

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KALIN PLAKALARDA EĞİLME VE MOD II YÜKLEMELERİ ALTINDA  
MEYDANA GELEN HASARIN PERİDİNAMİK TEORİ İLE İNCELENMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Uğur Yolum**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali GÜLER**

**ŞUBAT 2021**



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.



Uğur Yolum



## ÖZET

Doktora Tezi

KALIN PLAKALARDA EĞİLME VE MOD II YÜKLEMELERİ ALTINDA  
MEYDANA GELEN HASARIN PERİDİNAMİK TEORİ İLE İNCELENMESİ

Uğur Yolum

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali GÜLER

Tarih: ŞUBAT 2021

Peridinamik teori, çeşitli yüklemelere maruz kalan yapıların deformasyon ve hasar davranışının tahmin edilmesi için ortaya çıkmış yerel olmayan bir Sürekli Ortamlar Mekaniği teorisidir. Bu doktora tezi kapsamında bağ bazlı Peridinamik teori kullanılarak iki farklı problem üzerinde araştırma yapılmıştır. İlk olarak, kalın ortotropik plakalarda eğilme yükünün etkisiyle oluşan sehim ve rotasyon dağılımını çözmeye yönelik bir Peridinamik plaka modeli geliştirilmiştir. Geliştirilen Peridinamik plaka modeli, yüzey normallerinin deformasyonunu dikkate alan bir yaklaşıma sahip olması nedeniyle literatürde yer alan ince plaka modellerinden ayrılmaktadır. Bu plaka modeli ile ilk olarak izotropik bir plakanın eğilme problemi çözülmüştür. İzotropik plaka için elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan sonuçlar ve Sonlu Elemanlar Analizi sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonrasında çeşitli ortotropik plakalar için eğilme problemleri elastik olarak çözümlenerek Sonlu Elemanlar Analizi sonuçları ile doğrulanmıştır. Son olarak, merkezi çatlak içeren ortotropik plakalar için eğilme yüklemesi altında çatlak ilerlemesi analizleri öne sürülen Peridinamik plaka modeli kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar ışığında, öne sürülen Peridinamik Mindlin plakası modelinin eğilme yükü etkisindeki kalın ortotropik plakalarda oluşan deformasyon ve hasarın incelenmesi için uygun olduğu görülmüştür.

Tez kapsamında ikinci problem olarak yapıştırılarak birleştirilmiş kalın plakalara uygulanan dinamik mod II yüklemesinin etkisiyle, yapışma arayüzünde meydana gelen dinamik çatlak ilerlemesi Peridinamik teori ile incelenmiştir. İncelenen numune, Rosakis vd. (1999) tarafından deneylerde kullanılan, yapıştırılarak birleştirilmiş iki adet Homalitik plakadan oluşmaktadır. Çarpma etkisi, plakanın yan yüzeyine zamana bağlı bir hız sınırı koşulu şeklinde uygulanmıştır. Yapılan çalışmada, çarpma hızının ve arayüz tokluğunun çatlak ilerlemesi hızına etkisi incelenmiştir. Her iki parametrik çalışma sonucu, Rayleigh altı bölgede ve intersonik bölgede çatlak ucu hızları elde edilmiştir. İntersonik kırılmalar için elde edilen parçacık hızı dağılımlarında, şok dalgaları gözlemlenmiştir. Kararlı halde ilerleyen intersonik kırılmalar için en düşük çatlak ucu hızı, kesme dalgası hızının 1.57 katı olarak elde edilmiştir. Belirli çarpma hızı ve kırılma tokluğu kombinasyonları için çatlak ucu hızının Rayleigh altı bölgeden intersonik bölgeye geçiş yaptığı gözlemlenmiştir. Mod II çatlaklarının dinamik olarak ilerlemesi ile ilgili elde edilen PD sonuçları literatürde yer alan deneysel ve nümerik çalışmalar ile uyumludur.

**Anahtar Kelimeler:** Peridinamik teori, Çatlak ilerlemesi, Mindlin plakası, Eğilme hasarı, Arayüz hasarı, İntersonik çatlaklar

## ABSTRACT

Doctor of Philosophy

### INVESTIGATION OF BENDING AND MODE II FAILURES IN THICK PLATES USING PERIDYNAMIC THEORY

Uğur Yolum

TOBB University of Economics and Technology  
Institute of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali GÜLER

Date: FEBRUARY 2021

Peridynamic theory is a nonlocal Continuum Mechanics theory for predicting the deformation and damage behavior of structures subjected to various loads. Within the scope of this PhD thesis, two different problems are investigated using the bond-based Peridynamic theory. First, a Peridynamic plate model is developed to solve the deflection and rotation distribution on thick orthotropic plates subjected to bending. The proposed Peridynamic plate model considers the deformation of the surface normals which are disregarded in existing thin plate models in the literature. Deformation behaviour of an isotropic plate subjected to bending is solved using proposed PD plate model. The obtained results are validated with the literature and the results of Finite Element Analysis. Afterwards, bending problems for various orthotropic plates are considered. The PD results for orthotropic plates are validated with Finite Element Analysis results. Finally, propagation of pre-existing cracks on orthotropic plates are analyzed. The PD results are in good agreement with Finite Element Analysis and literature which indicates that the proposed Peridynamic Mindlin Plate model is appropriate to investigate the deformation and damage in thick orthotropic plates under bending.

Dynamic crack propagation along the bonding interface of bonded Homalite plates are also investigated using bond-based Peridynamic theory within the scope of this PhD thesis. The specimen and the boundary conditions for the bonded plates are the same as experimental study of Rosakis et al. (1999). The edge impact is introduced to specimen as time dependent pulse velocity boundary condition. The effects of the impact speed and interface toughness on the crack propagation speed are investigated parametrically. Both sub-Rayleigh and intersonic crack propagation are observed in parametric studies. For the intersonic crack propagation, shock waves are identified in the particle velocity contours. The lowest intersonic crack tip speed is obtained as 1.57 times the shear wave speed. It is observed that for certain combinations of impact velocity and fracture toughness, the crack tip velocity changes from the sub-Rayleigh region to the intersonic region. Obtained PD results for dynamic mode II crack propagation are in agreement with the experimental and numerical studies in the literature.

**Keywords:** Peridynamic theory, Crack propagation, Mindlin plate, Bending failure, Interfacial cracks, Intersonic cracks



## TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca tavsiyeleri ve değerli bilgi birikimi ile bana yol gösteren, tezimin ortaya çıkmasında büyük emekleri olan, çalışmalarım boyunca beni destekleyen çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜLER 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimin önemli bir kısmında tecrübelerinden ve kıymetli bilgi birikiminden faydalandığım, Prof. Dr. Demirkan ÇÖKER'e, tez izleme komitelerinde yapmış olduğu yorumlar ile çalışmalarına katkı sağlayan Prof. Dr. Erdem ACAR'a da çok teşekkür ederim. Tez savunmam sırasında yaptıkları değerli yorumlar ile tezimi iyileştirmeme yardımcı olan Prof. Dr. Mehmet SUNAR'a, Doç. Dr. Cihan TEKOĞLU'na, Dr. Recep Muhammet GÖRGÜLÜARSLAN'a ve Dr. Fatih GÖNCÜ'ye teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca bana araştırma bursu sağladığı için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne, tez çalışmalarımı 115M585 nolu proje kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Çalışırken doktora yapmamı teşvik eden Türk Havacılık ve Uzay Sanayi'ne doktora eğitimime yapmış olduğu katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Hayatım boyunca hep yanımda olan, her türlü zor durumda bana karşı olan inançlarını yitirmeyen, bugünlere gelmemde büyük emeği olan annem Zeynep YOLUM'a, babam Mehmet YOLUM'a ve kardeşim Mustafa YOLUM'a çok teşekkür ederim. Yalnızca doktora tezim sürecinde değil, yaşadığım tüm zorluklar karşısına sevgisini ve desteğini eksik etmeyen, elinden gelen tüm yardımları sunan eşim Tuğçe YILMAZ YOLUM'a da özel teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>KISALTMALAR</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xxi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Tezin Amacı . . . . .	2
1.2 Tez Planı . . . . .	2
<b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Peridinamik Teori ve Uygulamaları . . . . .	5
2.2 Plaka Modelleri ve Enine Kesme Deformasyonunun Etkisi . . . . .	8
2.3 Dinamik Kırılmalar ve Çatlak Hızları . . . . .	10
<b>3. PERİDİNAMİK TEORİ</b> . . . . .	<b>13</b>
3.1 Peridinamik Sürekli Ortam Modeli . . . . .	14
3.2 Peridinamik Malzeme Sabitlerinin Elde Edilmesi . . . . .	16
3.2.1 PD Hasar Modeli . . . . .	20
3.3 Adaptif Dinamik Rölaksasyon Metodu . . . . .	23
3.4 Peridinamik Teorinin ABAQUS'a Entegrasyonu . . . . .	24
<b>4. ORTOTROPİK MALZEMELER İÇİN PD MİNDLİN PLAKASI</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1 Mindlin Plakası Kinematığı . . . . .	27
4.2 Ortotropik Mindlin Plakası Sürekli Ortamlar Mekaniği Formülasyonu . . . . .	31
4.3 Ortotropik Mindlin Plakasına ait Peridinamik Formülasyon . . . . .	32
4.3.1 Peridinamik Hareket Denklemleri . . . . .	32
4.3.2 PD Malzeme Sabitlerinin Belirlenmesi . . . . .	36
4.3.3 İzotropik Formülasyonun Elde Edilmesi . . . . .	38
4.3.4 Ortotropik Mindlin Plakası Hasar Modeli . . . . .	39
4.3.5 PD Ortotropik Mindlin Plaka Modeli Nümerik Çözümü . . . . .	41
4.3.6 PD Modele Sınır Koşullarının ve Yüklemelerin Uygulanması . . . . .	42
4.4 PD Mindlin Plakası Nümerik Sonuçlar . . . . .	43
4.4.1 Enine Kesme Yüküne Maruz Kalan Plaka . . . . .	44
4.4.2 Sabit Basınç Yüküne Maruz Kalan Plaka . . . . .	51

4.4.3 Merkezi Çatlak İçeren Mindlin Plakasında Hasar Oluşumu . . . . .	55
<b>5. MOD II ARAYÜZ KIRILMALARININ PD İLE İNCELENMESİ . . . . .</b>	<b>59</b>
5.1 Mod II Kırılmaları için Temel Tanımlar ve Teori . . . . .	59
5.1.1 Karakteristik Dalga Hızları . . . . .	60
5.1.2 Kırılma Mekanizmasında Enerji Yaklaşımı . . . . .	62
5.1.3 Mod II Çatlak Ucu Hızı Teorik Limitleri . . . . .	62
5.2 Dinamik Mod II Yükleme Altında Çatlak İlerleme Problemi . . . . .	67
5.2.1 Numune Geometrisi ve Sınır Koşulları . . . . .	67
5.2.2 Malzeme Özellikleri ve Modelleme . . . . .	69
5.3 Dinamik Mod II Yükleme PD Sonuçları . . . . .	70
5.3.1 Dalga İlerleme Analizleri . . . . .	71
5.3.2 Çatlak İlerleme Yakınsama Analizleri . . . . .	73
5.3.3 Çarpma Hızı, $V_i$ 'nin Çatlak İlerlemesine Etkisi . . . . .	75
5.3.4 Kritik Enerji Salıverme Oranı, $G_{II}$ 'nin Çatlak İlerlemesine Etkisi . . . . .	83
5.4 İntersonik Çatlak İlerleme Hakkında Değerlendirmeler . . . . .	90
<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1 Sonuçlar . . . . .	97
6.2 Öneriler . . . . .	99
<b>KAYNAKLAR . . . . .</b>	<b>101</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.1: Yerel ve yerel olmayan teoriler: a) Klasik SOM, b) PD ve c) MD. . . . .	14
Şekil 3.2: PD teoride malzeme noktalarının deformasyonu. . . . .	15
Şekil 3.3: Homojen genleşme etkisindeki PD plaka. . . . .	17
Şekil 3.4: Saf kesme etkisindeki PD plaka. . . . .	19
Şekil 3.5: Gevrek malzemeler için PD hasar modeli. . . . .	21
Şekil 3.6: Kritik gerinim değeri, $s_c$ 'nin hesaplanması. . . . .	22
Şekil 3.7: PD teorisinin SEA entegrasyonu. . . . .	25
Şekil 4.1: Mindlin plakası deformasyonu. . . . .	28
Şekil 4.2: Mindlin plakası sınır koşulları. . . . .	43
Şekil 4.3: ABAQUS programında oluşturulan üç boyutlu plaka modeli. . . . .	44
Şekil 4.4: Enine kesme yüküne maruz kalan Mindlin plakası. . . . .	45
Şekil 4.5: İzotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	46
Şekil 4.6: İzotropik plaka, $y = 0$ doğrusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	46
Şekil 4.7: Enine kesme kuvveti etkisindeki 1. ortotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	48
Şekil 4.8: Enine kesme kuvveti etkisindeki 1. ortotropik plakanın sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	48
Şekil 4.9: Enine kesme kuvveti etkisindeki 2. ortotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	49
Şekil 4.10: Enine kesme kuvveti etkisindeki 2. ortotropik plakanın $y=0$ doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	49
Şekil 4.11: Enine kesme kuvveti etkisindeki 3. ortotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	50
Şekil 4.12: Enine kesme kuvveti etkisindeki 3. ortotropik plakanın $y=0$ doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	50
Şekil 4.13: Enine kesme kuvveti etkisindeki 4. ortotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	51
Şekil 4.14: Enine kesme kuvveti etkisindeki 4. ortotropik plakanın $y=0$ doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	51
Şekil 4.15: Sabit basınç yüküne maruz kalan Mindlin plakası. . . . .	52
Şekil 4.16: Sabit basınç etkisindeki 1. ortotropik plakanın sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	53
Şekil 4.17: Sabit basınç etkisindeki 1. ortotropik plakanın $y=0$ doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	53
Şekil 4.18: Sabit basınç etkisindeki 2. ortotropik plakanın sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü. . . . .	54

Şekil 4.19: Sabit basınç etkisindeki 2. ortotropik plakanın $y=0$ doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği. . . . .	54
Şekil 4.20: Enine kesme yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakası. .	55
Şekil 4.21: Enine kesme kuvvetine maruz kalan a) $0^\circ$ ve b) $90^\circ$ fiber yönündeki plakalarda çatlak ilerlemesi. . . . .	56
Şekil 4.22: Sabit basınç yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakası. .	57
Şekil 4.23: Sabit basınç yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakasında $\theta_f = 0^\circ$ yönlü plakada çatlak ilerlemesi. . . . .	57
Şekil 5.1: Mod II yüklemesi (Kesme Modu). . . . .	60
Şekil 5.2: $v_c$ hızında ilerleyen dinamik mod II çatlaklığı . . . . .	64
Şekil 5.3: İntersonik tekillik üssünün çatlak hızına göre değişimi. . . . .	65
Şekil 5.4: Mod II çatlak hızı rejimleri. . . . .	66
Şekil 5.5: İntersonik çatlakta görülen şok dalgaları. . . . .	66
Şekil 5.6: Homalit numuneler: a) elastik dalga ilerlemesi b) mod II çatlak ilerlemesi problemleri. . . . .	68
Şekil 5.7: Zamana bağlı hız sınır koşulu. . . . .	69
Şekil 5.8: İlk çatlak etrafındaki PD bağlarına ve malzeme noktalarına yakından görünüm. . . . .	70
Şekil 5.9: Çatlak ucu konumu, $a_n$ ve çatlak ilerlemesi $a$ . . . . .	71
Şekil 5.10: Homalit plaka üzerinde oluşan a) genleşme, b) kesme dalgası konturları. .	72
Şekil 5.11: Dalga konumu-zaman grafikleri: a) genleşme, b) kesme dalgası. . . .	73
Şekil 5.12: Yakınsama analizleri: a) çatlak ilerlemesi ve b) çatlak ucu hızı grafikleri. .	75
Şekil 5.13: $V_i = 10$ m/s için çatlak ilerlemesi, $a$ ve çatlak ucu hızın, $v_c$ 'nin zamana göre değişimi. . . . .	76
Şekil 5.14: $V_i = 10$ m/s için a) $14.0 \mu s$ , b) $20.0 \mu s$ ve c) $30.0 \mu s$ anındaki parçacık hızı dağılımları. . . . .	77
Şekil 5.15: $V_i = 10.2$ m/s için çatlak ilerlemesi, $a$ ve çatlak ucu hızın, $v_c$ 'nin zamana göre değişimi. . . . .	79
Şekil 5.16: $V_i = 10.2$ m/s için a) $14.0 \mu s$ , b) $19.0 \mu s$ ve c) $28.0 \mu s$ anındaki parçacık hızı dağılımları. . . . .	80
Şekil 5.17: $V_i = 25.0$ m/s için çatlak ilerlemesi, $a$ ve çatlak ucu hızın, $v_c$ 'nin zamana göre değişimi. . . . .	81
Şekil 5.18: $V_i = 25$ m/s için a) $14.0 \mu s$ , b) $20.0 \mu s$ ve c) $30.0 \mu s$ anındaki parçacık hızı dağılımları. . . . .	82
Şekil 5.19: Çatlak ilerlemesi, $a$ ve çatlak ucu hızın, $v_c$ 'nin zamana göre değişimi: a) $G_{II} = 3.0$ Pa.m, b) $G_{II} = 0.6$ Pa.m. . . . .	84
Şekil 5.20: Parçacık hızı dağılımları: a) $G_{II} = 3.0$ Pa.m, $t = 25.0 \mu s$ , b) $G_{II} = 0.6$ Pa.m, $t = 28.0 \mu s$ . . . . .	85
Şekil 5.21: $G_{II} = 2.5$ Pa.m için çatlak ilerlemesi, $a$ ve çatlak ucu hızın, $v_c$ 'nin zamana göre değişimi. . . . .	85

Şekil 5.22: $G_{II} = 2.5$ Pa.m için a) $14.0 \mu s$ , b) $17.0 \mu s$ ve c) $28.0 \mu s$ anındaki parçacık hızı dağılımları. . . . .	87
Şekil 5.23: Çatlak ucu açılmasının zamana göre değişimi: a) $G_{II} = 3.0$ Pa.m, b) $G_{II} = 0.6$ Pa.m ve c) $G_{II} = 2.5$ Pa.m. . . . .	89
Şekil 5.24: Çatlak hızı, $v_c$ 'nin parametrik değişimi: a) sabit kırılma tokluğu, b) sabit çarpma hızı koşulları. . . . .	91
Şekil 5.25: Normalize edilmiş kararlı çatlak ucu hızı, $v_c^*$ : a) sabit kırılma tokluğu, b) sabit çarpma hızı koşulları. . . . .	93
Şekil 5.26: Çarpma süresi, $t_p$ 'nin çatlak ucu hızı, $v_c$ 'ye etkisi. . . . .	94
Şekil 5.27: Kararlı haldeki intersonik çatlak etrafındaki konturlar: a) deneysel kesme gerilmeleri (Rosakis vd. 1999), b) kesme gerilmelerini nümerik tahmini (Daphalapurkar vd. 2007), c) parçacık hız dağılımı PD sonuçları. . . . .	95







## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1: Ortotropik plakaların malzeme özellikleri. . . . .	47
Çizelge 4.2: Sabit basınç yüküne maruz kalan ortotropik plakaların malzeme özellikleri. . . . .	53





## KISALTMALAR

<b>ADR</b>	: Adaptif Dinamik Rölaksasyon
<b>GMNM</b>	:Genelleştirilmiş Interpole Malzeme Noktası Metodu
<b>GSEA</b>	:Genişletilmiş Sonlu Elemanlar Analizi
<b>KBM</b>	: Kohezif Bölge Modeli
<b>LEKM</b>	: Lineer Elastik Kırılma Mekanîği
<b>MD</b>	: Moleküler Dinamik
<b>PD</b>	: Peridinamik Teori
<b>PMMA</b>	: Polimetil metakrilat
<b>SEA</b>	: Sonlu Elemanlar Analizi
<b>SOM</b>	: Sürekli Ortamlar Mekanîği
<b>ŞDEY</b>	: Şekil Değişirme Enerjisi Yoğunluğu



## SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$a$	Çatlak ilerlemesi
$a_n$	Çatlak konumu
$a_0$	İlk çatlak boyutu
$A_k$	Kiriş elemanın kesit alanı
$\mathbf{b}$	Dış kuvvet yoğunluğu vektörü
$\hat{b}$	Dış kesme kuvveti yoğunluğu
$\tilde{b}$	Dış moment yoğunluğu
$c$	PD bağ sabiti
$c_b$	PD eğilme bağ sabiti
$c_{bf}$	Fiber yönündeki PD eğilme bağ sabiti
$c_{bm}$	Matris yönündeki PD eğilme bağ sabiti
$c_s$	PD kesme bağ sabiti
$c_D$	Enine dalga hızı
$c_n$	Yapay sönümlleme katsayısı
$c_R$	Rayleigh dalgası hızı
$c_S$	Kesme dalgası hızı
$D$	Eğilme katılık matrisi
$\delta$	Komşuluk yarıçapı
$\Delta t$	Zaman adımı
$\Delta x$	Ağ örgüsü boyutu
$E$	Elastik modülü
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Gerinim tensörü
$\mathbf{f}$	PD kuvvet yoğunluğu vektörü
$\tilde{f}$	Eğilme momenti yoğunluğu
$\hat{f}$	Kesme kuvveti yoğunluğu
$F_{PD}$	Bağa etkiyen kuvvet
$F_k$	Kiriş elemanda oluşan kuvvet
$G$	Kayma modülü

$G_c$	Bağların kırılması için birim yüzeye düşen enerji
$G_I^f, G_I^{fm}$	Fiber ve matris malzemesi için kritik mod I enerji salıverme oranı
$G_{II}$	Kritik mod II enerji salıverme oranı
$G_{III}$	Kritik mod III enerji salıverme oranı
$\gamma_{xy}$	Kayma gerinimi
$\Gamma$	Yüzey enerjisi
$h$	Kalınlık
$H$	Komşuluk alanı
$\mathbf{I}$	Birim vektör
$k^2$	Kesme düzeltme faktörü
$K$	Sıkışmazlık modülü
$K_{ij}$	Denklem sistemi katılık matrisi
$K_{II}$	Kritik mod II gerilme yoğunluğu faktörü
$\kappa$	Eğrilik
$\kappa_c$	Kritik eğrilik
$\Lambda$	Diagonal kütle yoğunluğu matrisi
$\lambda_{ii}$	Diagonal kütle yoğunluğu matrisinin elemanları
$\lambda$	Lame sabiti
$M$	Moment
$\mu$	Hasar fonksiyonu
$N$	Komşuluk içerisindeki toplam bağ sayısı
$N_e$	e malzeme noktasının etkileşim içinde olduğu bağ sayısı
$\nu$	Poisson oranı
$\varpi$	PD noktasal hasar
$\varphi$	Enine kesme açısı
$\varphi_c$	Kritik enine kesme açısı
$\phi$	Rotasyon
$\rho$	Kütle yoğunluğu
$r$	Eğrilik yarıçapı
$R_c$	Sınır koşulu uygulama bölgesi
$R_t$	Yük uygulama bölgesi
$s$	Bağ gerinimi
$s_c$	Kritik bağ gerinimi
$t$	Zaman
$K$	Kinetik enerji
$\boldsymbol{\sigma}$	Gerilme tensörü
$\theta$	Bağ açısı
$\theta_f$	Fiber oryantasyonu
$\vartheta$	Malzeme noktaları arasındaki eğim
$q_z$	Düzlem dışı kesme yükü

$U$	Potansiyel enerji
$\ddot{\mathbf{u}}$	Noktasal ivme vektörü
$\mathbf{u}$	Deformasyon vektörü
$v_c$	Çatlak hızı
$\mathbf{X}$	Komşuluk bölgesindeki malzeme noktalarının deformasyon vektörü
$\xi$	Relatif konum vektörü
$\eta$	Relatif deformasyon vektörü
$V$	Hacim
$\omega$	Mikropotansiyel
$\omega_c$	Kritik mikropotansiyel
$\tilde{\omega}$	Eğilme mikropotansiyeli
$\hat{\omega}$	Kesme mikropotansiyeli
$w$	Sehim
$W$	Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu
$\mathbf{X}$	Komşuluk bölgesindeki malzeme noktalarının pozisyon vektörü





## 1. GİRİŞ

Yıllar içerisinde artan fosil yakıt kullanımı çevre kirliliğine ve iklim değişikliklerine neden olmaktadır. Bu nedenle küresel ölçekte karbon salımının azaltılarak minimum seviyeye indirilmesi hedeflenmektedir. Otomotiv ve havacılık sektörleri, dünya genelinde karbon salımını etkileyen başlıca sektörlerdendir. Karbon salımını azaltmak için ulaşım araçlarının enerji verimliliğini arttırmak oldukça önemlidir. Ulaşım araçlarının enerji verimliliği, yapısal ağırlığı ile ters orantılı olması nedeniyle, hafif araçların geliştirilmesi hedeflenmektedir. Diğer taraftan ise tasarlanan araçların kullanım koşullarına bağlı olarak uluslararası güvenlik standartlarında belirlenen mukavemet gereksinimlerini karşılaması gerekmektedir. Yapının ağırlığının azaltılması ile mukavemetinin arttırılması, temel olarak birbiri ile çelişen iki gereksinimdir. Her iki gereksinimin de karşılanması amacıyla yapının optimize edilmesi günümüzde ürün geliştirme sürecinin temel bir ögesidir. Günümüzde endüstriyel bir ürünü hafifletmenin yöntemlerinden biri düşük yoğunluk ve yüksek mukavemete sahip malzemelerin kullanımınıdır. Bu amaçla kalın kompozit plakalar, hava ve kara ve deniz araçları, rüzgar türbinleri gibi çok çeşitli sektörlerde tercih edilmektedir. Ayrıca iki farklı yapının bağlayıcı ile konvansiyonel olarak birleştirilmesi yerine yapıştırılarak birleştirilmesi de aynı sektörlerde yaygın olarak tercih edilmektedir. Endüstride kullanılan bu ileri malzemeler ve birleştirme teknikleri nedeniyle ürünler fiber, matris, yapışma arayüzü gibi çok sayıda bileşen içermektedir. Bu durum fiber hasarı, matris hasarı, yapışma arayüzü hasarı gibi yapılarda oluşacak hasar modlarının çeşitliliğini de arttırmaktadır. Mukavemet ve hafiflik gereksinimlerinin aynı anda karşılanması için yapılan çalışmalarda yapıda meydana gelecek hasar modlarının belirlenmesi önem kazanmaktadır. Günümüzde ürün geliştirme sürecinde yaygın olarak kullanılan nümerik analiz yöntemi olan Sonlu Elemanlar Analizi (SEA), çatlak oluşumu ve ilerlemesinin belirlenmesi için tek başına yeterli değildir. Bu nedenle hasar tahmini amacıyla yapılan analizler çok sayıda yapısal test ile desteklenmektedir. Hasar oluşumu ve hasara karşı toleransın belirlenmesi amacıyla yapılan bu testler uzun sürebilmekte ve maliyetli olabilmektedir. Son yıl-

larda ortaya çıkan, yerel olmayan bir Sürekli Ortamlar Mekaniği (SOM) teorisi olan Peridinamik teori (PD), hasar oluşumu ve ilerlemesinin tahmini için oldukça elverişlidir. Hızla gelişmekte olan PD yöntemi, hasar oluşumu ve tahmini konusunda SEA'ya oranla oldukça güvenilir sonuçlar vermektedir. PD'nin gelişimiyle birlikte, endüstriyel uygulamalarda ihtiyaç duyulan test miktarının azalmasıyla ürün geliştirme sürecinin hızlanacağı düşünülmektedir.

## **1.1 Tezin Amacı**

Bu tezin amacı havacılık, otomotiv, denizcilik, rüzgar türbinleri gibi çeşitli sektörlerde yaygın olarak kullanılan kalın kompozit yapıların ve yapıştırılarak birleştirilmiş yapıların deformasyon ve hasar davranışını PD ile inceleyerek literatüre katkı sağlamaktır. Bal peteği ile güçlendirilmiş kompozit yapılar özellikle düzlem dışı yüklemelere maruz kalan yapılarda yaygın olarak tercih edilmektedir. Bal peteği yapıları düşük yoğunluğa, yüksek düzlem dışı kesme ve eğilme mukavemetine sahiptir. Bu yapılar tipik olarak 12.7 mm, 25.4 mm gibi kalınlıklar ile kullanılmaktadır. Klasik plaka teorileri deformasyon sonrası yüzey normallerinin plaka orta yüzeyine dik kaldığı varsayımına dayanmaktadır. Bu varsayım, kalınlık arttıkça geçersiz hale geldiğinden klasik plaka teorileri ile yapılan tahminlerde hata oranı artmaktadır. Bu tez kapsamında kalın kompozit yapılarda düzlem dışı yüklemeler sonucu oluşan deformasyon ve hasarın PD ile tahmin etmeye yönelik bir plaka modelinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu tezin diğer amacı da kenarına çarpma uygulanan yapıştırılmış yapıların yapışma arayüzünde oluşan hasarın tahmin edilebilmesi için bir yöntem geliştirmektir.

## **1.2 Tez Planı**

Teze Bölüm 1 ile giriş yapılarak, tezin amaçları ve planı belirtilerek başlanmıştır. Daha sonra Bölüm 2'de genel olarak PD, düzlem dışı yüklemelerin incelenmesine yönelik plaka modelleri ve dinamik kırılmalar konularını kapsayan literatür özeti verilmiştir. PD'nin temel matematiksel altyapısı Bölüm 3'de tanımlanmıştır. Bölüm 4'de ilk olarak, geliştirilen ortotropik PD Mindlin plakası formülasyonu verilmiştir. Daha sonra bu formülasyon kullanılarak eğilme yüklemesine maruz kalan çeşitli katılık değerle-

rine sahip ortotropik plakalar için sehim ve rotasyon dağılımları PD ile hesaplanmış ve SEA çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca merkezi çatlak içeren ortotropik plakalarda hasar oluşumu da PD Mindlin plakası modeli kullanılarak incelenmiştir. Bölüm 5’de öncelikli olarak dinamik kırılma mekaniği tanımlamaları yapıldıktan sonra, kesme dalgası, genleşme dalgası ve Rayleigh dalgası ilerleme hızlarına yönelik formülasyon verilmiştir. Daha sonra PD yöntem ile kesme ve genleşme dalgalarının ilerlemesi analiz edilerek dalga hızları hesaplanmış ve teorik dalga hızları ile doğrulanmıştır. Sonrasında kenar çarpması etkisiyle dinamik olarak ilerleyen saf mod II hasarı PD ile analiz edilmiştir. İlk olarak çarpma hızının etkisi ve kırılma tokluğunun etkisi parametrik olarak incelenmiştir. Parametrik çalışmalar sonucu elde edilen hız değerleri, dinamik kırılma mekaniği yaklaşımı ile tahmin edilmiş olan hız rejimleri ile karşılaştırılmıştır. Bu iki parametrik çalışmaya ek olarak, çarpma süresinin dinamik çatlak hızı üzerine etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatür ile karşılaştırılmıştır. Bölüm 6’da ise elde edilen nümerik sonuçlar ile ilgili çıkarımlar ve gelecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.



## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu tez kapsamında bağı bazlı PD kullanılarak ortotropik plaka modeli geliştirilmesi ve dinamik mod II kırılmalarının modellenmesi hakkında araştırma yapılmıştır. Bu nedenle literatür araştırması alt bölümlere ayrılarak organize edilmiştir. İlk önce Bölüm 2.1’de PD ile ilgili literatüre yer verilerek, PD’nin ortaya çıkışı, hasar modellemesindeki avantajları ve uygulamalarından bahsedilmiştir. Daha sonra Bölüm 2.2’de literatürde yer alan plaka modellerinden bahsedilerek, PD ile bu modeller üzerinde yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bölüm 2.3’de ise dinamik kırılmalar ve çatlak hızları hakkındaki analitik, nümerik ve deneysel çalışmalardan bahsedilerek PD ile dinamik kırılmalar konusunda yapılan araştırmalara değinilmiştir.

### 2.1 Peridinamik Teori ve Uygulamaları

SEA yapıların çeşitli yüklemeler altındaki davranışını tahmin etmek için yaygın olarak kullanılan gürbüz yöntemdir. Ticari SEA paket programlarının gelişmesiyle kompleks geometrili yapılar üzerinde çeşitli yüklemeler etkisinde oluşan gerilmelerin SEA ile belirlenmesi mümkün hale gelmiştir. Ayrıca hiperelastik, kompozit, metalik malzeme davranışı gibi çeşitli malzeme modelleri de SEA paket programlarında mevcuttur [1]. Tüm bu avantajlı yönlerine rağmen SEA, yapılardaki kusurların modellenmesi için tek başına yeterli bir yöntem değildir. Bunun nedeni ise SEA’nın Sürekli Ortamlar Mekaniği’ne (SOM) dayanan matematiksel altyapısıdır. Klasik SOM yaklaşımında, hareket denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin çözümü için yerel türevlere ihtiyaç duyulmaktadır. Yerel türevler, yapılarda bulunan boşluk, çatlak gibi süreksizliklerde tanımsızdır. Bu nedenle, klasik SEA yaklaşımı çatlak, boşluk gibi kusurların modellenmesi için yeterli değildir. Bu eksiklik, literatürde yer alan çeşitli analitik ve nümerik yöntemler ile giderilmektedir. Bunlardan en temeli ise Griffith tarafından, çatlak ucundaki süreksiz gerilmelerin çözülmesiyle ortaya çıkan Lineer Elastik Kırılma Mekaniği (LEKM) yaklaşımıdır [2]. LEKM teorisi ile yapıda halihazırda

var olan çatlak, boşluk gibi kusurların ilerlemesini tahmin etmek mümkündür. Bunun için kritik enerji salıverme oranı ya da gerilme yoğunluğu faktörü gibi harici bir kritere ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca LEKM yaklaşımında, hiçbir kusur içermeyen bir yapıda çatlak oluşumu konusunda eksikler bulunmaktadır.

Kırılma Mekaniği yaklaşımını SEA araçlarına entegre ederek yapıda var olan çatlakların ilerlemesini incelemek mümkündür. Dugdale [3] ve Barenblatt [4] tarafından geliştirilen Kohezif Bölge Modeli (KBM), kohezif eleman formülasyonunun [5, 6] geliştirilmesiyle SEA ile birlikte kullanılmaktadır. Kohezif elemanlar, herhangi bir kalınlık değerine sahip olmayan yüzey elemanlarıdır ve standart sonlu elemanların sınırlarına yerleştirilmektedir. Bu nedenle çatlak ilerlemesi yalnızca eleman arayüzlerinde mümkündür ve yapılan analizler sonucu elde edilen çatlak ilerlemesi ağ örgüsünün yapısına göre değişmektedir. Bu yaklaşımda çatlağın ilerleyeceği yönü tayin edebilmek için çatlağın küçük adımlar ile ilerletilerek her bir adımda ağ örgüsünün güncellenmesi gerekmektedir [7]. KBM modellemesinin kısıtlarından birisi de ağ örgüsü yoğunluğunun artmasıyla birlikte incelenen yapının katılık değerinin azalmasıdır. KBM ağ örgüsü yapısına ve boyutuna karşı hassas bir yöntemdir.

Genişletilmiş Sonlu Elemanlar Analizi (GSEA), hasar ilerlemesinin modellenmesi için geliştirilmiş bir diğer nümerik yöntemdir [8]. Bu yöntem ile çatlağın eleman sınırları dışında, eleman yüzeylerinde de ilerleyebilmesi mümkündür. Bu yaklaşımda çatlak ucundaki elemanlar, süreksiz deplasman fonksiyonları ile zenginleştirilmektedir. GSEA'nın avantajlı yönü, çatlakların elemanların sınırları içerisinde ilerleyebilmesidir. Bu sayede çatlak ilerlemesine bağlı olarak, ağ örgüsünün güncellenmesine ihtiyaç duyulmamaktadır. Fakat GSEA yönteminde çatlak civarındaki elemanlar için incelenen probleme bağlı olarak harici bir kritere (süreksiz deplasman fonksiyonlarına) ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum nedeniyle karmaşık şekilde çatallanmış çatlakların GSEA ile ilerlemesinin doğru olarak tahmin edilmesi zorlaşmaktadır [9].

Yapılarda oluşan hasarı tahmin etmeye yönelik geliştirilen yöntemlerden birisi de ilk olarak Silling (2000) tarafından ortaya atılan Peridinamik teoridir (PD) [10]. PD'nin matematiksel formülasyonu yapılardaki boşluk, çatlak gibi süreksizliklere neden olan kusurlarda da tanımlıdır. Bu sayede PD yaklaşımında çatlağa yakın bölgeler için özel modellemeye ihtiyaç duyulmamaktadır. Bunun nedeni ise, PD hareket denklemlerinin kısmi türevler yerine integral içeren terimler ile oluşturulmuş olmasıdır. Bu sayede PD

hareket denklemleri herhangi bir yapının hem kusur içermeyen kısımlarında hem de çatlak boşluk gibi hasar içeren kısımlarında tanımlıdır. PD yaklaşımında bir malzeme noktası kendisi ile belirli uzaklığa sahip malzeme noktaları ile etkileşim halindedir. Bu nedenle PD yerel olmayan bir SOM yaklaşımıdır. Yerel olmayan formülasyonu sayesinde PD, hasar oluşumu ve ilerlemesinin tahmini için avantajlı bir yöntemdir. PD’de herhangi bir malzeme noktası  $\mathbf{x}$ ,  $\delta$  yarıçapına sahip  $\mathbf{x}$  malzeme noktasının komşuluğu olarak adlandırılan  $H_x$  alanı içerisindeki malzeme noktaları ile etkileşim halindedir. Peridinamik teoride  $\delta$  uzunluğu komşuluk yarıçapı olarak adlandırılmaktadır. Komşuluk yarıçapı,  $\delta$  sıfıra yakınsadığında, PD hareket denklemleri, yerel bir teori olan Klasik SOM hareket denklemlerine dönüşmektedir [11].

Silling (2000) tarafından ilk olarak geliştirilen Peridinamik formülasyon literatürde bağ bazlı PD olarak bilinmektedir [10]. Bağ bazlı PD’de malzeme noktaları arasındaki etkileşim ikili olarak ele alınmaktadır. İki malzeme noktasındaki etkileşim kuvveti yoğunluğu vektörleri aynı büyüklükte ve doğrultuda olan zıt yönlü vektörlerdir. Bu varsayım nedeniyle bağ bazlı teoride Poisson oranı iki boyutlu modellemede 1/3, üç boyutlu modellemede ise 1/4 olarak sabittir. Bağ bazlı Peridinamik teorideki bu kısıt Silling (2007) tarafından geliştirilen hal bazlı Peridinamik formülasyon ile ortadan kaldırılmıştır [12]. Hal bazlı PD’de malzeme noktaları arasındaki doğrudan etkileşimle birlikte, dolaylı etkileşimler de dikkate alınmaktadır [13].

