y_i] \\ \ni \quad & \forall i, j : \sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 \geq b_{ij} \end{aligned}$$

dir. Buna göre, ilk olarak Teorem 4.1.1 şartını $(\sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 \geq b_{ij})$ sağlayan σ_{Y_i} değerleri bulunur ve bu değerlere göre Bölüm 4.1.1'de verilen yöntemle $E[\max_i Y_i]$ değerleri hesaplanır ve $E[\max_i Y_i]$ değerlerinin maksimum değeri aradığımız üst sınırı verir.

Ross [22] hesaplama yönteminde σ_{Y_i} ve s_i değerleri Matlab programında lineer programlama ile hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerler kullanılarak $E[\max_i V_i]$ ve $E[\max_i V_i]$ değerlerini hesaplamak için Matlab programında nümerik integral hesaplama yöntemleri kullanılmıştır.

1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile, yani $[0, 1]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = 1/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalananmış birlikte Gauss dağılımına sahiptir. $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri

için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$E(\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H)) \leq E(S_1^H).$$

$\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri, FDSB Gauss değişkenleri olduğundan Ross [22] hesaplama yöntemi ile $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri için, dolayısıyla kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için alt sınır değerleri hesaplanabilir. Ross [22] hesaplama yönteminde kullanılan b_{ij} değerleri $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri için

$$\begin{aligned} b_{ij} &= E[(B_{i\delta}^H - B_{j\delta}^H)^2] \\ &= E[(B_{i\delta}^H)^2 + (B_{j\delta}^H)^2 - 2B_{i\delta}^H B_{j\delta}^H] \\ &= E[(B_{i\delta}^H)^2] + E[(B_{j\delta}^H)^2] - 2E[B_{i\delta}^H B_{j\delta}^H] \\ &= (i\delta)^{2H} + (j\delta)^{2H} - [(i\delta)^{2H} + (j\delta)^{2H} - |i\delta - j\delta|^{2H}] \\ &= |i\delta - j\delta|^{2H} \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde hesaplanır.

Eşitlik (4.6) ile verilen b_{ij} değerleri kullanılarak Ross [22] hesaplama yöntemi ile farklı Hurst parametrelerine sahip ve 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri üzerine alt sınır değerleri hesaplanmıştır. Elde ettiğimiz bu sonuçlar Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1'de verilen FDSBS alt sınır değerleri, Ross [22] hesaplama yönteminde farklı dağılıma sahip ve bağımsız Gauss değişkenleri kullanılarak elde edilmiştir. FDSTB alt sınır değerleri ise Ross [22] hesaplama yönteminde farklı dağılıma sahip tam bağımlı Gauss değişkenleri kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplamalar farklı örneklem sayıları için yapılmıştır. Çizelge 4.1'den görüleceği üzere alt sınır değerleri örneklem sayısı arttıkça azalmaktadır. Yani, alt sınır değerleri örneklem sayısı arttıkça iyi bir performans göstermemektedir. Sürekli bir süreç olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkenine kesikli bir sürecin supremum değişkeni ile yaklaşıldığında iyi sonuçlar elde edilmediği görülmüştür. Sınır değerleri kendi aralarında karşılaştırıldığında FDSBS sonuçlarının daha iyi olduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.1: Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar

		n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60
$H=0,5$	FDSBS Alt Sınır	0,3679	0,3177	0,2756	0,2522	0,2347	0,2217
	FDSTB Alt Sınır	0,1979	0,1559	0,1347	0,1223	0,1111	0,1032
$H=0,6$	FDSBS Alt Sınır	0,2955	0,2338	0,2009	0,1760	0,1599	0,1474
	FDSTB Alt Sınır	0,1673	0,1249	0,1035	0,0902	0,0806	0,0728
$H=0,7$	FDSBS Alt Sınır	0,2389	0,1736	0,1428	0,1236	0,1101	0,0991
	FDSTB Alt Sınır	0,1395	0,0995	0,0800	0,0669	0,0583	0,0523
$H=0,8$	FDSBS Alt Sınır	0,1906	0,1308	0,1036	0,0873	0,0758	0,0672
	FDSTB Alt Sınır	0,1171	0,0790	0,0612	0,0511	0,0436	0,0384
$H=0,9$	FDSBS Alt Sınır	0,1526	0,0954	0,0729	0,0595	0,0501	0,0447
	FDSTB Alt Sınır	0,0982	0,0623	0,0471	0,0387	0,0329	0,0296

4.2 Min-z Alt Sınırı

$\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni

$$S_t^H = \sup_{0 \leq u \leq t} (B_u^H)$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile sürece Gauss değişkenleri kullanılarak yaklaşılmıştır. $[0, t]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ kesikli Gauss değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış Gauss dağılımına sahiptir. $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H) \leq S_t^H. \quad (4.7)$$

(4.7) eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E(\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H)) \leq E(S_t^H) \quad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için bir başka alt sınır kümülatif dağılım fonksiyonu ve standardize edilmiş değişkenler kullanılarak bulunabilir.

Önerme 4.2.1. $\{X_i : i = 1, 2, \dots\}$, beklenen değeri μ_i ve varyansı σ_i^2 olan rastgele değişkenler olmak üzere;

$$P\{\max_i X_i > x\} \geq 1 - \Phi\left(\min_i \frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (4.9)$$

dir [22].

Teorem 4.2.1. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri, kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile elde edilen değişkenler olsun. O halde,

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(\max_{1 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $E(B_{i\delta}^H) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ ve $Var(B_{i\delta}^H) = (i\delta)^{2H}, i = 1, 2, \dots, n$ olduğundan Önerme 4.2.1'den

$$\begin{aligned} E(\max_{1 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H)) &= \int_0^\infty P(\max_{1 \leq i \leq n} B_{i\delta}^H > x) dx \\ &\geq \int_0^\infty (1 - \Phi(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x}{(i\delta)^{2H}})) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - \Phi(\frac{x}{\max_{1 \leq i \leq n} (i\delta)^{2H}})) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - \Phi(\frac{x}{t^{2H}})) dx \\ &= \int_0^\infty P(z > \frac{x}{t^{2H}}) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada $z \in N(0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(\max_{1 \leq i \leq n} B_{i\delta}^H) &\geq \int_0^\infty P(z > \frac{x}{t^{2H}}) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\frac{x}{t^{2H}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dx \\ &= \frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.1 ve (4.8) eşitsizliği kullanılarak t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}^H)) \leq E(S_t^H)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.3 Simülasyon Sonuçları

Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için bilgisayar ortamında simülasyon değerleri hesaplanmıştır. Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi ile kesirli Brown Hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin supremum değeri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen supremum değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2: 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Simülasyon Sonuçları
0,5	252,3
0,6	524,4
0,7	1051,2
0,8	1976
0,9	3321,8

Sabit bir t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri ve özbenzerlik özelliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için

$$E(S_1^H) = \frac{E(S_t^H)}{t^H} \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. Çizelge 4.2’de verilen simülasyon sonuçları ve (4.10) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 4.3’te verilmiştir.

Çizelge 4.3: 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Simülasyon Sonuçları
0,5	0,79784
0,6	0,52440
0,7	0,33242
0,8	0,19760
0,9	0,10504

Çizelge 4.3’ten ulaştığımız gözlemler:

1. Çizelge 4.3’ten görüldüğü üzere $E(S_1^{0,5})$ değeri 0,7978 olarak bulunmuştur ki bu değer literatürde var olan teorik değer ile örtüşmektedir [5].
2. Çizelge 4.3’ten görüldüğü üzere $H = 0,9$ parametrelili kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için alt sınır ve $H = 0,5$ parametrelili kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için üst sınır oluşturmaktadır. Bu sonuç [20]’de ifade edilmiştir.
3. Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için [20]’de verilen

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(S_1^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

sınırlar kullanarak alt sınır 0,39904 ve üst sınır 0,79809 olarak hesaplanır. Çizelge 4.3’e bakıldığında teorik üst sınırın simülasyon sonuçları ile örtüştüğü, fakat teorik alt sınırın simülasyon sonuçları ile örtüşmediği görülmektedir.

Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kullanılan yaklaşık bir yöntemdir ve $H > 1/2$ için hata payının olduğu bilinmektedir. Bu sebeple, kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kesin bir yöntem olan Cholesky benzetimler yöntemi kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Cholesky benzetimler yöntemi kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kesin yöntem olduğundan, Abry ve Sellan [1] benzetimler yöntemine göre daha kesin sonuçlar verir.

Cholesky Benzetimler Yöntemi

X_0, X_1, \dots kesirli Gauss değişkenleri ve $\{X_i : i = 0, 1, \dots\}$ değişkenlerinin kovaryans matrisi $\Gamma(n)$ olsun. Kovaryans matrisi $\Gamma(n)$, $L(n)$ $(n+1) \times (n+1)$ alt üçgensel matris olmak üzere

$$\Gamma(n) = L(n)L(n)'$$

şeklinde yazılabilir. $L(n)$ 'nin (i, j) elemanı l_{ij} , $L(n)L(n)'$ ile $\Gamma(n)$ 'nin (i, j) elemanları eşit olduğundan

$$\gamma(i-j) = \sum_{k=0}^j l_{ik}l_{jk}, \quad j \leq i$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. $i = j = 0$ için $\gamma(0) = l_{00}^2$ ve $i = j = 1$ için $\gamma(1) = l_{10}l_{00}$, $\gamma(0) = l_{10}^2 + l_{11}^2$ denklemleri elde edilir. Bu şekilde $L(n)$ 'nin elemanları hesaplanabilir.

$V(n) = (V_i)_{i=0, \dots, n}$, elemanları bağımsız ve farklı dağılıma sahip standart normal rastgele değişkenler olan bir $n+1$ sütun vektörü olsun. O halde $X(n) = L(n)V(n)$ şeklinde yazılabilir. Her $n \geq 0$ için $E(X(n)) = 0$ ve $X(n)$ 'nin kovaryans matrisi

$$Cov(X(n)) = Cov(L(n)V(n)) = L(n)Cov(V(n))L(n)' = L(n)L(n)' = \Gamma(n)$$

dir [15].

Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Cholesky benzetimler yöntemi ile Kesirli Brown Hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin supremum değeri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen supremum değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4'te verilmiştir.

Çizelge 4.4: Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Cholesky Simülasyon Sonuçları
0,5	79,4
0,6	163,5
0,7	363,1
0,8	776,3
0,9	1740,8

Çizelge 4.4'te verilen simülasyon sonuçları ve (4.10) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 4.5'te verilmiştir.

Çizelge 4.5: Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Cholesky Simülasyon Sonuçları
0,5	0,79400
0,6	0,65091
0,7	0,57547
0,8	0,48981
0,9	0,43727

Çizelge 4.5'ten ulaştığımız gözlemler:

1. Çizelge 4.5'ten görüldüğü üzere $E(S_1^{0,5})$ değeri 0,794 olarak bulunmuştur ki bu değer literatürde var olan teorik değer ile örtüşmektedir [5].
2. Çizelge 4.5'ten görüldüğü üzere $H = 0,9$ parametrelili kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için alt sınır ve $H = 0,5$ parametrelili kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan

kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için üst sınır oluşturmaktadır. Bu sonuç [20]'de ifade edilmiştir.

3. Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için [20]'de verilen

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(S_1^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

sınırlar kullanılarak alt sınır 0,39904 ve üst sınır 0,79809 olarak hesaplanır. Çizelge 4.5'e bakıldığında teorik alt ve üst sınırların simülasyon sonuçları ile örtüştüğü görülmektedir.

5. MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE LİTERATÜR ÖZETİ

5.1 Standart Brown Hareketinin Maksimum Kayıp Değişkeni

Bu bölümde, standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin dağılımı ve beklenen değeri ile ilgili literatürde yer alan sonuçlar özetlenecektir.

Teorem 5.1.1. *W , 1 zamanına kadar tanımlı standart Brown hareketi ve $M_1 := \sup\{W_u - W_v : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$ standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni olsun. O halde,*

$$E(M_1) \cong 1,25331$$

dir [5].

İspat. W , 0 zamanından başlayan standart Brown hareketi ve T , λ parametrelili üstel dağılıma sahip ve W değişkeninden bağımsız bir rastgele değişken olsun. T zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni

$$M_T := \sup\{W_u - W_v : 0 \leq u \leq v \leq T\}$$

şeklinde tanımlanır. Standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin

dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
P_0(M_T > a) &= P_0^+(H_a < T) = \int_0^\infty P(H_a < t | T = t) P(T = t) dt \\
&= \int_0^\infty E_0^+ I_{(H_a < t | T = t)} P(T = t) dt \\
&= E_0^+ \int_0^\infty I_{(H_a < t | T = t)} P(T = t) dt \\
&= E_0^+ P(T > H_a) = E_0^+(e^{-\lambda H_a})
\end{aligned}$$

dir. Burada P_0^+ , 0 zamanından başlayan yansıtılmış Brown hareketinin olasılık fonksiyonunu ve E_0^+ , 0 zamanından başlayan yansıtılmış Brown hareketi için beklenen değer operatörünü ifade etmektedir.

0 zamanından başlayan yansıtılmış Brown hareketi Markov sürecidir ve $0 \leq b \leq a$ için $m = H_b$ olmak üzere $H_a = H_b + H_a(\omega_m^+)$ dır. m , \mathcal{F}_m ölçülebilir olduğundan $W(\omega_m^+)$, $m = H_b$ zamanında $W_m = b$ konumunda yeni bir başlangıç yapar. O halde,

$$E_0^+(e^{-\lambda H_a}) = E_0^+(e^{-\lambda H_b} E_0^+(e^{-\lambda H_a(\omega_m^+)} | \mathcal{F}_m)) = E_0^+(e^{-\lambda H_b}) E_b^+(e^{-\lambda H_a})$$

dir. $\lambda \geq 0$ için

$$E_x(e^{-\lambda H_a}) := \begin{cases} \frac{g_1(x)}{g_1(a)} & , x \leq a \\ \frac{g_2(x)}{g_2(a)} & , x \geq a \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $0 \leq b \leq a$ için

$$E_0^+(e^{-\lambda H_a}) = \frac{g_1(0)}{g_1(a)}$$

elde edilir.

Ito ve McKean [16] tarafından homojen difüzyon sürecinin $a \geq 0$ seviyesine ilk ulaştığı zamanın Laplace dönüşümü için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.1.2. X_t , bir $X_0 = x \in \mathbb{R}$ noktasından başlayan homojen difüzyon süreci olsun ve bu sürecin sonsuz küçük üreticini \mathcal{L} ile gösterelim. O halde, $x < a$ olmak üzere $H_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}$ nın Laplace dönüşümü $u(x, \lambda) := E_x[e^{H_a \tau}]$ aşağıdaki Sturm -Liouville sınır değer problemini çözer.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u(x, \lambda) &= \lambda u(x, \lambda) \\
u(x, \lambda)|_{x=a} &= 1 \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

\mathcal{G} , standart Brown hareketinin üretici olmak üzere Teorem 5.1.2'ye göre g_1 ,

$$\mathcal{G}g_1 = \lambda g_1$$

denkleminin çözümüdür. Denk olarak g_1 ,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 g_1}{dx^2} + \mu \frac{dg_1}{dx} - \lambda g_1 = 0 \quad (5.1)$$

denkleminin de çözümüdür. Yukarıda verilen (5.1) diferensiyel denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı bir diferensiyel denklemdir ve karakteristik denklemi

$$r^2 + 2\mu r - 2\lambda = 0$$

dır. O halde, (5.1) diferensiyel denkleminin çözümü

$$g_1 = c_1 e^{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})x} + c_2 e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})x}$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulları $g_1(0) = 1$ ve $g_1'(0) = 0$ olduğundan

$$c_1 + c_2 = 1$$

ve

$$c_1(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}) + c_2(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}) = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} + \frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, maksimum kayıp değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$P_0(M_T > a) = E_0^+(e^{-\lambda H_a}) = \frac{1}{\psi_\lambda(a; \mu)}$$

olarak bulunur. Burada

$$\psi_\lambda(a; \mu) := \frac{1}{e^{a\mu}} (\cosh(a\sqrt{2\lambda + \mu^2}) + \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda + \mu^2}} \sinh(a\sqrt{2\lambda + \mu^2}))$$

dir. $E(W_t)_{t \geq 0} = \mu = 0$ olduğundan $P_0(M_T > a) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}$ elde edilir. T , λ parametrelili üstel dağılıma sabit bir rastgele değişken olduğundan

$$E(T^{p/2}) = \lambda \int_0^\infty t^{p/2} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(\frac{2+p}{2})}{\lambda^{p/2}}$$

dir. O halde, T zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve Brown hareketinin ölçeklendirme özelliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri

$$E(M_1) = \frac{E(M_T)}{E(\sqrt{T})} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty P(M_T > b) db = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\cosh(b\sqrt{2\lambda})} db$$