Herhangi bir yükleme nedeniyle yapıda meydana gelen deformasyonların çözümü için PD hareket denklemlerinin zaman ve konuma göre entegre edilerek çözülmesi gerekmektedir. PD hareket denklemlerinin sabit ağ örgüsü boyutu,  $\Delta x$  kullanılarak merkezi farklar yöntemi ile çözümü için ihtiyaç duyulan kararlılık koşulu Silling ve Askari (2005) tarafından öne sürülmüştür [14]. Literatürde Adaptif Dinamik Rölaksasyon Metodu (ADR) olarak bilinen nümerik yöntem Kılıç ve Madenci (2010) tarafından statik yüklemeler için PD denklemlerin çözümüne uyarlanmıştır [15]. Bu yöntem ile hareket denklemlerine yapay bir sönümleme terimi eklenerek, iteratif olarak statik çözüme denk gelen kararlı hal çözümü elde edilmektedir. Nümerik çözüm teknikleri ile birlikte, PD ağ örgüsü yapısı da çözüm hızını etkileyen bir parametredir. PD modelde yer alan bağ sayısı, nümerik olarak çözülmesi gereken kuvvet etkileşimi sayısını belirlemektedir. Değişken ağ örgüsü boyutuna ve komşuluk boyutuna sahip modelleme ile hasar içermeyen kısımlarda daha seyrek ağ örgüsü, hasar içeren ve detaylı incelenmesi

gereken kısımlarda ise daha sık ağ örgüsü kullanılarak ihtiyaç duyulan Peridinamik bağ sayısı azaltılabilir. Değişken ağ örgüsü boyutuna ( $\Delta x$ ) ve değişken komşuluk boyutuna ( $H_x$ ) sahip Peridinamik modeller için nümerik çözümler Bobaru vd. (2009) ve Bobaru ve Ha (2011) tarafından yapılan çalışmalarda ele alınmıştır [16, 17]. Dinamik çatlak ilerlemesinin incelendiği durumlarda ise yalnızca çatlak ucu çevresindeki PD ağ örgüsü sıklaştırarak, çözülmesi gereken etkileşim sayısının azaltılmasıyla gürbüz bir çözüm elde etmek mümkündür [18, 19].

Peridinamik teori çeşitli ticari SEA analiz programlarına entegre edilmiştir [20–22]. Beckmann vd. (2013) bağ bazlı PD'yi ABAQUS programına entegre ederek, yapılandırılmış metal çiftinde termal yüklemeler nedeniyle meydana gelen delaminasyon hasarını tahmin etmiştir [23]. Bağ bazlı PD Timoschenko kirişi ve Mindlin plakası formülasyonları Yang vd. (2019) tarafından ANSYS SEA programına entegre edilmiştir [24]. PD nin SEA programlarına entegre edilmesinin bir diğer avantajı da yapının bir kısmının SEA ile, bir kısmının da PD ile oluşturulmasıyla hibrit bir model elde edilmesidir. Öterkuş vd. (2012) SEA ve PD yöntemlerini kombine ederek, güçlendirilmiş kavisli kompozit panelde çatlak ilerlemesini incelemiştir [25]. Yaghoobi ve Chorpeza (2015), hal bazlı PD ve SEA'yı kombine ederek ve sınır şartlarını simetrik olarak tanımlayarak nümerik çözümün daha hızlı bir şekilde elde edilebileceğini ortaya koymuşlardır [26]. Giannakeas vd. (2018) ise SEA ve PD yaklaşımlarını kombine ederek seramik kompozitlerde termal şok etkisi altında oluşan çatlakları incelemiştir [27]. SEA'nın yanı sıra, PD'nin farklı nümerik yöntemlerle de kombine edilmesi mümkündür. Shojaei vd. (2016) PD ile Sonlu Nokta Metodu'nu kombine ederek izotropik yapılar dinamik yüklemeler altındaki çatlak ilerlemesini incelemiştir [28].

## **2.2 Plaka Modelleri ve Enine Kesme Deformasyonunun Etkisi**

Yüksek düzlem dışı kesme katılığı ve mukavemeti nedeniyle, bal peteği ile güçlendirilmiş kalın plakalar uzay ve havacılık sektöründe yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu plakalar tipik olarak 12.7 mm, 25.4 mm gibi yüksek kalınlıklara sahip olması nedeniyle Kirchoff plakası modeli ile uyumlu değildir. Kirchoff plakası modelinde, deformasyon öncesi plaka orta yüzeyine dik olan yüzey normallerinin, deformasyon sonrası oluşan orta yüzeye de dik olduğu varsayımı mevcuttur [29]. Bir diğer değişle, Kirchoff plakası



modelinde yüzey normallerinin deforme olmadığı varsayımı yapılmaktadır. Bu yaklaşım, ince plakalar için geçerli bir yaklaşım olsa da, plaka kalınlığının artmasıyla yüzey deformasyonlarında görülen deformasyonun plaka üzerinde görülen toplam deformasyona etkisi artmaktadır [29]. Kesme deformasyonlarının, izotropik plakaların yüzey normalleri üzerindeki etkisini dikkate alan ilk çalışmalar Reissner (1945) ve Mindlin (1951) tarafından yapılmıştır [30, 31]. Bu yaklaşım, Whitney (1969) tarafından, tabakalı kompozit yapılar için genişletilmiştir [32]. Bu plaka modellerinde, kalınlık boyunca alınan düzlemsel kesitlerin, deformasyon sonrası da düzlemsel kaldığı varsayımı yapılmıştır [30–32]. Kalın plakalar için geliştirilen bu ilk plaka modellerinde, gerinim dağılımının kalınlık boyunca lineer olarak değiştiği varsayımı yapılmıştır. Bu nedenle bu modeller 1. dereceden kesme deformasyonu teorisi olarak da bilinmektedir. Daha sonra, kalınlık boyunca gerinim dağılımı için çeşitli polinomlar kullanılarak yüksek dereceli kesme deformasyonları teorileri geliştirilmiştir [33, 34].

Plaka modelleri yapıların iki boyutlu olarak modellenmesine olanak sağlamaktadır. Bunun için PD hareket denklemlerinde bir takım modifikasyonlar gereklidir. O’Grady ve Foster (2014), Kirchoff-Love plaka teorisini esas alan eğilme yüklemesi altındaki düz plakalar için hal bazlı PD plaka modeli geliştirmiştir [35]. Taylor ve Steigmann (2015), eğilme hasarını tahmin edebilen iki boyutlu bağ bazlı bir PD plaka modeli önermiştir [36]. Taştan vd. (2016) ince ortotropik plakalarda meydana gelen eğilme hasarını tahmin etmeye yönelik bağ bazlı bir PD plaka modeli geliştirmiştir [37, 38]. Tüm bu PD plaka modelleri düz plakalar için geçerlidir. Chowdhury vd. (2016), kavisli bağ konseptini geliştirerek kavisli kabul yapıların iki boyutlu PD modelinin oluşturulmasına olanak sağlamıştır [39].

Literatürde yer alan ilk PD plaka modelleri ince plakalar için geçerlidir [35] - [39]. Bu modellerin temeli Kirchoff plakası olması nedeniyle kesme deformasyonları dikkate alınmamıştır. Kesme deformasyonlarının etkisini dikkate alan ilk Peridinamik plaka modeli Diyaroğlu vd. (2015) tarafından izotropik plakalar için önerilmiştir [40]. Bu doktora tezi kapsamında, ortotropik plakalar için kesme deformasyonlarının etkisini dikkate alan bir PD plaka modeli geliştirilmiştir [41].

### 2.3 Dinamik Kırılmalar ve Çatlak Hızları

Dinamik kırılmalar sırasındaki oluşabilecek maksimum çatlak hızının limitleri dinamik kırılma mekaniği literatüründeki temel problemlerin başında gelmiştir. Teorik olarak lineer elastik katılarda görülmesi mümkün maksimum çatlak hızı, dinamik enerji salıverme oranının çözümünden elde edilebilir. Düz ilerleyen mod I yüklemesi etkisindeki dinamik çatlaklar için, çatlak hızı artarak Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$ 'a yaklaştıkça dinamik enerji salıverme oranı azalarak sıfıra yakınsamaktadır [42, 43]. Mod I yüklemesi altında  $c_R$ 'ın üzerindeki çatlak hızları için yapılan analitik çözümler negatif değerli dinamik enerji salıverme oranları elde edilmektedir. Çatlak ilerlemesi enerji tüketen bir olay olması nedeniyle, mod I yüklemesi altındaki çatlakların  $c_R$  değerinden büyük hızlarda ilerlemesi mümkün değildir. Ravi-Chandar ve Knauss, 1984 tarafından yapılan lineer elastik homojen numunelerde dinamik mod I koşullarının deneysel olarak incelendiği araştırmada çatlak ucu çatallaşması ve çatlak yolunda sapmalar görülmüştür. Çatlak yolunda görülen bu kararsızlıkların ulaşılacak maksimum çatlak hızlarını sınırlandırması nedeniyle, deneysel olarak ölçülen maksimum çatlak hızları  $0.5c_R$  mertebesinde [44]. Daha sonra Knauss ve araştırma ekibi tarafından dinamik mod I yüklemesi etkisindeki çatlakların incelendiği deneylerde çatlak yolu zayıflatılmış bir düzlem oluşturularak kısıtlanmıştır. Bu sayede çatlakın düz bir yolda ilerlemesi sağlanmış ve mod I yüklemesi için limit hız değeri olan  $c_R$ 'a oldukça yakın çatlak hızları deneysel olarak gözlemlenmiştir [45, 46].

Mod II yüklemeleri için dinamik enerji salıverme oranı, Rayleigh dalgası hızı  $c_R$ 'ın altında ya da kesme dalgası hızı,  $c_S$  ile düzlemsel dalga boyu  $c_D$  arasında ilerleyen çatlaklar hızı sonlu ve pozitifdir. Bir başka deyişle, mod II çatlakları bu iki aralıkta kararlı olarak ilerlemektedir [47]. Literatürde,  $c_S$  ve  $c_D$  hızları arasındaki gerçekleşen kırılmalar "intersonik" olarak adlandırılmaktadır. Freund (1979), mod II yüklemesi altındaki çatlaklar için çatlak ucunda oluşan tekil gerilmelerin asimptotik çözümünü elde etmiştir ve intersonik bölgede yalnızca  $\sqrt{2}c_S$  hızında kararlı çatlak hızlarının elde edilebileceğini öne sürmüştür [48]. Andrews (1976) ve Burridge vd. (1979), intersonik mod II çatlaklarının ön tanımlı düz bir yolda ilerlemesini, yüzeylerin relatif kayma deformasyonuna bağlı kohezif bir model kullanarak incelemiştir. Her iki çalışmada da kararlı mod II çatlak hızlarının  $c_R$ 'ın altında ya da  $\sqrt{2}c_S$  ile  $c_D$  arasında olabileceği be-

lirtilmiştir [49, 50]. Abraham ve Gao (2000), zayıflatılmış arayüzde gerçekleşen mod II yüklemesi altındaki kırılmaları moleküler dinamik analizleri ile ele almışlardır. Bu benzetimlerde çatlak hızı  $c_R$ 'a yaklaştığında çatlak önünde mikro çatlakların oluştuğunu gözlemlemişlerdir. Mikro çatlaklar ile çatlak önünün birleştiği anda, uygulanan çarpma sınır koşulunun ortadan kaldırıldığında ise çatlak hızının artarak  $\sqrt{2}c_S$  değeri etrafında stabil hale geldiğini gözlemlemişlerdir [52]. Needleman (1999) ve Daphalapurkar vd. (2007) ise KBM metodu ile mod II yüklemesi etkisindeki çatlakların dinamik ilerlemesini incelemişlerdir. Her iki nümerik çalışmada da elde edilen en düşük kararlı intersonik çatlak hızı  $\sqrt{2}c_S$  hızından büyüktür [57, 59].

Saf mod II yüklemesi etkisindeki çatlakların deneysel olarak incelenebilmesi için çatlak ucu çatallaşmasının engellenmesi ve düz bir çatlak yolunun elde edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle literatürde yer alan deneysel çalışmalarda iki adet plaka yapıştırılarak kırılma tokluğu düşük arayüzler oluşturulmuştur. Bu sayede kırılma arayüze hapsedilerek çatlağın düz bir yol izlemesi sağlanmış ve saf mod II yüklemesi koşulları elde edilmiştir [53–56]. Literatürde yer alan ilk deneysel çalışmalarda farklı iki malzemenin yapıştırıldığı numunelerde gerçekleşen intersonik kırılmalar incelenmiştir [53–55]. Homojen bir numunede gerçekleşen intersonik kırılmalar ilk kez Rosakis vd. (1999) tarafından incelenmiştir [56]. Bu testlerde gevrek bir plastik olan "Homalite" malzemesi kullanılmıştır. Bu tezde İngilizce bir terim olan "Homalite", Homalit olarak Türkçeleştirilmiştir. Rosakis vd. (1999) test numunesini iki adet Homalit plakayı elastik modülü Homalit'e oldukça yakın, tokluğu ise Homalit'e oranla düşük bir yapıştırıcıyla yapıştırarak elastik özellikleri bakımından homojen bir yapı elde etmişlerdir. Bu numunenin kenar kısmına bir cisim yüksek hızla çarptırılarak yapışma arayüzünde ilerleyen intersonik çatlak hızlarının  $\sqrt{2}c_S$  değerinde kararlı hale geldiği gözlemlenmiştir. Rosakis vd. (1999) tarafından yapılan bu deney, daha sonra birçok çalışmada nümerik olarak ele alınmıştır. Needleman (1999) ve Samudrala vd. (2002) bu problemi KBM yöntemi ile incelemiştir. Her iki çalışmada da elde edilen minimum intersonik çatlak hızının  $\sqrt{2}c_S$  in üzerinde olduğu gözlemlenmiştir. Daphalapurkar vd. (2007) ise Rosakis vd. (1999) tarafından gerçekleştirilen deneyi Genelleştirilmiş Interpole Malzeme Noktası (GMNM) metodu ile nümerik olarak çözmüştür ve  $1.66c_S$  ile  $c_D$  arasında gerçekleşen hızlarda intersonik kırılmalar gözlemlenmiştir.

Peridinamik teori, yerel türev içermeyen matematiksel formülasyonu nedeniyle, ya-

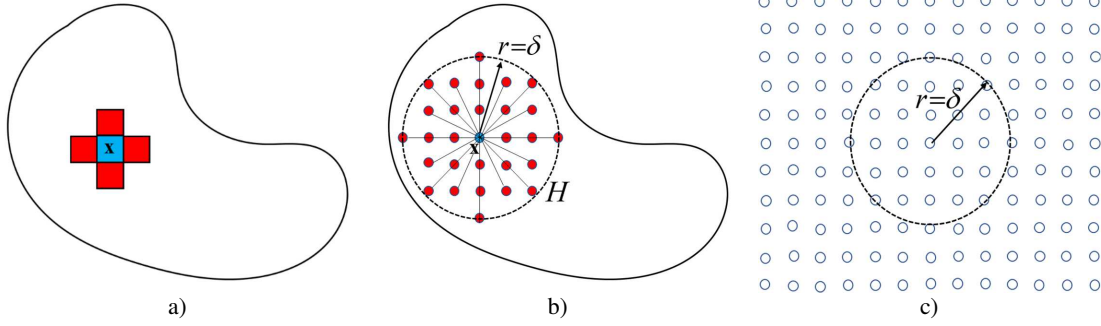
pılarda meydana gelen dinamik kırılmaların tahmini için oldukça elverişlidir. Ha ve Bobaru (2010), cam numunelerde mod I yüklemesi etkisi altındaki dinamik kırılmaları bağ bazlı PD ile tahmin etmiştir [60]. Agwai vd. (2011) üç farklı dinamik çatlak ilerlemesi problemini PD ile çözerek, elde ettikleri çatlak yolu ve çatlak ucu hızlarını literatürde yer alan deneysel sonuçlar, GSEA ve KBM çözümleri ile karşılaştırmıştır [61]. Yapılan bu karşılaştırmada deneysel çatlak yollarına en yakın nümerik çözümün PD ile elde edildiği ortaya konmuştur. Çarpma etkisi altındaki bir cam plakada meydana gelen karmaşık çatlaklar bağ bazlı PD ile başarılı bir şekilde tahmin edilebilmektedir [62]. Polimetil metakrilat (PMMA) numunede meydana gelen dinamik çatlak hızları, malzemede meydana gelen yumuşamayı dikkate alan bilineer bir PD malzeme modeli kullanılarak başarılı bir şekilde tahmin edilmiştir [63]. Ghajari vd. (2014) heterojen ve gevrek mikroyapıya sahip malzemelerde meydana gelen dinamik kırılmaların PD analizine olanak sağlayan bir PD malzeme modeli önermiştir [64].

Literatürde yer alan PD ile çözülen dinamik kırılma problemlerinde ana malzemede meydana gelen ve düz olmayan bir yol izleyen çatlakların incelendiği görülmektedir. Ayrıca dinamik kırılmalarda oluşması muhtemel çatlak hızlarını PD ile tahmin etmeye yönelik bir çalışmanın olmadığı görülmüştür. Rosakis vd. (1999) tarafından gerçekleştirilen intersonik mod II çatlak hızlarının görüldüğü deneyler, PD yöntemi ile ilk kez bu tez kapsamında incelenmiştir [65].

### 3. PERİDİNAMİK TEORİ

Peridinamik teori, ilk kez Silling (2000) tarafından öne sürülmüş yerel olmayan bir SOM teorisidir [10]. PD herhangi bir yapıyı sürekli bir ortam olarak ele alır. Bu varsayımına göre, yapı sürekli ve sonsuz küçük parçalara bölündüğünde elde edilen parçacıklar ana yapı ile aynı özelliklere sahiptir. Sürekli ortam varsayımı, klasik SOM ve PD teorilerinin her ikisi için de geçerlidir. PD ve klasik SOM teorisi arasındaki temel farklılık, kuvvet etkileşimlerinin matematiksel formülasyonundan kaynaklanmaktadır. Klasik SOM teorisi yerel bir formülasyona sahip iken, PD yerel olmayan bir formülasyona sahiptir. Şekil 3.1a'da görüldüğü üzere klasik SOM yaklaşımında herhangi bir malzeme noktası yalnızca birinci dereceden komşuları ile etkileşime sahiptir. Şekil 3.1b'de ise PD'nin yerel olmayan etkileşimi görülmektedir. PD yaklaşımında herhangi bir malzeme noktası, birinci derecen komşularına ek olarak  $\delta$  yarıçapına sahip bir alan içerisindeki komşuları ile de etkileşim halindedir. Şekil 3.1c'de ise Moleküler Dinamik'de (MD) yaklaşımında atomlar arasındaki yerel olmayan etkileşim görülmektedir. MD, atomlar arası etkileşimin değerlendirilmesi nedeniyle bir sürekli ortamlar teorisi değildir. Fakat, belirli bir komşuluk mesafesi ( $r = \delta$ ) içerisindeki atomlar arasındaki etkileşimlerin dikkate alınması nedeniyle, yerel olmayan bir yaklaşımdır. MD, bu yönüyle PD ile benzerlik göstermektedir.

PD yerel olmayan matematiksel altyapısı sayesinde yapıda meydana gelen hasarın incelenmesi açısından SEA'ya oranla avantajlı bir yöntemdir. Fakat bir malzeme noktasının birden fazla malzeme noktası ile etkileşim içerisinde olması nedeniyle PD hareket denklemlerinin çözümü yerel teorilere oranla daha çok matematiksel işlem gerektirir. PD'nin bu dezavantajlı yönü çeşitli idealizasyonlar ile etkileşim sayısının azaltılarak iyileştirilmeye çalışılmaktadır. PD modeller uzun çubuk şeklindeki yapılar için bir boyutlu olarak, ince plakalar ise iki boyutlu olarak oluşturulabilir [74]. Ayrıca kalın plakalar için geçerli olan PD plaka modelleri ile kalın yapılar için de iki boyutlu modelleme yapmak mümkündür [40, 41]. PD modellerde yapılan bu tip idealizasyonlar ile daha verimli nümerik çözümler elde edilmektedir.



Şekil 3.1: Yerel ve yerel olmayan teoriler: a) Klasik SOM, b) PD ve c) MD.

### 3.1 Peridinamik Sürekli Ortam Modeli

Klasik SOM yaklaşımında, hareket denklemi, lineer momentumun korunması yasasına göre şu şekildedir [66]:

$$-\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) + \mathbf{b}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (3.1)$$

burada  $\mathbf{x}$  malzeme noktasına ait kütle yoğunluğu, noktasal ivme ve dış kuvvet yoğunluğu sırasıyla  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  ve  $\mathbf{b}$  sembolleri ile ifade edilmektedir. Denklem (3.1) de yer alan klasik SOM yaklaşımına ait hareket denklemi, yerel türevler içeren kısmi diferansiyel bir denklemdir. Bu denklemin matematiksel çözümü çatlak, boşluk gibi süreksizlikler içeren yapılar için mümkün değildir. PD hareket denkleminde ise yerel türevler bulunmamaktadır. PD hareket denklemi şu şekildedir [10]:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \int_H \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x})dH + \mathbf{b}(\mathbf{x},t), \quad (3.2)$$

burada  $\mathbf{u}$ , deformasyon vektörü,  $\mathbf{f}$  ise Şekil 3.2 de gösterildiği üzere,  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  malzeme noktalarının etkileşimi sonucu açığa çıkan kuvvet yoğunluğu vektörüdür. Denklem (3.1) ve Denklem (3.2)'de yer alan SOM ve PD hareket denklemleri karşılaştırıldığında, SOM hareket denklemlerinde yer alan gerilme tensörü,  $\boldsymbol{\sigma}$ 'nın yerel türevleri yerine, PD hareket denkleminde kuvvet yoğunluğu vektörü  $\mathbf{f}$ 'nin komşuluk bölgesi üzerinde integralinin kullanıldığı görülmektedir. İntegral temelli matematiksel formülasyonu sayesinde PD, çatlak oluşumu ve ilerlemesinin modellenmesi için oldukça elverişli bir teoridir.

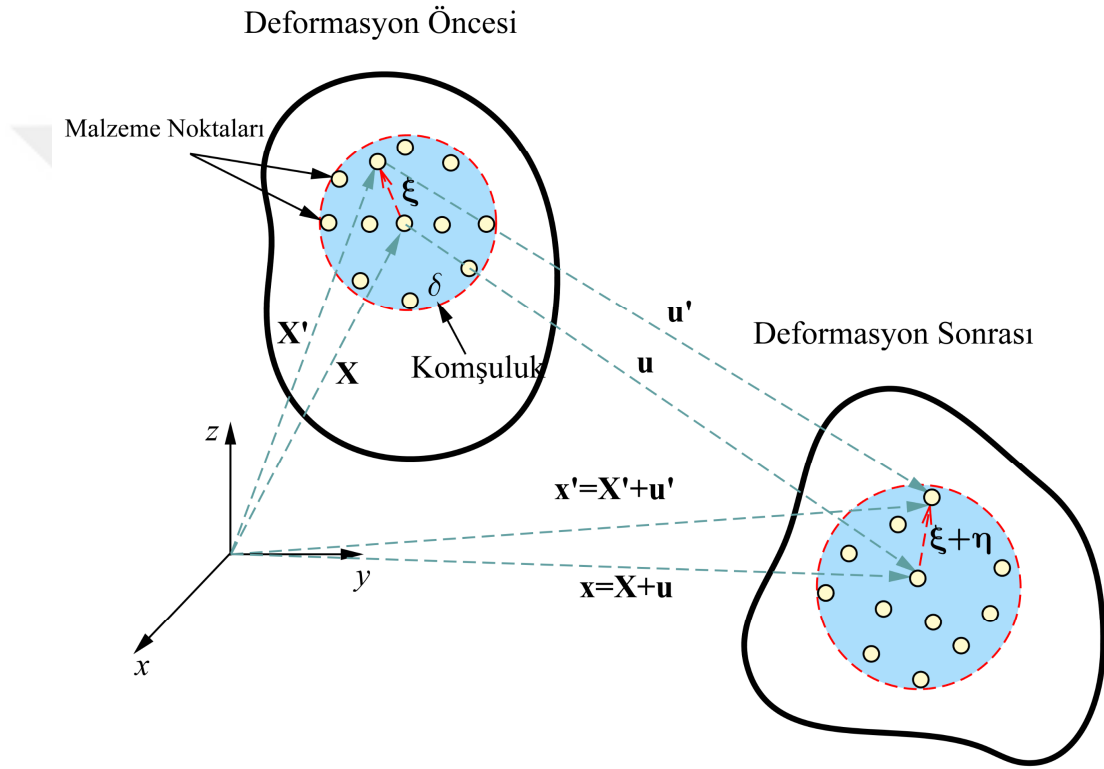
Malzeme noktasına ait komşuluk bölgesi,  $H$  içerisinde gerçekleşen etkileşimler, PD

literatüründe malzeme noktaları arasındaki bağlar olarak isimlendirilir. Şekil 3.2’de malzeme noktaları  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  için relatif konum ve deformasyon vektörleri  $\xi$  ve  $\eta$  ile gösterilmiştir ve bu vektörler şu şekilde tanımlanır:

$$\xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \quad (3.3a)$$

$$\eta = \mathbf{u}' - \mathbf{u}. \quad (3.3b)$$

Ayrıca,  $(\xi + \eta)$  vektörü de güncel relatif konum vektörünü olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 3.2: PD teoride malzeme noktalarının deformasyonu.

Bağ bazlı Peridinamik teoride, aynı komşuluk bölgesi,  $H$  içerisinde bulunan,  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  malzeme noktaları arasındaki etkileşim nedeniyle bu noktalarda sırasıyla,  $\mathbf{f}$  ve  $\mathbf{f}'$  kuvvetleri oluşmaktadır. Bu kuvvetler dikkate alındığında, Newton’un 3. yasası olarak bilinen, etki tepki yasası gereği  $\mathbf{f}$  ve  $\mathbf{f}'$  arasındaki ilişki şu şekildedir [10]:

$$\mathbf{f}'(\eta, \xi) = -\mathbf{f}(\eta, \xi). \quad (3.4)$$

Kuvvet yoğunluğu vektörü,  $\mathbf{f}$  üzerindeki bir diğer kısıt da açısız momentumun koru-

numu ilkesinden gelmektedir. Açısal momentumun korunumu şu şekilde yazılabilir:

$$(\xi + \eta) \times \mathbf{f}'(\xi, \eta) = 0. \quad (3.5)$$

Denklem (3.5)'de yer alan eşitliğin sağlanması için  $\mathbf{x}$  malzeme noktasına etkiyen kuvvet yoğunluğu,  $\mathbf{f}$  güncel relatif konum vektörüne  $(\xi + \eta)$  paralel olmalıdır [10].

Peridinamik teoride, bir malzeme noktasında oluşan kuvvet yoğunluğu,  $\mathbf{f}$ , skaler bir fonksiyonun relatif deformasyon vektörü,  $\eta$ 'ya göre türevi şeklinde elde edilebilirse, bu malzeme mikroelastik malzeme olarak adlandırılır [14]. Mikroelastik malzemeler için, kuvvet yoğunluğu vektörü,  $\mathbf{f}$  ve skaler mikropotansiyel fonksiyonu,  $\omega$  arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$\mathbf{f}(\eta, \xi) = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad (3.6)$$

burada yer alan mikropotansiyel fonksiyonu,  $\omega$  fiziksel olarak tek bir PD bağda oluşan, birim hacmin karesi başına düşen enerji miktarını ifade etmektedir ve şöyle hesaplanır:

$$\omega(\eta, \xi) = \frac{1}{2} cs^2 |\xi|. \quad (3.7)$$

Deformasyon nedeniyle,  $\mathbf{x}$  malzeme noktasında oluşan, şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu (ŞDEY),  $W$  ise şu şekilde hesaplanır:

$$W = \frac{1}{2} \int_H \omega(\eta, \xi) dV, \quad (3.8)$$

burada  $V$ , malzeme noktasına ait hacmi ifade etmektedir.

### 3.2 Peridinamik Malzeme Sabitlerinin Elde Edilmesi

Peridinamik bağlar yüklemeye maruz kaldıklarında, boylarında değişim meydana gelmektedir. Bu değişime bağlı olarak, bağlar üzerinde, şu şekilde bir bağ gerinimi,  $s$  oluşmaktadır:

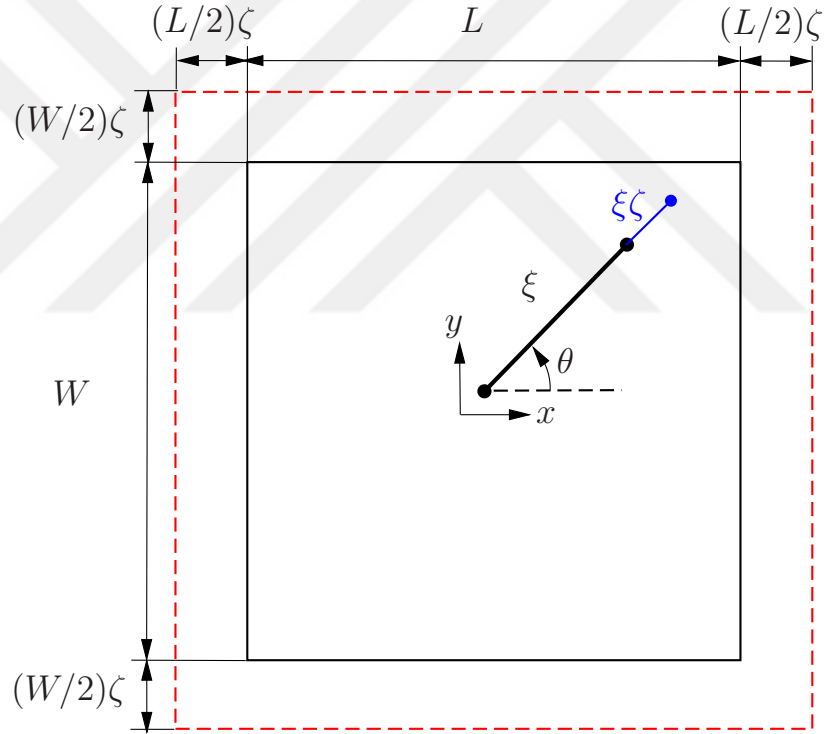
$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{|\xi|}. \quad (3.9)$$



Mikroelastik malzemeler için, PD kuvvet yoğunluğu,  $\mathbf{f}$  ve bağ gerinimi,  $s$  arasında şu şekilde bir ilişki vardır [14]:

$$\mathbf{f}(\eta, \xi) = cs \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|}, \quad (3.10)$$

burada bağ sabiti,  $c$  bağların katılık değerini ifade etmektedir. Bağ sabiti,  $c$  bağ bazlı PD ile klasik SOM yaklaşımı arasında kurulan enerji eşitlikleri ile, elastik modülü,  $E$ , sıkışmazlık modülü,  $K$  gibi bilinen malzeme özellikleri cinsinden elde edilir. Bağ bazlı PD’de, bağ sabitlerinin belirlenmesi için,  $L$  uzunluğuna,  $W$  genişliğine sahip iki boyutlu plakaya Şekil 3.3 de görülen homojen genişleme ve saf kesme yükleri uygulanmalıdır.



Şekil 3.3: Homojen genişleme etkisindeki PD plaka.

Şekil 3.3a’da yer alan homojen genişleme koşulunun elde edilmesi için, plakada yer alan tüm bağlara  $s = \zeta$  gerinimi uygulanmalıdır. Bu durumda bir bağda oluşan mikropotansiyel değeri,  $\omega_{hg}$  Denklem (3.7) kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

$$\omega_{hg} = \frac{1}{2} c \zeta^2 \xi. \quad (3.11)$$

Homojen genleşme için PD ŞDEY,  $W_{PD}^{hg}$  ise Denklem (3.8) ve Denklem (3.11) kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$W_{PD}^{hg} = \frac{1}{2}t \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2}c\zeta^2\xi \right) \xi d\xi d\theta, \quad (3.12)$$

burada  $\theta$  açısı, Şekil 3.3'de gösterildiği üzere relatif konum vektörü,  $\xi$ 'nin global  $x$  eksenini ile yaptığı açıdır. Buradan PD ŞDEY,  $W_{PD}^{hg}$  şu şekilde elde edilir:

$$W_{PD}^{hg} = \frac{c\pi t \zeta^2 \delta^3}{6}. \quad (3.13)$$

Düzlem gerilme ve düzlem gerinim kabulleri ile, Şekil 3.3a'da yer alan homojen genleşme koşulu için SOM teorisindeki ŞDEY sırasıyla Denklem (3.14) ve Denklem (3.15) de verilmiştir [67].

$$W_{SOM,dgerinim}^{hg} = \frac{E\zeta^2}{1-\nu}, \quad (3.14)$$

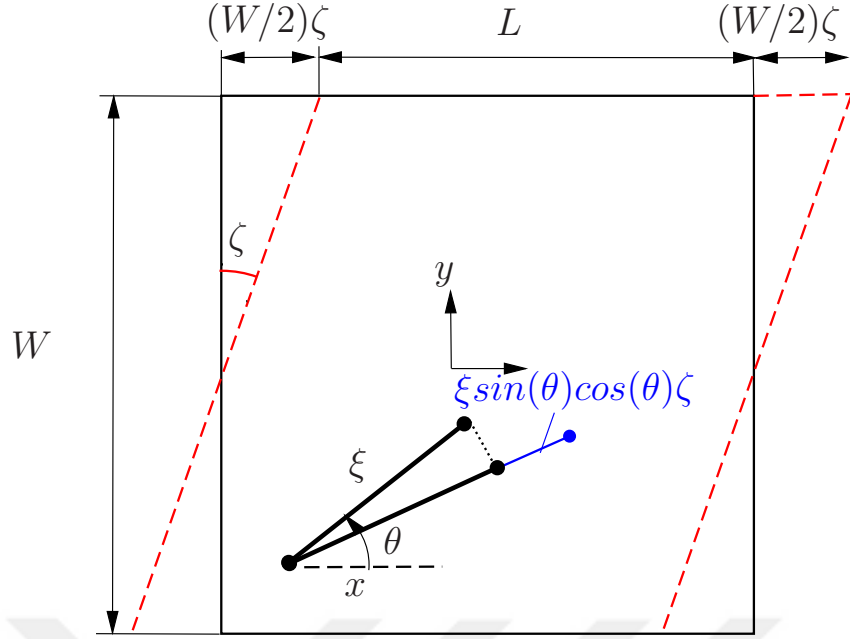
$$W_{SOM,dgerilme}^{hg} = \frac{E\zeta^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3.15)$$

burada  $E$  malzemenin elastik modülü,  $\nu$  ise Poisson oranıdır. Denklem (3.13)'de yer alan PD ŞDEY ile Denklem (3.14) ve Denklem (3.15)'de yer alan klasik SOM düzlem gerilme ve düzlem gerinim ŞDEY'nin eşitlenmesi sonucu bağ sabitleri,  $c$  ve  $c^*$  şu şekilde elde edilir:

$$c = \frac{6E}{(1-\nu)(\pi t \delta^3)}, \quad (3.16)$$

$$c^* = \frac{6E}{(1+\nu)(1-2\nu)(\pi t \delta^3)}, \quad (3.17)$$

burada  $c$  ve  $c^*$  sırasıyla düzlem gerilme ve düzlem gerinim kabullerine göre elde edilen bağ sabitleridir.



Şekil 3.4: Saf kesme etkisindeki PD plaka.

Şekil 3.4’de yer alan iki boyutlu plakaya,  $\gamma_{xy} = \zeta$  kadar bir düzlemsel kayma gerinimi uygulandığında,  $\xi$  ilk uzunluğuna sahip bir bağın, relatif deformasyon vektörü,  $\eta$  ve bu bağda oluşan gerinim,  $s$  sırasıyla şu şekilde elde edilmektedir:

$$\eta = (1 + \sin(\theta)\cos(\theta)\zeta)\xi, \quad (3.18)$$

$$s = \sin(\theta)\cos(\theta)\zeta. \quad (3.19)$$

Bu durumda, saf kesme koşulu için, mikropotansiyel,  $\omega_k$ , ve PD ŞDEY,  $W_{PD}^k$  sırasıyla Denklem (3.7) ve Denklem (3.8) kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

$$\omega_k = \frac{1}{2}c\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\zeta^2\xi, \quad (3.20)$$

$$W_{PD}^k = \frac{1}{2}t \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \left( \frac{1}{2}c\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\zeta^2\xi \right) \xi d\xi d\theta, \quad (3.21)$$

buradan kesme yüklemesi için PD ŞDEY,  $W_{PD}^k$  şu şekilde elde edilir:

$$W_{PD}^k = \frac{c\pi t \zeta^2 \delta^3}{48}. \quad (3.22)$$

Klasik SOM, yaklaşımında,  $\gamma_{xy} = \zeta$  kadar bir düzlemsel kesme gerinimine maruz ka-

lan plakada oluşan ŞDEY,  $W_{SOM}^k$  Denklem (3.23)'de yer almaktadır.

$$W_{SOM}^k = \frac{\zeta^2}{4(1+\nu)}. \quad (3.23)$$

SOM teorisinde saf kesme yüklemesi için ŞDEY düzlem gerilme ve düzlem gerinim kabulleri için eşittir. Saf kesme koşulu için Denklem (3.23)'de yer alan klasik SOM ŞDEY ile Denklem (3.22)'de yer alan PD ŞDEY eşitlendiğinde ise PD bağ sabiti,  $c$  şu şekilde elde edilir:

$$c = \frac{12E}{(\pi t \delta^3)(1+\nu)}. \quad (3.24)$$

Saf kesme yüklemesi uygulanarak elde edilen Denklem (3.24)'de yer alan bağ sabiti ile homojen genişleme yüklemesi için sırasıyla Denklem (3.16) ve Denklem (3.17)'de yer alan bağ sabitleri eşit olmalıdır. Bu durum Gerstle vd. (2005) tarafından ortaya atıldığı üzere Poisson oranının düzlem gerilme kabulü için  $\nu = 1/3$ , düzlem gerinim kabulü için ise  $1/4$  olarak sabit olmasına neden olmaktadır [67].

### 3.2.1 PD Hasar Modeli

Malzemenin hasar davranışı incelemek için Denklem (3.10)'da yer alan kuvvet yoğunluğu vektörüne, zamana bağlı hasar fonksiyonu,  $\mu(t, \xi)$  eklenerek şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{f}(\eta, \xi) = cs\mu(t, \xi) \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|}, \quad (3.25)$$

Silling ve Askari (2005) tarafından öne sürülen, Prototip Mikroelastik Gevrek PMG (Prototype Microelastic Brittle) hasar modeline göre bağlardaki uzama belirli bir değeri geçtiğinde bağlar tamamen kırılarak, yük aktarımı sonlanmaktadır [14]. Bağlardaki uzama miktarı, kritik gerinim değeri,  $s_c$  ile sınırlandırılmıştır. PMG malzeme modeline göre, hasar fonksiyonu,  $\mu(t, \xi)$  şu şekilde tanımlanmaktadır:

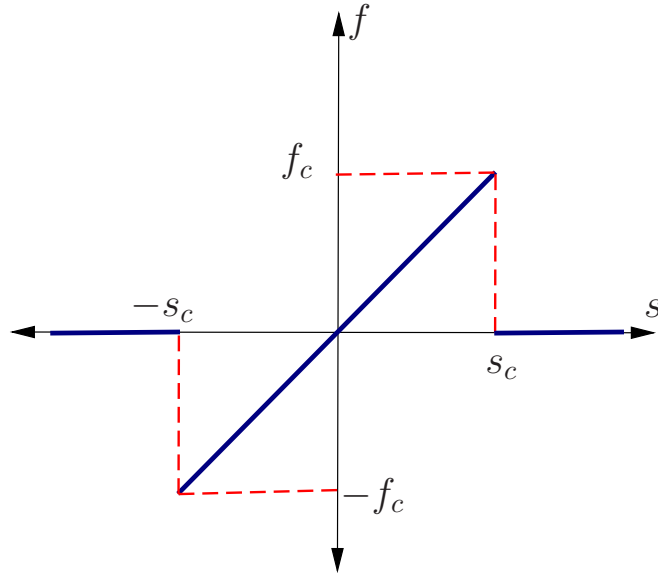
$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1, & s(t, \xi) < s_c \\ 0, & s(t, \xi) \geq s_c \end{cases} \quad (3.26)$$

Denklem (3.26)'da yer alan hasar modeli incelendiğinde, PMG hasar modelinde bağların yalnızca çekme yüklemesi altındaki hasarının değerlendirildiği görülmektedir. Fa-

kat kesme yüklemesi etkisinde oluşan kırılma yüzeylerinin antisimetrik deformasyonu nedeniyle bağların bir kısmı çekme yüküne maruz kalırken, bir kısmı da basma yüküne maruz kalmaktadır [68, 69]. Bu tezde yapılan çalışmada, Denklem (3.26)'da yer alan, Silling ve Askari (2005) tarafından öne sürülen hasar modeli, negatif kritik gerinim değeri,  $-s_c$  eklenerek şu şekilde modifiye edilmiştir:

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 0, & s(t, \xi) \leq -s_c \\ 1, & -s_c < s(t, \xi) < s_c \\ 0, & s(t, \xi) \geq s_c \end{cases} \quad (3.27)$$

Denklem (3.27)'de yer alan hasar modeli, Şekil 3.5'de şematize edilmiştir. Bu modele göre, iki malzeme noktası arasında yer alan bir bağın gerinim değeri,  $s$ , kritik çekme geriniminden fazla ( $s > s_c$ ), ya da kritik basma geriniminden az ( $s < -s_c$ ) ise bu malzeme noktalarındaki etkileşim kalıcı olarak sona ermektedir. Silling ve Askari (2005) tarafından öne sürülen PMG modeli üzerinde, özellikle basma ve kesme yükleri altındaki yüklemeler için benzer modifikasyonlar Gerstle vd. (2007), Du vd. (2020) tarafından yapılan çalışmalarda da yer almaktadır [70, 71].