şeklinde hesaplanır. $b\sqrt{2\lambda} = u$ değişken değiştirilmesi yapılarak

$$E(M_1) = \frac{E(M_T)}{E(\sqrt{T})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\cosh(u)} du \quad (5.2)$$

elde edilir. $\frac{1}{\cosh(u)} = \frac{2e^{-u}}{1+e^{-2u}}$ eşitliği (5.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$E(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{2e^{-u}}{1+e^{-2u}} du$$

elde edilir. $e^{-u} = z$ değişken değiştirilmesi yapıldığında

$$E(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{2}{1+z^2} dz = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{4} \cong 1,25331$$

olarak bulunur. □

5.2 Kesirli Brown Hareketinin Maksimum Kayıp Değişkeni

Bu bölümde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için literatürde var olan alt ve üst sınırlardan bahsedilecektir.

Teorem 5.2.1. *1 zamanına kadar tanımlı olan B^H kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için*

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği sağlanır [8].

İspat. $E(S_1^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ olduğu biliniyor [27]. Ortalanmış Gauss sürecinin simetri özelliğinden $E(I_1^H) \geq -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ olduğu görülür. $R_1^H = S_1^H - I_1^H$ olduğundan yukardaki iki sonuç birleştirilirse sürecin menzil değişkeninin beklenen değeri için

$$E(R_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği yazılır.

Açıkça görüleceği üzere, $\forall t \geq 0$ için

$$I_t^H := -\inf_{0 \leq u \leq t} B_u^H \leq \sup_{0 \leq v \leq t} (\sup_{0 \leq u \leq v} (B_u^H - B_v^H)) = M_t^H \leq R_t^H$$

dir. Böylece

$$-E(I_1^H) \leq E(M_1^H) \leq E(R_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (5.3)$$

elde edilir.

Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(S_1^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği verilmiştir [20]. $E(S_1^H) = -E(I_1^H)$ olduğundan (5.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir. □

Teorem 5.2.1 ve kesirli Brown hareketinin özbenzerlik özelliği kullanılarak herhangi bir t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 5.2.1. *Herhangi bir t zamanına kadar tanımlı olan B^H kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için*

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} t^H \leq E(M_t^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} t^H$$

eşitsizliği sağlanır.

Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için Çağlar ve Vardar [8] tarafından alt sınır değeri hesaplanmıştır. Bu sonuca ulaşmak için aşağıda verilen önerme kullanılmıştır.

Önerme 5.2.1. $\{X_u : 0 \leq u \leq t\}$, beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan rastgele değişkenler olmak üzere

$$P\{\max_{0 \leq u \leq t} X_u > x\} \geq 1 - \Phi\left(\min_{0 \leq u \leq t} \frac{x - \mu}{\sigma^2}\right) \quad (5.4)$$

dir [22].

Teorem 5.2.2. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $M_t^H = \sup_{0 < u < v < t} (B_u^H - B_v^H)$ kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni olsun. O halde

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(M_t^H)$$

eşitsizliği sağlanır [8].

İspat.

$$M_t^H = \sup_{0 < u < v < t} (B_u^H - B_v^H) = \sup_{0 < v < t} \sup_{0 < u < v} (B_u^H - B_v^H) \quad (5.5)$$

şeklinde yazılır. (5.5) eşitliğinin her iki tarafının beklenen değerini alınarak ve Jensen eşitsizliği kullanılarak

$$E(M_t^H) = E\left(\sup_{0 < v < t} \sup_{0 < u < v} (B_u^H - B_v^H)\right) \geq \sup_{0 < v < t} E\left(\sup_{0 < u < v} (B_u^H - B_v^H)\right)$$

elde edilir. Çağlar ve Vardar [8] kayıp sürecinin dağılımı için aşağıdaki önermeyi vermişlerdir.

Önerme 5.2.2. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $\{X_v := \sup_{0 \leq u \leq v} (B_u^H - B_v^H), v \geq 0\}$ kayıp süreci olsun. O halde, $\{X_v^H : v \geq 0\}$ ve $\{S_v^H : v \geq 0\}$ aynı dağılıma sahiptir [8].

Önerme 5.2.2'den

$$\begin{aligned} E(M_t^H) &\geq \sup_{0 < v < t} E\left(\sup_{0 < u < v} (B_u^H - B_v^H)\right) \\ &= \sup_{0 < v < t} E\left(\sup_{0 < u < v} (B_u^H)\right) \\ &= \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P\left(\sup_{0 < u < v} (B_u^H) > x\right) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $E(B_t^H) = 0, t \geq 0$ ve $Var(B_t^H) = t^{2H}, t \geq 0$ olduğundan Önerme 5.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
E(M_t^H) &\geq \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P(\sup_{0 < u < v} B_u^H > x) dx \\
&\geq \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty 1 - \Phi(\min_{0 < u < v} \frac{x}{u^{2H}}) dx \\
&= \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P(z > \min_{0 < u < v} \frac{x}{u^{2H}}) dx \\
&= \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P(z > \frac{x}{\text{maks}u^{2H}}) dx \\
&= \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P(z > \frac{x}{v^{2H}}) dx
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $z \in N(0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
E(M_t^H) &\geq \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty P(z > \frac{x}{v^{2H}}) dx \\
&= \sup_{0 < v < t} \int_0^\infty \int_{\frac{x}{v^{2H}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dx \\
&= \sup_{0 < v < t} \frac{v^{2H}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

6. KESİRLİ BROWN HAREKETİNİN MAKSİMUM KAYIP DEĞİŞKENİ ÜZERİNE SONUÇLARIMIZ

Bu bölümde, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için elde ettiğimiz teorik ve nümerik sınırlar ile simülasyon sonuçları incelenecektir.

6.1 Kesikli Süreç ve Birlikte Gauss Dağılımı ile Sınırlar Hesaplanması

$\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi olmak üzere maksimum kayıp değişkeni

$$M_t^H = \sup_{0 \leq u \leq v \leq t} (B_u^H - B_v^H)$$

şeklinde tanımlıdır. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile sürece Gauss değişkenleri kullanılarak yaklaşmıştır. $n \rightarrow \infty$ iken sürece daha da yaklaşılır. $[0, t]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış Gauss dağılımına sahiptir. Kesirli Brown hareketinin kovaryans tanımından $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri arasındaki

kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
Cov(B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H, B_{k\delta}^H - B_{(k-l)\delta}^H) &= E((B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)(B_{k\delta}^H - B_{(k-l)\delta}^H)) \\
&= E(B_{i\delta}^H B_{k\delta}^H) - E(B_{i\delta}^H B_{(k-l)\delta}^H) \\
&\quad - E(B_{(i-j)\delta}^H B_{k\delta}^H) + E(B_{(i-j)\delta}^H B_{(k-l)\delta}^H) \\
&= \frac{1}{2}((i\delta)^{2H} + (k\delta)^{2H} - |i\delta - k\delta|^{2H}) \\
&\quad - \frac{1}{2}((i\delta)^{2H} + ((k-l)\delta)^{2H}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(|i\delta - (k-l)\delta|^{2H}) \\
&\quad - \frac{1}{2}(((i-j)\delta)^{2H} + (k\delta)^{2H}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(|(i-j)\delta - k\delta|^{2H}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(((i-j)\delta)^{2H} + ((k-l)\delta)^{2H}) \\
&\quad - \frac{1}{2}(|(i-j)\delta - (k-l)\delta|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}(|i\delta - (k-l)\delta|^{2H} + |(i-j)\delta - k\delta|^{2H}) \\
&\quad - |i\delta - k\delta|^{2H} - |(i-j)\delta - (k-l)\delta|^{2H}
\end{aligned}$$

ile oluşturulur. Burada $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, i$, $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, k$ şeklinde alınmıştır. Kovaryans matrisine baktığımızda görüyoruz ki, $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri birbirinden bağımsız değildir. $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) \leq M_t^H. \quad (6.1)$$

(6.1) eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E\left(\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)\right) \leq E(M_t^H)$$

eşitsizliği elde edilir.