Şekil 3.5: Gevrek malzemeler için PD hasar modeli.

Bağlardaki gerinim kritik değer olan  $s_c$  ye ulaştığı durumdaki mikropotansiyel, kritik



$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_H \boldsymbol{\mu}(t, \xi) dV}{\int_H dV}. \quad (3.31)$$

### 3.3 Adaptif Dinamik Rölaksasyon Metodu

Dinamik Rölaksasyon (DR) yöntemi ilk kez Day. A.S (1965) tarafından ortaya atılmış, doğrusal olmayan yapısal problemlerin çözümü için kullanılan nümerik bir metottur [72]. Bu yöntem ile, statik durumu temsil eden sabit duruma yakınsayan iteratif çözümler yapay bir sönümleme terimi kullanılarak elde edilir. Adaptif Dinamik Rölaksasyon (ADR) metodu ise her bir iterasyonda yapay sönümleme teriminin güncellenmesi ile yapılan DR çözümüdür [73]. Kılıç ve Madenci, ADR metodunu PD ye uyarlayarak PD hareket denkleminin çözümü için kullanmışlardır [15].

Nümerik çözüm yapabilmek için, Denklem (3.2)'de yer alan PD hareket denklemi, malzeme noktaları üzerinde, şu şekilde ayrıklaştırılmış olarak yazılmalıdır:

$$\rho(\mathbf{x}_i) \ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_i, \mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t), \quad (3.32)$$

buradaki toplamlarda,  $N$  komşuluk bölgesi,  $H$  içerisinde yer alan malzeme noktalarının sayısını,  $N_e$  ise  $e$ . malzeme noktasının etkileşim içerisinde olduğu malzeme noktası sayısını ifade etmektedir. ADR metodu ile Denklem (3.32)'de yer alan PD hareket denkleminin çözümü için bu denkleme yapay sönümleme terimi  $c_n$  şu şekilde eklenir [15]:

$$\Lambda \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) + c_n \Lambda \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}', \mathbf{X}, \mathbf{X}'), \quad (3.33)$$

burada  $\Lambda$  ve  $c_n$  sırasıyla yapay diagonal kütle yoğunluğu matrisi, ve sönümleme katsayısıdır. Bu değerler, fiziksel problem açısından doğrudan bir anlam ifade etmeyen yapay değerlerdir [73]. Denklem (3.33)'de yer alan,  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{U}$  vektörleri ise, komşuluk içerisinde yer alan malzeme noktalarına ait pozisyon ve deformasyon değerlerinden oluşur ve şu şekilde yazılır:

$$\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, \dots, x_N], \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{U}^T = [u(x_1, t), u(x_2, t), \dots, u(x_N, t)]. \quad (3.34b)$$

Kütle yoğunluğu matrisi  $\Lambda$ 'nın elemanları,  $\lambda_{ii}$  Greschgorin teoremine göre aşağıdaki

şartı sağlamalıdır [73]:

$$\lambda_{ii} \geq \frac{1}{4} \Delta t \left| \sum_j K_{ij} \right|, \quad (3.35)$$

burada  $\Delta t$  zaman adımıdır ve  $\Delta t = 1s$  olarak alınmıştır.  $K_{ij}$  ise incelenmekte olan denklem sistemine ait katılık matrisidir. Denklem (3.33)'de yer alan sönümleme katsayısı ise her bir iterasyonda hesaplanan bir katsayıdır.  $n$ . iterasyon için sönümleme katsayısı şu şekilde hesaplanır:

$$c_n = 2 \sqrt{\frac{(\mathbf{U}^n)^T \mathbf{K}^n \mathbf{U}^n}{(\mathbf{U}^n)^T (\mathbf{U}^n)}}, \quad (3.36)$$

burada  $\mathbf{K}^n$  diagonal lokal katılık matrisidir ve elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$K_{ii} = - \left( \frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{\lambda_{ii} (\Delta t \dot{u}^{\frac{n-1}{2}})} \right). \quad (3.37)$$

Denklem (3.32)'de yer alan  $\mathbf{F}$  vektörü ise şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_i, \mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t). \quad (3.38)$$

ADR yönteminde, ilk zaman adımında  $\mathbf{U} \neq 0$  olacak şekilde, bir ilk değer kabulü ile iterasyona başlanır [74]. İlk zaman adımı için  $\dot{\mathbf{U}}^{1/2}$  değeri ise şu şekilde yazılır:

$$\dot{\mathbf{U}}^{1/2} = \frac{\Delta t \Lambda^{-1} \mathbf{F}^0}{2}. \quad (3.39)$$

Merkezi farklar nümerik integrasyon yöntemi kullanılarak,  $n$ . zaman adımı için deforasyonlar ve hızlar Denklem (3.40) ve Denklem (3.41) kullanılarak hesaplanır.

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} = \frac{(2 - c\Delta t) \dot{\mathbf{U}}^{(n-1/2)} + 2\Delta t \Lambda^{-1} \mathbf{F}^n}{(2 + c\Delta t)}. \quad (3.40)$$

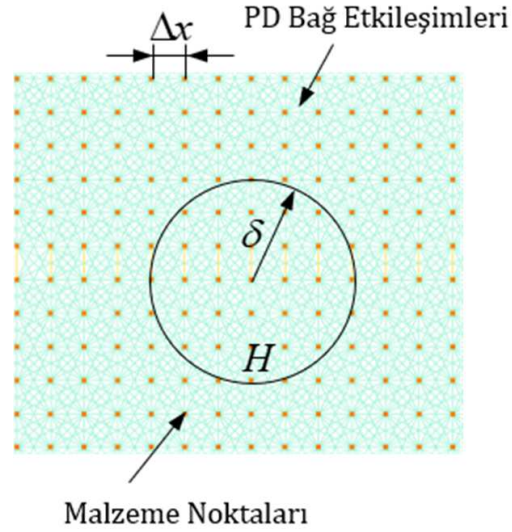
$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2}. \quad (3.41)$$

### 3.4 Peridinamik Teorinin ABAQUS'a Entegrasyonu

PD teoride, sürekli bir cisim, PD bağları aracılığıyla birbiri ile etkileşim halinde olan malzeme (kütle) noktaları kullanılarak modellenir. PD "ağ içermeyen" yöntemlerden biri olarak kabul edilse de, Şekil 3.7'de gösterildiği üzere, bağ etkileşimleri için lineer yaylar veya kiriş elemanlar, malzeme noktaları için ise noktasal kütle elemanları



kullanılarak ticari SEA programlarına entegre edilebilir [20].



Şekil 3.7: PD teorisinin SEA entegrasyonu.

PD kuvvet yoğunluğu  $f$ 'nin birimi, malzeme noktasının hacminin karesi başına düşen kuvvettir. Buradan, bir PD bağı etkileyen kuvvet,  $F_{PD}$  Denklem (3.42) ile hesaplanır [20]:

$$F_{PD} = fV^2 = csV^2, \quad (3.42)$$

burada  $V$  malzeme noktasına ait hacimdir ve şöyle hesaplanır:

$$V = (\Delta x)^2 t, \quad (3.43)$$

burada  $\Delta x$ , PD ağ örgüsü boyutudur,  $t$  ise kabuk kalınlığıdır. SEA ile yapılan modellemede ise,  $\Delta L$  kadar uzamaya maruz kalan  $L$  uzunluğundaki kiriş eleman üzerinde meydana gelen kuvvet,  $F_k$  kirişin elastik modülü,  $E_k$  ve kesit alanı  $A_k$  cinsinden Denklem (3.44)'e göre hesaplanır.

$$F_k = \frac{E_k A_k}{L} \Delta L. \quad (3.44)$$

Denklem (3.44)'de yer alan  $\Delta L/L$  ifadesi kiriş elemanın maruz kaldığı gerinime eşittir. Buradan, Denklem (3.42) ve (3.44)'de yer alan kuvvetler eşitlendiğinde, Macek ve Silling (2007) tarafından öne sürülen kiriş elemanın elastik modülü,  $E_k$  ve kesit alanı,

$A_k$ 'ya ilişkin denklemler şu şekilde elde edilir [20]:

$$E_k = c\Delta x^4, \quad (3.45a)$$

$$A_k = t^2. \quad (3.45b)$$

PD modelin kütle dağılımı ise malzeme noktalarında tanımlanan noktasal kütleler ile elde edilir. Homojen kalınlığa ve malzeme noktası dağılımına sahip modeller için, noktasal kütle,  $m$  değeri Denklem (3.46)'ya göre hesaplanır.

$$m = \rho V. \quad (3.46)$$

Bu tezde, PD teorisinin ABAQUS SEA programına entegre edilmesiyle çözülen problemlerde, Macek ve Silling tarafından öne sürüldüğü gibi, T3D2 isimli kiriş elemanlar ve noktasal kütle elemanları kullanılmıştır. PD bağları temsil eden kiriş elemanlar, bir MATLAB kodu aracılığıyla oluşturulmuştur.

## 4. ORTOTROPİK MALZEMELER İÇİN PD MİNDLİN PLAKASI

Bölüm 3’de belirtildiği üzere PD, yerel olmayan formülasyonu sayesinde hasar oluşumunun incelenmesi için avantajlı bir yöntemdir. Fakat PD malzeme noktaları, kendi komşuluğundaki tüm noktalar ile etkileşim halinde olduğu için, nümerik olarak çözülmesi gereken etkileşim sayısı, klasik SOM gibi yerel teorilere oranla fazladır. Bu nedenle iki boyutlu PD modeller literatürde yaygın olarak tercih edilmektedir [35–37]. O’Grady ve Foster (2014), Taylor ve Steigmann (2015), Taştan vd. (2016) tarafından yapılan çalışmalarda PD plaka modelleri Kirchoff plakasının temel varsayımları kullanılarak oluşturulmuştur. Kirchoff plakası temelinde, deformasyon öncesi plakanın ortayüzeyine dik olan yüzey normallerinin, deformasyon sonrası da yüzeye dik kaldığı varsayımı yer almaktadır. Bu varsayım kalın plakalardaki deformasyonun hatalı tahminine neden olmaktadır. Diyaroğlu vd. (2015) tarafından kalın izotropik plakaların eğilme davranışını tahmin etmeye yönelik bir PD Mindlin plakası modeli öne sürülmüştür [40]. Bu kısımda ise Diyaroğlu vd. (2015) tarafından öne sürülen PD Mindlin plakası modeli, ortotropik yapıların eğilme davranışını incelemeye yönelik olarak geliştirilmiştir [41].

### 4.1 Mindlin Plakası Kinematığı

Bu bölümde Mindlin plakası kinematığından bahsedilerek temel tanımlamalara yer verilmiştir. Eğilme yüküne maruz kalmış bir Mindlin plakasına ait geometri Şekil 4.1’de verilmiştir. Burada plaka üzerinde yer alan herhangi bir noktanın  $x$  ve  $y$  eksenlerine göre rotasyonu sırasıyla  $\phi_{x(k)}$ ,  $\phi_{y(k)}$  olarak belirtilmiştir. Bu değerler şu şekilde hesaplanırlar:

$$\phi_{x(k)} = v_{x(k)} - \varphi_{x(k)}, \quad (4.1a)$$

$$\phi_{y(k)} = v_{y(k)} - \varphi_{y(k)}. \quad (4.1b)$$

Şekil 4.1’de gösterildiği üzere  $v_{x(k)}$  ve  $v_{y(k)}$   $x$  ve  $y$  eksenlerindeki eğim,  $\varphi_{x(k)}$  ve  $\varphi_{y(k)}$  ise  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki enine kesme açısıdır.  $v_{x(k)}$  ve  $v_{y(k)}$  sırasıyla şu şekilde hesap-

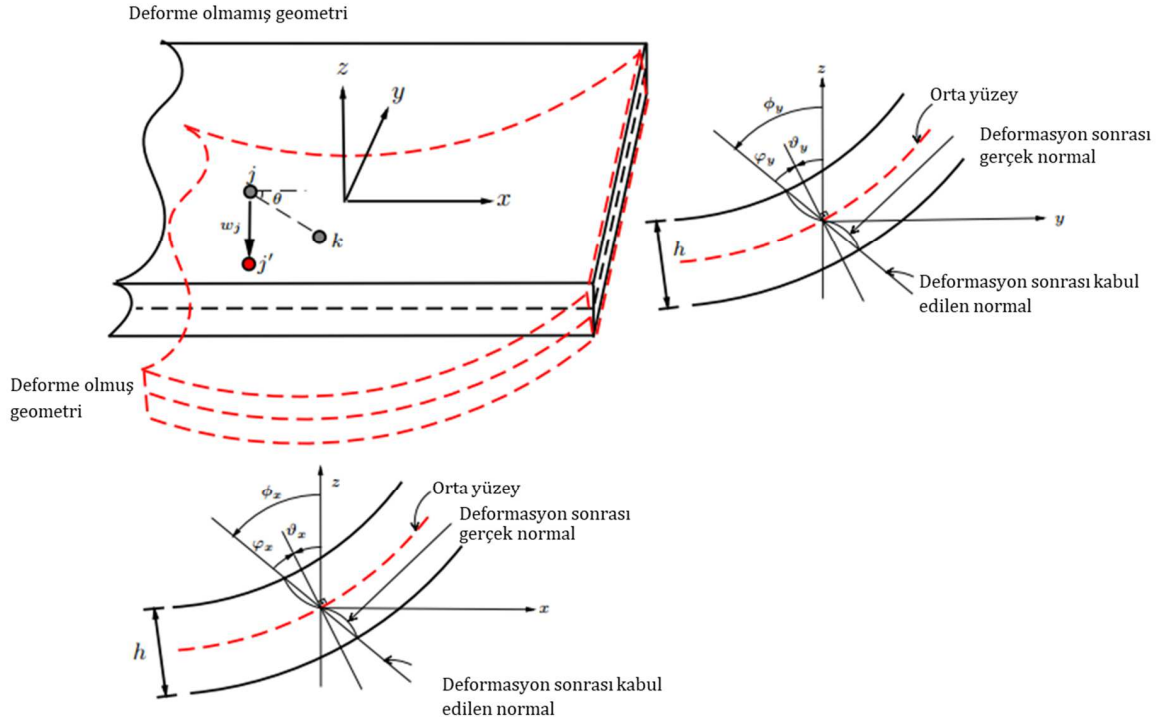
lanır:

$$v_{x(k)} = -\frac{\partial w(k)}{\partial x}, \quad (4.2a)$$

$$v_{y(k)} = -\frac{\partial w(k)}{\partial y}, \quad (4.2b)$$

burada  $w(k)$ ,  $k$  noktasının düzlem dışı deformasyonunu temsil etmektedir. Keyfi bir eksen,  $\mathbf{n}$ 'e göre  $k$  malzeme noktasının rotasyonu,  $\phi(k)$  ise şu şekilde hesaplanır:

$$\phi(k) = \phi_{x(k)} \cos \theta(k) + \phi_{y(k)} \sin \theta(k). \quad (4.3)$$



Şekil 4.1: Mindlin plakası deformasyonu.

Plakanın eğilme yükü maruz kalması sonucu oluşan eğrilikler,  $\kappa_{x(k)}$ ,  $\kappa_{y(k)}$  ve  $\kappa_{xy(k)}$  ise rotasyonların karşılık geldiği eksenlere göre türevi alınarak şu şekilde bulunabilir:

$$\kappa_{x(k)} = \frac{1}{r_{x(k)}} = -\frac{\partial \phi_{x(k)}}{\partial x(k)} = -\frac{\partial^2 w(k)}{\partial x(k)^2}, \quad (4.4a)$$

$$\kappa_{y(k)} = \frac{1}{r_{y(k)}} = -\frac{\partial \phi_{y(k)}}{\partial y(k)} = -\frac{\partial^2 w(k)}{\partial y(k)^2}, \quad (4.4b)$$

$$\kappa_{xy(k)} = \frac{1}{r_{xy(k)}} = -\frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial x_{(k)} \partial y_{(k)}}. \quad (4.4c)$$

burada  $r_{x(k)}$ ,  $r_{y(k)}$   $k$  malzeme noktasına ait  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki eğrilik yarıçapıdır. Denklem (4.4c)'de yer alan  $r_{xy(k)}$  ise plakanın bükülme eğrilik yarıçapıdır. Keyfi bir yöndeki eğrilik,  $\kappa_{(k)}$  ise şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \kappa_{(k)} = \frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial w_{(k)}}{\partial n} \right) &= \kappa_{x(k)} \cos^2 \theta + 2\kappa_{xy(k)} \sin \theta \cos \theta \\ &+ \kappa_{y(k)} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Denklem (4.5)'de yer alan eğrilik eşitliği kullanılarak, Şekil 4.1'da belirtilen  $j$  ve  $k$  noktaları arasındaki eğrilik,  $\kappa_{(k)(j)}$  şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \kappa_{(k)(j)} = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial w_{(k)(j)}}{\partial n} \right) &= \kappa_{x(k)(j)} \cos^2 \theta + 2\kappa_{xy(k)(j)} \sin \theta \cos \theta \\ &+ \kappa_{y(k)(j)} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denklem (4.6)'de yer alan eğrilik alanının bükülme bileşeni,  $\kappa_{xy(k)}$ 'nin eğilme yükü altında sıfır olduğu varsayımı yapılmıştır. Bu varsayım ile Denklem (4.6) şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\kappa_{(k)(j)} = \kappa_{x(k)(j)} \cos^2 \theta + \kappa_{y(k)(j)} \sin^2 \theta. \quad (4.7)$$

Denklem (4.4a) ve Denklem (4.4b)'de yer alan eğrilikler,  $\kappa_x$  ve  $\kappa_y$ ,  $j$  ve  $k$  malzeme noktaları arasında nümerik olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\kappa_{x(k)(j)} = \frac{\phi_{x(j)} - \phi_{x(k)}}{x_{(j)} - x_{(k)}}, \quad (4.8)$$

$$\kappa_{y(k)(j)} = \frac{\phi_{y(j)} - \phi_{y(k)}}{y_{(j)} - y_{(k)}}, \quad (4.9)$$

burada  $x_j$ ,  $x_k$ ,  $y_j$  ve  $y_k$ ,  $j$  ve  $k$  malzeme noktalarına ait  $x$  ve  $y$  koordinatlarıdır. Denklem (4.8) ve Denklem (4.9), Denklem (4.7)'de yerine yazıldığında,  $k$  malzeme noktasına ait eğrilik,  $\kappa_{(k)(j)}$  şu şekilde elde edilir:

$$\kappa_{(k)(j)} = \left( \frac{\phi_{x(j)} - \phi_{x(k)}}{\xi_x} \right) \cos^2 \theta + \left( \frac{\phi_{y(j)} - \phi_{y(k)}}{\xi_y} \right) \sin^2 \theta. \quad (4.10)$$

Denklem (4.10)'de yer alan  $\xi_x$  ve  $\xi_y$  ise sırasıyla Denklem (4.11) ve Denklem (4.12)'de tanımlanmıştır.

$$\xi_x = x_{(j)} - x_{(k)} = \xi_{(k)(j)} \cos \theta, \quad (4.11)$$

$$\xi_y = y_{(j)} - y_{(k)} = \xi_{(k)(j)} \sin \theta, \quad (4.12)$$

burada  $\xi_{(k)(j)}$ ,  $j$  ve  $k$  noktalarındaki bağın relatif konum vektörünü temsil etmektedir. Denklem (4.11) ve Denklem (4.12), Denklem (4.10)'de yerine konulduğunda  $\kappa_{(k)(j)}$  şu şekilde yazılabilir:

$$\kappa_{(k)(j)} = \left( \frac{\phi_{x(j)} - \phi_{x(k)}}{\xi_{(k)(j)}} \right) \cos \theta + \left( \frac{\phi_{y(j)} - \phi_{y(k)}}{\xi_{(k)(j)}} \right) \sin \theta. \quad (4.13)$$

Şekil 4.1'da belirtildiği üzere,  $j$  ve  $k$  malzeme noktalarına ait enine kesme açıları,  $\varphi_{(j)}$  ve  $\varphi_{(k)}$  sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$\varphi_{(j)} = \vartheta_{(k)(j)} - \phi_{(j)}, \quad (4.14)$$

$$\varphi_{(k)} = \vartheta_{(k)(j)} - \phi_{(k)}, \quad (4.15)$$

burada  $\vartheta_{(k)(j)}$ ,  $j$  ve  $k$  malzeme noktaları arasındaki eğimi,  $\phi_{(j)}$  ve  $\phi_{(k)}$  ise sırasıyla  $j$  ve  $k$  noktalarındaki rotasyonu ifade etmektedir. Malzeme noktaları arasındaki eğim,  $\vartheta_{(k)(j)}$  şu şekilde hesaplanır:

$$\vartheta_{(k)(j)} = \frac{w_{(j)} - w_{(k)}}{\xi_{(k)(j)}}. \quad (4.16)$$

$j$  ve  $k$  malzeme noktaları arasındaki enine kesme açısı, Denklem (4.14) ve Denklem (4.15)'de yer alan  $j$  ve  $k$  malzeme noktalarındaki enine kesme açıları  $\varphi_{(j)}$  ve  $\varphi_{(k)}$ 'nin ortalaması alınarak Denklem (4.17)'ye göre hesaplanır.

$$\varphi_{(k)(j)} = \frac{w_{(j)} - w_{(k)}}{\xi_{(k)(j)}} - \frac{(\phi_{x(j)} + \phi_{x(k)}) \cos \theta + (\phi_{y(j)} + \phi_{y(k)}) \sin \theta}{2}. \quad (4.17)$$

## 4.2 Ortotropik Mindlin Plakası Sürekli Ortamlar Mekanği Formülasyonu

Klasik SOM teorisinde, Mindlin plakası için genelleştirilmiş hareket denklemleri şu şekilde yazılır [75]:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Ghk^2 \varepsilon_{xz} - \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_x = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Ghk^2 \varepsilon_{yz} - \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_y = 0, \quad (4.19)$$

$$-k^2 Gh \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - k^2 Gh \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} + \rho h \ddot{w} = q_z. \quad (4.20)$$

burada  $M_{ij}$ ,  $\phi_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) plakaya uygulanan momentleri,  $x$  ve  $y$  ise plaka düzlemindeki koordinat takımını ifade etmektedir. Denklem (4.18-4.20)'de yer alan  $k^2$ ,  $h$ ,  $G$  ve  $q_z$  ise sırasıyla kesme düzeltme faktörü, plaka kalınlığı, kesme modülü ve düzlem dışı uygulanan kesme yükünü ifade etmektedir. Eğilme yüküne maruz kalmış Mindlin plakasında, gerinim-deplasman ilişkileri şu şekilde yazılır:

$$\varepsilon_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.22)$$

Ortotropik Mindlin plakası için, eğilme momenti-eğrilik ilişkileri Denklem (4.23-4.25)'de yer almaktadır [75].

$$M_{xx} = D_{11} \kappa_{xx} + D_{12} \kappa_{yy}, \quad (4.23)$$

$$M_{yy} = D_{12} \kappa_{xx} + D_{22} \kappa_{yy}, \quad (4.24)$$

$$M_{xy} = D_{33} \kappa_{xy}, \quad (4.25)$$

burada,  $D_{ij}$  eğilme katılık matrisinin bileşenleridir. Denklem (4.23-4.25)'de yer alan eğrilikler,  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$  ve  $\kappa_{xy}$ , rotasyonlar cinsinden sırasıyla Denklem (4.26-4.28)'de tanımlanmıştır.

$$\kappa_{xx} = \phi_{x,x}, \quad (4.26)$$

$$\kappa_{yy} = \phi_{y,y}, \quad (4.27)$$

$$\kappa_{xy} = \phi_{x,y} + \phi_{y,x}. \quad (4.28)$$

Denklem (4.23-4.28)'de yer alan eşitlikler kullanılarak, Denklem (4.18-4.20)'de yer alan hareket denklemleri, ortotropik plakalar için şu şekilde elde edilir:

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_x = D_{11} \phi_{x,xx} + (D_{12} + D_{33}) \phi_{y,xy} + D_{33} \phi_{x,yy} - Ghk^2(\phi_x - w_{,x}), \quad (4.29)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_y = D_{22} \phi_{y,yy} + (D_{12} + D_{33}) \phi_{x,xy} + D_{33} \phi_{y,xx} - Ghk^2(\phi_y - w_{,y}), \quad (4.30)$$

$$\rho h \ddot{w}_{(k)} - hk^2 G(w_{,xx} + w_{,yy} - \phi_{x,x} - \phi_{y,y}) = q_z, \quad (4.31)$$

burada eğilme katılığı matrisinin elemanları,  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  ve  $D_{33}$  sırasıyla Denklem (4.32-4.35)'de tanımlanmıştır.

$$D_{11} = \frac{E_1}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (4.32)$$

$$D_{22} = \frac{E_2}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (4.33)$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (4.34)$$

$$D_{33} = \frac{G_{12}}{12}. \quad (4.35)$$

### 4.3 Ortotropik Mindlin Plakasına ait Peridinamik Formülasyon

Bu bölümde, Bölüm 4.2'de verilen ortotropik Mindlin plakasına ait hareket denklemlerinin bağ bazlı PD formülasyonu türetilmiştir. Sonrasında ise bağ sabitlerinin çıkarımı ve hasar formülasyonuna yer verilmiştir.

#### 4.3.1 Peridinamik Hareket Denklemleri

Eğilme yüküne maruz kalmış ortotropik Mindlin plakası için PD hareket denklemleri, sanal iş prensibi uygulanarak elde edilir. Sanal iş prensibinin uygulanması için, deforme olmuş plakada depolanan kinetik enerjinin ( $T$ ) ve potansiyel enerjinin ( $U$ )



hesaplanması gerekir. Eğilme yükü etkisindeki plaka için,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  eksenlerinde oluşan sanal deplasmanlar,  $u$ ,  $v$  ve  $w$  nedeniyle oluşan kinetik enerji şu şekilde hesaplanır:

$$T = \frac{1}{2}\rho \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \dot{u}_{(k)}^2 + \dot{v}_{(k)}^2 + \dot{w}_{(k)}^2 \right] V_{(k)}, \quad (4.36)$$

burada  $V_{(k)}$ ,  $k$  malzeme noktası için sonsuz küçüklükteki hacmi,  $\rho$  ise kütle yoğunluğunu temsil etmektedir. Denklem (4.36)'de yer alan,  $k$  malzeme noktasına ait  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki deformasyon bileşenleri  $u_{(k)}$  ve  $v_{(k)}$ , rotasyon bileşenleri  $\phi_{x(k)}$  ve  $\phi_{y(k)}$  cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$u_{(k)} = -z\phi_{x(k)}, \quad (4.37)$$

$$v_{(k)} = -z\phi_{y(k)}, \quad (4.38)$$

burada  $z$ ,  $k$  malzeme noktasının  $z$  eksenindeki bileşenidir. Denklem (4.37) ve Denklem (4.38) kullanılarak Denklem (4.36) yeniden yazıldığında toplam kinetik enerji şu şekilde elde edilir:

$$T = \frac{1}{2}h\rho \sum_{k=1}^{\infty} \left( \dot{w}_{(k)}^2 + \frac{h^2}{12}\dot{\phi}_{x(k)}^2 + \frac{h^2}{12}\dot{\phi}_{y(k)}^2 \right) A_{(k)}, \quad (4.39)$$

burada  $A_{(k)}$ ,  $k$  malzeme noktasının alanını,  $h$  ise plaka kalınlığını temsil etmektedir. Sanal deformasyonlar etkisinde oluşan potansiyel enerji,  $U$  yapıda depolanan ŞDEY'ye eşittir. ŞDEY'nin hesaplanması için, Denklem (3.8)'de belirtildiği üzere, mikropotansiyel fonksiyonu,  $\omega$ 'nın hesaplanması gerekmektedir. Bu çalışmada saf eğilme momenti ve kesme yükü etkisi altındaki deformasyonlar değerlendirilmiştir. Bu nedenle, saf eğilme ve saf kesme yüklemeleri için sırasıyla  $\tilde{\omega}(\kappa)$  ve  $\hat{\omega}(\varphi)$  mikropotansiyelleri tanımlanmıştır. Eğilme yükü kaynaklı mikropotansiyel,  $\tilde{\omega}(\kappa)$  ile eğilme momenti yoğunluğu,  $\tilde{f}(\kappa)$  arasında şöyle bir ilişki vardır:

$$\tilde{f}_{(k)(j)}(\kappa_{(k)(j)}) = \frac{1}{\xi_{(j)(k)}} \frac{\partial \tilde{\omega}_{(k)(j)}(\kappa_{(k)(j)})}{\partial (\kappa_{(k)(j)})}, \quad (4.40)$$

Benzer şekilde, düzlem dışı kesme yükü,  $\hat{f}(\varphi)$  ile mikropotansiyel, bu yükleme nedeniyle oluşan mikropotansiyel,  $\hat{\omega}(\varphi)$  arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$\hat{f}_{(k)(j)}(\varphi_{(k)(j)}) = \frac{1}{\xi_{(j)(k)}} \frac{\partial \hat{\omega}_{(k)(j)}(\varphi_{(k)(j)})}{\partial (\varphi_{(k)(j)})}. \quad (4.41)$$

Silling (2000) tarafından ortaya atılan Denklem (3.10)'da yer alan PD kuvvet yoğunluğu tanımına benzer şekilde,  $k$  malzeme noktasına ait eğilme momenti yoğunluğu,  $\tilde{f}_{(j)(k)}(\kappa)$  ve kesme kuvveti yoğunluğu,  $\hat{f}_{(j)(k)}$  sırasıyla Denklem (4.42) ve Denklem (4.43)'a göre hesaplanır.

$$\tilde{f}_{(j)(k)}(\kappa) = c_b(\theta) \kappa_{(j)(k)}, \quad (4.42)$$

$$\hat{f}_{(j)(k)}(\varphi) = c_s \varphi_{(j)(k)}. \quad (4.43)$$

burada  $c_b(\theta)$  ve  $c_s$  PD malzeme sabitleridir. Sırasıyla, Denklem (4.42 - 4.43), Denklem (4.40 - 4.41)'de yerine yazıldığında ve eğrilik ve kesme alanlarına göre entegre edildiğinde, mikropotansiyeller  $\tilde{\omega}(\kappa)$  ve  $\hat{\omega}(\varphi)$  şu şekilde elde edilir:

$$\tilde{\omega}_{(k)(j)}(\kappa_{(k)(j)}) = \frac{1}{2} c_b(\theta) \kappa_{(k)(j)}^2 \xi_{(j)(k)}, \quad (4.44)$$

$$\hat{\omega}_{(k)(j)}(\varphi_{(k)(j)}) = \frac{1}{2} c_s(\theta) \varphi_{(k)(j)}^2 \xi_{(j)(k)}. \quad (4.45)$$

Toplam potansiyel enerji,  $U$ , Denklem (4.44) ve Denklem (4.45)'de yer alan mikropotansiyellerin toplamı şeklinde, Denklem (4.46)'de verilmiştir.

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \tilde{\omega}_{(i)(j)}(\kappa_{(i)(j)}) + \tilde{\omega}_{(j)(i)}(\kappa_{(j)(i)}) \right] V_{(j)} - \tilde{b}_{(i)} \phi_{(i)} \right\} V_{(i)} \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \hat{\omega}_{(i)(j)}(\varphi_{(i)(j)}) + \hat{\omega}_{(j)(i)}(\varphi_{(j)(i)}) \right] V_{(j)} - \hat{b}_{(i)} w_{(i)} \right\} V_{(i)}, \quad (4.46)$$

burada  $\hat{b}_i$  ve  $\tilde{b}_i$  sırasıyla gövde kuvvet yoğunluğu ve moment yoğunluğunu temsil etmektedir.

Toplam kinetik enerji,  $T$  Denklem (4.39)'da, toplam potansiyel enerji,  $U$  ise Denklem (4.46)'da elde edilmiştir. Sanal iş prensibine göre, Lagranj,  $L$  şu şekilde yazılır:

$$L = T - U. \quad (4.47)$$

Kinetik enerji ve potansiyel enerji ifadeleri incelendiğinde, bağımsız değişkenlerin  $w_k$ ,  $w_k$ ,  $\dot{\phi}_{xk}$ ,  $\dot{\phi}_{yk}$ ,  $\phi_{xk}$  ve  $\phi_{yk}$  olduğu görülmektedir. Bu nedenle Euler-Lagranj denklemleri şu şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}^{(k)}} - \frac{\partial L}{\partial w^{(k)}} = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{x(k)}} - \frac{\partial L}{\partial \phi_{x(k)}} = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{y(k)}} - \frac{\partial L}{\partial \phi_{y(k)}} = 0. \quad (4.50)$$

Denklem (4.47)'de yer alan Lagranj tanımı kullanılarak, Denklem (4.48-4.50)'de yer alan türevler alındığında, ortotropik Mindlin plakası için PD hareket denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$\rho h \ddot{w}^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \xi_{jk} \hat{f}^{(k)(j)} \frac{\partial \varphi^{(k)(j)}}{\partial (w^{(k)})} + \xi_{jk} \tilde{f}^{(j)(k)} \frac{\partial \varphi^{(j)(k)}}{\partial (w^{(k)})} \right] V_{(j)} - \hat{b}_{\alpha(k)} = 0, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \xi_{jk} \left[ \tilde{f}^{(k)(j)} \frac{\partial (\kappa^{(k)(j)})}{\partial (\phi_{x(k)})} + \tilde{f}^{(j)(k)} \frac{\partial (\kappa^{(j)(k)})}{\partial (\phi_{x(k)})} \right] V_{(j)} \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \xi_{jk} \left[ \hat{f}^{(k)(j)} \frac{\partial \varphi^{(k)(j)}}{\partial (\phi_{x(k)})} + \hat{f}^{(j)(k)} \frac{\partial \varphi^{(j)(k)}}{\partial (\phi_{x(k)})} \right] V_{(j)} - \tilde{b}_{x(k)} = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \xi_{jk} \left[ \tilde{f}^{(k)(j)} \frac{\partial (\kappa^{(k)(j)})}{\partial (\phi_{y(k)})} + \tilde{f}^{(j)(k)} \frac{\partial (\kappa^{(j)(k)})}{\partial (\phi_{y(k)})} \right] V_{(j)} \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \xi_{jk} \left[ \hat{f}^{(k)(j)} \frac{\partial \varphi^{(k)(j)}}{\partial (\phi_{y(k)})} + \hat{f}^{(j)(k)} \frac{\partial \varphi^{(j)(k)}}{\partial (\phi_{y(k)})} \right] V_{(j)} - \tilde{b}_{y(k)} = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Denklem (4.51-4.53)'de yer alan türevler alındığında, Denklem (4.42)'de yer alan moment yoğunluğu fonksiyonu ve Denklem (4.43)'de yer alan kuvvet yoğunluğu fonksiyonları yerine yazıldığında şu denklemler elde edilir:

$$\rho h \ddot{w}^{(k)} = c_s \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(k)(j)} V_{(j)}, \quad (4.54)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x(k)} = c_b(\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \kappa^{(k)(j)} \cos \theta V_{(j)} + \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \varphi^{(k)(j)} \cos \theta V_{(j)}, \quad (4.55)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y(k)} = c_b(\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \kappa^{(k)(j)} \sin \theta V_{(j)} + \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \varphi^{(k)(j)} \sin \theta V_{(j)}. \quad (4.56)$$

Denklem (4.10) ve Denklem (4.17), Denklem (4.54-4.56)'de yerine yazıldığında, Denklem (4.57-4.59)'da yer alan ortotropik Mindlin plakası için PD hareket denklemleri elde edilir.

$$\rho h \ddot{w}_{(k)} = c_s \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{w_{(j)} - w_{(k)}}{\xi_{(j)(k)}} - \frac{\phi_{x((j))} + \phi_{x(k)}}{2} \cos \theta - \frac{\phi_{y(j)} + \phi_{y(k)}}{2} \sin \theta \right) V_{(j)}, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x(k)} = & c_b(\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\phi_{x(j)} - \phi_{x(k)}}{\xi_{jk}} \right) \cos \theta + \left( \frac{\phi_{y(j)} - \phi_{y(k)}}{\xi_{jk}} \right) \sin \theta \right] \cos \theta V_{(j)} \\ & + \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \left( \frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x(j)} + \phi_{x(k)}}{2} \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{\phi_{y(j)} + \phi_{y(k)}}{2} \sin \theta \right) \cos \theta V_{(j)}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y(k)} = & c_b(\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\phi_{x(j)} - \phi_{x(k)}}{\xi_{jk}} \right) \cos \theta + \left( \frac{\phi_{y(j)} - \phi_{y(k)}}{\xi_{jk}} \right) \sin \theta \right] \sin \theta V_{(j)} \\ & + \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \left( \frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x(j)} + \phi_{x(k)}}{2} \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{\phi_{y(j)} + \phi_{y(k)}}{2} \sin \theta \right) \sin \theta V_{(j)}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

### 4.3.2 PD Malzeme Sabitlerinin Belirlenmesi

Denklem (4.42) ve Denklem (4.43)'de yer alan PD malzeme sabitlerinin malzemenin bilinen katılık değerleri cinsinden elde etmek mümkündür. Kompozit yapılar için, malzeme sabiti malzeme yönü,  $\theta$ 'ya bağlı bir parametredir. Bu çalışmada ise PD eğilme sabitleri yöne bağlı olarak şu şekilde tanımlanır:

$$c_b(\theta) = \begin{cases} c_{bf} & , \theta = \theta_f \\ c_{bm} & , \theta \neq \theta_f \end{cases}, \quad (4.60)$$

burada  $\theta_f$ , fiber oryantasyonu yönünü temsil etmektedir. Denklem (4.60)'da yer alan  $c_{bf}$  ve  $c_{bm}$  ise eğilme deformasyonuna ilişkin sırasıyla fiber ve matris bağları için PD bağ sabitleridir. Kesme deformasyonu ile ilgili bağ sabiti  $c_s$  ise yönden bağımsızdır. Denklem (4.42) incelendiğinde, PD moment yoğunluğu,  $\tilde{f}$  ile eğrilik,  $\kappa_{(j)(k)}$  arasında

lineer bir ilişki olduğu görülmektedir. Peridinamik malzeme sabitlerinin elde edilmesi için, Denklem (4.57-4.59)'da yer alan PD hareket denklemlerinin, Denklem (4.29-4.31)'de yer alan klasik SOM'daki karşılıkları ile karşılaştırılması gerekmektedir. Bu amaçla, PD ile elde edilen hareket denklemlerinin yerelleştirilmesi gerekmektedir. PD hareket denklemlerinin yerelleştirilmesi için deplasmanların ve rotasyonların Taylor serisi açılımları şu şekilde yazılır:

$$w_{(j)} = w_{(k)} + w_{(k),x}\xi_{(j)(k)}\cos\theta + w_{(k),y}\xi_{(j)(k)}\sin\theta + \frac{1}{2}w_{(k),xx}\xi_{(j)(k)}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}w_{(k),yy}\xi_{(j)(k)}^2\sin^2\theta + w_{(k),xy}\xi_{(j)(k)}^2\sin\theta\cos\theta, \quad (4.61)$$

$$\phi_{x(j)} = \phi_{x(k)} + \phi_{x(k),x}\xi_{(j)(k)}\cos\theta + \phi_{x(k),y}\xi_{(j)(k)}\sin\theta + \frac{1}{2}\phi_{x(k),xx}\xi_{(j)(k)}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\phi_{x(k),yy}\xi_{(j)(k)}^2\sin^2\theta + \phi_{x(k),xy}\xi_{(j)(k)}^2\sin\theta\cos\theta, \quad (4.62)$$

$$\phi_{y(j)} = \phi_{y(k)} + \phi_{y(k),x}\xi_{(j)(k)}\cos\theta + \phi_{y(k),y}\xi_{(j)(k)}\sin\theta + \frac{1}{2}\phi_{y(k),xx}\xi_{(j)(k)}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\phi_{y(k),yy}\xi_{(j)(k)}^2\sin^2\theta + \phi_{y(k),xy}\xi_{(j)(k)}^2\sin\theta\cos\theta. \quad (4.63)$$

Denklem (4.61-4.63)'deki Taylor serisi açılımları kullanılarak Denklem (4.57-4.59)'da yer alan PD hareket denklemleri yeniden yazıldığında Denklem (4.64-4.66) elde edilir.

$$\rho h \ddot{w}_{(k)} = \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} (w_{(k),xx} + w_{(k),yy} - \phi_{x(k),x} - \phi_{y(k),y}), \quad (4.64)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x(k)} = \frac{\pi}{16} h \delta^3 \left( c_{bf} \frac{2}{3} - c_s \frac{\delta^2}{10} \right) [3\phi_{x(k),xx} + \phi_{x(k),yy} + 2\phi_{y(k),xy}] - \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} (-w_{(k),x} + \phi_{x(k)}), \quad (4.65)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y(k)} = \frac{\pi}{16} h \delta^3 \left( c_{bm} \frac{2}{3} - c_s \frac{\delta^2}{10} \right) [3\phi_{y(k),yy} + \phi_{y(k),xx} + 2\phi_{x(k),yx}] - \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} (-w_{(k),y} + \phi_{y(k)}). \quad (4.66)$$

Denklem (4.64-4.66)'de yer alan PD hareket denklemlerinde yer alan terimler ile, Denklem (4.29-4.31)'da yer alan klasik SOM PD hareket denklemleri karşılaştırıldığında, PD bağ sabitleri  $c_s$ ,  $c_{bf}$  ve  $c_{bm}$  şu şekilde elde edilir:

$$c_s = \frac{6k^2G}{\pi\delta^3}, \quad (4.67)$$

$$c_{bf} = \frac{1}{\pi\delta} \left( \frac{8D_{11}}{h\delta^2} + \frac{9kG}{10} \right), \quad (4.68)$$

$$c_{bm} = \frac{1}{\pi\delta} \left( \frac{8D_{22}}{h\delta^2} + \frac{9kG}{10} \right), \quad (4.69)$$

burada  $k^2$  kesme deformasyonu düzeltme faktörüdür ve Diyaroğlu vd. (2015) tarafından belirtildiği şekilde  $\pi^2/12$  olarak alınmıştır [40]. Ayrıca PD ve klasik SOM hareket denklemlerinin karşılaştırılması sonucu, oluşturulan ortotropik Mindlin plakası formülasyonu için Poisson oranları  $\nu_{12} = \nu_{21} = 1/3$  şeklinde elde edilmektedir.