1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile, yani $[0, 1]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = 1/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ aralıklarının her biri farklı

varyanslı, 0'da ortalanmış birlikte Gauss dağılımına sahiptir, yani FDSB Gauss değişkenleridir.

$\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$E(\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)) \leq E(M_1^H).$$

$\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri, FDSB Gauss değişkenleri olduğundan Ross [22] hesaplama yöntemi ile $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri için, dolayısıyla kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt sınır değerleri hesaplanabilir. Ross [22] hesaplama yönteminde kullanılan b_{ij} değerleri, $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri için

$$\begin{aligned} b_{ij} &= E[((B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) - (B_{k\delta}^H - B_{(k-l)\delta}^H))^2] \\ &= E((B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)^2) - 2E((B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)(B_{k\delta}^H - B_{(k-l)\delta}^H)) \\ &+ E((B_{k\delta}^H - B_{(k-l)\delta}^H)^2) \\ &= j^{2H} + l^{2H} - (|i\delta - (k-l)\delta|^{2H} + |(i-j)\delta - k\delta|^{2H} \\ &- |i\delta - k\delta|^{2H} - |(i-j)\delta - (k-l)\delta|^{2H}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

şeklinde hesaplanır.

Eşitlik (6.2) ile verilen b_{ij} değerleri kullanılarak Bölüm 4.1'de açıklanan Ross [22] hesaplama yöntemi ile farklı Hurst parametrelerine sahip ve 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için nümerik alt sınır değerleri hesaplanmıştır. Elde ettiğimiz bu sonuçlar Çizelge 6.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.1: Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar

		n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60
$H=0,5$	FDSBS Alt Sınır	0,6551	0,5753	0,5171	0,4753	0,4434	0,4180
	FDSTB Alt Sınır	0,1621	0,1294	0,1056	0,0903	0,0872	0,0735
$H=0,6$	FDSBS Alt Sınır	0,4855	0,3954	0,3407	0,3040	0,2772	0,2566
	FDSTB Alt Sınır	0,1250	0,0956	0,0579	0,0624	0,0535	0,0487
$H=0,7$	FDSBS Alt Sınır	0,3550	0,2645	0,2179	0,1886	0,1680	0,1526
	FDSTB Alt Sınır	0,1055	0,0695	0,0491	0,0425	0,0305	0,0320
$H=0,8$	FDSBS Alt Sınır	0,2688	0,1830	0,1432	0,1196	0,1038	0,0922
	FDSTB Alt Sınır	0,0859	0,0478	0,0357	0,0274	0,0192	0,0199
$H=0,9$	FDSBS Alt Sınır	0,2010	0,1324	0,1005	0,0819	0,0696	0,0609
	FDSTB Alt Sınır	0,0674	0,0348	0,0201	0,0200	0,0127	0,0138

Çizelge 6.1’de verilen FDSBS alt sınır değerleri Ross [22] hesaplama yönteminde farklı dağılıma sahip ve bağımsız Gauss değişkenleri kullanılarak elde edilmiştir. FDSTB alt sınır değerleri ise Ross [22] hesaplama yönteminde farklı dağılıma sahip ve tam bağımlı Gauss değişkenleri kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplamalar farklı örneklem sayıları için yapılmıştır. Çizelge 6.1’den görüleceği üzere alt sınır değerleri örneklem sayısı arttıkça azalmaktadır. Yani, alt sınır değerleri örneklem sayısı arttıkça iyi bir performans göstermemektedir. Sürekli bir süreç olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkenine kesikli bir sürecin maksimum kayıp değişkeni ile yaklaşıldığında iyi sonuçlar elde edilmediği görülmüştür. Fakat, $H = 0,5$ ve $H = 0,6$ için hesaplanan FDSBS alt sınır değerleri literatürde var olan en iyi alt sınırlardır. Sınırlar kendi aralarında karşılaştırıldığında FDSBS alt sınır sonuçlarının daha iyi olduğu gözlemlenmiştir.

6.2 Min-z Alt Sınırı

$\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni

$$M_t^H = \sup_{0 \leq u \leq v \leq t} (B_u^H - B_v^H)$$

şeklinde tanımlıdır. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile sürece Gauss değişkenleri kullanılarak yaklaşılmıştır. $n \rightarrow \infty$ iken sürece daha da yaklaşılr. $[0, t]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış Gauss dağılımına sahiptir. $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) \leq M_t^H. \quad (6.3)$$

(6.3) eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E(\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)) \leq E(M_t^H) \quad (6.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için bir başka alt sınır kümülatif dağılım fonksiyonu ve standardize edilmiş değişkenler kullanılarak bulunabilir.

Önerme 6.2.1. $\{X_i : i = 1, 2, \dots\}$, beklenen değeri μ_i ve varyansı σ_i^2 olan rastgele değişkenler olmak üzere

$$P\{\max_i X_i > x\} \geq 1 - \Phi(\min_i \frac{x - \mu_i}{\sigma_i^2}) \quad (6.5)$$

dir [22].

Teorem 6.2.1. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri, kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile elde edilen değişkenler olsun. O halde,

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $E(B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) = 0$ ve $Var(B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) = (j\delta)^{2H}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, i$ olduğundan Önerme 6.2.1'den

$$\begin{aligned}
E(\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)) &= \int_0^\infty P(\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) > x) dx \\
&\geq \int_0^\infty (1 - \Phi(\min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} \frac{x}{(j\delta)^{2H}})) dx \\
&= \int_0^\infty (1 - \Phi(\frac{x}{\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} (j\delta)^{2H}})) dx \\
&= \int_0^\infty (1 - \Phi(\frac{x}{t^{2H}})) dx \\
&= \int_0^\infty P(z > \frac{x}{t^{2H}}) dx
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $z \in N(0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
E(\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)) &\geq \int_0^\infty P(z > \frac{x}{t^{2H}}) dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\frac{x}{t^{2H}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dx \\
&= \frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 6.2.1 ve (6.4) eşitsizliği kullanılarak t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E(\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)) \leq E(M_t^H)$$

eşitsizliği elde edilir.

6.3 Sudakov-Fernique Eşitsizliği ile Teorik Üst Sınır

Bu bölümde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde ettiğimiz teorik üst sınırdan bahsedilecektir.

Teorem 6.3.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için

$$E(M_1^H) = E\left(\sup_{0 < u < v < 1} (B_u^H - B_v^H)\right) \leq E\left(\sup_{0 < u < 1} \sqrt{2}B_u^{1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\{B_u^H - B_v^H, 0 \leq u \leq v\}$ ve $\{\sqrt{2}B_u^{1/2}, u \geq 0\}$ ortalanmış Gauss süreçleri olduğundan Sudakov-Fernique eşitsizliğinden, her $0 \leq u \leq v \leq 1$ ve $0 \leq u' \leq v' \leq 1$ için

$$E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 \leq E(\sqrt{2}B_{\max\{u,v,u',v'\}}^{1/2} - \sqrt{2}B_{\min\{u,v,u',v'\}}^{1/2})^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

Öncelikle $E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2$ ve $E(\sqrt{2}B_u^{1/2} - \sqrt{2}B_v^{1/2})^2$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &= E((B_u^H - B_v^H)^2) \\ &\quad - 2E((B_u^H - B_v^H)(B_{u'}^H - B_{v'}^H)) \\ &\quad + E((B_{u'}^H - B_{v'}^H)^2) \\ &= E((B_u^H)^2) - 2E(B_u^H B_v^H) + E((B_v^H)^2) \\ &\quad - 2E(B_u^H B_{u'}^H) + 2E(B_u^H B_{v'}^H) \\ &\quad + 2E(B_v^H B_{u'}^H) - 2E(B_v^H B_{v'}^H) \\ &\quad + E((B_{u'}^H)^2) - 2E(B_{u'}^H B_{v'}^H) + E((B_{v'}^H)^2) \\ &= u^{2H} - (u^{2H} + v^{2H} - |u - v|^{2H}) \\ &\quad + v^{2H} - (u^{2H} + u'^{2H} - |u - u'|^{2H}) \\ &\quad + (u^{2H} + v'^{2H} - |u - v'|^{2H}) \\ &\quad + (v^{2H} + u'^{2H} - |v - u'|^{2H}) \\ &\quad - (v^{2H} + v'^{2H} - |v - v'|^{2H}) + u'^{2H} \\ &\quad - (u'^{2H} + v'^{2H} - |u' - v'|^{2H}) + v'^{2H} \\ &= |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} + |u - u'|^{2H} \\ &\quad - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} \quad (6.6) \end{aligned}$$

dir. Her $0 \leq u \leq v \leq 1$ için

$$\begin{aligned} E(\sqrt{2}B_u^{1/2} - \sqrt{2}B_v^{1/2})^2 &= E(2(B_u^{1/2})^2) + E(2(B_v^{1/2})^2) - 2E(2B_u^{1/2}B_v^{1/2}) \\ &= 2u + 2v - 4\min(u, v) = 2|u - v| \end{aligned}$$

dir. $0 \leq u \leq v \leq 1$ ve $\frac{1}{2} < H < 1$ olduğundan $\forall u, v \in [0, 1]$ için

$$|u - v|^{2H} \leq u + v - 2\min(u, v) \quad (6.7)$$

eşitsizliği sağlar. O halde (6.6) ve (6.7) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &= |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} + |u - u'|^{2H} \\ &\quad - |u - v'|^{2H} - |v - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} \\ &\leq |u - v|^{2H} + |u' - v'|^{2H} \\ &\quad + |u - u'|^{2H} + |v - v'|^{2H} \\ &\leq u + v - 2\min(u, v) \\ &\quad + u' + v' - 2\min(u', v') \\ &\quad + u + u' - 2\min(u, u') \\ &\quad + v + v' - 2\min(v, v') \end{aligned} \quad (6.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan sonra u, v, u', v' nin durumlarına göre

$$E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 \leq E(\sqrt{2}B_{\max\{u, v, u', v'\}}^{1/2} - \sqrt{2}B_{\min\{u, v, u', v'\}}^{1/2})^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstereceğiz. $u \leq v$ ve $u' \leq v'$ olduğu biliniyor.

- $u \leq v \leq u' \leq v'$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u \leq v' \leq 1$ için

$$\begin{aligned} E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &\leq u + v - 2\min(u, v) \\ &\quad + u' + v' - 2\min(u', v') \\ &\quad + u + u' - 2\min(u, u') \\ &\quad + v + v' - 2\min(v, v') \\ &= v - u + v' - u' + u' - u + v' - v \\ &= 2v' - 2u \\ &= 2v' + 2u - 4\min(v', u) \\ &= E(\sqrt{2}B_{v'}^{1/2} - \sqrt{2}B_u^{1/2})^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

- $u \leq u' \leq v \leq v'$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u \leq v' \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &\leq u + v - 2\min(u, v) + u' \\
&+ v' - 2\min(u', v') \\
&+ u + u' - 2\min(u, u') \\
&+ v + v' - 2\min(v, v') \\
&= v - u + v' - u' + u' - u + v' - v \\
&= 2v' - 2u \\
&= 2v' + 2u - 4\min(v', u) \\
&= E(\sqrt{2}B_{v'}^{1/2} - \sqrt{2}B_u^{1/2})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

- $u \leq u' \leq v' \leq v$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u \leq v \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &\leq u + v - 2\min(u, v) \\
&+ u' + v' - 2\min(u', v') \\
&+ u + u' - 2\min(u, u') \\
&+ v + v' - 2\min(v, v') \\
&= v - u + v' - u' + u' - u + v - +v' \\
&= 2v - 2u \\
&= 2v + 2u - 4\min(v, u) \\
&= E(\sqrt{2}B_v^{1/2} - \sqrt{2}B_u^{1/2})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

- $u' \leq v' \leq u \leq v$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u' \leq v \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &\leq u + v - 2\min(u, v) \\
&+ u' + v' - 2\min(u', v') \\
&+ u + u' - 2\min(u, u') \\
&+ v + v' - 2\min(v, v') \\
&= v - u + v' - u' + u - u' + v - v' \\
&= 2v - 2u' \\
&= 2v + 2u' - 4\min(v, u') \\
&= E(\sqrt{2}B_v^{1/2} - \sqrt{2}B_{u'}^{1/2})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

- $u' \leq u \leq v' \leq v$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u' \leq v \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 &\leq u + v - 2\min(u, v) \\
&+ u' + v' - 2\min(u', v') \\
&+ u + u' - 2\min(u, u') \\
&+ v + v' - 2\min(v, v') \\
&= v - u + v' - u' + u - u' + v - v' \\
&= 2v - 2u' \\
&= 2v + 2u' - 4\min(v, u') \\
&= E(\sqrt{2}B_v^{1/2} - \sqrt{2}B_{u'}^{1/2})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

- $u' \leq u \leq v \leq v'$ olsun. O halde (6.8) eşitsizliği kullanılarak $\forall 0 \leq u' \leq v' \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
E[((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2] &\leq u + v - 2\min(u, v) \\
&+ u' + v' - 2\min(u', v') \\
&+ u + u' - 2\min(u, u') \\
&+ v + v' - 2\min(v, v') \\
&= v - u + v' - u' + u - u' + v' - v \\
&= 2v' - 2u' \\
&= 2v' + 2u' - 4\min(v', u') \\
&= E(\sqrt{2}B_{v'}^{1/2} - \sqrt{2}B_{u'}^{1/2})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak $\forall u, v, u', v' \in [0, 1]$ için

$$E((B_u^H - B_v^H) - (B_{u'}^H - B_{v'}^H))^2 \leq E(\sqrt{2}B_{\max\{u,v,u',v'\}}^{1/2} - \sqrt{2}B_{\min\{u,v,u',v'\}}^{1/2})^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterdik. O halde, Sudakov-Fernique eşitsizliğinden

$$E(M_1^H) = E\left(\sup_{0 < u < v < 1} (B_u^H - B_v^H)\right) \leq E\left(\sup_{0 < u < 1} \sqrt{2}B_u^{1/2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. □

6.4 Simülasyon Sonuçları

Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için bilgisayar ortamında simülasyon değerleri hesaplanmıştır. Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi ile kesirli Brown Hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değerleri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen maksimum kayıp değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen sonuçlar Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2: 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Simülasyon Sonuçları
0,5	395,1
0,6	854,6
0,7	1708,6
0,8	3200,9
0,9	5403,3

Sabit bir t zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri ve özbenzerlik özelliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için

$$E(M_1^H) = \frac{E(M_t^H)}{t^H} \quad (6.9)$$

eşitliği elde edilir. Çizelge 6.2'de verilen simülasyon sonuçları ve (6.9) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 6.3'te verilmiştir.

Çizelge 6.3: 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Simülasyon Sonuçları
0,5	1,24942
0,6	0,85460
0,7	0,54031
0,8	0,32009
0,9	0,17087

Çizelge 6.3'ten ulaştığımız gözlemler:

1. Çizelge 6.3'ten görüldüğü gibi $E(M_1^{0,5})$ değeri 1,24942 olarak bulunmuştur ki bu değer literatürde standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için hesaplanan 1,25331 değeri ile örtüşmektedir [5].

2. Çizelge 6.3'ten görüleceği üzere $H = 0,9$ parametrelili kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt sınır ve $H = 0,5$ parametrelili kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için üst sınır oluşturmaktadır. Bu sonuç teorik olarak henüz gösterilmemiştir.

3. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için [8]'de verilen

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

sınırlar kullanılarak alt sınır 0,39904 ve üst sınır 1,59617 olarak hesaplanır. Çizelge 6.3'e bakıldığında teorik üst sınır simülasyon sonuçları ile örtüşmektedir, fakat teorik alt sınır simülasyon sonuçları ile örtüşmemektedir.

Bu durumun sebebi Abry ve Sellan [1] tarafından verilen yönteminin yaklaşık bir yöntem olmasıdır. Bu sebeple alternatif ve kesin bir yöntem olan Cholesky yöntemi ile benzetimler elde edilmiştir.

Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Cholesky benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değerleri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen maksimum kayıp değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen sonuçlar Çizelge 6.4'te verilmiştir.