### 4.3.3 İzotropik Formülasyonun Elde Edilmesi

Diyaroğlu vd. 2015, PD Mindlin plakası formülasyonunu literatürde ilk kez öne sürmüştür [40]. Geliştirdikleri PD plaka modeli, izotropik malzemeler için geliştirilmiştir. Bu kısımda ise Bölüm 4.3'de yer alan ortotropik Mindlin plakası için geliştirilen PD formülasyon kullanılarak, izotropik malzemeler için geçerli olan formülasyon elde edilmiştir. Burada amaçlanan, türetilen izotropik model ile Diyaroğlu vd. 2015 tarafından geliştirilen izotropik formülasyonun karşılaştırılarak Bölüm 4.3'de yer alan modelin validasyonunu gerçekleştirmektir. Denklem (4.64-4.66)'de yer alan hareket denklemlerinde,  $c_{bf} = c_{bm} = c_b$  yazıldığında, Diyaroğlu vd. 2015 tarafından türetilen PD hareket denklemleri elde edilmektedir. Ayrıca, Denklem (4.67-4.69)'de yer alan bağ sabitlerinde elastik modülü değerleri,  $E_1 = E_2 = E$  ve eğilme katlıkları  $D_{11} = D_{22} = D$  şeklinde alındığında izotropik model için bağ sabitleri şu şekilde elde edilmektedir:

$$c_s = \frac{6k^2G}{\pi\delta^3}, \quad (4.70)$$

$$c_{bf} = c_{bm} = c_b = \frac{1}{\pi\delta} \left( \frac{8D}{h\delta^2} + \frac{9kG}{10} \right), \quad (4.71)$$

burada

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4.72)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.73)$$

Denklem (4.72)'de yer alan kesme modülü,  $G$  ve Denklem (4.73)'da yer alan eğilme katılığı,  $D$ , Denklem (4.70) ve Denklem (4.71)'de yerine yazıldığında izotropik PD Mindlin plakası için bağ sabitleri şu şekilde elde edilir:

$$c_s = \frac{9Ek^2}{4\pi\delta^3}, \quad (4.74)$$

$$c_b = \frac{E}{\pi\delta} \left( \frac{3h_2}{4\delta^2} + \frac{27}{80}k^2 \right). \quad (4.75)$$

Denklem (4.74) ve Denklem (4.75)'de yer alan bağ katsayıları incelendiğinde, Bölüm 4.3'de öne sürülen ortotropik PD Mindlin modelinden türetilen izotropik bağ sabitlerinin, Diyaroğlu vd. (2015) tarafından türetilen bağ sabitlerine eşit olduğu görülmektedir. Bu durum, Bölüm 4.3'de geliştirilen ortotropik Mindlin plakası modelinin geçerliliğini ortaya koymaktadır.

#### 4.3.4 Ortotropik Mindlin Plakası Hasar Modeli

Bölüm 4.3.2'de belirtildiği üzere, PD yöntemde hasarı oluşumu ve ilerlemesini incelemek için belirli bir kritik değer üzerinde gerinime sahip bağların kalıcı olarak kırılması gerekmektedir. Askari ve Silling (2005) tarafından ortaya atılan bu yaklaşım, ortotropik Mindlin plakası formülasyonuna şu şekilde uyarlanmıştır: Bağlarda oluşan eğrilik değeri,  $\kappa$  değeri, kritik eğrilik değerine  $\kappa_c(\theta)$ , ya da enine kesme açısı,  $\varphi$  kritik enine kesme açısı,  $\varphi_c$  değerine ulaştığında bağlarda hasar meydana gelmektedir.

Hasar oluşumunu dikkate almak için, Denklem (4.42)'de yer alan eğilme momenti yoğunluğu,  $\tilde{f}$  ve Denklem (4.43)'da yer alan kesme kuvveti yoğunluğu,  $\hat{f}$  şu şekilde yeniden yazılır:

$$\tilde{f}_{(j)(k)}(\kappa) = \mu_e(t, \kappa) c_b(\theta) \kappa_{(j)(k)}, \quad (4.76)$$

$$\hat{f}_{(j)(k)}(\varphi) = \mu_k(t, \varphi) c_s \varphi_{(j)(k)}, \quad (4.77)$$

burada,  $\mu_e$  ve  $\mu_k$  sırasıyla eğilme ve enine kesme koşulları için hasar fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar sırasıyla Denklem (4.78) ve Denklem(4.79)'de tanımlanmıştır.

$$\mu_e(t, \kappa) = \begin{cases} 1, & \kappa(t, \theta) < \kappa_c(\theta) \\ 0, & \kappa(t, \theta) \geq \kappa_c(\theta) \end{cases} \quad (4.78)$$

$$\mu_k(t, \varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi(t, \theta) < \varphi_c \\ 0, & \varphi(t, \theta) \geq \varphi_c \end{cases} \quad (4.79)$$

Denklem (4.78)'de yer alan kritik eğrilik değeri,  $\kappa_c(\theta)$  Denklem (4.60)'da yer alan PD eğilme sabiti,  $c_b$  ye benzer şekilde malzeme yönüne bağlı olarak şu şekilde tanımlanır:

$$\kappa_c(\theta) = \begin{cases} \kappa_{c,f}, & \theta = \theta_f, \\ \kappa_{c,m}, & \theta \neq \theta_f, \end{cases} \quad (4.80)$$

burada  $\kappa_{c,f}$  ve  $\kappa_{c,m}$  fiber ve matris yönlerindeki kritik eğrilik değerlerini temsil etmektedir. Bu durumda, kullanılan hasar modeli, üç adet parametreye bağlıdır ( $\kappa_{c,f}$ ,  $\kappa_c$ , ve  $\varphi_c$ ). Denklem (4.44) ve Denklem (4.45)'de yer alan mikropotansiyel tanımları ve Denklem (3.29) kullanılarak, aşağıdaki ilişkileri yazmak mümkündür.

$$G_I^f = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}(z/\xi)} c_{bf} \kappa_{c,f}^2 \xi^3 \sin(\theta) d\theta d\xi dz, \quad (4.81)$$

$$G_I^m = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}(z/\xi)} c_{bm} \kappa_{c,m}^2 \xi^3 \sin(\theta) d\theta d\xi dz, \quad (4.82)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}(z/\xi)} c_s \varphi^2 \xi^3 \sin(\theta) d\theta d\xi dz, \quad (4.83)$$

burada  $G_I^f$  ve  $G_I^m$  fiber ve matris malzemeleri için kritik mod I enerji salıverme oranını,  $G_{III}$  ise kritik mod III enerji salıverme oranını ifade etmektedir. Denklem (4.81-4.83)'da yer alan integraller alındığında, kritik parametreler  $\kappa_{c,f}$ ,  $\kappa_c$ , ve  $\varphi_c$  şu şekilde elde edilir:

$$\kappa_{c,f} = \sqrt{\frac{20G_I^f}{c_{bf} h \delta^5}}, \quad (4.84)$$



$$\kappa_{c,m} = \sqrt{\frac{20G_I^m}{c_{bm}h\delta^5}}, \quad (4.85)$$

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{20G_{III}}{c_s h \delta^5}}, \quad (4.86)$$

#### 4.3.5 PD Ortotropik Mindlin Plaka Modeli Nümerik Çözümü

Bölüm 4.3'de açıklanmış olan PD model kullanılarak elde edilen hareket denklemleri ADR nümerik çözüm yöntemi ile çözülmüştür. Silling (2000) tarafından ortaya konmuş olan, orjinal bağ bazlı PD model için, ADR çözüm yöntemi Bölüm 3.3'de açıklanmıştır. Bu bölümde ise, öne sürülmüş olan PD Mindlin plakası modeli için uyarlanmış ADR çözüm yöntemi anlatılmaktadır. Rotasyon,  $\phi$  ve sehim,  $w$  çözümleri için yapay sönümleme katsayıları  $c_n$  ve  $d_n$  hareket denklemlerine şu şekilde eklenir:

$$\ddot{\phi}_{(k)}(\Delta t_n) + c_n \phi_{(k)}(\Delta t_n) = \frac{12 \tilde{f}_{(k)}(\Delta t_n)}{h^3 \lambda_{(k)}}, \quad (4.87)$$

$$\ddot{w}_{(k)}(\Delta t_n) + d_n w_{(k)}(\Delta t_n) = \frac{\hat{f}_{(k)}(\Delta t_n)}{\lambda_{(k)}}, \quad (4.88)$$

burada  $\Delta t_n$ , ve  $\lambda_k$  sırasıyla n. zaman adımı ve Denklem (3.35)'de tanımlanmış olan kütle yoğunluğu matrisidir. Yapay sönümleme katsayıları  $c_n$  ve  $d_n$  her zaman adımında güncellenmektedir ve şu şekilde hesaplanırlar:

$$c_n = 2\sqrt{\frac{(\boldsymbol{\phi}^n)^T (\mathbf{K}^n) (\boldsymbol{\phi}^n)}{(h^3/12) (\boldsymbol{\phi}^n)^T (\boldsymbol{\phi}^n)}}, \quad (4.89)$$

$$d_n = 2\sqrt{\frac{(\mathbf{w}^n)^T (\mathbf{L}^n) (\mathbf{w}^n)}{(\mathbf{w}^n)^T (\mathbf{w}^n)}}, \quad (4.90)$$

burada yer alan  $\boldsymbol{\phi}$  ve  $\mathbf{w}$  vektörleri şu şekilde hesaplanır:

$$(\boldsymbol{\phi}^n)^T = [\phi_{(1)}, \phi_{(2)} \dots \phi_{(n)}], \quad (4.91)$$

$$(\mathbf{w}^n)^T = [w_{(1)}, w_{(2)} \dots w_{(n)}]. \quad (4.92)$$

Denklem (4.89) ve Denklem (4.90)'de yer alan  $\mathbf{K}$  ve  $\mathbf{L}$  matrisleri ise diagonal yapıda olan lokal katılık matrisleridir.  $\mathbf{K}$  ve  $\mathbf{L}$  sırasıyla Denklem (4.93) ve Denklem (4.94)'da

tanımlanmıştır:

$$K_{kk}^n = \left( \frac{\tilde{f}_{(k)}^n}{\lambda_k} - \frac{\tilde{f}_{(k)}^{n-1}}{\lambda_k} \right) / \dot{\phi}_{(k)}^{n-1/2}, \quad (4.93)$$

$$L_{kk}^n = \left( \frac{\hat{f}_{(k)}^n}{\lambda_k} - \frac{\hat{f}_{(k)}^{n-1}}{\lambda_k} \right) / \dot{w}_{(k)}^{n-1/2}. \quad (4.94)$$

Merkezi farklar integrasyon yöntemi kullanılarak rotasyon ve sehim değerleri için şu eşitlikler yazılabilir:

$$\dot{\phi}_k^{n+1/2} = \left( 2 - c_n \dot{\phi}_k^{n-1/2} + \frac{2 \left( \tilde{f}_{(k)}^n + \tilde{b}_{(k)}^n \right)}{\lambda_k (h^3/12)} \right) / (2 + c_n), \quad (4.95)$$

$$\dot{w}_k^{n+1/2} = \left( 2 - d_n \dot{w}_k^{n-1/2} + \frac{2 \left( \hat{f}_{(k)}^n + \hat{b}_{(k)}^n \right)}{\lambda_k} \right) / (2 + d_n), \quad (4.96)$$

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n + \dot{\phi}_k^{n+1/2} \Delta t, \quad (4.97)$$

$$w_k^{n+1} = w_k^n + \dot{w}_k^{n+1/2} \Delta t, \quad (4.98)$$

$$\phi_k^{1/2} = \frac{(\Delta t) \tilde{b}_{(k)}}{2\lambda_k}, \quad (4.99)$$

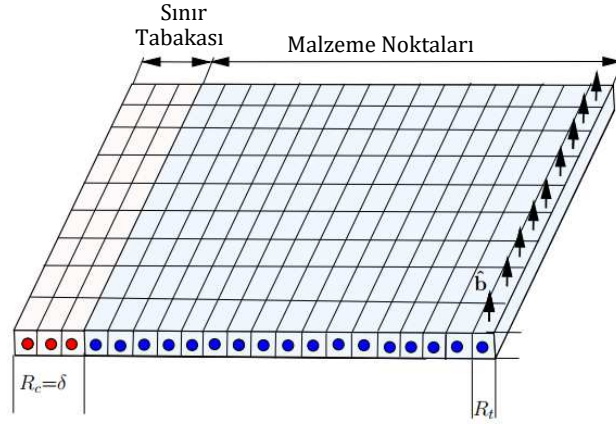
$$w_k^{1/2} = \frac{(\Delta t) \hat{b}_{(k)}}{2\lambda_k}. \quad (4.100)$$

Denklem (4.64-4.66)'da yer alan ortotropik PD Mindlin plakası hareket denklemleri, bu bölümde anlatılan nümerik yöntem uygulanarak çözülmüştür. ADR çözümlerinde zaman adımı  $\Delta t_n = 1$  s olarak alınmıştır. Toplam 5000 iterasyon kullanılarak yapılan ADR çözümleri 16 GB RAM'e, 3.2 GHz Intel Xeon(R) işlemciye sahip HP-Z420 masaüstü iş istasyonunda 1 CPU ile yaklaşık 90 dakika sürmüştür.

#### 4.3.6 PD Modele Sınır Koşullarının ve Yüklemelerin Uygulanması

PD hareket denklemleri integro-diferansiyel yapıdadır ve yerel türevler içermemektedir. Fiziksel problemlerin nümerik olarak PD yöntem ile incelenebilmesi için, Şekil 4.2'de şematize edildiği şekilde sanal bir sınır tabakası  $R_c$  oluşturularak deplasman ve rotasyon bileşenleri için sınır koşullarının uygulanması mümkündür [74]. Uygulanan

sınır koşulunun ana malzeme noktaları üzerinde yeterli etkiye sahip olabilmesi için,  $R_c = \delta$  olarak alınması, Silling (2007) tarafından tavsiye edilmektedir [12].



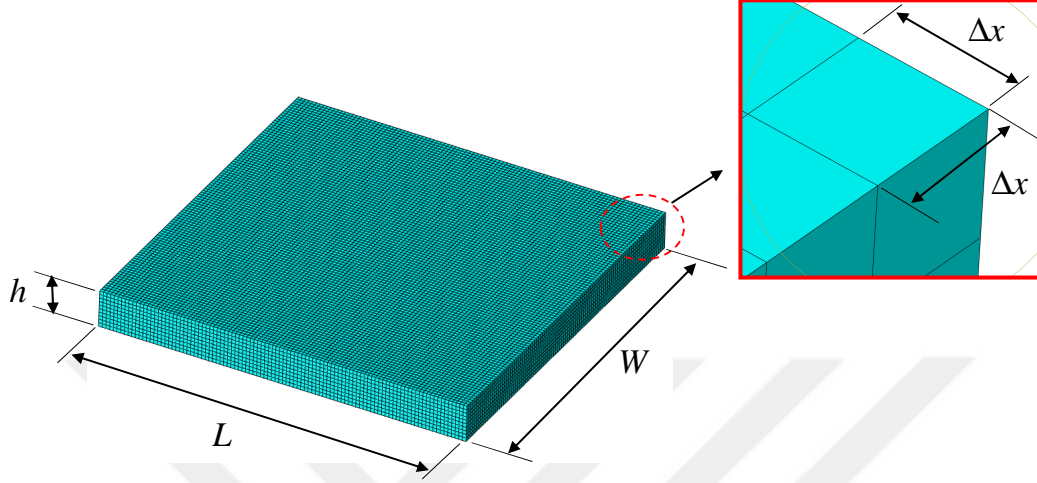
Şekil 4.2: Mindlin plakası sınır koşulları.

Kuvvet yoğunluğu, moment yoğunluğu gibi dış yüklemeler ise, Şekil 4.2’de  $R_t$  bölgesi ile gösterildiği üzere ana yapı üzerinde yer alan malzeme noktalarına doğrudan uygulanır.

#### 4.4 PD Mindlin Plakası Nümerik Sonuçlar

Öne sürülmüş olan ortotropik Mindlin plakası PD modeli kullanılarak eğilme yüklemesi etkisindeki plakalar için sehim,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  dağılımları elde edilmiştir. PD çözümleri MATLAB programında geliştirilen bir kod ile ADR metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. PD sonuçlar, Şekil 4.3’de yer alan üç boyutlu SEA modeli kullanılarak ABAQUS programında elde edilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır. ABAQUS çözümleri üç boyutlu "C3D8R" eleman tipi kullanılarak, kapalı çözüm yöntemi ile gerçekleştirilmiştir [1]. PD, ve ABAQUS çözümlerinde, sehim,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  dağılımları elde edilmiştir.

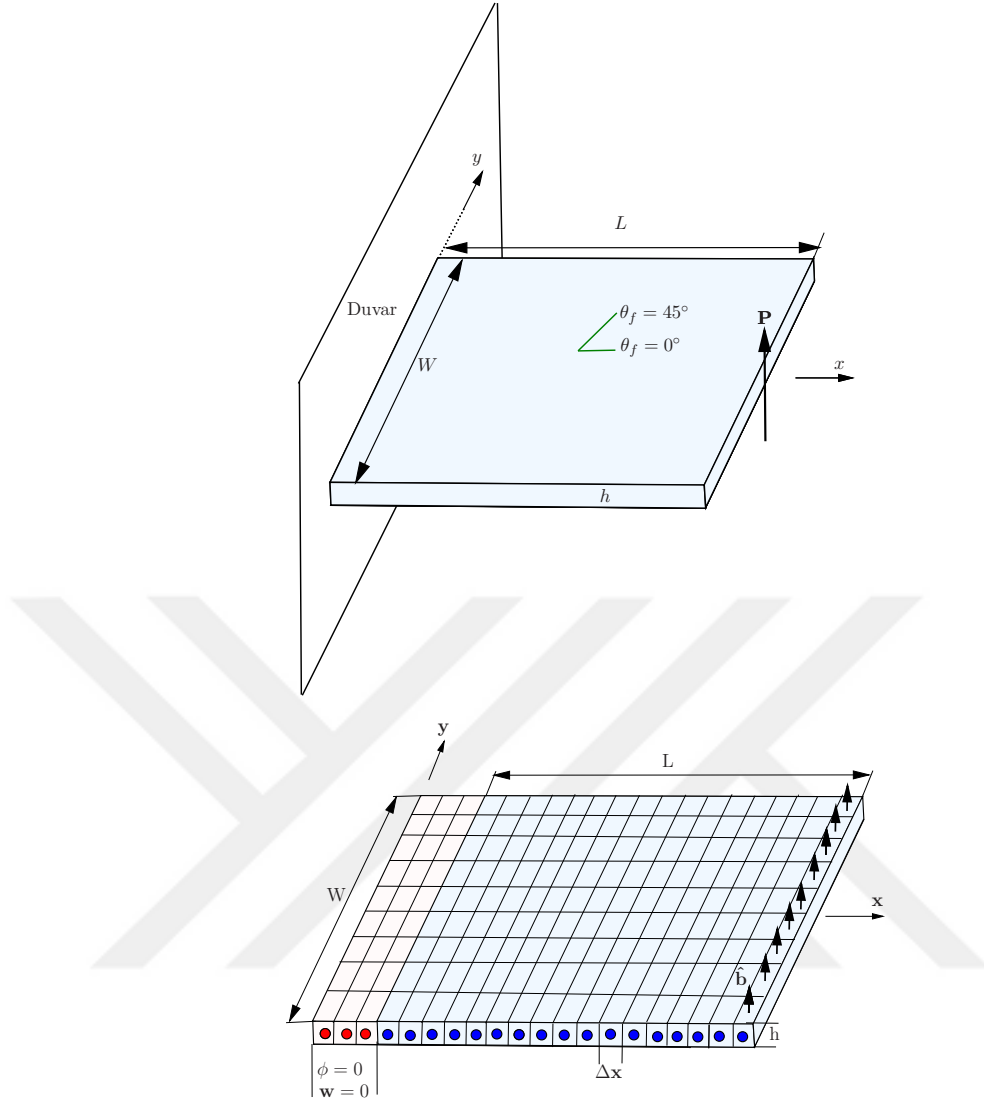
İlk olarak Diyaroğlu vd. (2015) tarafından da çalışılan bir ucu ankastre, diğer ucu enine kesme yüklemesine tabi tutulan izotropik bir plaka için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra ise bir ucu ankastre diğer ucu enine kesme yüklemesine maruz kalan ve iki ucu da ankastre olup, yayılı basınç yüklemesine maruz kalan çeşitli ortotropik plakalar için sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak ise, merkezi çatlak içeren ortotropik plakalarda çatlak ilerlemesi analizleri gerçekleştirilmiştir.



Şekil 4.3: ABAQUS programında oluşturulan üç boyutlu plaka modeli.

#### 4.4.1 Enine Kesme Yüküne Maruz Kalan Plaka

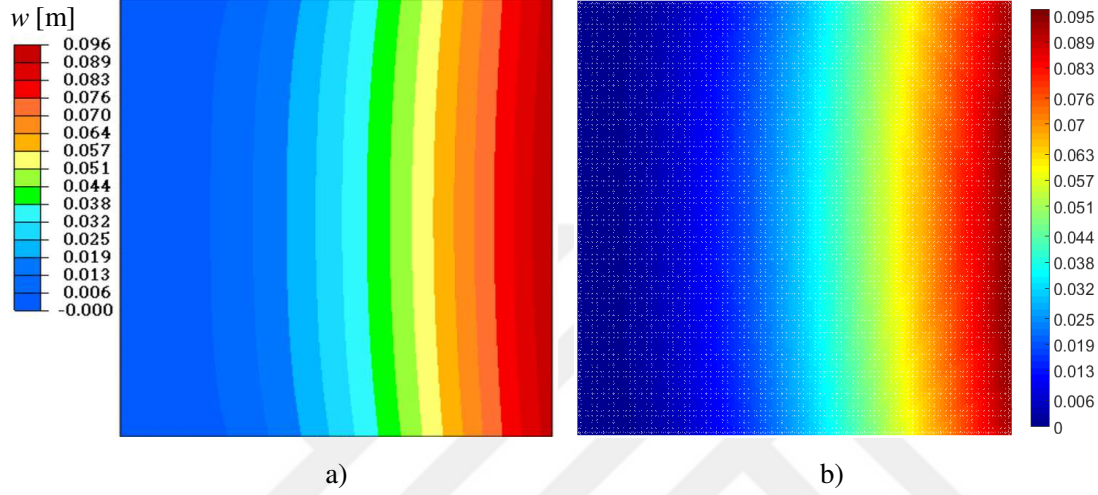
İlk olarak, enine kesme yüküne maruz kalan izotropik bir plakada meydana gelen sehim,  $w$  ve rotasyon  $\phi$  dağılımı için nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Bu probleme ait yükleme ve sınır koşulları Şekil 4.4’de gösterilmiştir. Boyutları  $L = W = 1$  m ve  $h = 0.1$  m olan kare plaka, bir ucundan tüm serbestlik dereceleri sabitlenmiş, diğer ucundan ise bir sıra malzeme noktası boyunca  $\hat{\mathbf{b}} = 5 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup> dış kuvvet yoğunluğu uygulanmıştır. Plaka boyutları, yükleme ve sınır koşulları Diyaroğlu vd. (2015) tarafından yapılan çalışmadaki enine kesme yükü etkisindeki izotropik Mindlin plakası problemi ile aynıdır. Malzeme özellikleri ise Diyaroğlu vd. (2015) tarafından  $E = 200$  GPa ve  $\nu = 1/3$  olarak alınmıştır. Bu çalışmada da ilk olarak  $E_1 = E_2 = E = 200$  GPa ve  $\nu = 1/3$  olan plaka problemi çözülmüştür. Gerçekleştirilen PD çözüm, Şekil 4.3’de yer alan üç boyutlu ABAQUS modeli kullanılarak elde edilen SEA sonuçları ile kıyaslanmıştır.



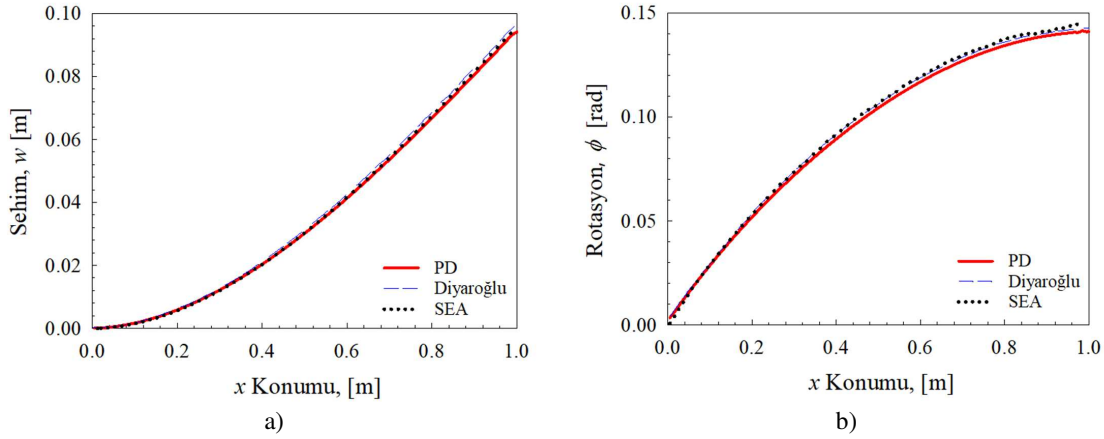
Şekil 4.4: Enine kesme yüküne maruz kalan Mindlin plakası.

Enine kesme yükü etkisindeki izotropik Mindlin plakası için SEA ve PD ile elde edilen sehim dağılımı sırasıyla Şekil 4.4a ve Şekil 4.4b'de yer almaktadır. Her iki yöntem ile elde edilen sehim dağılımları incelendiğinde, PD ile elde edilen dağılımın SEA ile elde edilen dağılıma oldukça benzer olduğu görülmektedir. SEA ile elde edilen maksimum sehim değeri  $w = 0.096$  m iken, PD ile elde edilen maksimum sehim değeri  $w = 0.095$  m dir. SEA ve PD ile elde edilen plakamın ortasındaki ( $y = 0$  doğrusu üzerinde) sehim,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  değerlerinin  $x$  konumuna bağlı değişimi Diyaroğlu vd. (2015) tarafından elde edilen dağılım ile sırasıyla Şekil 4.6a ve Şekil 4.6b'de karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlar değerlendirildiğinde, PD sonuçlarının SEA sonuçları ve Diyaroğlu vd. (2015) tarafından elde edilen sonuçlar ile oldukça yakın olduğu görülmüştür.

Bu durumda Bölüm 4.3’de öne sürülen ortotropik plaka modelinde,  $E_1 = E_2 = E$  ve  $D_{11} = D_{22} = D$  alındığında, formülasyonun izotropik karşılığına dönüştüğü nümerik olarak da ispatlanmıştır. Ayrıca SEA ile elde edilen sonuçların, PD ve Diyaroğlu vd. (2015) ile uyumlu olması Şekil 4.3’de görülen ABAQUS modelinin doğruluğunu ifade etmektedir. Bu SEA modeli, malzeme özellikleri güncellenerek çalışmanın devamında incelenmiş olan PD çözümlerinin doğrulanması için kullanılmıştır.



Şekil 4.5: İzotropik plaka üzerindeki sehım dağılımı: a) SEA, b) PD çözüümü.



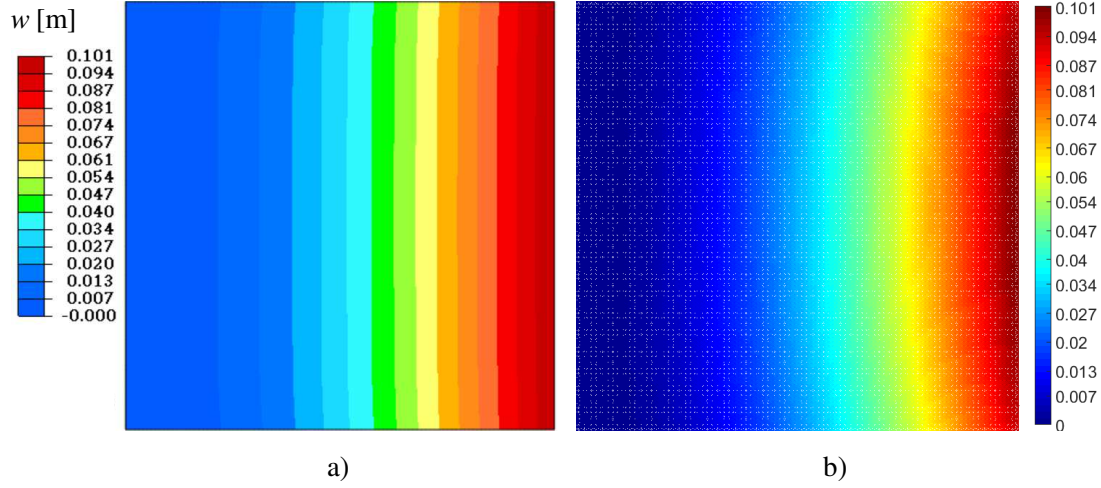
Şekil 4.6: İzotropik plaka,  $y = 0$  doğrusundaki a) sehım b) rotasyon grafiği.

İzotropik plakanın enine kesme yükü altındaki sonuçları elde edildikten sonra, aynı geometrik özellikler ve sınır koşulları kullanılarak Çizelge 4.1’de yer alan 4 farklı ortotropik plaka için PD çözümleri elde edilmiştir. Ortotropik plakalar için referans fiber yönü Şekil 4.4’da gösterilmiştir.

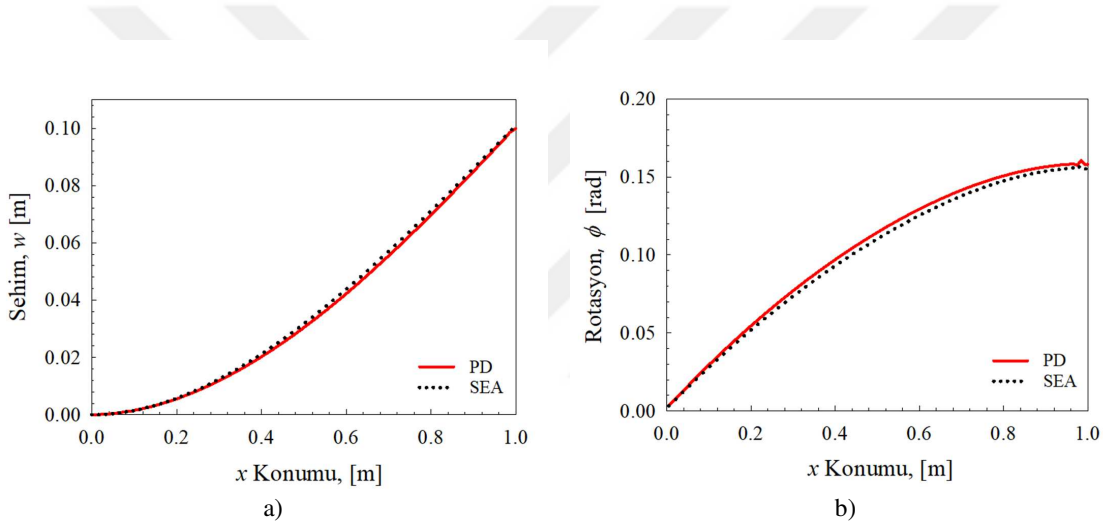
Çizelge 4.1: Ortotropik plakaların malzeme özellikleri.

Problem no	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\theta_f$ (°)
1	200	20	75	0
2	180	10	67.50	0
3	90	50	33.75	0
4	220	150	82.50	45

İlk plakanın malzeme özellikleri  $E_1 = 200$  GPa,  $E_2 = 20$  GPa ve  $G = 75$  GPa olarak alınmıştır. Fiber yönü ise  $\theta_f = 0^\circ$  dir. Bu plaka için elde edilen SEA ve PD ile elde edilen sehim dağılımları sırasıyla Şekil 4.7a ve Şekil 4.7b de gösterilmiştir. PD ve SEA yöntemleri ile elde edilen,  $y = 0$  doğrultusundaki sehim,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  dağılımları sırasıyla Şekil 4.8a ve Şekil 4.8b'de verilmiştir. PD yöntem ile elde edilen maksimum sehim değeri,  $w = 0.100$  m ve maksimum rotasyon değeri,  $\phi = 0.159$  radyandır. SEA ile elde edilen maksimum sehim değeri  $w = 0.101$  m ve maksimum rotasyon değeri ise  $\phi = 0.156$  radyandır. Bu problem için PD yöntem ile elde edilen sehim ve rotasyon değerlerinin SEA sonuçları ile uyumlu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.1'de yer alan 1. plaka için elde edilen sonuçlar, izotropik plaka için elde edilen sonuçlar ile kıyaslandığında oldukça yakın bir dağılım elde edildiği görülmektedir. Bunun nedeni ise her iki plakada da  $x$  eksenı boyunca elastik modülünün 200 GPa olmasıdır. Fakat ortotropik plakada  $y$  eksenı yönündeki katılık değeri izotropik plakaya oranla 10 kat daha düşüktür (20 GPa). Her ne kadar sehim oluşumunda etkili katılık değeri  $E_1$  olsa da, ortotropik plakanın  $y$  eksenı yönündeki katılığının düşük olması nedeniyle, ortotropik plakada daha yüksek bir sehim ve rotasyon elde edilmiştir.



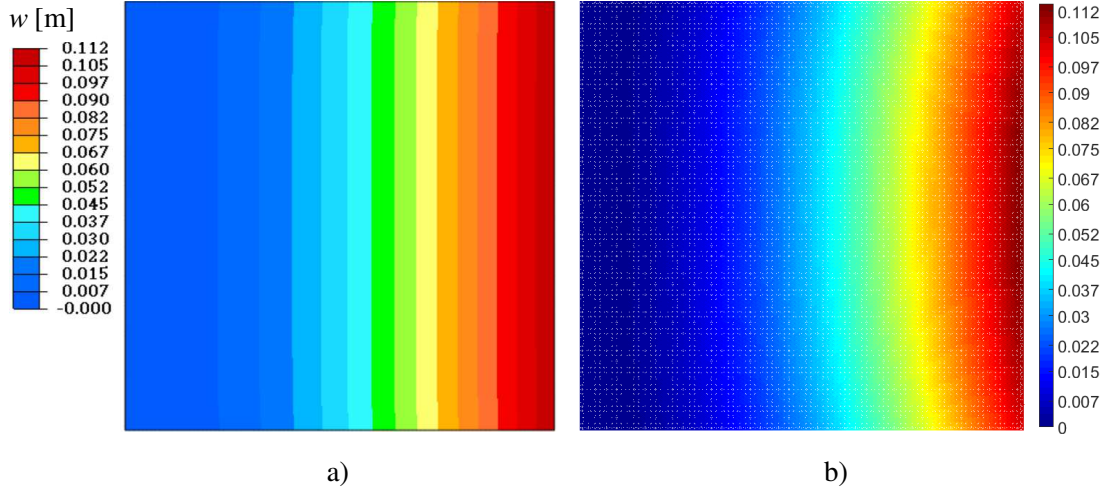
Şekil 4.7: Enine kesme kuvveti etkisindeki 1. ortotropik plaka üzerindeki sehım dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.



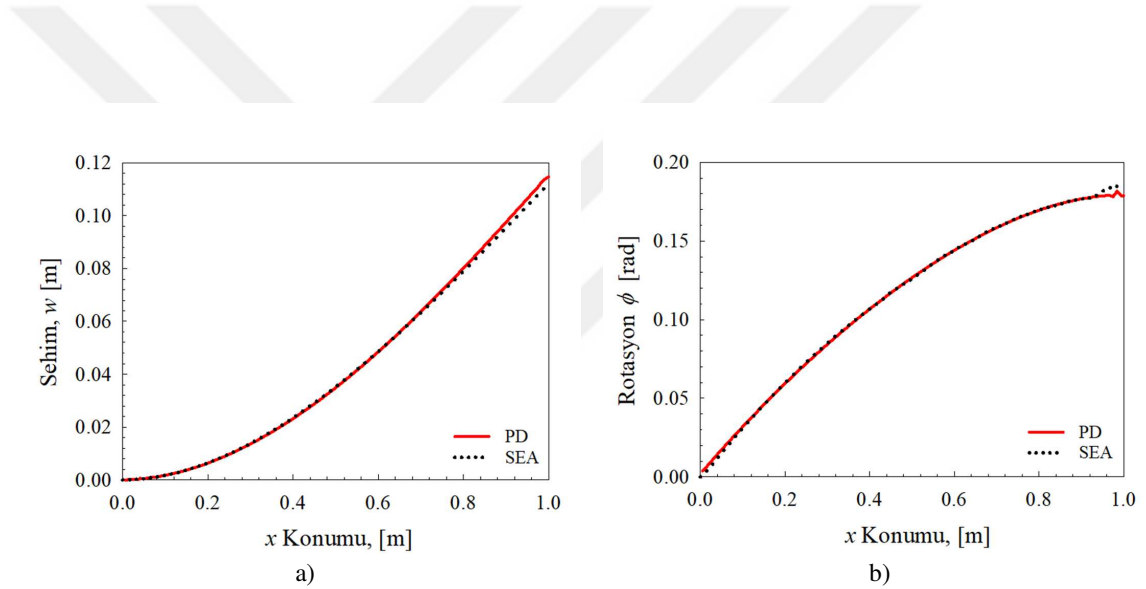
Şekil 4.8: Enine kesme kuvveti etkisindeki 1. ortotropik plakanın sehım dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.

Fiber yönü  $\theta_f = 0^\circ$  olan 2. plakanın malzeme özellikleri  $E_1 = 180$  GPa,  $E_2 = 10$  GPa ve  $G = 67.5$  GPa olarak alınmıştır. Bu plaka için SEA ve PD ile elde edilen sehım dağılımları sırasıyla Şekil 4.9a ve Şekil 4.9b'de yer almaktadır. SEA ve PD ile elde edilen plakanın ortasındaki ( $y = 0$  doğrusu üzerinde) sehım,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  değerlerinin  $x$  konumuna bağlı değişimi ise Şekil 4.10a ve Şekil 4.10b'de görülmektedir. 2. plakada PD yöntem ile elde edilen maksimum sehım değeri  $w = 0.115$  m iken SEA ile elde edilen maksimum sehım değeri  $w = 0.112$  m dir. PD yöntem ile elde edilen maksimum rotasyon  $\phi = 0.180$  radyan iken SEA ile elde edilen rotasyon  $\phi = 0.185$  radyandır. İkinci plaka için PD ile elde edilen rotasyon ve sehım değerleri, SEA ile elde edilen değerler ile uyumlu bir dağılım göstermiştir.



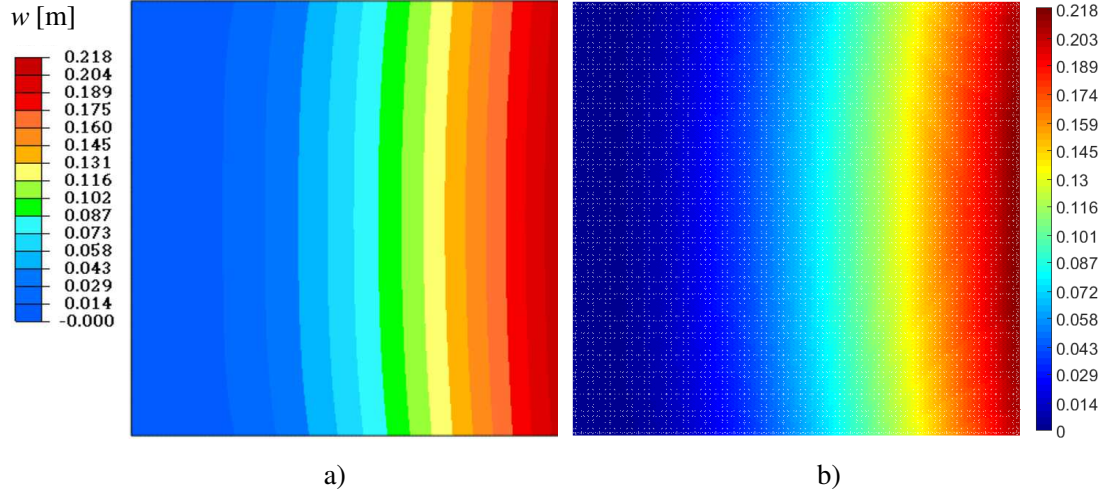


Şekil 4.9: Enine kesme kuvveti etkisindeki 2. ortotropik plaka üzerindeki sehım dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.

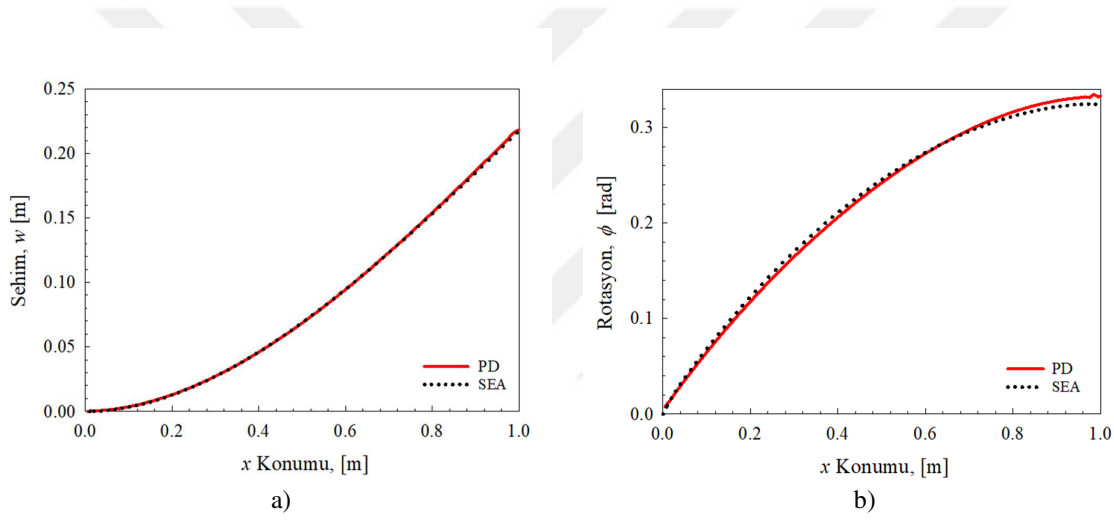


Şekil 4.10: Enine kesme kuvveti etkisindeki 2. ortotropik plakanın  $y=0$  doğrultusundaki a) sehım b) rotasyon grafiği.

3. plakanın malzeme özellikleri  $E_1 = 90$  GPa,  $E_2 = 50$  GPa ve  $G = 33.5$  GPa ve fiber yönü,  $\theta_f = 0^\circ$  dır. Bu plaka için SEA ve PD ile elde edilen sehım dağılımları sırasıyla Şekil 4.11a ve Şekil 4.11b'de yer almaktadır. SEA ve PD ile elde edilmiş  $y = 0$  doğrusu boyunca sehım,  $w$  ve rotasyon  $\phi$  değerlerinin dağılımı ise sırasıyla Şekil 4.12a ve Şekil 4.12b'de yer almaktadır. PD ile elde edilen maksimum sehım değeri  $w = 0.219$  m ve rotasyon değeri  $w = 0.217$  m dir. Maksimum rotasyon değerleri ise PD ile  $\phi = 0.333$  radyan, SEA ile de  $\phi = 0.324$  radyan olarak elde edilmiştir. Bu plaka için de her iki yöntem ile elde edilen sehım ve rotasyon değerleri birbirine yakındır.



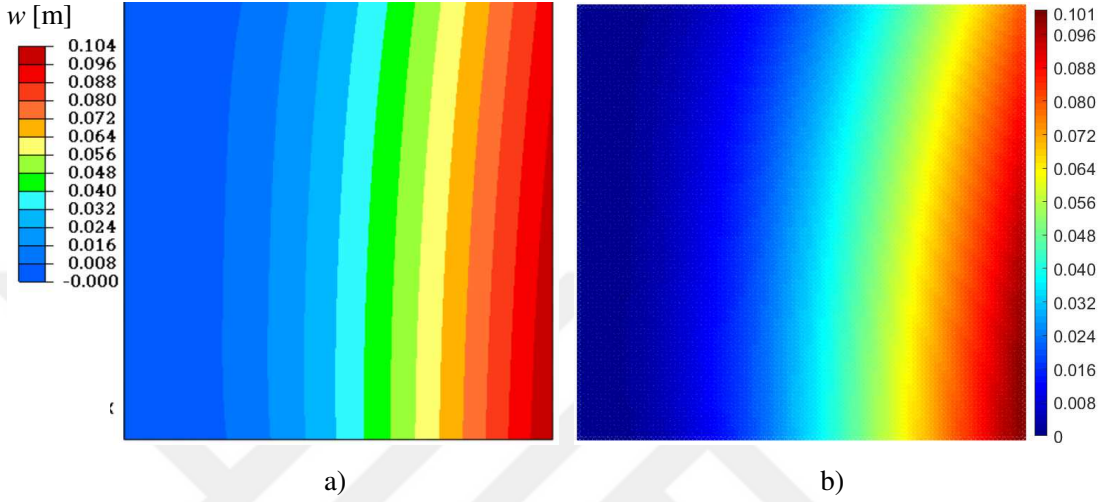
Şekil 4.11: Enine kesme kuvveti etkisindeki 3. ortotropik plaka üzerindeki sehîm dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.



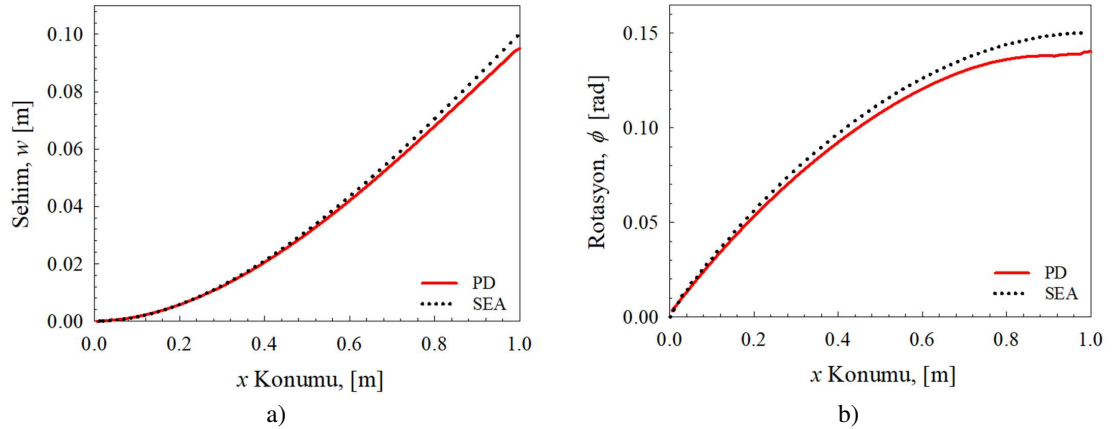
Şekil 4.12: Enine kesme kuvveti etkisindeki 3. ortotropik plakanın  $y=0$  doğrultusundaki a) sehîm b) rotasyon grafiği.

Son olarak enine kesme yüklemesine maruz kalan ve fiber yönü,  $\theta_f = 45^\circ$  olan plaka için PD ve SEA çözümleri gerçekleştirilmiştir. Bu plakanın malzeme özellikleri  $E_1 = 220$  GPa,  $E_2 = 150$  GPa ve  $G = 82.5$  GPa dır. SEA ve PD ile elde edilen sehîm dağılımları Şekil 4.13a ve Şekil 4.13b'de yer almaktadır. Şekil 4.14a ve Şekil 4.14b'de ise PD ve SEA ile elde edilen,  $y = 0$  doğrultusundaki sehîm,  $w$  ve rotasyon,  $\phi$  dağılımları görülmektedir. Bu plaka için  $y = 0$  doğrultusunda elde edilen maksimum sehîm PD ile  $w = 0.095$  m, SEA ile elde edilen sehîm ise  $w = 0.100$  m dir. Aynı doğrultu üzerinde maksimum rotasyon PD ile  $\phi = 0.140$  radyan ve SEA ile  $\phi = 0.149$  radyan olarak elde edilmiştir.  $\theta_f = 45^\circ$  olan bu plaka için elde edilen PD sonuçları ile SEA sonuçları arasında sapmanın,  $\theta_f = 0^\circ$  olan ilk üç plakaya oranla daha fazla olduğu görülmektedir.

Bu durumun nedeni ise, dengelenmemiş oryantasyona sahip kompozitlerde görülen eğilme deformasyonunun bükülme deformasyonu ile etkileşime girmesidir. Geliştirilen PD plaka modelinde eğrilik alanının bükülme bileşeni,  $\kappa_{xy}$  değerinin sıfır olduğu kabulü yapılmış olması nedeniyle, bu plaka için elde edilen SEA ve PD sonuçları arasında sapma görülmüştür.



Şekil 4.13: Enine kesme kuvveti etkisindeki 4. ortotropik plaka üzerindeki sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.

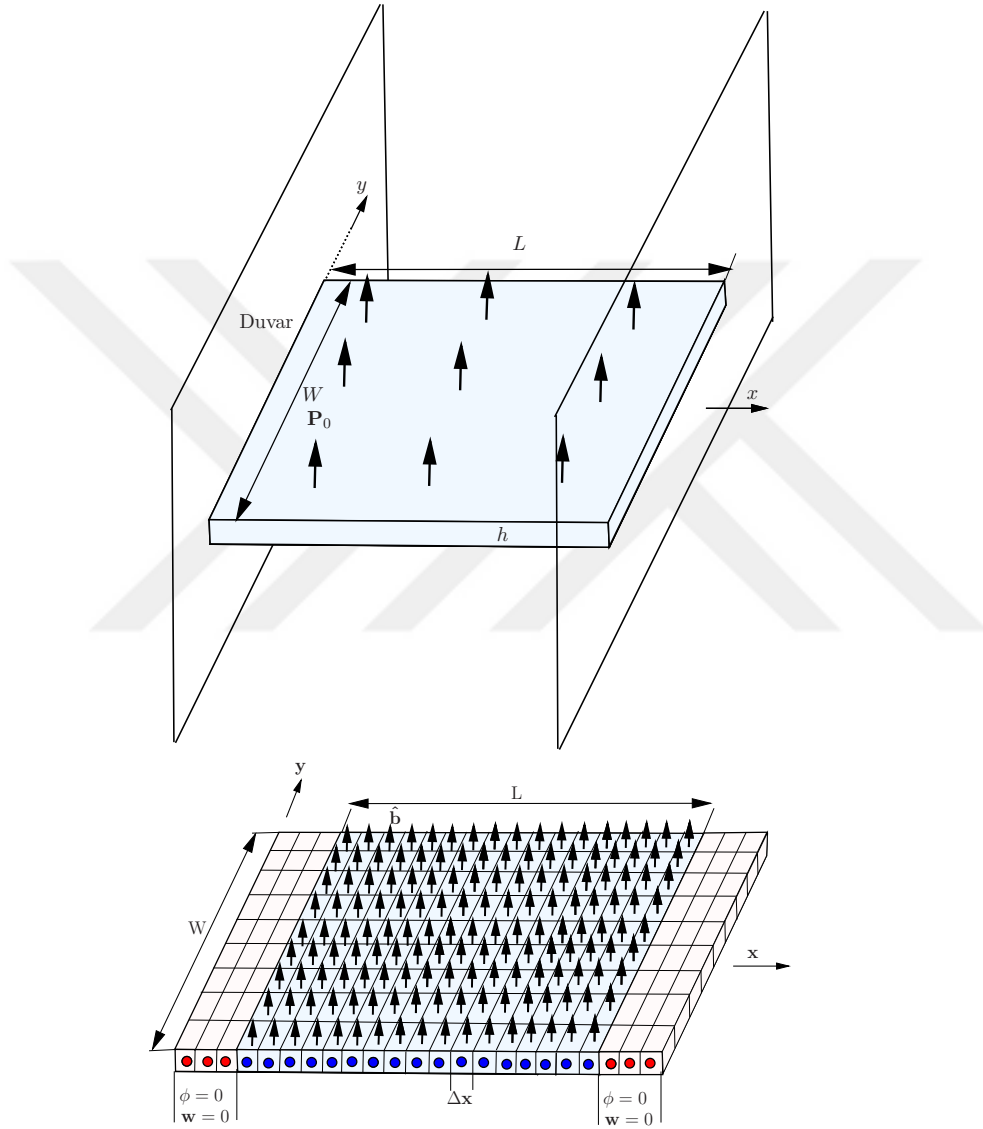


Şekil 4.14: Enine kesme kuvveti etkisindeki 4. ortotropik plakanın  $y=0$  doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği.

#### 4.4.2 Sabit Basınç Yüküne Maruz Kalan Plaka

Bu bölümde incelenen plakaların sınır koşulları değiştirilerek, Şekil 4.15'de görüldüğü üzere plakanın iki ucu da ankastre olacak şekilde sabitlenmiştir. PD modelde bu sınır koşulları, Şekil 4.15'de gösterildiği gibi plakanın iki kenarına da tanımlanan sa-

nal malzeme noktaları üzerinden verilmiştir. Yükleme ise plaka üzerinde yer alan tüm malzeme noktaları  $\hat{\mathbf{b}} = 5 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \mathbf{k}$  değerinde bir kesme yükü yoğunluğuna maruz kalacak şekilde güncellenmiştir. Geometrik özellikler enine kesme yükü problemi ile aynıdır ( $L = W = 1 \text{ m}$  ve  $h = 0.1 \text{ m}$ ). Nümerik çözümlerin gerçekleştirildiği plakalar için malzeme özellikleri Çizelge 4.2’de verilmiştir.



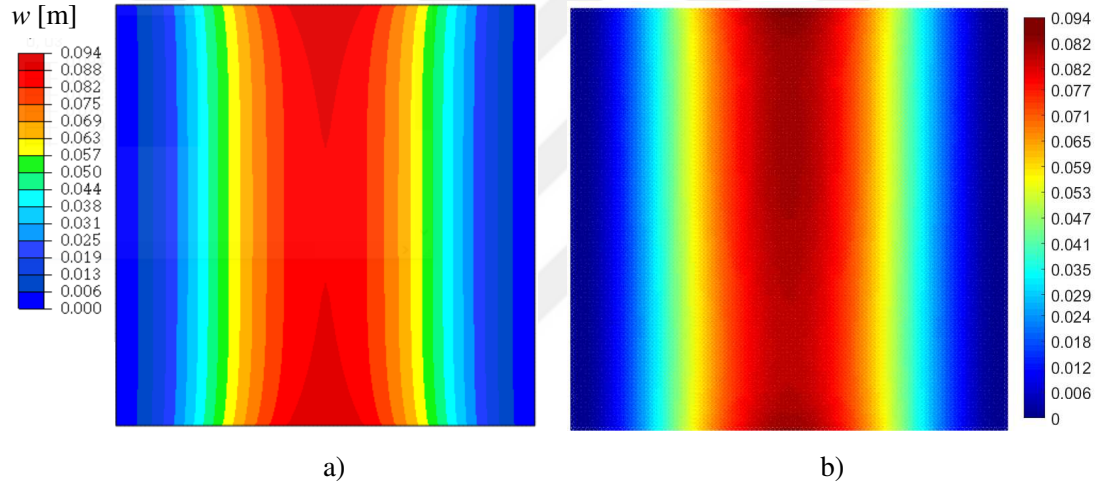
Şekil 4.15: Sabit basınç yüküne maruz kalan Mindlin plakası.

İlk olarak malzeme özellikleri  $E_1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 20 \text{ GPa}$  ve  $G = 75 \text{ GPa}$  olan plaka için sehim ve rotasyon çözümleri gerçekleştirilmiştir. SEA ve PD ile elde edilen sehim dağılımı Şekil 4.16a ve Şekil 4.16b’de yer almaktadır. SEA ve PD ile elde edilmiş  $y = 0$  doğrusu boyunca sehim,  $w$  ve rotasyon  $\phi$  değerlerinin dağılımları ise sırasıyla

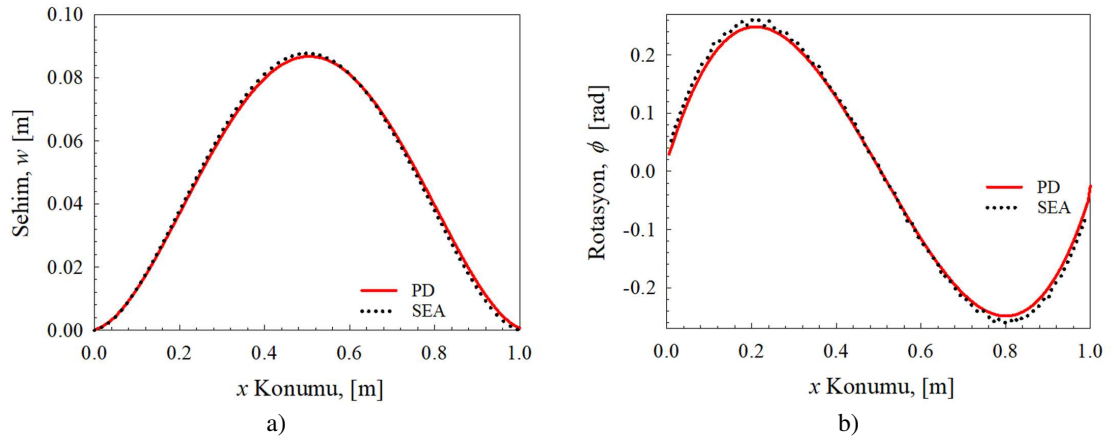
Çizelge 4.2: Sabit basınç yüküne maruz kalan ortotropik plakaların malzeme özellikleri.

Problem no	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G$ (GPa)
1	200	20	75
2	90	50	33.75

Şekil 4.17a ve Şekil 4.17b’de yer almaktadır. Plakanın ortasında meydana gelen maksimum sehim değeri PD ile  $w = 0.87$  m, SEA ile  $w = 0.88$  m olarak elde edilmiştir. İki ucu ankastre olan bu plakada rotasyon dağılımı, plakanın merkezine göre antisimetrik bir dağılıma sahiptir. Plaka üzerinde görülen maksimum rotasyon PD ile  $|\phi| = 0.249$  radyan, SEA ile  $|\phi| = 0.260$  radyan olarak hesaplanmıştır.

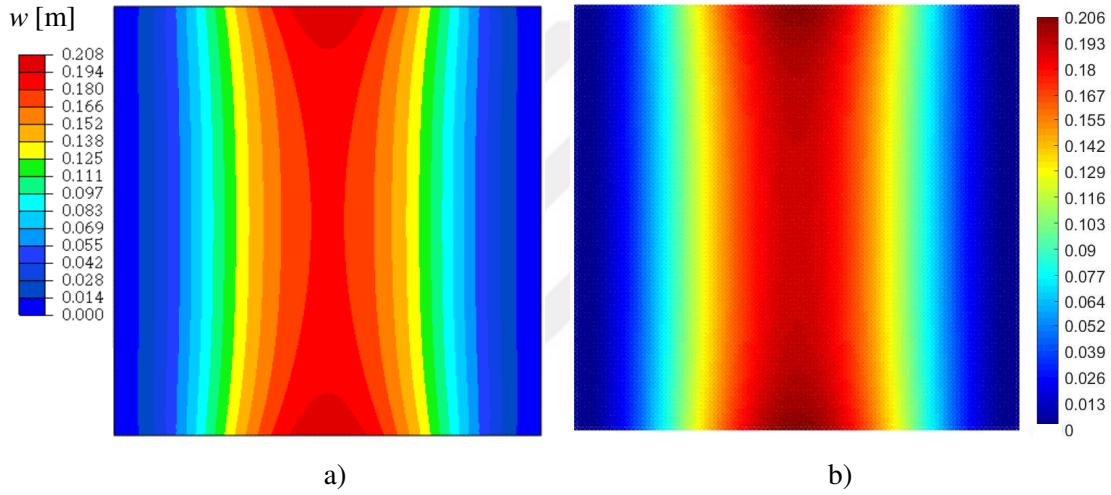


Şekil 4.16: Sabit basınç etkisindeki 1. ortotropik plakanın sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.

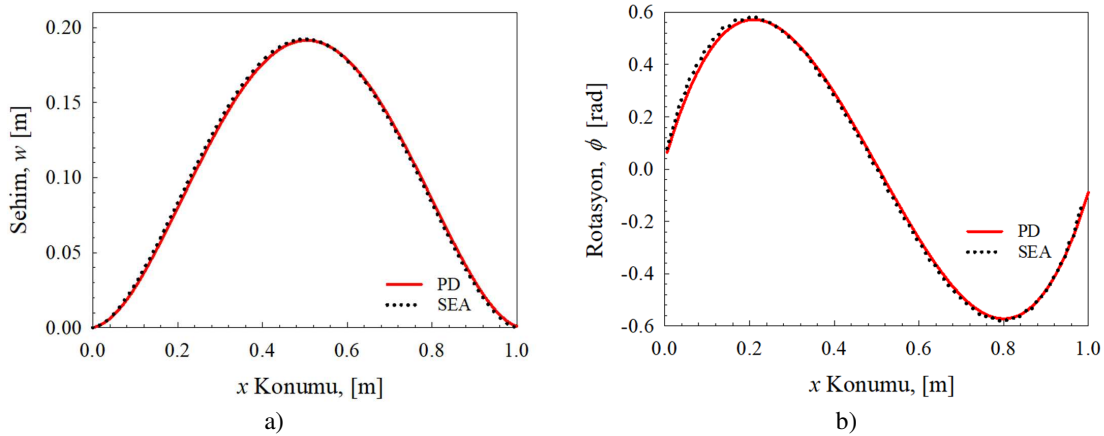


Şekil 4.17: Sabit basınç etkisindeki 1. ortotropik plakanın  $y=0$  doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği.

Sabit basınç yüklemesi altında iki kenarı ankastre olan 2. plakanın malzeme özellikleri  $E_1 = 90$  GPa,  $E_2 = 50$  GPa ve  $G = 33.75$  GPa dır. Bu plaka üzerinde SEA ve PD ile hesaplanan sehim dağılımı sırasıyla Şekil 4.18a ve Şekil 4.18b'de yer almaktadır.  $y = 0$  doğrultusu üzerinde hesaplanan sehim ve rotasyon değerleri ise Şekil 4.19a ve Şekil 4.19b'de verilmiştir. Plakanın ortasında görülen maksimum sehim değeri PD ve SEA ile  $w = 0.192$  mm olarak hesaplanmıştır. Aynı doğrultuda görülen maksimum rotasyon değeri ise PD ile  $|\phi| = 0.572$  radyan, SEA ile  $|\phi| = 0.580$  radyan olarak hesaplanmıştır. Sabit basınç yüklemesi altındaki her iki ankastre plaka için de PD ile elde edilen sehim ve rotasyon değerleri SEA ile elde edilen sonuçlar ile uyumludur.



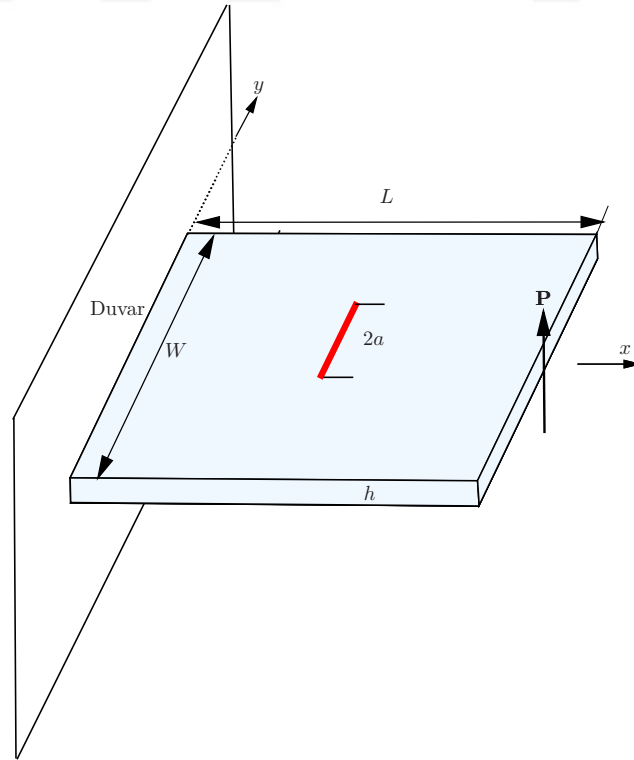
Şekil 4.18: Sabit basınç etkisindeki 2. ortotropik plakanın sehim dağılımı: a) SEA, b) PD çözümü.



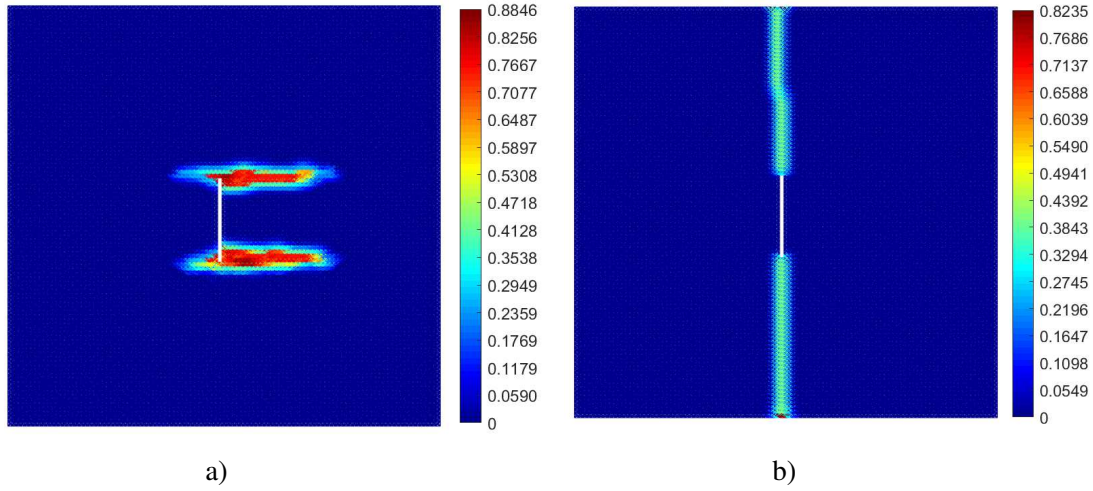
Şekil 4.19: Sabit basınç etkisindeki 2. ortotropik plakanın  $y=0$  doğrultusundaki a) sehim b) rotasyon grafiği.

#### 4.4.3 Merkezi Çatlak İçeren Mindlin Plakasında Hasar Oluşumu

Bu kısımda enine kesme yükü ve sabit basınç yüklemeleri altında ortotropik plakada çatlak ilerlemesi incelenmiştir. Plakalar  $2a = 20$  mm boyutunda merkezi çatlak içermektedir. Diğer geometrik özellikler Bölüm 4.4.1 ve Bölüm 4.4.2’de incelenen problemler ile aynıdır. Malzeme özellikleri ise bu bölümdeki tüm problemler için  $E_1 = 300$  GPa,  $E_2 = 16$  GPa ve  $G = 60$  GPa dır. Denklem (4.81-4.83)’de tanımlanmış olan kırılma tokluğu değerleri ise  $G_I^f = 5 \times 10^{-3}$  MPa.m,  $G_I^m = 5 \times 10^{-4}$  MPa.m ve  $G_{III} = 2 \times 10^{-3}$  MPa.m olarak tanımlanmıştır. Öncelikle Şekil 4.20’da görülen enine kesme yüklemesi altındaki  $\theta_f = 0^\circ$  ve  $\theta_f = 90^\circ$  fiber yönündeki plakalarda çatlak ilerlemesi incelenmiştir.  $\theta_f = 0^\circ$  fiber yönüne sahip plakada için hasar konturları Şekil 4.21a’da görülmektedir. Bu plakada oluşan çatlağın yapıda var olan çatlağa dik yönde ilerlediği görülmektedir.  $\theta_f = 90^\circ$  fiber yönüne sahip plaka için hasar konturları ise Şekil 4.21b’de görülmektedir.  $\theta_f = 90^\circ$  fiber yönüne sahip plakada oluşan çatlağın ise yapıda var olan çatlağa dik yönde olduğu görülmektedir. Her iki plaka için de çatlak ilerlemesinin fiber oryantasyonu ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 4.20: Enine kesme yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakası.

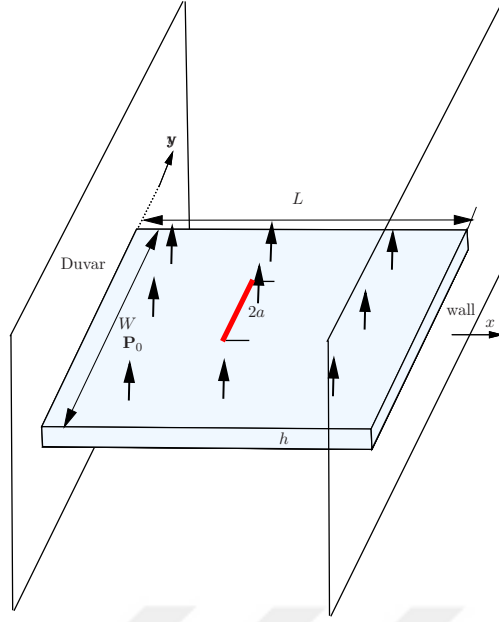


Şekil 4.21: Enine kesme kuvvetine maruz kalan a)  $0^\circ$  ve b)  $90^\circ$  fiber yönündeki plakalarda çatlak ilerlemesi.

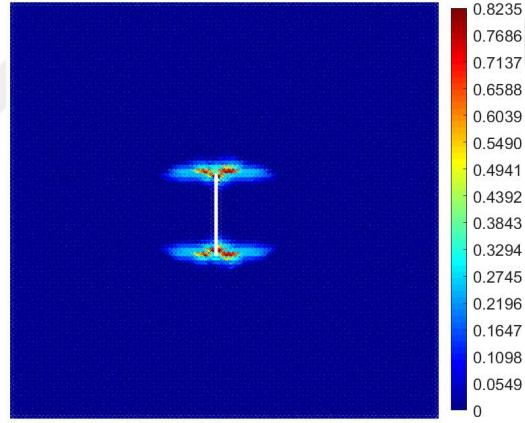


Şekil 4.21a'da yer alan  $\theta_f = 0^\circ$  fiber yönü için çatlak ilerlemesinin simetrik olmadığı gözlemlenmektedir. Bu durumun nedeni ise plakanın kenarına uygulanan kesme kuvvetinin plaka üzerinde yarattığı eğilme momentinin, artan  $x$  koordinatı ile artmasıdır. Bir başka deyişle, bu problemde plakanın maruz kaldığı yükleme simetrik değildir. Bu nedenle plakada meydana gelen sehim,  $w$  ve rotasyon  $\phi$  de  $x$  koordinatı ile birlikte artmaktadır. Artan deformasyon nedeniyle plakada meydana gelen eğrilik,  $\kappa$  ve enine kesme açısı  $\varphi$  de aynı yönde artmaktadır. Denklem (4.78) ve Denklem (4.79)'de tanımlanan hasar fonksiyonlar  $\mu_e$  ve  $\mu_k$  plakada oluşan eğrilik,  $\kappa$  ve enine kesme açısı  $\varphi$  değerlerine bağlıdır. Bu fikrin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, Şekil 4.22'de gösterildiği üzere plakanın merkezine göre simetrik bir yükleme koşulu olan sabit basınç yüklemesi altında  $\theta_f = 0^\circ$  fiber yönlü plakada çatlak ilerlemesi incelenmiştir. Her iki ucu ankastre olan plakadaki tüm malzeme noktalarına  $\hat{\mathbf{b}} = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \mathbf{k}$  kuvvet yoğunluğu uygulanmıştır. Bu durumda elde edilen hasar konturları Şekil 4.23'da yer aldığı gibi simetriktir.





Şekil 4.22: Sabit basınç yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakası.



Şekil 4.23: Sabit basınç yükü etkisindeki merkezi çatlak içeren Mindlin plakasında  $\theta_f = 0^\circ$  yönlü plakada çatlak ilerlemesi.

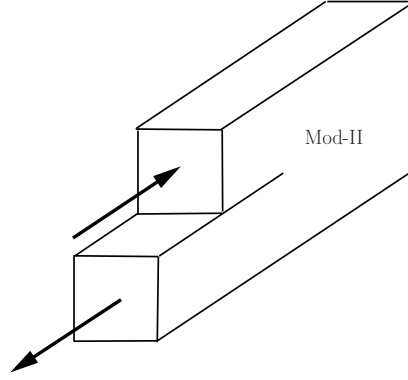


## 5. MOD II ARAYÜZ KIRILMALARININ PD İLE İNCELENMESİ

Bu bölümde, mod II yüklemesi altındaki çatlakların dinamik olarak ilerlemesi, ABAQUS programına entegre edilen bağ bazlı PD yaklaşımı ile incelenmiştir. Bölüm 2.3’de anlatıldığı üzere, mod I yüklemesi altında yalnızca Rayleigh altı çatlak ilerlemesi mümkündür. Mod II yüklemesi altında ise hem Rayleigh altı, hem de intersonik çatlak ilerlemesi görülebilir. Bu nedenle bu bölümde saf mod II yüklemesi altında dinamik çatlak ilerlemesi problemi incelenmiştir. Saf mod II koşullarını elde etmek için, Rosakis vd. (1999) tarafından gerçekleştirilen deneyde kullanılan numune olan, bir kenarında çentik içeren yapıştırılmış Homalit plakalar kullanılmıştır. Yapılan çalışmada bağ bazlı PD ile modellenen numuneye zamana bağlı hız sınır koşulu uygulanarak çarpma etkisi modellenmiştir. PD simülasyonlar farklı kırılma toklukları ve çarpma hızları için parametrik olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen kararlı haldeki çatlak ilerleme hızlarının Rayleigh dalga hızından düşük, ya da kesme dalgası hızının 1.57 katı ile genleşme dalgası hızı arasında olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçların literatürde yer alan deneysel ve nümerik çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

### 5.1 Mod II Kırılmaları için Temel Tanımlar ve Teori

Kırılma mekaniği literatüründe kesme modu olarak da bilinen mod II yükleme koşulu Şekil 5.1’da görselleştirilmiştir. Mod II koşulunda çatlak yüzeyleri plakanın orjinal düzleminde kalarak birbirine zıt yönde kaymaktadırlar.



Şekil 5.1: Mod II yüklemesi (Kesme Modu).

### 5.1.1 Karakteristik Dalga Hızları

Dinamik kırılma mekaniğinde, mod II yüklemesi için çatlak ilerleme hız limitleri genleşme dalgası hızı,  $c_D$ , kesme dalgası hızı,  $c_S$  ve Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  cinsinden ifade edilmektedir. Bu hız değerleri malzeme özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Bu bölümde bu dalga hızlarının fiziksel anlamını ortaya koymak amacıyla matematiksel çıkarımı yapılmıştır.