Çizelge 6.4: Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Cholesky Simülasyon Sonuçları
0,5	123,9
0,6	253
0,7	520,6
0,8	1107,3
0,9	2429,1

Çizelge 6.4'te verilen simülasyon sonuçları ve (6.9) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 6.5'te verilmiştir.

Çizelge 6.5: Cholesky benzetimler yöntemi ile üretilen 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Cholesky Simülasyon Sonuçları
0,5	1,239
0,6	1,00721
0,7	0,82509
0,8	0,69865
0,9	0,61016

Çizelge 6.5'ten ulaştığımız gözlemler:

1. Çizelge 6.5'ten görüldüğü gibi $E(M_1^{0,5})$ değeri 1,239 olarak bulunmuştur. Literatürde ise bu beklenen değer teorik olarak 1,25331 olarak hesaplanmıştır [5]. Bu simülasyonlarımızın doğru olduğunu onaylamaktadır.
2. Çizelge 6.5'ten görüleceği üzere $H = 0,9$ parametrelili kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin

beklenen değeri için alt sınır ve $H = 0,5$ parametrelili kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için üst sınır oluşturmaktadır. Bu sonuç teorik olarak henüz gösterilmemiştir.

3. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için [8]'de verilen

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

sınırlar kullanılarak alt sınır 0,39904 ve üst sınır 1,59617 olarak hesaplanır. Çizelge 6.5'e bakıldığında teorik alt ve üst sınırların simülasyon sonuçları ile örtüştüğü görülmektedir.

4. Cholesky simülasyon sonuçları, Cholesky benzetimler yöntemi kesin bir yöntem olduğundan Abry ve Sellan [1] yöntemi ile elde edilen sonuçlara göre daha güvenilirdir.

7. SONUÇ

Bu bölümde, elde ettiğimiz teorik ve nümerik sınırlar ve literatürde var olan sınırlar simülasyon sonuçları ile karşılaştırılarak elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

7.1 Supremum Değişkeni Üzerine Karşılaştırma ve Sonuçlar

Literatürde, 1 zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri

$$E(S_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

olarak hesaplanmıştır [5].

Literatürde, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri üzerine alt ve üst sınırlar mevcuttur.

1. Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak sürecin supremum değişkeninin beklenen değeri için aşağıdaki alt ve üst sınırlar elde edilmiştir [20]:

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}t^H \leq E(S_t^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}t^H$$

2. Sürecin supremum değişkeninin beklenen değeri için [27]'de

$$E(S_t^H) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}t^H$$

şeklinde bir üst sınır verilmiştir.

Literatürde var olan bu sınırlara göre 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkenin beklenen değeri için [20]'de bulunan sınırlar kullanılarak alt sınır 0,39904 ve üst sınır 0,79809; [27]'de bulunan sınır kullanılarak üst sınır 0,79809 olarak hesaplanır.

Bu tez çalışmasında, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için nümerik alt sınırlar ve simülasyon sonuçları elde edilmiştir.

1. 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile, yani $[0, 1]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = 1/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta} : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta} : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenlerinin her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış birlikte Gauss dağılımına sahiptir. $\{B_{i\delta} : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin supremum değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta}) \leq S_1^H. \quad (7.1)$$

(7.1) eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E(\max_{0 \leq i \leq n} (B_{i\delta})) \leq E(S_1^H)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bölüm 4.1'de açıklanan Ross [22] hesaplama yöntemi ile $\{B_{i\delta} : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenlerinin maksimum değişkeninin beklenen değeri için, dolayısıyla 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için alt sınır değerleri hesaplanabilir. Elde ettiğimiz nümerik alt sınır değerleri Çizelge 7.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 7.1: Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar

		n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60
$H=0,5$	FDSBS Alt Sınır	0,3679	0,3177	0,2756	0,2522	0,2347	0,2217
	FDSTB Alt Sınır	0,1979	0,1559	0,1347	0,1223	0,1111	0,1032
$H=0,6$	FDSBS Alt Sınır	0,2955	0,2338	0,2009	0,1760	0,1599	0,1474
	FDSTB Alt Sınır	0,1673	0,1249	0,1035	0,0902	0,0806	0,0728
$H=0,7$	FDSBS Alt Sınır	0,2389	0,1736	0,1428	0,1236	0,1101	0,0991
	FDSTB Alt Sınır	0,1395	0,0995	0,0800	0,0669	0,0583	0,0523
$H=0,8$	FDSBS Alt Sınır	0,1906	0,1308	0,1036	0,0873	0,0758	0,0672
	FDSTB Alt Sınır	0,1171	0,0790	0,0612	0,0511	0,0436	0,0384
$H=0,9$	FDSBS Alt Sınır	0,1526	0,0954	0,0729	0,0595	0,0501	0,0447
	FDSTB Alt Sınır	0,0982	0,0623	0,0471	0,0387	0,0329	0,0296

Çizelge 7.1'de verilen sınır değerleri kendi aralarında karşılaştırıldığında FDSBS sonuçlarının daha iyi olduğu gözlemlenmiştir.

2. Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için bilgisayar ortamında simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

(a) Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin supremum değeri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen supremum değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen simülasyon sonuçları ve (4.10) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

(b) Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Cholesky benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown

hareketinin supremum değeri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen supremum değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen simülasyon sonuçları ve (4.10) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 7.2'de verilmiştir.

Çizelge 7.2: 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst	Cholesky	Abry ve Sellan
Parametresi	Simülasyon Sonuçları	Simülasyon Sonuçları
0,5	0,79400	0,79784
0,6	0,65091	0,52440
0,7	0,57547	0,33242
0,8	0,48981	0,19760
0,9	0,43727	0,10504

Çizelge 7.2'den görüldüğü üzere $E(S_1^{0,5})$ değeri Cholesky benzetimler yöntemi ile 0,79400 ve [1]'de verilen benzetimler yöntemi ile 0,79784 olarak bulunmuştur. Literatürde ise bu beklenen değer teorik olarak 0,7978 olarak hesaplanmıştır [5]. Bu simülasyonlarımızın doğru olduğunu onaylamaktadır.

Kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için elde ettiğimiz nümerik alt sınırlar, simülasyon sonuçları ve literatürde var olan sınırlar Çizelge 7.3'te gösterilmiştir.

Çizelge 7.3'te verilen Norros üst sınırı ve Norros alt sınırı kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için [20]'de bulunan sınır değerleridir. Vardar üst sınırı kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için [27]'de hesaplanan üst sınır değeridir. Çizelge 7.3'te görüldüğü üzere

Çizelge 7.3: 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin supremum değışkenin beklenen değeri için sonuçlar

Hurst Parametresi	Abry ve Sellan Simülasyon Sonuçları		Cholesky Simülasyon Sonuçları		Norros Alt Sum		Norros-Vardar Üst sum		FDSBS Alt Sum			FDSIB Alt Sum				
	Simülasyon Sonuçları	Alt Sum	Simülasyon Sonuçları	Alt Sum	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60
0,5	0,79784	0,39904	0,79400	0,39904	0,3679	0,3177	0,2756	0,2522	0,2347	0,2217	0,1979	0,1559	0,1347	0,1223	0,1111	0,1032
0,6	0,52440	0,39904	0,65091	0,39904	0,2955	0,2338	0,2009	0,1760	0,1599	0,1474	0,1673	0,1249	0,1035	0,0902	0,0806	0,0728
0,7	0,33242	0,39904	0,57547	0,39904	0,2389	0,1736	0,1428	0,1236	0,1101	0,0991	0,1395	0,0995	0,0800	0,0669	0,0583	0,0523
0,8	0,19760	0,39904	0,48981	0,39904	0,1906	0,1308	0,1036	0,0873	0,0758	0,0672	0,1171	0,0790	0,0612	0,0511	0,0436	0,0384
0,9	0,10504	0,39904	0,43727	0,39904	0,1526	0,0954	0,0729	0,0595	0,0501	0,0447	0,0982	0,0623	0,0471	0,0387	0,0329	0,0296

FDSBS ve FDSTB alt sınır değerleri simülasyon sonuçları için birer alt sınır oluşturmaktadırlar. Fakat n değerleri arttıkça FDSBS ve FDSTB alt sınırlarının uzaklaştığı görölmektedir. Sürekli bir süreç olan kesirli Brown hareketinin supremum değişkenine kesikli bir sürecin supremumu ile yaklaşmak var olan yöntemlerle karşılaştırıldığında zayıf kalmaktadır. Çizelge 7.3'e bakıldığında Cholesky simülasyon sonuçlarının literatürde var olan alt ve üst sınır değerleri ile örtüştüğü görölmektedir; Abry ve Sellan simülasyon sonuçlarının $H > 0,7$ için literatürde varolan alt sınır ile örtüşmediği görölmektedir. Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kullanılan yaklaşık bir yöntemdir ve $H > 1/2$ için hata payının olduğu bilinmektedir. Cholesky benzetimler yöntemi ise kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kesin bir yöntem olduğundan, Abry ve Sellan [1] benzetimler yöntemine göre daha kesin sonuçlar verir. Sonuç olarak, kesirli Brown hareketinin supremum değişkeninin beklenen değeri için en iyi alt sınır Norros [20] alt sınırı ve en iyi üst sınır Norros, Vardar [20, 27] üst sınırıdır.