KSOM yaklaşımında  $x$  noktasının  $t$  anındaki gerinim tensörü,  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$  şu şekilde yazılabilir [66]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (5.1)$$

burada  $\mathbf{u}$  deformasyon vektörünü temsil etmektedir. Gerilme tensörü,  $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$  ise şu şekilde yazılır:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \lambda \varepsilon_{kk} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.2)$$

burada  $\mathbf{I}$  birim vektörü,  $\lambda$  ve  $G$  ise Lamé sabitlerini ifade etmektedirler. Lamé sabitleri şu şekilde hesaplanır:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \text{düzlem gerinim koşulu} \\ \frac{Ev}{(1-\nu^2)}, & \text{düzlem gerilme koşulu} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (5.4)$$

Denklem (5.2) ve Denklem (5.4) kullanılarak Denklem (3.1)'de yer alan lineer momentumun korunumu şu formda yazılabilir:

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2\mathbf{u} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (5.5)$$

Helmholtz teoremi kullanılarak, Denklem (5.5)'de yer alan  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$  ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (5.6)$$

Denklem (5.6) kullanılarak Denklem (5.5) yeniden düzenlendiğinde Denklem (5.7) elde edilir [42].

$$c_D^2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_S^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (5.7)$$

burada  $c_D$  ve  $c_S$  şu şekilde tanımlanır:

$$c_D = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad (5.8)$$

$$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (5.9)$$

Denklem (5.7)'da yer alan denklem incelendiğinde  $\mathbf{u}$  deformasyon vektörüne ait, rotasyon içermeyen, genişleme deformasyon bileşeninin  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , genişleme içermeyen rotasyon bileşeninin ise  $(\nabla \times \mathbf{u})$  olduğu görülmektedir. Bu nedenle yapıda ilerleyen dalganın genişleme bileşeninin ilerleme hızı  $c_D$ , rotasyon bileşeninin ilerleme hızı ise  $c_S$  dir. Bu bileşenler literatürde genişleme dalgası ve kesme dalgası olarak da isimlendirilmektedir. Genişleme dalgaları ve kesme dalgaları sınırsız bir katının içerisinde ilerleyen elastik dalga türleridir [76]. Fakat katı ortamını sınırlayan yüzeyler olması durumunda, Rayleigh (1885) tarafından öne sürüldüğü üzere, bu yüzeylerde elastik yüzey dalgaları oluşmaktadır [77]. Rayleigh dalgası olarak isimlendirilen bu dalga tipinin hızı,  $c_R$  genişleme dalgası hızı,  $c_D$  ve kesme dalgası hızı,  $c_S$  cinsinden şu şekilde hesaplanır [42]:

$$c_R = c_S \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu}. \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Kırılma Mekaniğinde Enerji Yaklaşımı

Dinamik kırılmalar sonucu oluşması muhtemel maksimum çatlak ilerleme hızlarının incelenmesi açısından, Griffith (1921) tarafından öne sürülen kırılma mekaniği enerji yaklaşımı önemli rol oynamaktadır [2]. Griffith yaklaşımına göre yeni çatlak yüzeylerinin oluşması için yapıya dışarıdan uygulanan iş ile yapıda depolanan iç enerji arasındaki farkın yeni çatlak yüzeyleri oluşması için yeterli olması gerekmektedir. İlerlemekte olan bir çatlak için enerjinin korunumu prensibi şu şekilde yazılır:

$$\Delta W = \Delta E + \Delta K + \Delta \Gamma, \quad (5.11)$$

burada  $W$  dış kuvvetler tarafından yapılan işi,  $E$  iç enerjiyi,  $K$  kinetik enerjiyi ve  $\Gamma$  ise çatlak yüzeyinin artması için harcanan enerji miktarını temsil etmektedir. İç enerji,  $E$  elastik ve plastik gerinim enerjilerinin toplamına eşittir. Çatlak ilerlemesi fiziksel olarak tersinir bir işlem değildir. Bu nedenle enerji değeri,  $\Gamma$  pozitif ve sonlu olmalıdır. Dışarıdan uygulanan iş,  $W$  ile yapıda depolanan enerji,  $E$  arasındaki farkın birim çatlak alanı,  $A$ 'ya göre değişimi kritik gerinim enerjisi salıverme oranı,  $G_c$  olarak tanımlanmaktadır. Bu durum matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$G_c = \frac{\partial}{\partial A} (W - U) = \frac{\partial \Gamma}{\partial A}. \quad (5.12)$$

Şekil 4.23'da görülen saf mod II yüklemesi için kritik enerji salıverme oranı  $G_{II}$  olarak adlandırılmaktadır. Kırılma mekaniğinde, mod II kırılma tokluğu olarak da bilinen, kritik gerilme yoğunluğu faktörü,  $K_{II}$  ile kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II}$  arasında şöyle bir ilişki mevcuttur:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad (5.13)$$

burada  $E'$  düzlem gerilme durumu için malzemenin elastik modülüne ( $E$ ), düzlem gerinim durumu için ise ( $E/(1 - \nu^2)$ ) değerine eşit olan malzemenin eşdeğer modülüdür.

### 5.1.3 Mod II Çatlak Ucu Hızı Teorik Limitleri

Denklem (5.12)'de geçen kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II}$  ve kırılma tokluğu,  $K_{II}$  değerleri denge durumundaki çatlaklar için lineer elastik kırılma mekaniği çerçevesinde

ele alınan değerlerdir [78]. Denge durumunda durağan olarak ilerlemekte olan çatlaklarda, enerji salıverme oranı ve kırılma tokluğu değerleri, çatlağın ilerleme hızından bağımsızdır.  $v_c$  hızında ilerleyen dinamik mod II çatlağı için kritik mod II enerji salıverme oranı,  $G_{II d}$  ile durağan koşuldaki mod II çatlağı için kritik gerilme yoğunluğu faktörü,  $K_{II}$  arasındaki ilişki şu şekilde tanımlanır: [43, 79]:

$$G_{II d} = g(v_c) \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad (5.14)$$

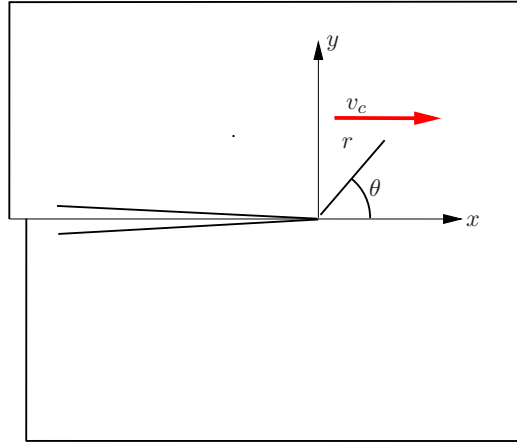
burada  $K_{II}$  değeri Denklem (5.13)'de geçen denge halinde ilerleyen çatlaklar için geçerli olan kritik gerilme yoğunluğu faktörüdür. Denklem (5.14)'da geçen  $g(v_c)$  değeri, durağan mod II çatlakları için kritik gerilme yoğunluğu faktörü ile dinamik mod II çatlakları için kritik enerji salıverme oranı arasındaki ilişkiyi belirleyen çatlak hızına bağlı bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun değeri  $g(v_c = 0)$  için 1 iken,  $g(v_c = c_R)$  için bu fonksiyonun değeri 0 olmaktadır [79]. Bu nedenle, dinamik mod II çatlakları Rayleigh altı hız rejimi olarak adlandırılan ( $v_c < c_R$ ) bölgede kararlıdır. Denklem (5.14)'de yer alan  $g(v_c)$  fonksiyonu Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  ile kesme dalgası hızı  $c_S$  arasındaki bölge için negatiftir. Bu durumda Denklem (5.14)'de yer alan dinamik mod II çatlakları için kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II d}$  matematiksel olarak negatif değerlere gitmektedir. Bu durum, çatlak ilerlemesinin tersinir bir işlem olmaması nedeniyle fiziksel olarak anlamlı değildir. Bu durum Denklem (5.11)'de yer alan, çatlak oluşumu sırasındaki enerjinin korunumu prensibi ile de çelişmektedir. Bu nedenle Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  ile kesme dalgası hızı,  $c_S$  aralığında mod II yüklemesine maruz kalan çatlağın kararlı bir hıza sahip olarak ilerlemesi mümkün değildir. [42, 43, 79].

Rayleigh altı bölgede ilerleyen mod II çatlakları için çatlak ucunda oluşan tekil gerilmeler Freund (1998) tarafından şu şekilde elde edilmiştir [42]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \frac{K_{II} \Sigma_{ij}(\theta, v_c)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (5.15)$$

burada  $\Sigma_{ij}(\theta, v_c)$ ,  $v_c$  hızında ilerleyen bir mod II çatlağı için tekil gerilme bileşenlerinin Şekil 5.2'de gösterilen  $\theta$  açısına göre değişimini temsil eden bir fonksiyondur [42]. Bu fonksiyon ile ilgili detaylar Freund (1998) tarafından yazılan kitapta mevcuttur [42]. Denklem (5.15)'de yer alan, Rayleigh altı hız bölgesi için tekil gerilme fonksiyonu incelendiğinde, Rayleigh altı bölgede tekillik üssünün  $1/2$  olduğu görül-

mehtedir.



Şekil 5.2:  $v_c$  hızında ilerleyen dinamik mod II çatlak

İntersonik bölge için ise çatlak ucundaki tekil gerilmeler şu şekilde yazılır [79]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = K_{II}^* \left( \frac{l_{ij}(\theta, \alpha_l, \alpha_s)}{r^q} - \frac{m_{ij}(\alpha_l, \alpha_s)}{x - \alpha_s |y|^q} H(-x - \alpha_s |y|) \right), \quad (5.16)$$

burada  $K_{II}^*$ , intersonik olarak ilerleyen bir mod II çatlak için dinamik gerilme yoğunluğu faktörüdür. Denklem (5.16)'de yer alan  $l_{ij}$ ,  $v_c$  hızında ilerleyen bir mod II çatlak için tekil gerilme bileşenlerinin Şekil 5.2'de gösterilen  $\theta$  açısına göre değişimini temsil eden bir fonksiyondur.  $\alpha_l$ ,  $\alpha_s$  ve  $m_{ij}(\alpha_l, \alpha_s)$  ise çatlak ilerleme hızı,  $v_c$  değerine bağlı bir büyüklüklerdir. Denklem (5.16)'de yer alan  $H(-x - \alpha_s |y|)$  ifadesi ise Heaviside merdiven fonksiyonudur [79]. İntersonik bölgede tekillik üssü Denklem (5.16)'de geçen  $q$  değeridir ve şu şekilde hesaplanır [42, 48, 79]:

$$q(v_c) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{4\alpha_l \alpha_s}{(1 - \alpha_s^2)^2}. \quad (5.17)$$

Denklem (5.16) ve Denklem (5.17)'da yer alan  $\alpha_l$  ve  $\alpha_s$  fonksiyonları şu şekilde tanımlanır [79]:

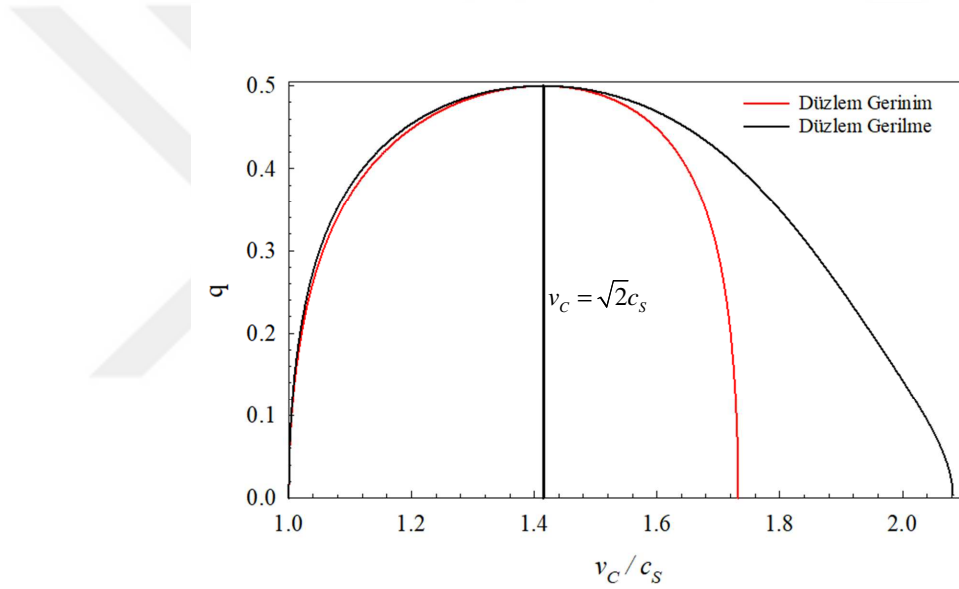
$$\alpha_l = \left( 1 - \frac{v_c}{c_D} \right)^2, \quad (5.18)$$

$$\alpha_s = \left( \frac{v_c^2}{c_s^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (5.19)$$

İntersonik bölge için tekillik üssü,  $q$  değeri incelendiğinde, çatlak hızına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Rayleigh altı bölge için tekillik üssü 1/2 olarak sabittir. İnter-



sonik çatlaklar için ise tekillik üssü,  $q$  değerinin düzlem gerilme ve düzlem gerinim koşulları için intersonik çatlak hızına bağlı değişimi Şekil 5.3’de görülmektedir [79]. Hem düzlem gerinim hem de düzlem gerilme koşulunda, çatlak hızı  $c_S$  değerinden  $\sqrt{2}c_S$  değerine arttığında  $q = 0$  değerinden başlayarak, monotonik olarak artmakta ve  $q = 1/2$  değerine ulaşmaktadır.  $\sqrt{2}c_S$  ile  $c_D$  aralığında ise tekillik üssü değeri monotonik olarak azalarak  $q = 0$  değerine düşmektedir [79]. Burada  $\sqrt{2}c_S$  intersonik hız değerinin özelliği,  $\sqrt{2}c_S$  değerinde ilerleyen çatlaklar için tekillik üssünün, Rayleigh altı bölgede ilerleyen çatlaklar ile aynı olmasıdır. İntersonik bölgede çatlak ilerlemesi için gerekli enerji değerleri için de en yüksek enerji değeri yine  $\sqrt{2}c_S$  hızı ile ilerleyen çatlaklar için görülmektedir [42].



Şekil 5.3: İntersonik tekillik üssünün çatlak hızına göre değişimi.

Literatürde yer alan, intersonik olarak ilerleyen mod II çatlakları için tekil gerilme alanlarının çözümü, intersonik çatlak ilerlemesinin mümkün olduğunu göstermektedir [42, 43, 47, 48, 79]. İntersonik bölgede, tekillik üssünün en yüksek değere ulaştığı hız olması nedeniyle,  $\sqrt{2}c_S$  değerinde çatlak hızının kararlı bir şekilde ilerlemesi beklenmektedir. Andrews (1976) ve Burridge (1979) tarafından yapılan, mod II çatlaklarının kararlılığının değerlendirildiği çalışmalarda ise intersonik bölgede,  $\sqrt{2}c_S$  ile  $c_D$  aralığında kararlı intersonik çatlak ilerlemesinin mümkün olduğu öne sürülmüştür [49, 50]. Tüm hız rejimleri için kararlı mod II çatlak ilerlemesinin mümkün olduğu aralıklar Şekil 5.4’de görülmektedir.



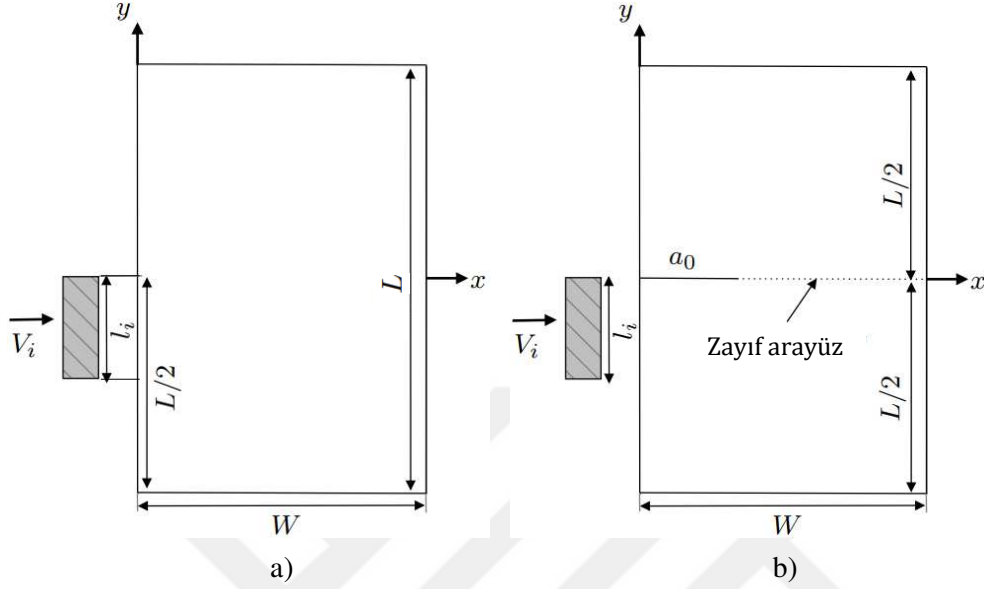
## 5.2 Dinamik Mod II Yükleme Altında Çatlak İlerleme Problemi

Deneysel olarak saf mod II çatlaklarının lineer elastik malzemelerde dinamik olarak ilerlemesi ilk kez Rosakis vd. (1999) tarafından deneysel olarak incelenmiştir [56]. Bu deneysel çalışmada iki adet Homalit plaka yapıştırılarak bir numune elde edilmiştir. Homojen malzemelerde mod II çatlakları ilerlerken, çatlak yolu çatallaşarak karma modlu çatlaklar meydana gelmektedir [50, 51]. Çatlak yolunun çatallaşmasını önleyerek saf mod II koşullarının elde edilmesi için, plakaların yapıştırılarak zayıf bir arayüz oluşturulması gerekmektedir. Rosakis vd. (1999) plakaları yapıştırmak için, Homalit'in elastik modülüne yakın elastik modüle sahip bir yapıştırıcı kullanmışlardır. Bu sayede, elastik özellikler bakımından homojen, kırılma tokluğu açısından ise ana malzemeye oranla düşük bir dayanıma sahip bir arayüz elde etmişlerdir. Rosakis vd. (1999) bu numunenin kenarına uyguladıkları çarpma yükü etkisiyle yapışma arayüzünde gerçekleşen intersonik kırılmaları deneysel olarak gözlemlemiştir [56]. Bu problem daha sonra, Needleman (1999) ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından KBM ile nümerik olarak incelenmiştir. Bu bölümde Rosakis vd. (1999) tarafından deneysel olarak incelenen mod II çatlak ilerleme problemi, aynı malzeme ve sınır koşulları kullanılarak PD yöntem ile incelenmiştir.

### 5.2.1 Numune Geometrisi ve Sınır Koşulları

Bu bölümde iki tip problem incelenmiştir. İlk olarak, Bölüm 5.1.1'de belirtilen malzeme özelliklerine bağlı karakteristik dalga hızlarının PD yöntem ile doğrulanması için elastodinamik analizler gerçekleştirilmiştir. Bu problem için Şekil 5.6a'da yer alan  $L = 150$  mm uzunluğuna,  $W = 75$  mm genişliğine sahip Homalit bir plakaya  $l_i = 50$  mm yüksekliğine sahip rijit bir cismin çarpması analiz edilmiştir. Bu problemde hasar davranışı içermeyen lineer elastik PD malzeme modeli kullanılarak, elastik dalgaların ilerlemesi incelenmiştir. Daha sonra ise Şekil 5.6b'de yer alan,  $L/2 = 75$  mm uzunluğuna,  $w = 75$  mm genişliğine sahip iki adet Homalit plakanın yapıştırılmasıyla elde edilen numuneye  $l_i = 50$  mm yüksekliğine sahip rijit bir cismin çarpması incelenmiştir. Plakaların arayüzünde gerçekleşen dinamik çatlak ilerlemesi PD yöntem ile analiz edilmiştir. Dinamik kırılma analizlerinde kullanılan numune, Şekil 5.6b'de görüldüğü üzere  $a_0 = 25$  mm uzunluğunda bir çatlak içermektedir. Plakaların arayüzünde olan bu

ilk çatlak, fiziksel olarak yapışmamış bölge olarak değerlendirilebilir.

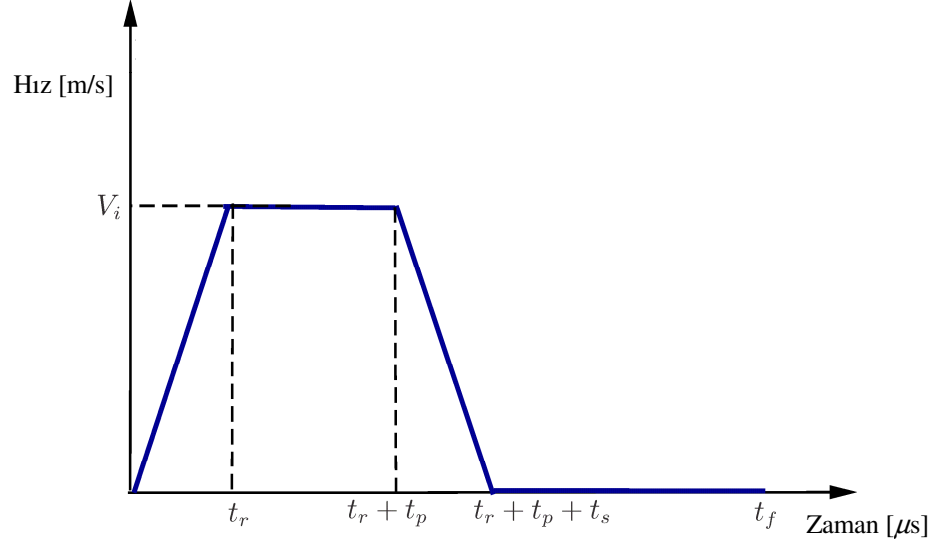


Şekil 5.6: Homalit numuneleri: a) elastik dalga ilerlemesi b) mod II çatlak ilerlemesi problemleri.

Her iki problemde de çarpma yükü Şekil 5.6'de görüldüğü üzere  $x = 0$  ve  $-50 \leq y \leq 0$  koordinatlarındaki malzeme noktalarına, zamana bağlı bir hız sınır koşulu,  $V_i$  olarak şu şekilde tanımlanmıştır:

$$V_i(t) = \begin{cases} \frac{V_i t}{t_r}, & 0 \leq t < t_r \\ V_i, & t_r \leq t < t_r + t_p \\ \frac{V_i(-t + t_r + t_p + t_s)}{t_s}, & t_r + t_p \leq t \leq t_r + t_p + t_s \\ 0, & t_r + t_p + t_s < t < t_f, \end{cases} \quad (5.21)$$

burada  $t_r$ ,  $t_s$ ,  $t_p$  sırasıyla yükselme, düşüş sürelerini ve plato süresini,  $t_f$  ise analizlerin sonlandırma süresini temsil etmektedir. Analizlerin başlangıç anında ( $t = 0$ ) plakalar durağan haldedir. Denklem (5.21)'de yer alan zamana bağlı hız sınır koşulu, Şekil 5.7'de görselleştirilmiştir.



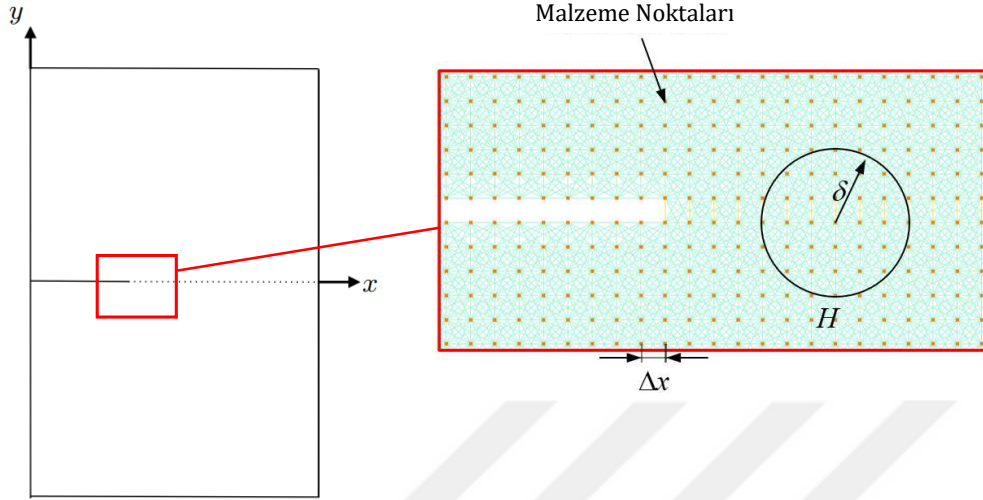
Şekil 5.7: Zamana bağlı hız sınır koşulu.

### 5.2.2 Malzeme Özellikleri ve Modelleme

Homalit, gevrek polyester bir malzeme olması nedeniyle, deneysel olarak gevrek çatlakların incelendiği çalışmalarda tercih edilen bir malzemedir [44, 56]. Bu çalışmada malzemenin elastik modülü  $E = 5.2$  GPa, Poisson oranı,  $\nu = 1/3$  ve kütle yoğunluğu,  $\rho = 1236$  kg/m<sup>3</sup> olarak alınmıştır [59]. Bu özellikler ile Denklem (5.8-5.10)'a göre, karakteristik dalga hızları şu şekilde elde edilir:  $c_D = 2167$  m/s,  $c_S = 1251$  m/s,  $c_R = 1165$  m/s.

Bu çalışmada iki boyutlu düzlem gerilme kabulüne uygun bağ bazlı PD kullanılmıştır. Bağ sabiti,  $c$  değeri Denklem (3.24)'de verilmiştir. Bölüm 3.2'de açıklandığı üzere, düzlem gerilme koşulu için Poisson oranı  $1/3$  olarak alınmıştır. Bölüm 3.4'te anlatılan yöntem kullanılarak, bağ bazlı PD teori ABAQUS programına entegre edilmiştir. Şekil 5.6b'de yer alan dinamik çatlak ilerlemesi probleminde malzeme arayüzünde yer alan bağlar için Denklem (3.27)'de yer alan PMG hasar modeli tanımlanmıştır. Şekil 5.8'de yakınlaştırılmış görüntüsü yer alan PD ağ örgüsü, MATLAB programında oluşturulmuştur. Analizlerde, ağ örgüsü boyutu  $\Delta x = 0.15 - 1.0$  mm aralığında değişen modeller kullanılmıştır. Dinamik kırılmalar için Silling ve Askari (2005) tarafından önerildiği üzere, komşuluk yarıçapı  $\delta = 3\Delta x$  olarak alınmıştır. Analizler 16 GB RAM'e, 3.2 GHz Intel Xeon(R) işlemciye sahip HP-Z420 masaüstü iş istasyonunda 4 CPU ile

sonlandırma süresi,  $t_f = 30 \mu s$  alınarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan analizlerde analiz süresi boyunca eşit zaman aralıkları ile toplam 7500 adet deformasyon ve hız çıktısı kaydedilmiştir. Bu ayarlar ile yapılan analizler yaklaşık 70 dakika sürmektedir.



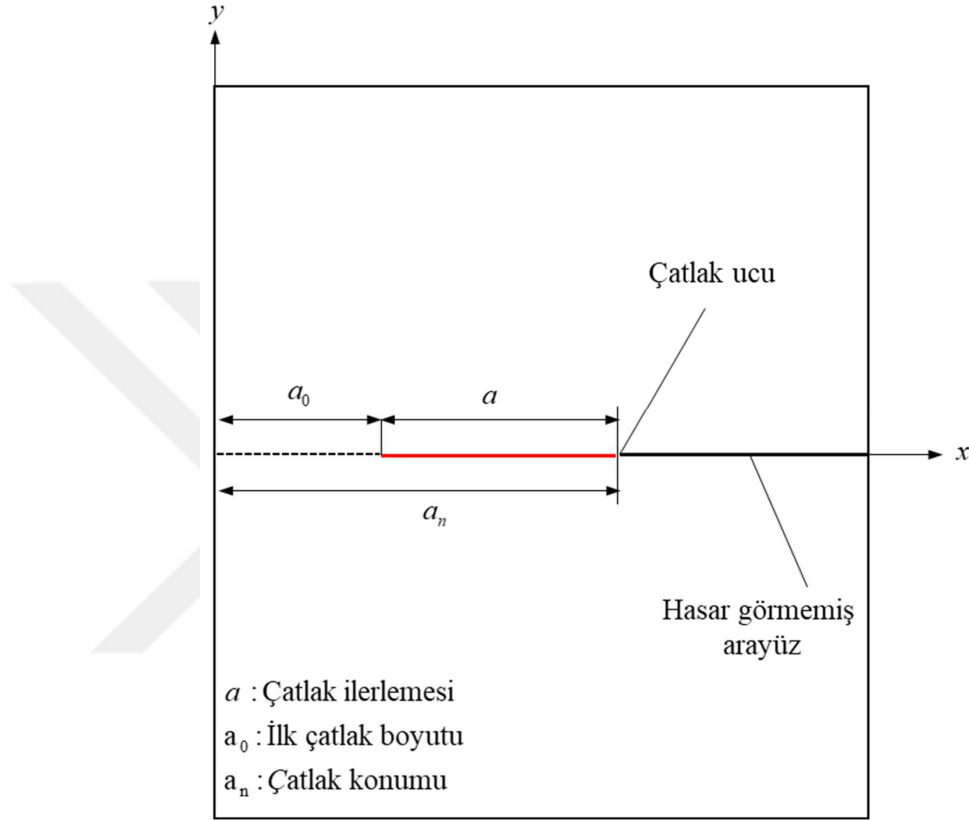
Şekil 5.8: İlk çatlak etrafındaki PD bağlarına ve malzeme noktalarına yakından görünüm.

### 5.3 Dinamik Mod II Yükleme PD Sonuçlar

İlk olarak Şekil 5.6a'da yer alan numune kullanılarak plakada oluşan genişleme dalgası hızı,  $c_D$  ve kesme dalgası hızı,  $c_S$  PD yöntem ile belirlenmiştir. Daha sonra, Şekil 5.6b'de yer alan numune ile malzeme arayüzünde çatlak ilerlemesi analizi gerçekleştirilmiştir. Öncelikle yakınsak çatlak ilerlemesi hızlarının elde edilmesi için PD ağ örgüsü boyutu yakınsama analizleri gerçekleştirilmiştir. Daha sonra ise çeşitli çarpma hızları ( $V_i$ ), kırılma toklukları ( $G_{II}$ ) ve plato süreleri ( $t_p$ ) için parametrik analizler gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar parçacık hız konturu, çatlak ucu konumu ve hızının zamana göre değişimi olarak sunulmuştur.

Yapılan analizlerde lokal hasar,  $\varphi$  Denklem (3.31)'ye göre tanımlanmıştır. Herhangi bir zamandaki çatlak konumu,  $a_n$ 'i belirlemek için lokal hasar fonksiyonu,  $\varphi$ 'nin eşik değeri,  $\varphi_0$  üzerinde olduğu malzeme noktaları belirlenmiştir. Bu malzeme noktaları arasındaki en büyük  $x$  koordinatı, çatlak ucu konumu,  $a_n$  olarak tanımlanmıştır. Yapılan analizlerde lokal hasar eşik değeri, Silling ve Askari (2005) tarafından tavsiye edildiği üzere  $\varphi_0 = 0.3$  olarak alınmıştır [14]. Çatlak ucu konumu  $a$ , Şekil 5.9'de gös-

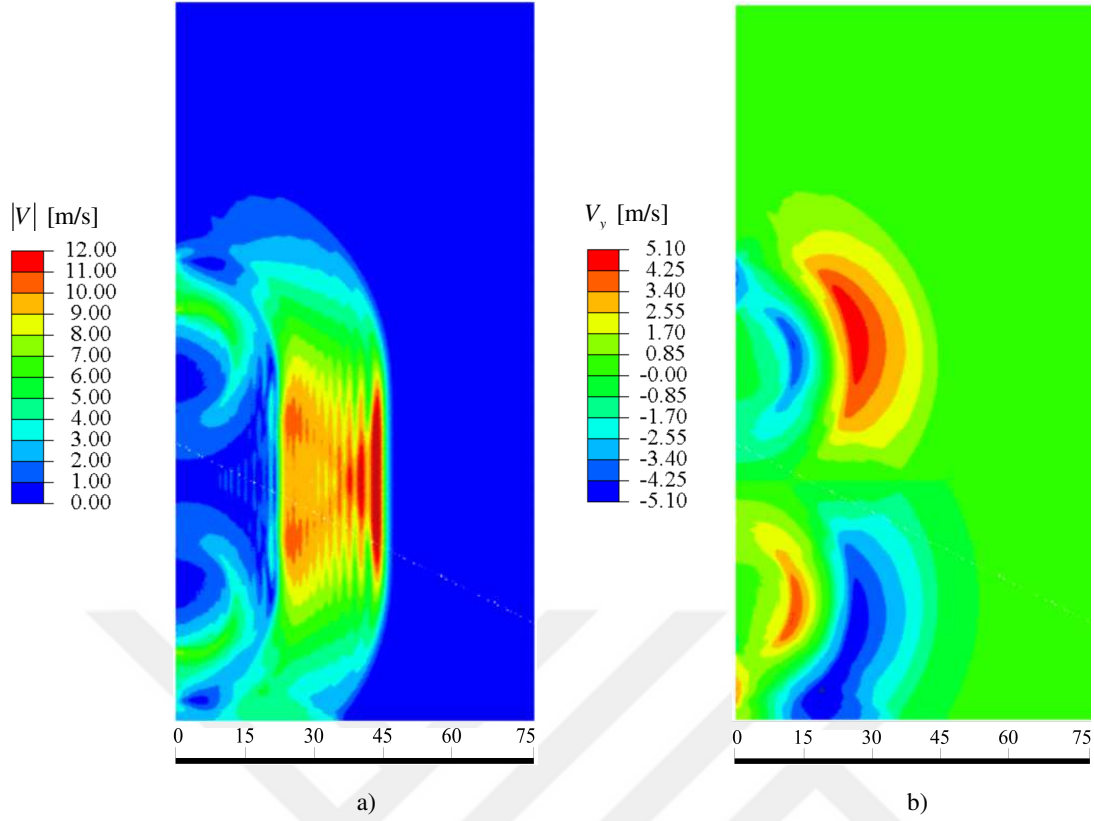
terildiği gibi, çatlakın plakanın kenarına olan toplam mesafesi olarak tanımlanmaktadır. Numune  $a_0$  büyüklüğünde çentik şeklinde bir ilk çatlak içermektedir. Herhangi bir  $t$  zamanındaki çatlak ilerlemesi,  $a$  ise Şekil 5.9'de gösterildiği şekilde, çatlak konumu,  $a_n$  ile ilk çatlak boyutu,  $a_0$  arasındaki fark olarak tanımlanır ( $a = a_n - a_0$ ).



Şekil 5.9: Çatlak ucu konumu,  $a_n$  ve çatlak ilerlemesi  $a$ .

### 5.3.1 Dalga İlerlemesi Analizleri

Şekil 5.6a'da yer alan plakaya, rijit bir cismin çarpması sonucu oluşan dalgaların ilerlemesi PD yöntem ile incelenmiştir. Bu bölümde Denklem (3.27)'de tanımlanmış olan hasar parametresi,  $\mu$  kullanılmamıştır. Plakanın lineer elastik davranışı incelenmiştir. Çarpma sınır koşulu Denklem (5.21)'e göre tanımlanmıştır. Çarpma hızı,  $V_i = 11$  m/s, çıkış ve iniş süreleri,  $t_r = t_s = 0.1$   $\mu$ s, plato süresi,  $t_p = 10$   $\mu$ s, analiz sonlandırma süresi,  $t_f = 30$   $\mu$ s olarak alınmıştır.



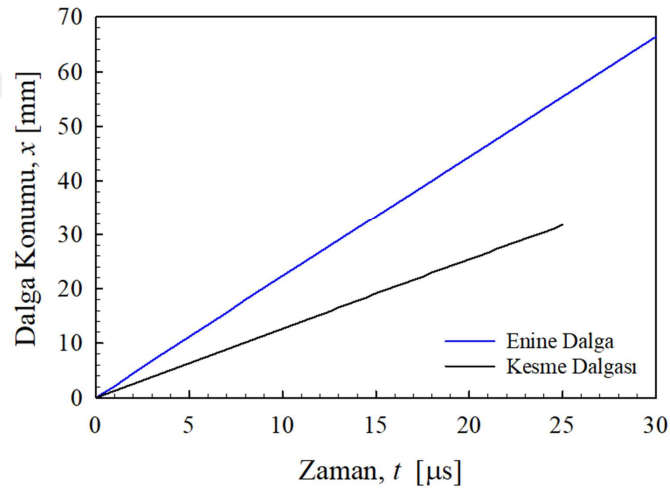
Şekil 5.10: Homalit plaka üzerinde oluşan a) genişleme, b) kesme dalgası konturları.

$t = 20 \mu s$  anındaki parçacık hız büyüklüğü ve  $y$  yönündeki parçacık hız bileşeni Şekil 5.10a ve Şekil 5.10b'de görülmektedir. Şekil 5.10a'da görülen dağılım genişleme dalgasının ilerlemesine, Şekil 5.10b'de görülen dağılım ise kesme dalgasının ilerlemesine denk gelmektedir.  $t = 20 \mu s$  anında her iki dalga incelendiğinde, Şekil 5.10a'da yer alan genişleme dalgası önünün, Şekil 5.10b'de yer alan kesme dalgası önüne oranla daha ileride olduğu görülmektedir. Bu durum teorik olarak genişleme dalgası hızı,  $c_D$ 'nin, kesme dalgası hızı,  $c_S$  den yüksek olması nedeniyle mantıklıdır. Ayrıca, Şekil 5.10b'de yer alan dağılımı incelendiğinde parçacık hareketinin simetrik olarak,  $+y$  ve  $-y$  yönlerinde gerçekleştiği görülmektedir. Dalga ilerleme yönüne dik yönde gerçekleşen bu hareket kesme dalgası ilerlemesinin karakteristik özelliğidir [80].

PD yöntem ile dalga hızları,  $c_D$  ve  $c_S$  in belirlenmesi için, dalga önünün zamana göre konumlarının belirlenmesi gerekmektedir. Genişleme dalgasının önünün konumunu belirlemek için, öncelikli olarak maksimum parçacık hızına sahip nokta bulunur. Daha sonra bu noktadan yatay olarak, dalga ilerleme yönündeki ( $+x$ ) malzeme noktaları taranır. Bu yönde ilerledikçe parçacık hız değerlerinin düştüğü görülür. Tutarlı olarak her



bir zaman adımıında dalga önünü belirlemek için 2 m/s parçacık hızı eşik değeri olarak belirlenmiştir. Parçacık hızının bu değerin altına düştüğü ilk malzeme noktasının  $x$  koordinatı, genişleme dalgası önü olarak belirlenmiştir. Kesme dalgası önü olarak  $y$  yönündeki en yüksek hız bileşenine sahip malzeme noktasının  $x$  koordinatı alınmıştır. Bu işlemler 1  $\mu$ s aralıklar ile tekrarlanarak Şekil 5.11’de yer alan genişleme dalgası önü ve kesme dalgası önünün zamana göre konumları elde edilmiştir. Burada görüldüğü üzere dalga konumlarının zamana göre değişimi lineerdir. Bu durum dalgaların sabit bir hızla ilerlediğini işaret etmektedir. Şekil 5.11’de yer alan doğruların eğimleri kullanılarak genişleme dalgası hızı,  $c_D = 2210$  m/s, kesme dalgası hızı ise  $c_S = 1265$  m/s olarak PD yöntem ile tahmin edilmiştir. Bu dalgalar için Denklem (5.8 - 5.9) kullanılarak elde edilen teorik değerler  $c_D = 2167$  m/s,  $c_S = 1251$  m/s dir. PD yöntem ile hesaplanan dalga hızları ile teorik dalga hızları arasındaki hata oranı, enine dalga için % 2, kesme dalgası için % 1.1 dir. Bu sonuçlar ışığında oluşturulan PD modelin, malzemenin karakteristik dalga ilerleme hızlarını yansıttığı görülmektedir.