7.2 Maksimum Kayıp Değişkeni Üzerine Karşılaştırma ve Sonuçlar

Literatürde, 1 zamanına kadar tanımlı olan standart Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri $E(M_1) \cong 1,25331$ olarak hesaplanmıştır [5].

Literatürde, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt ve üst sınırlar mevcuttur [8].

- 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \leq E(M_1^H) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

alt ve üst sınırları elde edilmiştir [8].

Literatürde var olan sınırlara göre 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt sınır 0,39904 ve üst sınır 1,59617 olarak hesaplanır.

Bu tez çalışmasında, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri üzerine nümerik alt sınırlar, teorik üst sınır ve simülasyon sonuçları elde edilmiştir.

1. 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile, yani $[0, 1]$ zaman aralığını n tane zaman aralığına bölerek, $\delta = 1/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenleri elde edilmiştir. Elde edilen $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ aralıklarının her biri farklı varyanslı, 0'da ortalanmış birlikte Gauss dağılımına sahiptir, yani FDSB Gauss değişkenleridir. $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ değişkenleri kullanılarak kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için aşağıdaki alt sınır yazılabilir:

$$\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H) \leq M_1^H. \quad (7.2)$$

(7.2) eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E\left(\max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i} (B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H)\right) \leq E(M_1^H)$$

eşitsizliği elde edilir. Bölüm 4.1'de açıklanan Ross [22] hesaplama yöntemi ile $\{B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i\}$ Gauss değişkenlerinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için, dolayısıyla 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt sınır değerleri hesaplanabilir. Elde ettiğimiz nümerik alt sınır değerleri Çizelge 7.4'te gösterilmiştir.

Çizelge 7.4: Ross [22] hesaplama yöntemi ile 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen sonuçlar

		n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60
$H=0,5$	FDSBS Alt Sınır	0,6551	0,5753	0,5171	0,4753	0,4434	0,4180
	FDSTB Alt Sınır	0,1621	0,1294	0,1056	0,0903	0,0872	0,0735
$H=0,6$	FDSBS Alt Sınır	0,4855	0,3954	0,3407	0,3040	0,2772	0,2566
	FDSTB Alt Sınır	0,1250	0,0956	0,0579	0,0624	0,0535	0,0487
$H=0,7$	FDSBS Alt Sınır	0,3550	0,2645	0,2179	0,1886	0,1680	0,1526
	FDSTB Alt Sınır	0,1055	0,0695	0,0491	0,0425	0,0305	0,0320
$H=0,8$	FDSBS Alt Sınır	0,2688	0,1830	0,1432	0,1196	0,1038	0,0922
	FDSTB Alt Sınır	0,0859	0,0478	0,0357	0,0274	0,0192	0,0199
$H=0,9$	FDSBS Alt Sınır	0,2010	0,1324	0,1005	0,0819	0,0696	0,0609
	FDSTB Alt Sınır	0,0674	0,0348	0,0201	0,0200	0,0127	0,0138

Çizelge 7.4'te verilen alt sınır değerleri kendi aralarında karşılaştırıldığında FDSBS alt sınırlarının, FDSTB alt sınırlarından daha iyi olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, FDSBS alt sınırları, $H = 0,5$ ve $H = 0,6$ için var olan en iyi alt sınırı vermektedir.

2. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için bilgisayar ortamında simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

(a) Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Abry ve Sellan [1] tarafından verilen benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değeri gözlemlenmiştir ve gözlemlenen maksimum kayıp değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 100000 adımlı ve 100000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen simülasyon sonuçları ve (6.9) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

(b) Farklı Hurst parametreleri, farklı zamanlar ve farklı simülasyon sayısı kullanılarak Matlab programında Cholesky benzetimler yöntemi ile kesirli Brown hareketi üretilmiştir. Üretilen her bir kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değeri gözlemlenmiştir. Gözlemlenen maksimum kayıp değerlerinin beklenen değeri hesaplanmıştır. 10000 adımlı ve 10000 benzetimli kesirli Brown hareketinden elde edilen simülasyon sonuçları ve (6.9) eşitliği kullanılarak 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon değerleri hesaplanmıştır.

1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 7.5'te verilmiştir.

Çizelge 7.5: 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için simülasyon sonuçları

Hurst Parametresi	Cholesky Simülasyon Sonuçları	Abry ve Sellan Simülasyon Sonuçları
0,5	1,239	1,24942
0,6	1,00721	0,85460
0,7	0,82509	0,54031
0,8	0,69865	0,32009
0,9	0,61016	0,17087

Çizelge 7.5'ten görüldüğü üzere $E(S_1^{0,5})$ değeri Cholesky benzetimler yöntemi ile 1,239 ve [1]'de verilen benzetimler yöntemi ile 1,24942 olarak bulunmuştur. Literatürde ise bu beklenen değer teorik olarak 1,25331 olarak hesaplanmıştır [5]. Bu simülasyonlarımızın doğru olduğunu onaylamaktadır.

3. 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için Sudakov-Fernique eşitsizliği kullanılarak teorik üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 7.2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde, 1 zamanına kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeni için

$$E(M_1^H) = E\left(\sup_{0 < u < v < 1} (B_u^H - B_v^H)\right) \leq E\left(\sup_{0 < u < 1} \sqrt{2}B_u^{1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cong 1,12837$$

eşitsizliği sağlanır.

4. Kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile $\delta = t/n$ olmak üzere elde edilen $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri ile kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için alt sınır elde edilmiştir.

Teorem 7.2.2. $\{B_t^H : t \geq 0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı kesirli Brown hareketi ve $\delta = t/n$ olmak üzere $\{B_{i\delta}^H : i = 1, 2, \dots, n\}$ Gauss değişkenleri, kesirli Brown hareketini kesikli hale getirme yöntemi ile elde edilen değişkenler olsun. O halde,

$$\frac{t^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \leq E\left(\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i} B_{i\delta}^H - B_{(i-j)\delta}^H\right) \leq E(M_t^H)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için elde ettiğimiz nümerik alt sınırlar, teorik üst sınır ve simülasyon sonuçları ile literatürde var olan sınırlar Çizelge 7.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 7.6'da verilen Çağlar ve Vardar üst sınırı ve Çağlar ve Vardar alt sınırı kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için [8]'de verilen sınır değerleridir. Vardar ve Çakar üst sınırı kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için Teorem 7.2.1'de elde edilen üst sınır değeridir. Vardar ve Çakar alt sınırı ise maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için Teorem 7.2.2'de elde edilen alt sınır değeridir. Çizelge 7.6'da görüldüğü üzere FDSBS ve FDSTB değerleri simülasyon sonuçları için birer alt sınır oluşturmaktadırlar. n değerleri arttıkça FDSBS ve FDSTB alt sınırlarının uzaklaştığı görülmektedir. Sürekli bir süreç olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkenine kesikli bir sürecin maksimum değişkeni ile yaklaşmak var olan yöntemlerle karşılaştırıldığında zayıf kalmaktadır. Fakat, FDSBS alt sınırları, $H = 0,5$ ve $H = 0,6$ için var olan en iyi alt sınırı vermektedir. Ayrıca,

Çizelge 7.6: 1 zamanna kadar tanımlı olan kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkenin beklenen değeri için sonuçlar