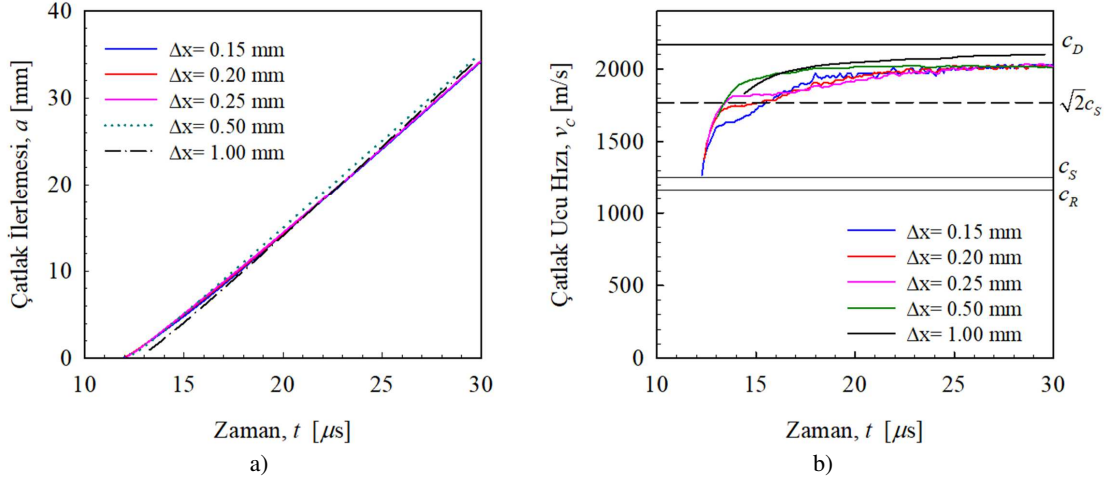


Şekil 5.11: Dalga konumu-zaman grafikleri: a) genişleme, b) kesme dalgası.

### 5.3.2 Çatlak İlerlemesi Yakınsama Analizleri

Yapıştırılmış Homalit plakalara uygulanan çarpma sonucu, yapışma arayüzünde dinamik çatlak ilerlemesi analizleri Şekil 5.6b’de yer alan numune kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu kısımdan itibaren, Denklem (3.27)’de yer alan hasar fonksiyonu,  $\mu$  kullanılarak çatlak ilerlemesi incelenmiştir. PD ağ örgüsü boyutu,  $\Delta x$  plaka üzerindeki

toplam malzeme noktalarının sayısını belirleyen bir parametredir. PD hareket denklemleri, malzeme noktaları üzerinde ayrıştırılarak çözülür. Bu nedenle ilk olarak, PD ağ örgüsü boyutunun çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'ye etkisi incelenmiştir. Yakınsama analizlerinde çarpma hızı,  $V_i = 15$  m/s ve kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II} = 1.2$  Pa.m olarak alınmıştır. Çarpma süresi,  $t_p = 10$   $\mu$ s, çıkış ve iniş süreleri,  $t_r = t_s = 0.1$   $\mu$ s olarak sabitlenmiştir. PD analizler,  $\Delta x = 1.00, 0.5, 0.25, 0.2, 0.15$  mm ağ örgüsü boyutları için yapılmıştır. Çatlak ilerlemesi,  $a$  Şekil 5.9'de görüldüğü üzere, çatlak ucu ile plakaların kenarındaki ilk çatlak,  $a_0$  arasındaki mesafedir. Tüm ağ örgüsü boyutları için çatlak ilerlemesi,  $a$ 'nın zamana göre değişimi Şekil 5.12'a da görülmektedir. Yoğun ağ örgüsü olarak nitelendirilebilecek  $\Delta x = 0.25, 0.2, 0.1$  mm için elde edilen çatlak ilerlemesi-zaman grafikleri örtüşmektedir. Seyrek ağ örgüsü boyutları,  $\Delta x = 1.00, 0.5$  mm için ise elde edilen çatlak ilerlemesi-zaman grafiklerinin diğer sonuçlardan saptığı görülmektedir. İncelenen ağ örgüsü büyüklükleri için, çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 5.12b'de yer almaktadır. Tüm  $\Delta x$  değerleri için, çatlak oluşumu  $c_R$ 'a oldukça yakın bir hızda, kararsız intersonik bölgede gerçekleşmektedir. Çatlak hızları hızlı bir şekilde artarak kararlı intersonik bölgeye geçmektedir.  $\Delta x = 1.00$  mm ağ örgüsü için çatlak hızı,  $v_c = 1.67c_S$  civarında kararlı hale gelirken, diğer 4 ağ örgüsü için  $v_c = 1.67c_S$  civarında kararlı hale gelmektedir. Bu 4 ağ boyutu içerisinde,  $\Delta x = 0.5$  mm için çatlak hızı oldukça erken ( $t \approx 15$   $\mu$ s) kararlı hale gelirken, diğer  $\Delta x$  değerleri için elde edilen çatlak hızları daha geç ( $t > 20$   $\mu$ s) kararlı hale gelmektedir. Tüm sonuçlar birlikte değerlendirildiğinde, azalan ağ örgüsü boyutu ile birlikte çatlak oluşumunun daha erken ve daha düşük bir ilk çatlak hızında gerçekleştiği görülmektedir.  $\Delta x \leq 0.5$  mm için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$  değerlerinin yakınsadığı görülmektedir. Denklem (3.30)'da yer alan kritik bağ gerinimi,  $s_c$ 'nin komşuluk yarıçapına ( $\delta = 3\Delta x$ ) bağlı olması nedeniyle, PD ağ örgüsü boyutu  $\Delta x$  değerine bağlı olarak değişmektedir. Çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak hızı,  $v_c$  değerlerinin farklı PD ağ örgüsü boyutları için yakınsaması, Denklem (3.30)'da belirtilen kritik bağ gerinimi modelinin geçerliliğini ortaya koymaktadır. Bu kısımdan itibaren yapılan çatlak ilerlemesi analizlerinde,  $\Delta x = 0.2$  mm olarak seçilmiştir.



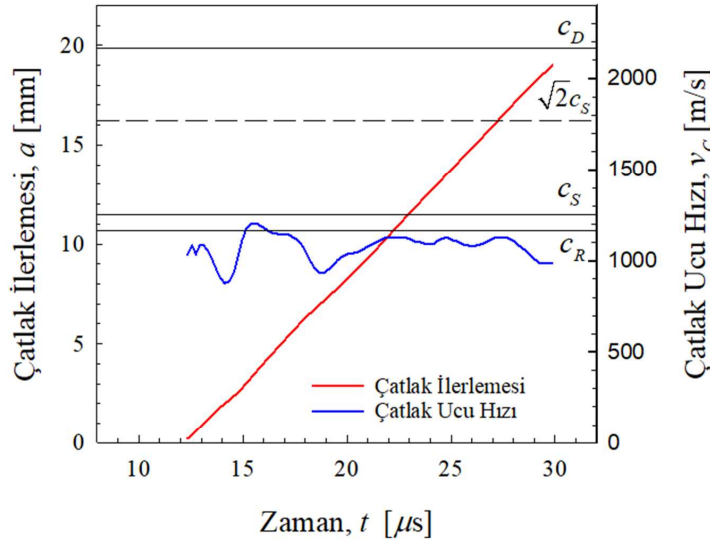
Şekil 5.12: Yakınsama analizleri: a) çatlak ilerlemesi ve b) çatlak ucu hızı grafikleri.

### 5.3.3 Çarpma Hızı, $V_i$ 'nin Çatlak İlerleyişine Etkisi

Bu bölümde değişken çarpma hızı,  $V_i$  ve sabit tokluk değeri,  $G_{II} = 1.2 \text{ Pa}\cdot\text{m}$  kullanılarak farklı hız rejimlerinde çatlak ilerlemesi incelenmiştir. Çarpma süresi,  $t_p = 10 \mu\text{s}$ , çıkış ve iniş süreleri,  $t_r = t_p = 0.1 \mu\text{s}$  olarak alınmıştır.  $V_i = 10 - 50 \text{ m/s}$  aralığında çarpma hızları için analizler gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde  $V_i = 10 \text{ m/s}$ ,  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  ve  $V_i = 25 \text{ m/s}$  çarpma hızları için parçacık hız dağılımları, çatlak ucu hızı ve çatlak ilerlemesinin zamana göre grafikleri sunulmuştur.  $V_i = 10 \text{ m/s}$ ,  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  ve  $V_i = 25 \text{ m/s}$  çarpma hızları etkisinde oluşan çatlak hızları sırasıyla Rayleigh altı, Rayleigh altı-intersonik geçişi ve intersonik özellikler göstermektedir. Parametrik çalışmada diğer çatlak hızları için elde edilen sonuçlar özet olarak Bölüm 5.4'de verilmiştir.

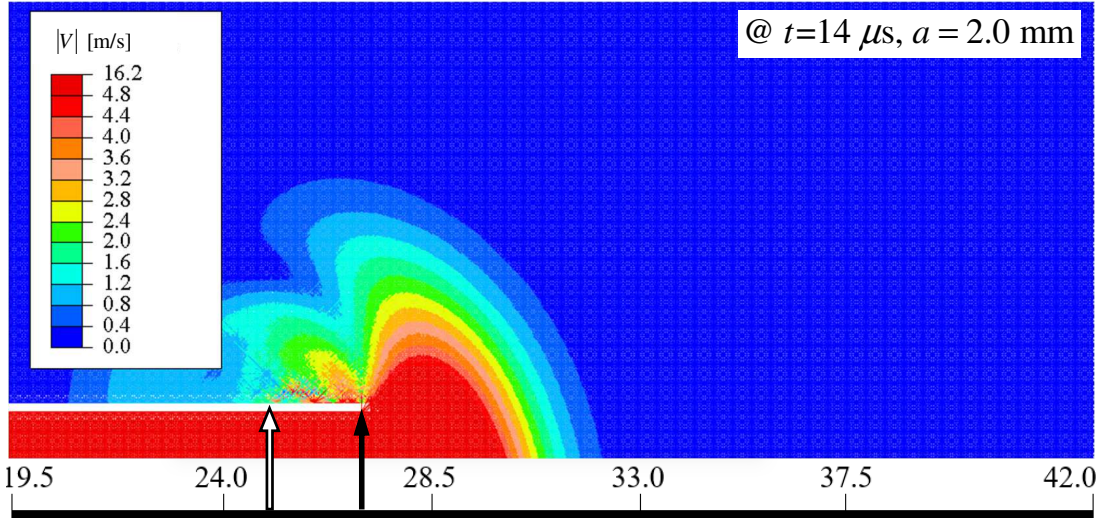
Çarpma hızı,  $V_i = 10.0 \text{ m/s}$  olduğunda çatlak ilerlemesi  $t = 12.3 \mu\text{s}$  anında Rayleigh altı bölgede gerçekleşmektedir. Şekil 5.13'de yer alan çatlak ilerlemesi,  $a$ 'nın zamana bağlı grafiği analiz süresi  $t_f = 30 \mu\text{s}$  boyunca yaklaşık olarak lineerdir. Çatlak ucu hızı,  $v_c$  ise Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  değerinin altında salınım göstermektedir.  $t = 14.0, 20.0, 30.0 \mu\text{s}$  zamanlarında oluşan parçacık hızı dağılımları Şekil 5.14a-c'de görülmektedir. Şekil 5.14a'da görülen parçacık hızı dağılımı çatlak oluşumundan  $1.67 \mu\text{s}$  sonrasına denk gelmektedir. Bu andaki çatlak ilerlemesi  $a = 2.0 \text{ mm}$  ve çatlak ucu hızı  $v_c = 878 \text{ m/s}$  dir. Parçacık hızı konturlarında  $a_0 = 25 \text{ mm}$  boyutundaki ilk çatlağın konumu beyaz ok ile ve çatlak ucu konumu,  $a_n$  ise siyah ok ile gösterilmiştir. Çatlak ilerlemesi,  $a$  değeri bu iki ok arasındaki mesafeye denk gelmektedir.  $t = 20 \mu\text{s}$  anın-

daki çatlak ilerlemesi Şekil 5.14b'de görüldüğü üzere 8.4 mm dir. Bu andaki çatlak ucu hızı,  $v_c = 1132$  m/s dir.  $t = 30 \mu\text{s}$  anında çatlak ilerlemesi  $a = 19.0$  mm, anlık çatlak ucu hızı ise  $v_c = 975$  m/s olmaktadır. Şekil 5.14a-c'de yer alan parçacık hızı konturlarının çatlak civarında keskin olmayan eliptik bir şekilde yoğunlaştığı ve bu yoğunlaşmanın kapsadığı alanın zamanla arttığı görülmektedir. Çatlak etrafında görülen bu yoğunlaşma şekli Rayleigh altı çatlak ilerlemesinin karakteristik bir özelliğidir.

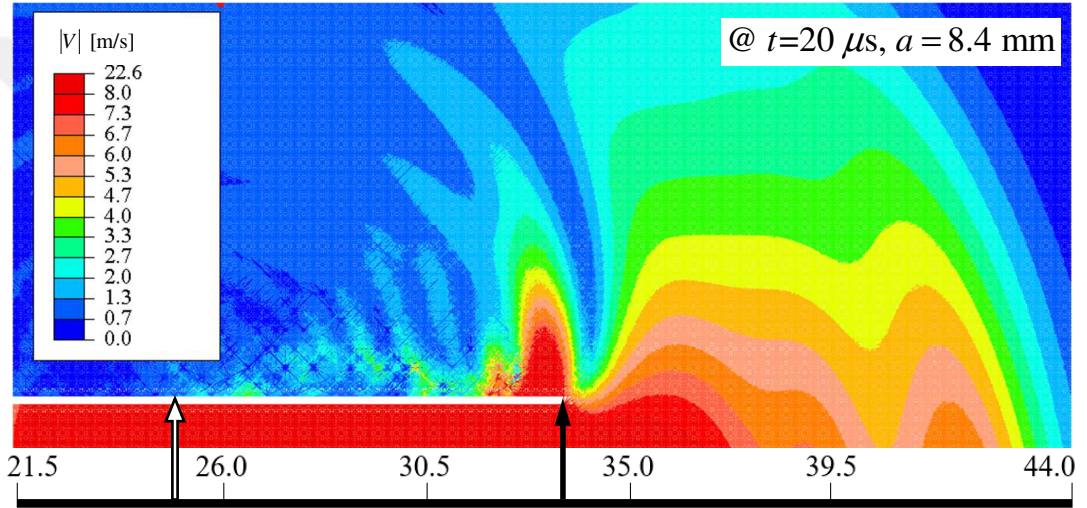


Şekil 5.13:  $V_i = 10$  m/s için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızının,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi.

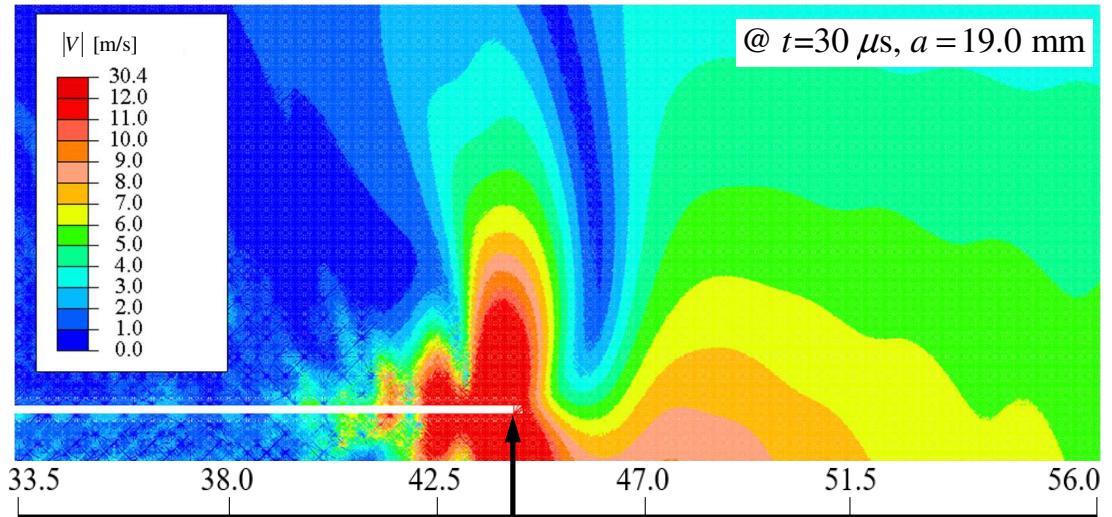
Bir sonraki durumda çarpma hızı  $V_i = 10.2$  m/s değerine arttırılmıştır. Çatlağın ilerlemeye başladığı an  $V_i = 10.0$  m/s çarpma hızı ile aynıdır ve  $t = 12.3 \mu\text{s}$  dir.  $V_i = 10.2$  m/s çarpma hızı için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 5.15'de görülmektedir.  $V_i = 10.2$  m/s için elde edilen çatlak ilerlemesi,  $a$ 'nın zamana göre grafiğinin eğiminde  $t = 17 \mu\text{s}$  civarında ciddi bir değişim olduğu görülmektedir. Bu değişim çatlak hızı,  $v_c$  değerinin de  $t = 17 \mu\text{s}$  anından itibaren artış göstereceğinin habercisidir.



a)



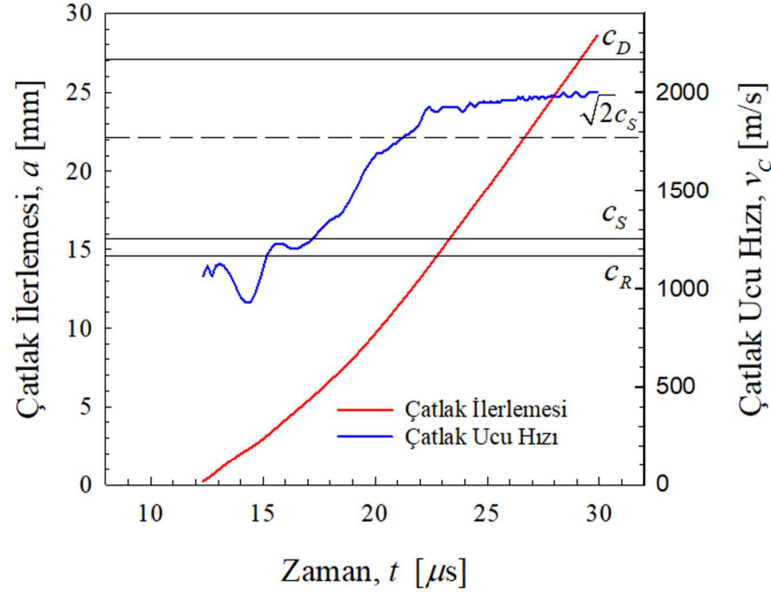
b)



c)

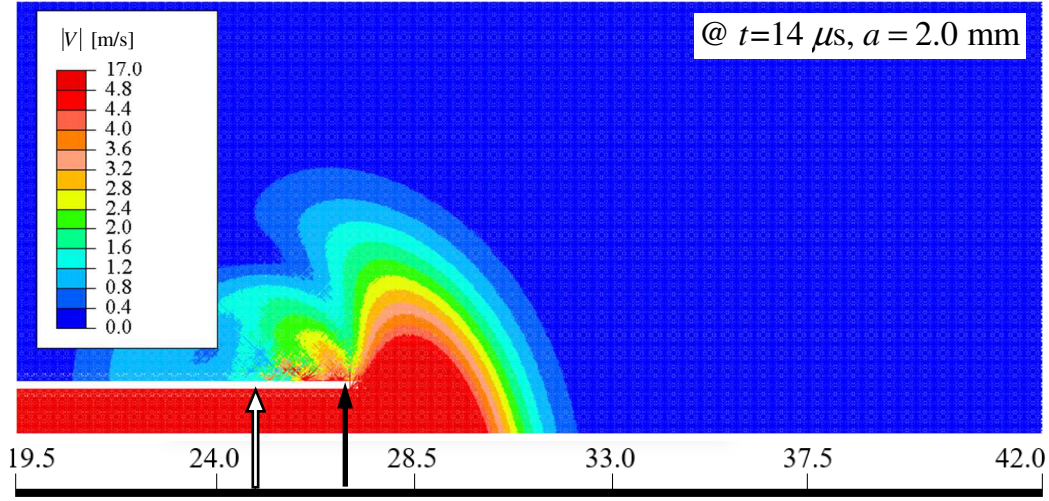
Şekil 5.14:  $V_i = 10 \text{ m/s}$  için a)  $14.0 \mu\text{s}$ , b)  $20.0 \mu\text{s}$  ve c)  $30.0 \mu\text{s}$  anındaki parçacık hızı dağılımları.

Çatlak ucu hızı,  $v_c$  nin zamana göre grafiği incelendiğinde, çatlak ilerlemesinin Rayleigh altı bölgede başladığı ve  $t = 17 \mu s$  anından itibaren hızla artarak kararlı intersonik bölgeye geçtiği görülmektedir. Çatlak ucu hızı,  $v_c t = 22.3 \mu s$  anından itibaren  $1.57c_S$  değerinde kararlı hale gelmektedir.  $t = 14 \mu s$  anındaki parçacık hızı dağılımı Şekil 5.16a'da görülmektedir. Bu andaki çatlak ilerlemesi,  $a = 2.0 \text{ mm}$  ve çatlak ucu hızı  $v_c = 943 \text{ m/s}$  dir.  $V_i = 10 \text{ m/s}$  ve  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  çarpma hızları için  $t = 14.0 \mu s$  anında elde edilen çatlak ilerlemesi değerleri eşittir. Ayrıca bu iki çarpma hızı için de  $t = 14 \mu s$  anında Şekil 5.14a ve Şekil 5.16a'da görülen parçacık hızı dağılımları oldukça benzerdir. Çatlak ucu etrafında  $t = 19.0$  anında görülen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.16b'de görülmektedir. Bu anda çatlak ilerlemesi,  $a = 19.0 \text{ mm}$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c = 1501 \text{ m/s}$  değerine ulaşmıştır. Çatlak ucu hızı intersonik bölgeye geçiş yapmıştır. Bu anda çatlak ucu hızı,  $v_c$  kararsız intersonik bölgededir. İntersonik bölgeye geçiş nedeniyle, Şekil 5.16b'de görülen parçacık hızı dağılımında da değişim gözlemlenmektedir. Rayleigh altı bölgede çatlak ucu etrafında olan yoğunlaşmalar çatlak ucunun gerisinde kalmaya başlamıştır. Çatlak ucu hızı,  $v_c$  değeri henüz kararlı hale gelmediğinden Mach dalgaları henüz belirginleşmemiştir. Çatlak ucu etrafında  $t = 28.0 \mu s$  anında görülen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.16c'de yer almaktadır. Bu andaki çatlak ilerlemesi,  $a = 25 \text{ mm}$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c = 1959 \text{ m/s}$  dir. Şekil 5.15'de yer alan çatlak ucu hızı grafiğinden anlaşıldığı üzere, çatlak ucu hızı  $t = 28.0 \mu s$  anında  $v_c = 1.57c_S$  değeri etrafında küçük salınımlarla kararlı haldedir. Bu nedenle çatlak ucu etrafında Mach dalgaları net şekilde görülmektedir. Şekil 5.16c'de görülen Mach açısı yaklaşık olarak  $\beta = 40.5^\circ$  olarak ölçülmüştür. Bu değer anlık çatlak hızı,  $v_c$  kullanılarak Denklem (5.20)'a göre  $\beta = 39.8^\circ$  olarak hesaplanmıştır. Her iki şekilde de elde edilen Mach açılarının uyumlu olması PD simülasyonların tutarlılığını göstermektedir. Bu bölümde yapılan analizlerde en düşük kararlı çatlak hızı,  $v_c = 1.57c_S$  olarak  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  çarpma hızı için elde edilmiştir.

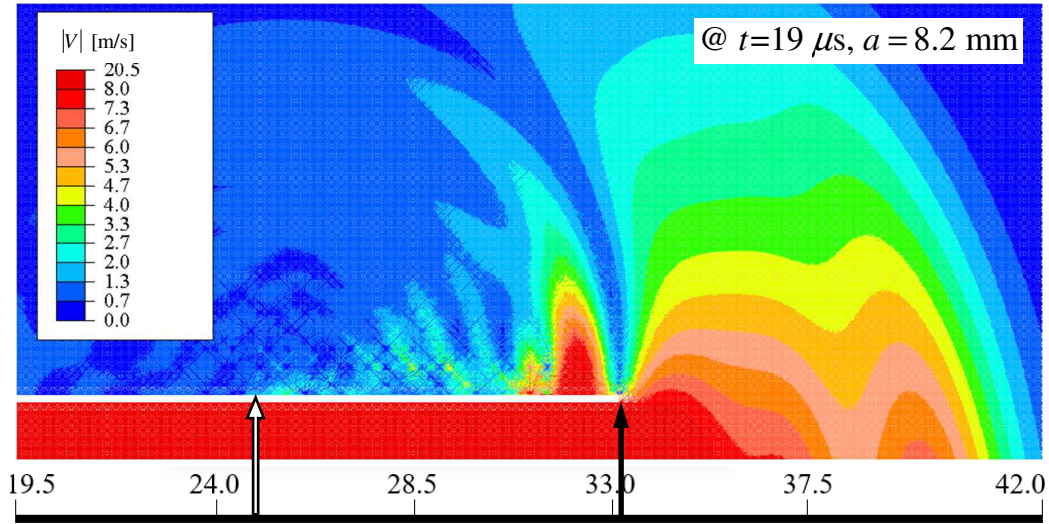


Şekil 5.15:  $V_i = 10.2$  m/s için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızının,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi.

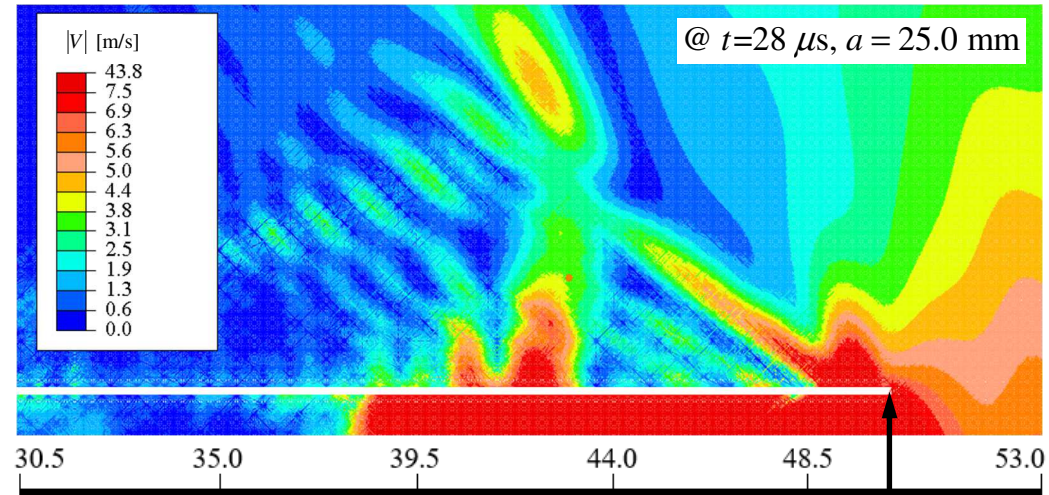
Çarpma hızı,  $V_i = 25.0$  m/s olduğunda elde edilen çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 5.17'de yer almaktadır. Çatlak oluşumu sırasında görülen küçük bir eğim değişimi dışında, çatlak ilerlemesi,  $a$  zamana göre lineer olarak değişmektedir. Çatlak ilerlemesi  $t = 11.8$  μs anında kararsız intersonik bölgede gerçekleşmektedir. Çatlak hızı,  $v_c$  çatlak oluşumundan itibaren hızlı bir şekilde artarak  $v_c = 1.65c_s$  değerinde kararlı hale gelmektedir. Çatlak ucu civarındaki  $t = 14.0$  μs anındaki parçacık hızı dağılımı Şekil 5.18a'da görülmektedir. Bu ana karşılık gelen çatlak ilerlemesi,  $a = 4.4$  mm ve çatlak ucu hızı,  $v_c = 2030$  m/s dir. Aynı zamanda ( $t = 14$  μs)  $V_i = 10.0, 10.2$  m/s çarpma hızları için elde edilen çatlak ilerlemesi  $a = 2.0$  mm dir.  $t = 20$  μs ve  $t = 30$  μs anlarında çatlak ucu civarında elde edilen parçacık hız dağılımları Şekil 5.18b ve Şekil 5.18c'de yer almaktadır.  $t = 20$  μs ve  $t = 30$  μs anlarında elde edilen çatlak ilerlemesi sırasıyla  $a = 16.8$  mm ve  $a = 37.2$  mm dir. Bu çatlak ilerlemelerine karşılık gelen çatlak hızları ise sırasıyla  $v_c = 2060$  m/s ve  $v_c = 2083$  m/s dir. Şekil 5.18'de görülen parçacık hız dağılımlarında Mach dalgaları açık şekilde görülmektedir. Denklem (5.20)'a göre,  $v_c = 1.65c_s$  hızında kararlı halde ilerleyen intersonik çatlak için Mach açısı  $\beta = 37.5^\circ$  olarak hesaplanır. Şekil 5.18'de yer alan Mach açıları yaklaşık olarak  $\beta = 38.0^\circ$  olarak ölçülmüştür. Ölçülen ve hesaplanan Mach açısı değerlerinin uyumlu olması, intersonik çatlak ilerlemesinin incelenmesi için PD'nin uygun bir yöntem olduğunu göstermektedir.



a)



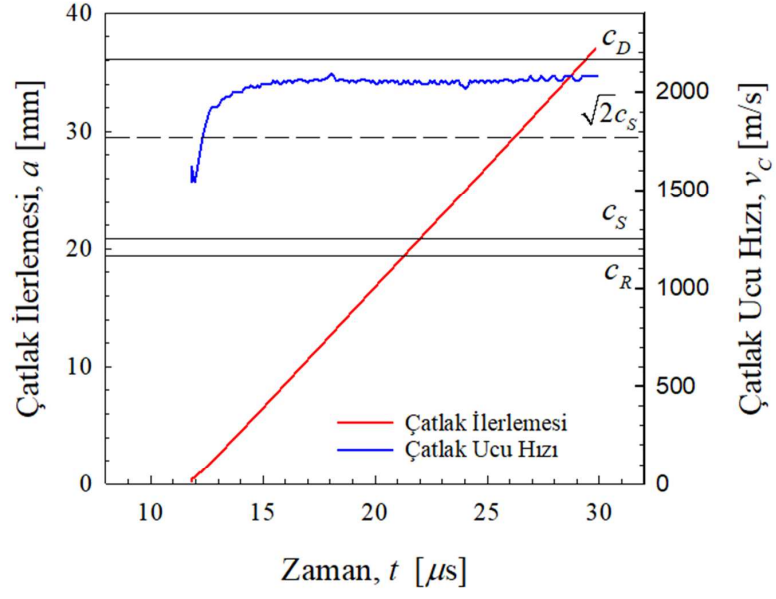
b)



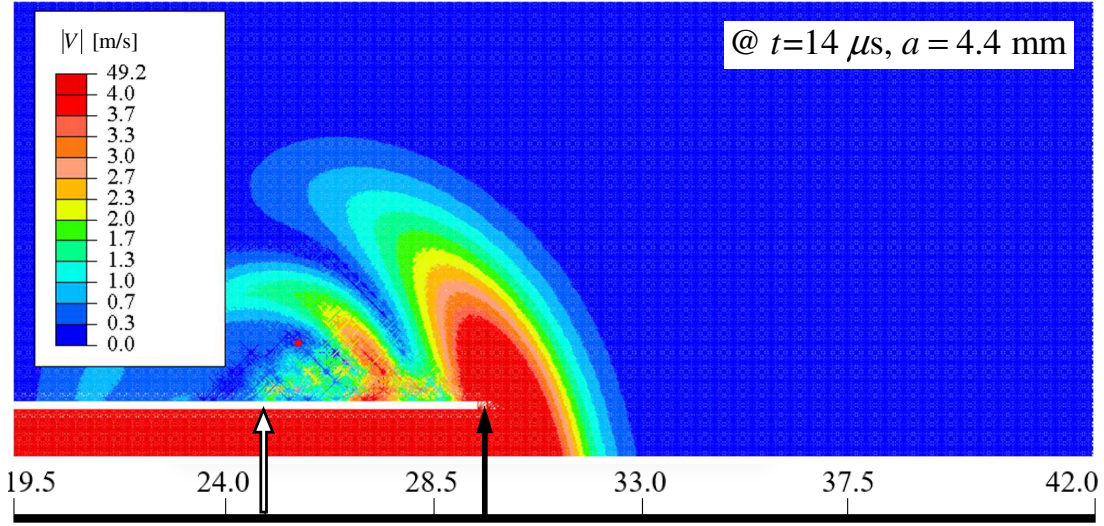
c)

Şekil 5.16:  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  için a)  $14.0 \mu\text{s}$ , b)  $19.0 \mu\text{s}$  ve c)  $28.0 \mu\text{s}$  anındaki parçacık hızı dağılımları.

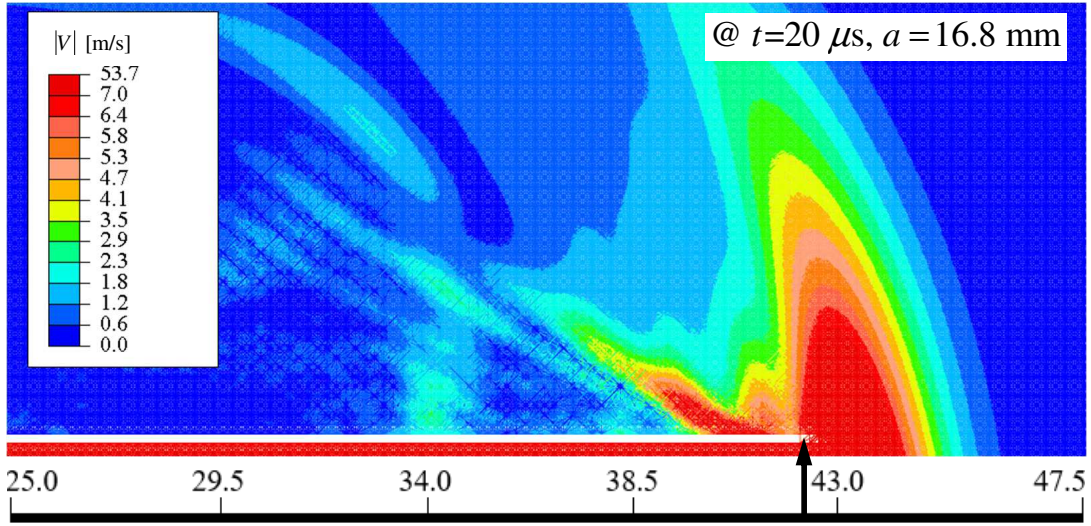




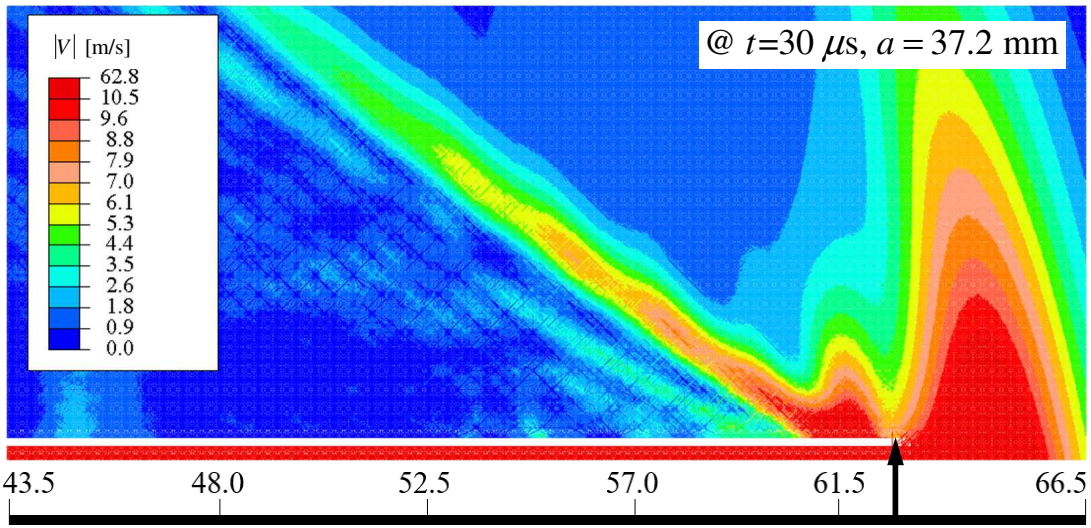
Şekil 5.17:  $V_i = 25.0$  m/s için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızın,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi.



a)



b)



c)

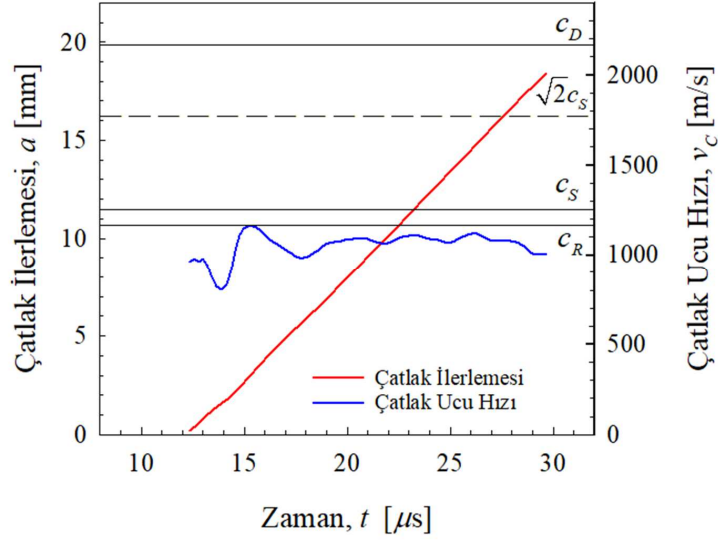
Şekil 5.18:  $V_i = 25 \text{ m/s}$  için a)  $14.0 \mu s$ , b)  $20.0 \mu s$  ve c)  $30.0 \mu s$  anındaki parçacık hızı dağılımları.

### 5.3.4 Kritik Enerji Salıverme Oranı, $G_{II}$ 'nin Çatlak İlerleyişine Etkisi

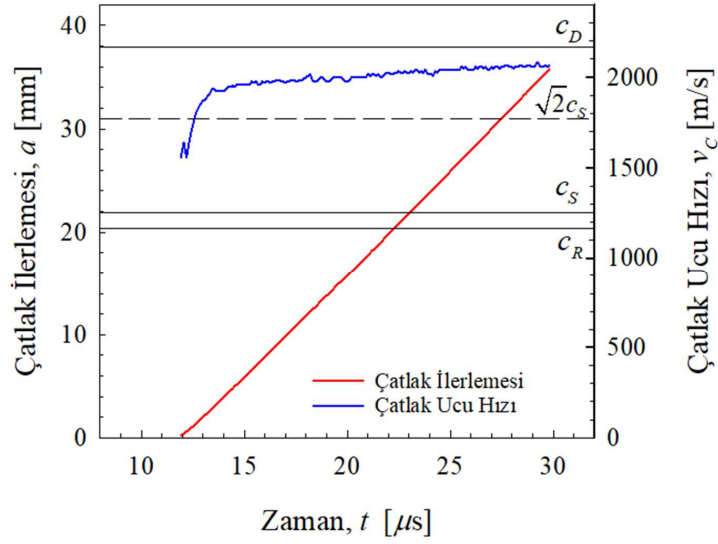
Kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II}$ 'nin dinamik çatlak ilerlemesi üzerine etkisi, sabit çarpma hızı,  $V_i = 15$  m/s sınır koşulu ile incelenmiştir. Bir önceki bölümde olduğu gibi çarpma süresi,  $t_p = 10$   $\mu$ s, çıkış ve iniş süreleri,  $t_r = t_s = 0.1$   $\mu$ s olarak alınmıştır. Bu kısımda üç farklı karakteristik hız bölgesinde yer alan dinamik çatlak ilerlemesi sonucuna yer verilmiştir. İlk iki örnekte çatlak hızları, analiz süresi boyunca sırasıyla Rayleigh altı bölge ve intersonik bölgededir. Üçüncü örnekte ise çatlak ilerlemesi Rayleigh altı bölgede başlamış ve intersonik bölgeye geçiş yapmıştır. Tüm örnekler için parçacık hız dağılımları, çatlak hızı ve çatlak ilerlemesinin zamana göre değişimleri sunulmuştur. Parametrik olarak çeşitli  $G_{II}$  değerleri için elde edilen sonuçlar özet olarak Bölüm 5.4'de verilmiştir.