Hurst Parametresi	Abry ve Sellan		Cholesky		Çağlar ve Várdar		Çağlar ve Várdar		Várdar ve Çalkar		FDSBS Alt Sınır						FDSTB Alt Sınır																
	Simitilasyon		Simitilasyon		Várdar ve Çalkar		Çağlar ve Várdar		Várdar ve Çalkar		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır		Üst Sınır						
	Sonuçları	Sonuçları	Sonuçları	Sonuçları	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60					
0,5	1,24942	1,239	0,39904	1,59617	0,39904	1,59617	1,12866	1,12866	1,12866	0,6551	0,5753	0,5171	0,4753	0,4434	0,4180	0,1621	0,1294	0,1056	0,0903	0,0872	0,0735	0,6551	0,5753	0,5171	0,4753	0,4434	0,4180	0,1621	0,1294	0,1056	0,0903	0,0872	0,0735
0,6	0,85460	1,00721	0,39904	1,59617	0,39904	1,59617	1,12866	1,12866	1,12866	0,4855	0,3954	0,3407	0,3040	0,2772	0,2566	0,1250	0,0956	0,0579	0,0624	0,0535	0,0487	0,4855	0,3954	0,3407	0,3040	0,2772	0,2566	0,1250	0,0956	0,0579	0,0624	0,0535	0,0487
0,7	0,54031	0,82509	0,39904	1,59617	0,39904	1,59617	1,12866	1,12866	1,12866	0,3550	0,2645	0,2179	0,1886	0,1680	0,1526	0,1055	0,0695	0,0491	0,0425	0,0305	0,0320	0,3550	0,2645	0,2179	0,1886	0,1680	0,1526	0,1055	0,0695	0,0491	0,0425	0,0305	0,0320
0,8	0,32009	0,69865	0,39904	1,59617	0,39904	1,59617	1,12866	1,12866	1,12866	0,2688	0,1830	0,1432	0,1196	0,1038	0,0922	0,0859	0,0478	0,0357	0,0274	0,0199	0,0199	0,2688	0,1830	0,1432	0,1196	0,1038	0,0922	0,0859	0,0478	0,0357	0,0274	0,0192	0,0199
0,9	0,17087	0,61016	0,39904	1,59617	0,39904	1,59617	1,12866	1,12866	1,12866	0,2010	0,1324	0,1005	0,0819	0,0696	0,0609	0,0674	0,0348	0,0201	0,0200	0,0127	0,0138	0,2010	0,1324	0,1005	0,0819	0,0696	0,0609	0,0674	0,0348	0,0201	0,0200	0,0127	0,0138

bu sınır değerleri bize Sudakov-Fernique eğitsizliği ile teorik sınırlar oluştururken bağımsız değişkenler kullanmamız yönünde öngörü sağlamıştır. Çizelge 7.6'ya bakıldığında Cholesky simülasyon sonuçlarının literatürde var olan alt ve üst sınır değerleri ile örtüştüğü görülürken, Abry ve Sellan simülasyon sonuçlarının $H \geq 0,8$ için literatürde varolan alt sınır ile örtüşmediği grlmektedir. Abry ve Sellan [1] benzetimler yöntemi kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kullanılan yaklaşık bir yöntemdir ve $H > 1/2$ için hata payının olduğu bilinmektedir. Cholesky benzetimler yöntemi ise kesirli Brown hareketinin simülasyonu için kesin bir yöntem olduğundan, Abry ve Sellan [1] benzetimler yöntemine göre daha kesin sonuçlar verir.

Sonuç olarak, kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için en iyi alt sınır $0,5 < H < 0,7$ için FDSBS alt sınır değerleri iken, $H \geq 0,7$ iken ağlar ve Vardar [8] alt sınırı ile Vardar ve akar alt sınırı daha iyi sonuç vermektedir. Kesirli Brown hareketinin maksimum kayıp değişkeninin beklenen değeri için en iyi üst sınır Teorem 7.2.1 ile elde edilen Vardar ve akar st sınırı olarak gzlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Abry, P., Sellan, F., The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: remarks and fast implementation, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 3, 337-383, 1996.
- [2] Acar, E., James, S., Maximum loss and maximum drawdown in financial markets, In *Proceedings of International Conference on Forecasting Financial Markets*, London, 1997.
- [3] Adler, R., *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, 1990.
- [4] Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B., Zhang T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer Verlag, London, 2008.
- [5] Borodin, A.N., Salminen, P., *Handbook of Brownian Motion Facts and Formulae*, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2002.
- [6] Bose, R.C., Gupta, S.S., Moments of order statistics from a normal population, *Biometrika*, 46(3/4), 433-440, 1959.
- [7] Brodtkorb, P.A., Evaluating nearly singular multinormal expectations with application to wave distributions, *Methodol Comput. Appl. Probab.*, 8(1), 65-91, 2006.
- [8] Caglar, M., Vardar, C., Distribution of maximum loss for fractional Brownian motion. (incelemede)

- [9] Cinlar, E., Probability and Stochastics, Springer, New York, 2011.
- [10] Clark, C.E., Williams, G.T., Distributions of the members of an ordered sample, Ann. Math. Stat., 29(3), 862-870, 1958.
- [11] Clark, C.E., The greatest of a finite set of random variables, Oper. Res., 9(2), 145-162, 1961.
- [12] David, H.A., Order Statistics, Wiley, 1981.
- [13] Decreusefond, L., Nualart, D., Hitting times for Gaussian Processes, The Annals of Prob., 36, 319-330, 2008.
- [14] Daehwan, K., Relevance of maximum drawdown in the investment fund selection problem when utility is non-additive, erişim adresi: <http://ssrn.com/abstract=1576998>, 2010.
- [15] Dieker, T., 2004, Simulation of fractional Brownian motion, *Yüksek Lisans Tezi, University of Twente* Department of Mathematical Sciences, Amsterdam.
- [16] Ito, K., McKean, H.P., Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer, 1965.
- [17] Lai, T.L., Robbins, H., Maximally dependent random variables, Proceedings of the National Academy of the Sciences USA, 73(2), 286-288, 1976.
- [18] "Maximum Drawdown" erişim adresi: <http://www.risk.net/risk-magazine/technical-paper/1530272/maximum-drawdown>, erişim tarihi: 20 Haziran 2012.
- [19] Mandelbrot, B.B., Van Ness, J.W., Fractional Brownian motions, Fractional Noises and Applications, 10, 422-437, 1968.
- [20] Norros, I., Four approaches to the fractional Brownian storage, Fractals in Engineering , eds. Levy Vehel, Lutton, Tricot, Springer, 154-169, 1997.
- [21] Owen, D.B., Steck, G.P., Moments of order statistics from the equicorrelated multivariate normal distribution, Ann Math Stat 33(4), 1286-1291, 1962.

- [22] Ross, A.M., Computing bounds on the expected maximum of correlated normal variables, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12(1), 111-138, 2010.
- [23] Ross, A.M., Useful bounds on the expected maximum of correlated normal variables, Technical Report 03W-004, ISE Dept., Lehigh Univ., 2003.
- [24] Teichroew, D., Tables of expected values of order statistics and products of order statistics for samples of size twenty or less from the normal distribution, *Ann. Math. Stat.*, 27(2), 410-426, 1956.
- [25] Tippett, L.H.C., On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, *Biometrika* 17(3/4), 364-387, 1925.
- [26] Vardar, C., Stock Price Processes, On the Correlation of Maximum Gain and Maximum Loss of Stock Price Process, VDM Verlag Dr. Müller, 2009.
- [27] Vardar, C., Results on the supremum of fractional Brownian motion, Hacettepe, *Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2), 255-264, 2011.
- [28] Vitale, R.A., Some comparisons for Gaussian Processes, *Proceedings of the American Math. Society*, 128(10), 3043-3046, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÇAKAR, Hatice
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 28.03.1987 Adana
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0538 8581602
e-mail : hcakar@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2012
Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010 (Nisan-Temmuz)	Adana Sanayi Odası	Stajyer
2009 (Ocak-Nisan)	GÜRİŞ İnşaat ve Mühendislik A.Ş.	Stajyer
2008 (Ocak-Nisan)	Türkiye Ekonomi Politikaları Araştırma Vakfı	Stajyer

Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)

Ruşça (Başlangıç)

Yayımlar

Yalta, A.T., Cakar, H., Energy consumption and economic growth in China: a reconciliation, Energy Policy, 41, 666-675, 2012.