İlk iki örnekte kritik enerji salıverme oranı,  $G_{II} = 3.0$  Pa.m ve  $G_{II} = 0.6$  Pa.m olarak alınmıştır. Bu iki problem için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi sırasıyla Şekil 5.20a ve Şekil 5.20b'de yer almaktadır.  $G_{II} = 3.0$  Pa.m için çatlak oluşumu  $t = 12.4$   $\mu$ s anında başlamaktadır ve analiz süresi boyunca  $c_R$ 'a yakın bir hızda Rayleigh altı bölgede devam etmektedir.  $G_{II} = 0.6$  Pa.m için çatlak oluşumu  $t = 11.9$   $\mu$ s anında kararsız intersonik bölgede başlamaktadır. Daha sonra ise çatlak hızı,  $v_c$  hızla artarak  $1.64c_S$  civarında kararlı hale gelmektedir.

$G_{II} = 3.0$  Pa.m ve  $G_{II} = 0.6$  Pa.m için çatlak ucu hızı,  $v_c$  kararlı hale geldiğindeki parçacık hız dağılımı sırasıyla Şekil 5.20a ve Şekil 5.20b'de görülmektedir.  $G_{II} = 3.0$  Pa.m için  $t = 25.0$   $\mu$ s anında çatlak ilerlemesi,  $a = 13.4$  mm, çatlak ucu hızı,  $v_c = 1068$  m/s'dir.  $G_{II} = 3.0$  Pa.m için Şekil 5.20a'da görülen parçacık hızı dağılımı Rayleigh altı bölgede ilerleyen, Bölüm 5.3.3'de  $V_i = 10$  m/s için elde edilen (Şekil 5.14c) dağılım ile benzerdir.  $G_{II} = 0.6$  Pa.m için intersonik çatlak ilerlemesi elde edilmektedir.  $t = 28.0$   $\mu$ s anında intersonik çatlak etrafında elde edilen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.20b'de görülmektedir. Bu anda çatlak ilerlemesi,  $a = 32.2$  mm ve çatlak ucu hızı,  $v_c = 1.64c_S$  dir.  $v_c = 1.64c_S$  için çatlak hızı kullanılarak hesaplanan Mach açısı,  $\beta = 38.6^\circ$ 'dir. Şekil 5.20b'deki süreksizlik çizgileri kullanılarak ölçülen Mach açısı,  $\beta = 39^\circ$ 'dir. Bölüm 5.3.3 'de çarpma hızı,  $V_i = 25$  m/s için elde edilen çatlak ilerleme hızı  $v_c = 1.65c_S$ 'dir. Kararlı haldeki çatlak ilerleme hızları benzer olduğundan Şekil 5.18c'de görülen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.20b'de elde edilen dağılım ile büyük ölçüde benzerdir.

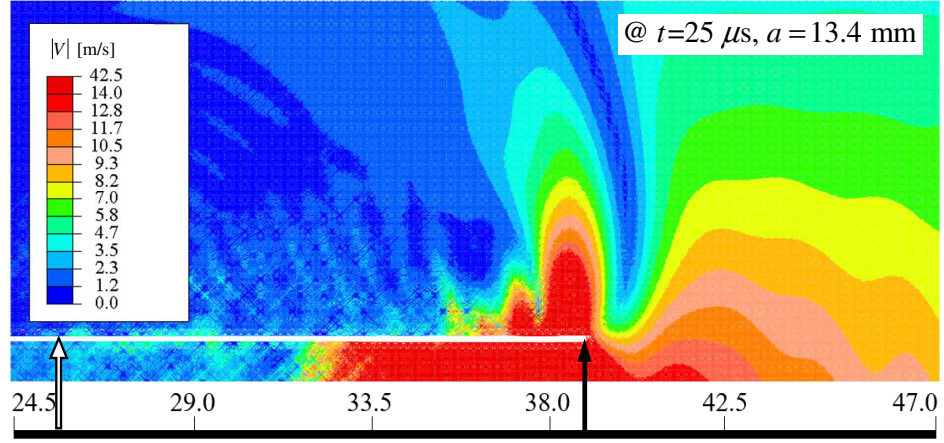


a)

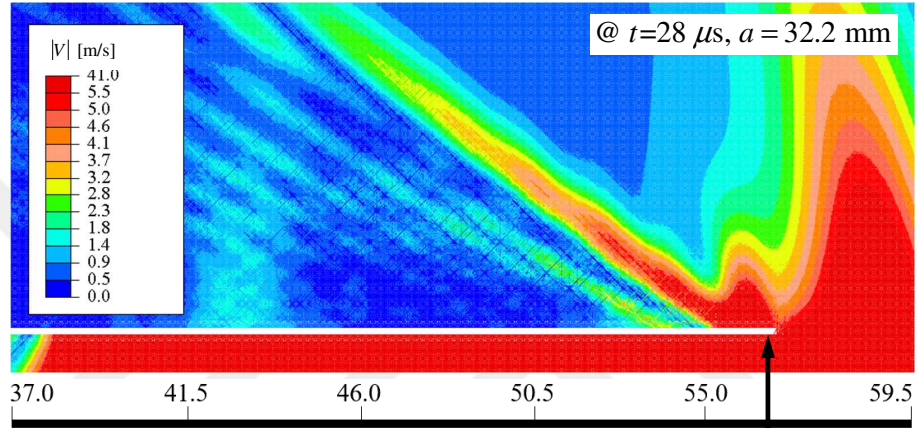


b)

Şekil 5.19: Çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızının,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi: a)  $G_{II} = 3.0$  Pa.m, b)  $G_{II} = 0.6$  Pa.m.

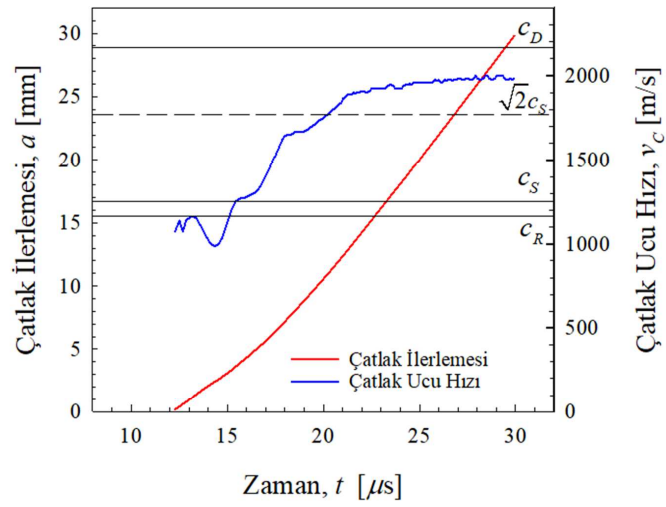


a)



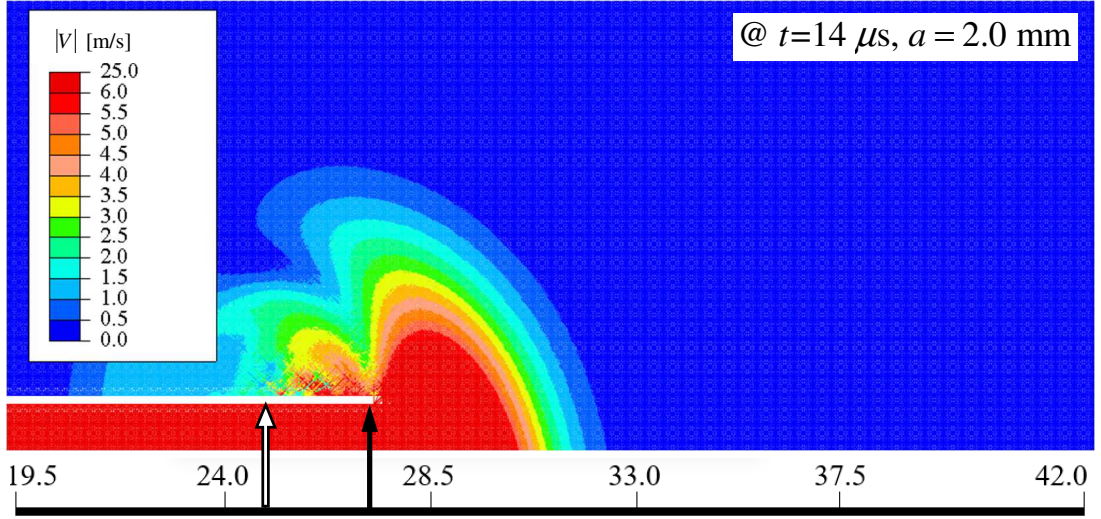
b)

Şekil 5.20: Parçacık hızı dağılımları: a)  $G_{II} = 3.0 \text{ Pa.m}$ ,  $t = 25.0 \mu\text{s}$ , b)  $G_{II} = 0.6 \text{ Pa.m}$ ,  $t = 28.0 \mu\text{s}$ .

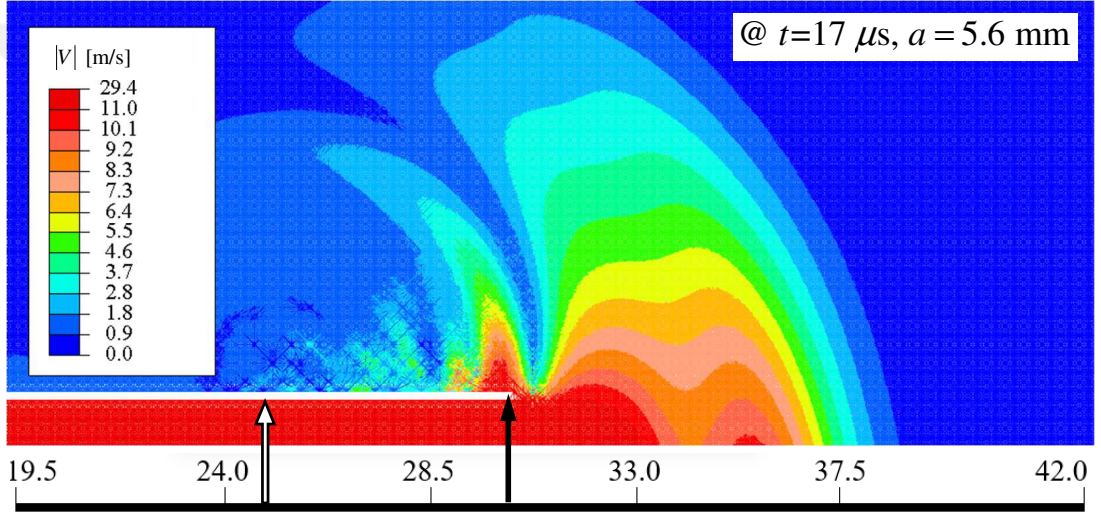


Şekil 5.21:  $G_{II} = 2.5 \text{ Pa.m}$  için çatlak ilerlemesi,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi.

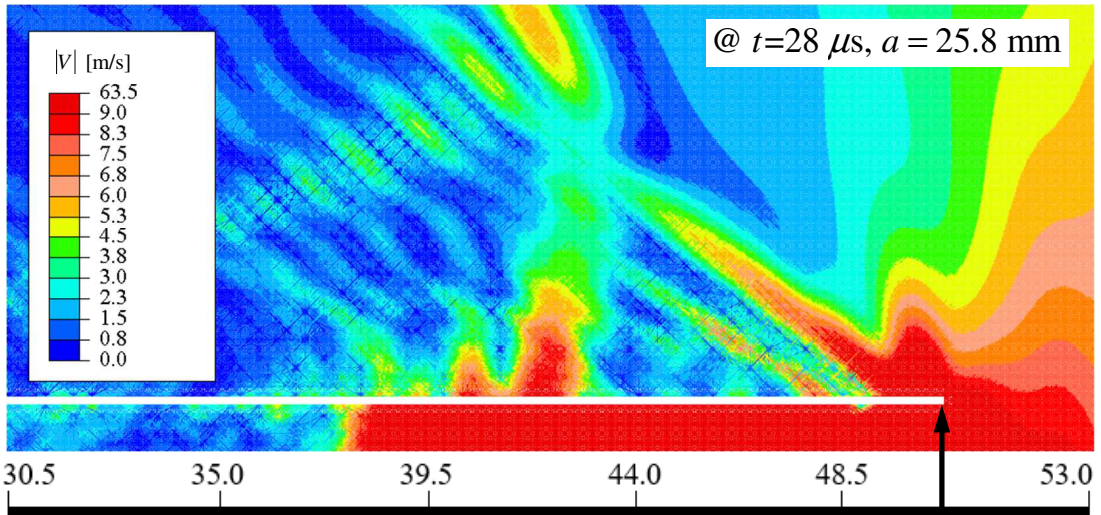
Üçüncü örnek olarak  $G_{II} = 2.5$  Pa.m arayüz tokluğuna sahip, Rayleigh altı bölgede başlayan ve intersonik bölgeye geçiş yapan çatlak ucu ilerlemesi incelenmiştir. Çatlak ucu konumu,  $a$  ve çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 5.21'de yer almaktadır. Çatlak ucu ilerlemesi,  $a$ 'nın zamana göre grafiğinde belirgin bir eğim değişimi olması çatlak hızı,  $v_c$ 'nin zamanla arttığını doğrulamaktadır. Çatlak ilerlemesi  $t = 12.3 \mu s$  anından itibaren başlamaktadır. Tamamen Rayleigh altı bölgede ilerleyen ilk örneğe oldukça yakın bir sürede çatlak ilerlemesi başlamıştır ( $G_{II} = 3.0$  Pa.m için  $t = 12.4 \mu s$ ).  $G_{II} = 2.5$  Pa.m için çatlak ucu hızı,  $v_c$   $t = 15.5 \mu s$  anında intersonik bölgeye geçiş yapmaktadır ve çatlak ucu hızı artarak yaklaşık  $t = 21.0$  anından itibaren  $v_c = 1.57c_S$  intersonik hızında kararlı hale gelmektedir.  $t = 14 \mu s$  anındaki çatlak ilerlemesi,  $a = 2.0$  mm, çatlak ucu hızı,  $v_c = 1041$  m/s dir. Bu ana karşılık gelen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.22a'da görülmektedir.  $t = 14 \mu s$  anında elde edilen Şekil 5.22a'da yer alan dağılım, aynı zaman adımıyla Rayleigh altı çatlaklar için elde edilen Şekil 5.14a, Şekil 5.16a Şekil 5.20a'daki dağılımlar ile oldukça benzerdir.  $G_{II} = 2.5$  Pa.m için çatlak ucu hızı,  $v_c$  Şekil 5.21'de görüldüğü üzere  $t = 14 \mu s$  anından itibaren artarak intersonik bölgeye geçmektedir.  $t = 17 \mu s$  anında çatlak ilerlemesi,  $a = 5.6$  mm ve çatlak ucu hızı,  $v_c = 1400$  m/s dir. Çatlak ucunun henüz kararsız intersonik bölgede olduğu bu anda elde edilen parçacık hızı dağılımı Şekil 5.22b'de görülmektedir.



a)



b)



c)

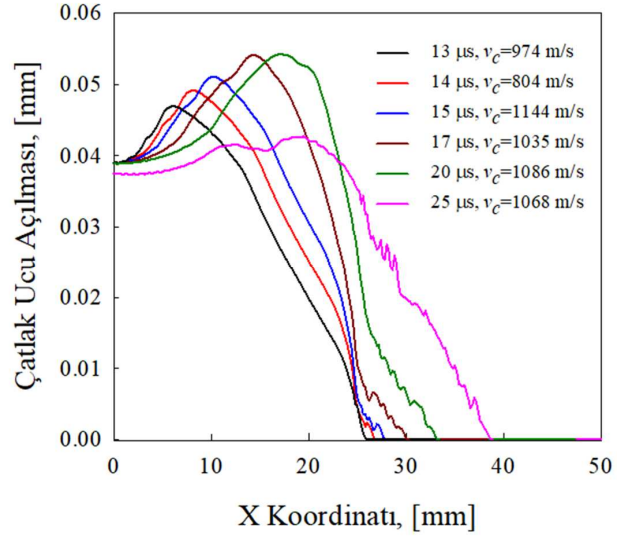
Şekil 5.22:  $G_{II} = 2.5 \text{ Pa}\cdot\text{m}$  için a)  $14.0 \mu\text{s}$ , b)  $17.0 \mu\text{s}$  ve c)  $28.0 \mu\text{s}$  anındaki parçacık hızı dağılımları.

Çatlak hızının intersonik bölgeye Rayleigh altı bölgeden geçiş yapması nedeniyle, parçacık hızı dağılımı değişmeye başlamıştır.  $t = 28 \mu s$  anında çatlak ucu hızı,  $v_c = 1.57c_S$  değerine ulaşarak kararlı hale gelmektedir. Bu anda  $a = 25.8$  mm ilerlemiş olan çatlak ucu etrafında oluşan parçacık hızı dağılımı Şekil 5.22c'de görülmektedir. Burada görülen Mach açısı,  $v_c = 1.57c_S$  hızına karşılık gelen  $\beta = 39.8^\circ$  açısı ile uyumludur.

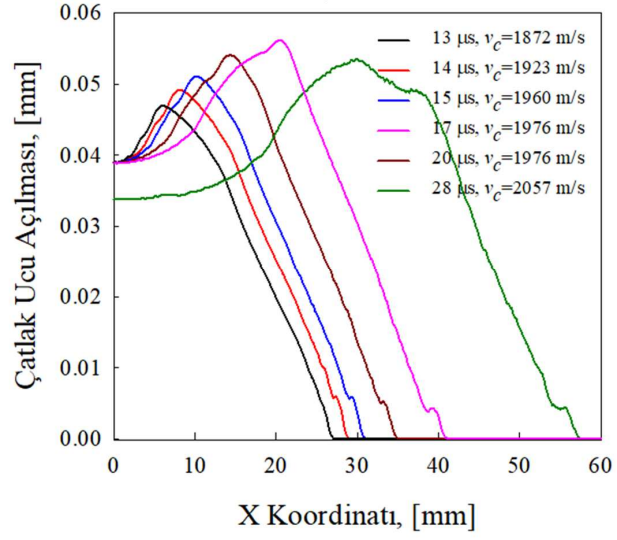
Çatlak hızının intersonik bölgeye geçiş yapması durumunda, bu geçişin izi parçacık hız dağılımlarında görülmektedir. Şekil 5.22c'de yaklaşık  $x = 42$  mm konumunda görülen yoğunlaşma, çatlak Rayleigh altı bölgede iken görülen yuvarlak şekilli yoğunlaşmaların belirtisidir. İntersonik bölgeye geçişin sinyali olan bu yoğunluğun çatlak ucunu Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  hızı ile takip ettiği gözlemlenmiştir. İntersonik bölgeye geçişin sinyalleri Bölüm 5.3.3'de  $V_i = 10.2$  m/s çarpma hızı için elde edilen parçacık hız dağılımlarında da görülmektedir (Şekil 5.16b, c).

Rayleigh altı bölgeden intersonik bölgeye geçişin etkisi, çatlak ucu açılma profilleri üzerinde de gözlemlenmektedir. Bu bölümde incelenen üç örnek için elde edilen çatlak ucu açılma profilleri Şekil 5.23'de yer almaktadır.  $G_{II} = 3.0$  Pa.m (Rayleigh altı örnek) ve  $G_{II} = 0.6$  Pa.m (intersonik örnek) için sırasıyla Şekil 5.23a ve Şekil 5.23b'de görüldüğü üzere çatlak ucunun gerisinde herhangi bir kapanma gözlemlenmemektedir. Ayrıca intersonik örnekte çatlak ucunun gerisindeki açılma profili, Rayleigh altı örneğe oranla daha diktir. Şekil 5.23c'de Rayleigh altı bölgeden intersonik bölgeye geçiş yapan,  $G_{II} = 2.5$  Pa.m arayüz tokluğuna sahip numunedeki çatlak ucu açılma profili gözlemlenmektedir. Burada  $t = 13 \mu s$  anında çatlak hızı Rayleigh altı bölgededir ve çatlak ucunun gerisinde herhangi bir kapanma gözlemlenmemektedir. Şekil 5.21'de görüldüğü üzere,  $G_{II} = 2.5$  Pa.m için çatlak ucu hızında  $t = 14 \mu s$  anından itibaren artmaktadır. Şekil 5.23c'de  $t = 14, 15, 17 \mu s$  anında intersonik bölgeye geçiş etkisiyle, çatlak ucunun hemen arkasında bir kapanma görülmektedir. Bu örnekte çatlak ucu hızı,  $v_c$  yaklaşık olarak  $t = 21 \mu s$  anına kadar artmakta ve bu andan itibaren  $v_c = 1.57c_S$  hızında kararlı hale gelmektedir.  $t = 25, 28 \mu s$  anlarında çatlak ucu hızı kararlı hale geldiğinden çatlak ucu gerisindeki kapanmalar artık görülmemektedir.

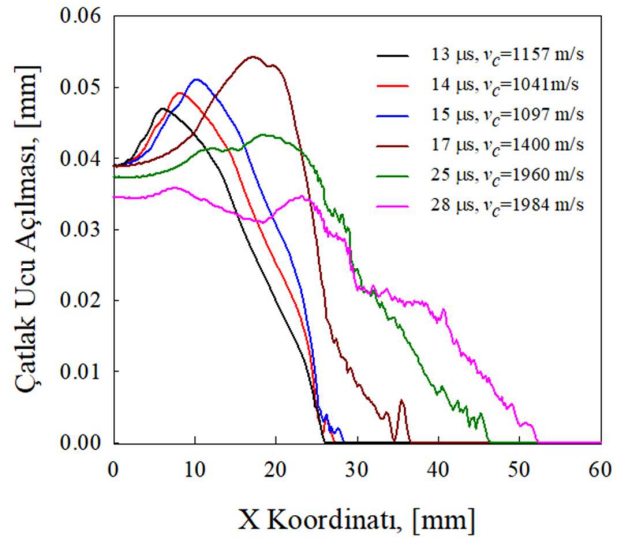




a)



b)



c)

Şekil 5.23: Çatlak ucu açılmasının zamana göre değişimi: a)  $G_{II} = 3.0 \text{ Pa.m}$ , b)  $G_{II} = 0.6 \text{ Pa.m}$  ve c)  $G_{II} = 2.5 \text{ Pa.m}$ .

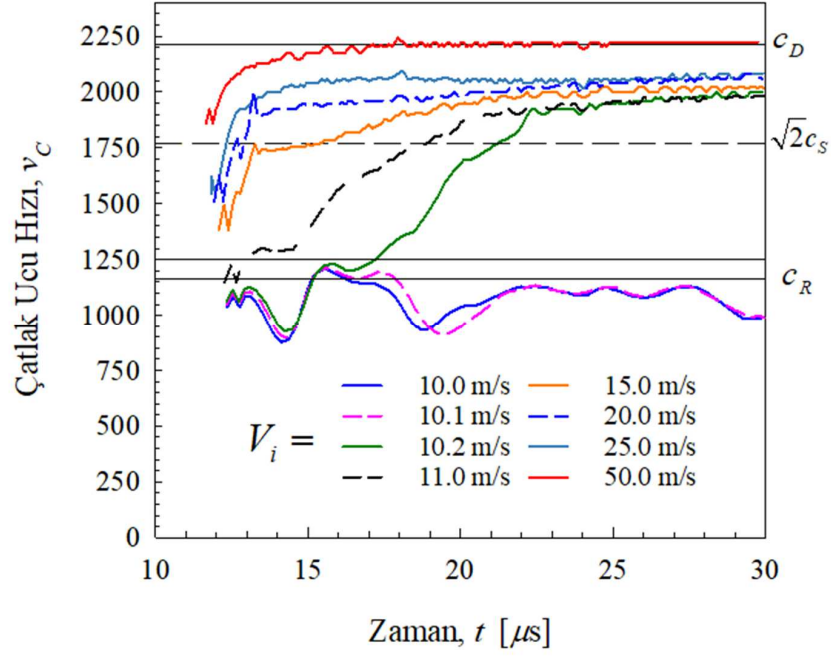
## 5.4 İntersonik Çatlak İlerlemesi Hakkında Değerlendirmeler

Bu bölümde, kırılma tokluğu ve çarpma hızının etkisini incelediği parametrik çalışmanın sonuçları değerlendirilmiştir. Her iki parametrik çalışma için de çarpma süresi,  $t_p = 10 \mu s$  olarak alınmıştır. Daha sonra ise çarpma süresi,  $t_p$ 'nin dinamik kırılma karakteristiği üzerine etkisi, çarpma hızı,  $V_i$  ve kırılma tokluğu,  $G_{II}$  sabitlenerek incelenmiştir. Tüm analizlerde çıkış ve iniş süreleri,  $t_r = t_s = 0.1 \mu s$  olarak alınmıştır.

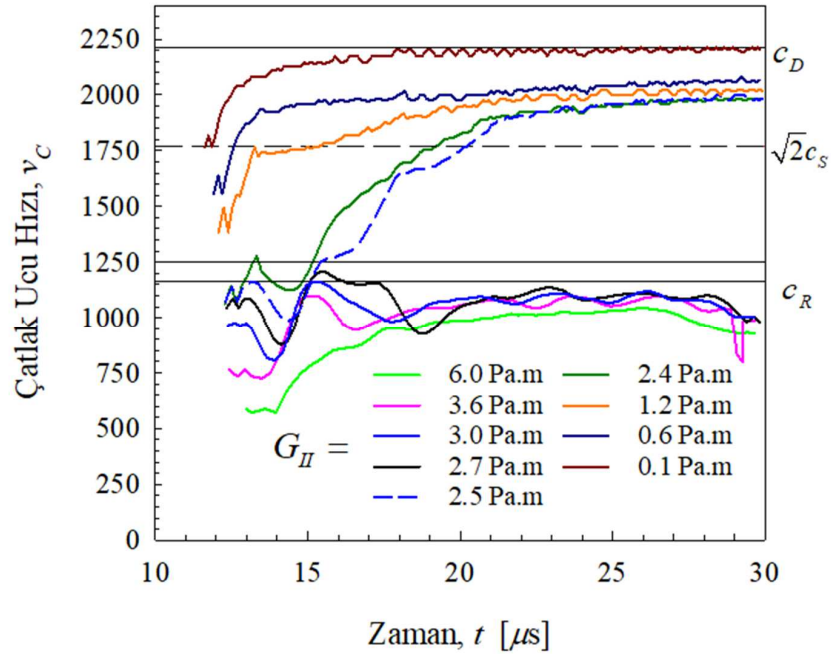
Sabit kırılma tokluğu,  $G_{II} = 1.2 \text{ Pa.m}$  kullanılarak,  $V_i = 10 - 50 \text{ m/s}$  aralığında çarpma hızları için parametrik analizler gerçekleştirilmiştir. Bu analizler sonucu ortaya çıkan, çarpma hızı,  $v_c$ 'nin zamana bağlı değişimi Şekil 5.24a'da görülmektedir.  $V_i = 10.1 \text{ m/s}$  çarpma hızına kadar, analiz süresi,  $t_f = 30 \mu s$  boyunca çatlak ucu hızı Rayleigh altı bölgededir. Çarpma hızı  $10.1 \text{ m/s}$  den  $10.2 \text{ m/s}$ 'e çıkarıldığında çatlak oluşumu Rayleigh altı bölgede gerçekleştikten sonra, çatlak hızı,  $v_c$  artarak intersonik bölgeye geçmiş ve  $1.57c_S$  değerinde kararlı hale gelmiştir.  $V_i = 11.0 - 25.0 \text{ m/s}$  aralığındaki çarpma hızları için,  $1.57c_S$  ve  $1.66c_S$  aralığında kararlı intersonik hızlar elde edilmiştir. Çarpma hızı arttıkça, çatlak daha erken ve daha yüksek ilk hız ile oluşmaktadır.  $V_i = 11.0 \text{ m/s}$  için çatlak oluşumu,  $c_R$ 'in hemen üzerinde gerçekleşmektedir ve  $V_i = 10.2 \text{ m/s}$  için elde edilen çatlak hızına oranla daha hızlı bir şekilde  $1.57c_S$  değerinde kararlı hale gelmektedir.  $V_i = 15.0 - 50.0 \text{ m/s}$  aralığındaki çatlak hızları için çatlak oluşum hızları yaklaşık olarak  $v_c = 1.25c_S - 1.5c_S$  aralığındadır.  $V_i = 50.0 \text{ m/s}$  için kararlı durumdaki çatlak hızı, genleşme dalgası hızı,  $c_D$ 'ye eşittir.

Sabit çarpma hızı,  $V_i = 15.0 \text{ m/s}$  kullanılarak  $G_{II} = 0.1 - 6.0 \text{ Pa.m}$  aralığında kırılma toklukları için parametrik analizler gerçekleştirilmiştir. Bu analizler sonucu ortaya çıkan, çarpma hızı,  $v_c$ 'nin zamana bağlı değişimi Şekil 5.24b'de görülmektedir. Sabit kırılma tokluğu kullanılarak elde edilen hız rejimlerinin, sabit çarpma hızı ile elde edilen hız rejimlerine benzer olduğu görülmektedir.  $G_{II} = 6.0 - 3.0 \text{ Pa.m}$  aralığındaki değerler için çatlak ilerlemesi analiz süresi,  $t_f = 30 \mu s$  boyunca Rayleigh altı bölgede gerçekleşmektedir. Bu aralıkta kırılma tokluğu düştükçe ilk çatlak hızının arttığı fakat hep Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$ 'in altında kaldığı görülmüştür. Kırılma tokluğu,  $G_{II} = 2.5 \text{ Pa.m}$ 'e düşürüldüğünde, başlangıç anında çatlak ucu hızının Rayleigh altı bölgede olduğu ve sonrasında artarak,  $v_c = 1.57c_S$  hızında kararlı hale geldiği görülmektedir.  $G_{II} = 2.4 \text{ Pa.m}$  için de benzer şekilde çatlak hızı Rayleigh altı bölgeden intersonik

bölgeye geçmektedir.  $G_{II} = 1.2 \text{ Pa.m}$  ve  $G_{II} = 0.6 \text{ Pa.m}$  hızları için ise kararlı haldeki çatlak hızları  $v_c = 1.57c_S$  değerinin üzerine çıkmaktadır. En küçük tokluk değeri,  $G_{II} = 0.1 \text{ Pa.m}$  için kararlı haldeki çatlak hızı, teorik olarak mod II çatlakları için en üst sınır olan genleşme dalgası hızı,  $c_D$  olmaktadır.



a)



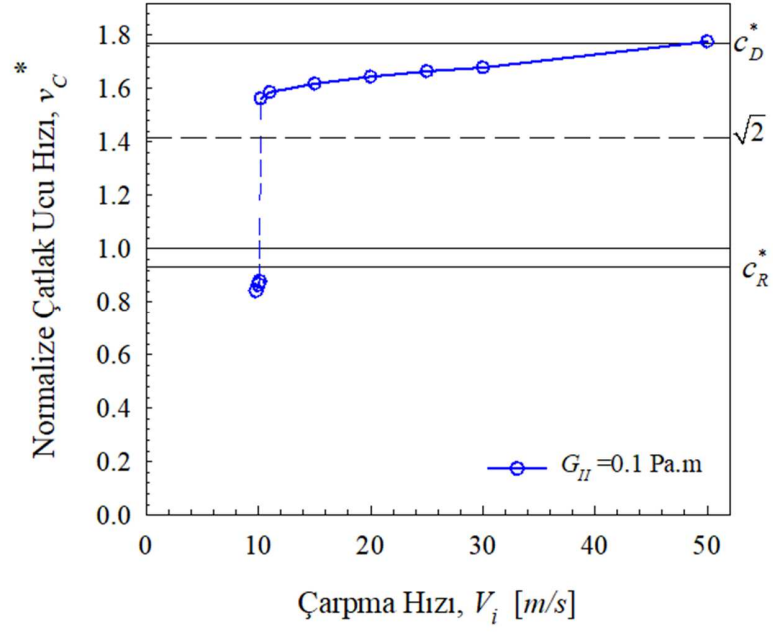
b)

Şekil 5.24: Çatlak hızı,  $v_c$ 'nin parametrik değişimi: a) sabit kırılma tokluğu, b) sabit çarpma hızı koşulları.

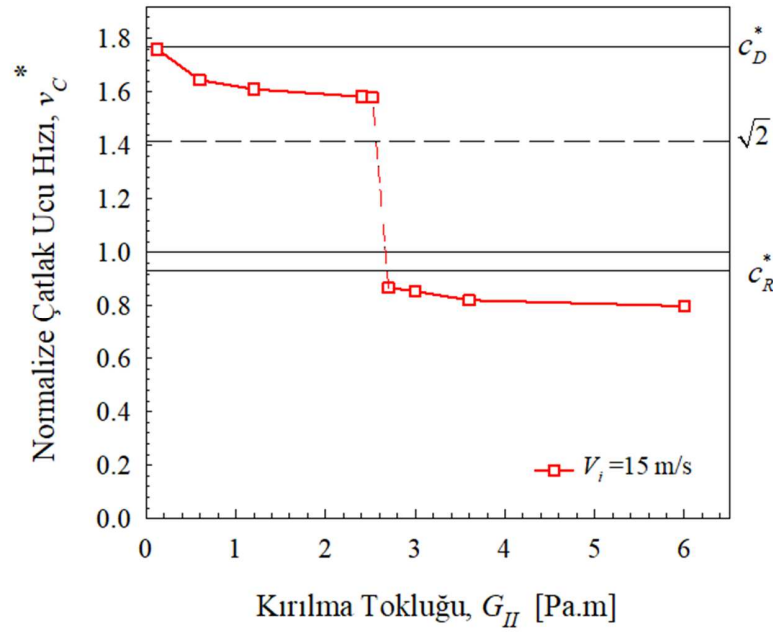
Şekil 5.24a ve Şekil 5.24b’de görüldüğü üzere çatlak ucu hızı,  $v_c$ ’nin Rayleigh altı bölgede  $1.57c_S$  hızına yakınsaması kademeli olarak yaklaşık  $10 \mu s$  gibi bir sürede gerçekleşmektedir. PD simulasyonlarda elde edilen bu geçiş süresi, Rosakis vd. 1999 ve Samudrala vd. 2002 tarafından yapılan deneylerde görülen geçiş süresi ile uyumludur [56, 58]. Bu deneylerde görülen geçiş süresi yaklaşık  $10 - 15 \mu s$  aralığındadır [56, 58]. Diğer taraftan, Needleman (1999) ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından yapılan nümerik çalışmalarda, çatlak ucu hızı Rayleigh altı hız bölgesinden,  $\sqrt{2}c_S$  üzerindeki bir hız değerine yakınsaması  $1 - 2 \mu s$  gibi kısa bir sürede gerçekleşmektedir.

Değişken çarpma hızları ve kırılma toklukları için elde edilen kararlı haldeki çatlak hızları sırasıyla Şekil 5.25a ve Şekil 5.25b’de özetlenmiştir. Bu grafiklerde, çatlak hızı,  $v_c$ , kesme dalgası hızı,  $c_S$  ile normalize edilmiştir. Normalize edilmiş hız değerleri, \* sembolü ile belirtilmiştir. Her iki grafikten de kararlı haldeki çatlak ucu hızının, Rayleigh altı bölgeden intersonik bölgede,  $1.57c_S$  ve  $c_D$  aralığına sığırdığı görülmektedir. Değişken çarpma hızları ve sabit kırılma tokluğu ile yapılan analizlerde geçişin görüldüğü en düşük çarpma hızı,  $V_i = 10.1$  m/s, değişken tokluk değerleri ve sabit çarpma hızı için geçişin görüldüğü en yüksek tokluk değeri  $G_{II} = 2.5$  Pa.m dir.  $t_p = 10 \mu s$  çarpma süresi ile yapılan bu analizlerde, intersonik bölgede,  $c_S - 1.57c_S$  aralığında kararlı çatlak hızları gözlemlenmemektedir. Her iki parametrik çalışmada da kararlı halde gözlemlenen en düşük intersonik hız değeri,  $v_c = 1.57c_S$  dir.

Andrews (1976 ve )Burridge vd. (1979) tarafından belirtildiği üzere, teorik olarak en düşük kararlı intersonik hız değeri,  $\sqrt{2}c_S$  dir. Fakat PD yöntem ile elde edilen en düşük kararlı intersonik hız değeri ( $1.57c_S$ ),  $\sqrt{2}c_S$  hızından büyüktür. Needleman (1999) ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından yapılan nümerik analizlerde de benzer şekilde elde edilen en düşük kararlı intersonik çatlak hızı  $\sqrt{2}c_S$ ’den büyüktür [57, 59]. Needleman (1999), çarpma süresi,  $t_p$ ’nin en düşük kararlı intersonik hız üzerindeki etkisini incelemiştir. Çeşitli çarpma süreleri için yaptığı analizlerde, çarpma süresi,  $t_p$  yeteri kadar kısaltıldığında çatlak hızı,  $v_c$ ’nin intersonik bölgede  $\sqrt{2}c_S$  değerinden daha büyük bir değere ulaştıktan sonra hızla azalarak  $\sqrt{2}c_S$  değerine ulaştığını gözlemlemiştir. Abraham ve Gao (2000), intersonik çatlak ilerlemesini MD simülasyonları yaparak incelemiştir [52]. Bu analizlerde,  $\sqrt{2}c_S$  kararlı intersonik çatlak hızının yalnızca çatlak ucunun ilerisinde bir mikro çatlak oluştuğu anda uygulanan çarpmanın tamamen ortadan kaldırıldığı durumda elde edildiğini bildirmişlerdir [52].



a)

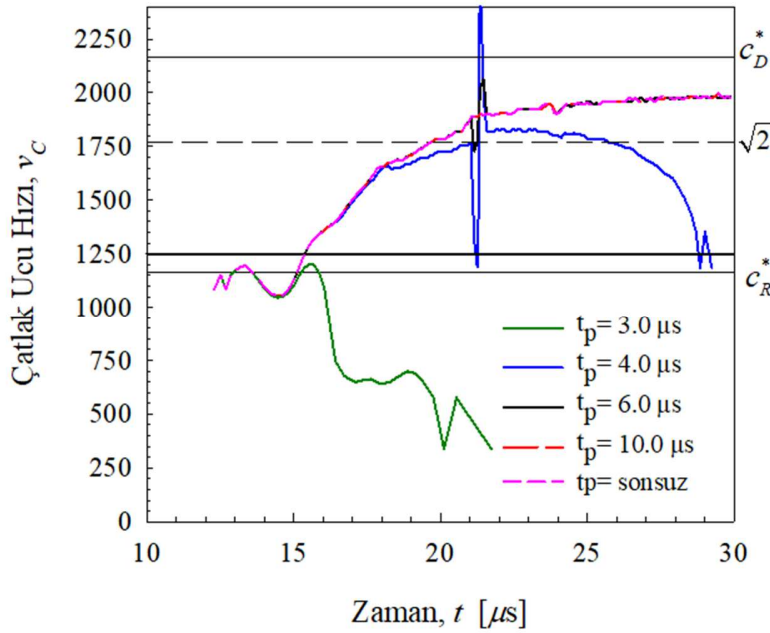


b)

Şekil 5.25: Normalize edilmiş kararlı çatlak ucu hızı,  $v_c^*$ : a) sabit kırılma tokluğu, b) sabit çarpma hızı koşulları.

Bu tez kapsamında çarpma süresi,  $t_p$ 'nin kararlı intersonik çatlak ucu hızına etkisi, PD yöntem ile incelenerek literatürde yer alan değerlendirmeler ile karşılaştırılmıştır [52, 57]. Bu amaçla çarpma hızı ve kırılma tokluğu değerleri sırasıyla,  $V_i = 10.5$  m/s,  $G_{II} = 1.2$  Pa.m olarak sabitlenmiş ve  $t_p = \infty, 10, 6, 4, 3$   $\mu$ s için analizler yapılmıştır. Bu çarpma süreleri için, çatlak hızı  $v_c$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 5.26'de verilmiştir.

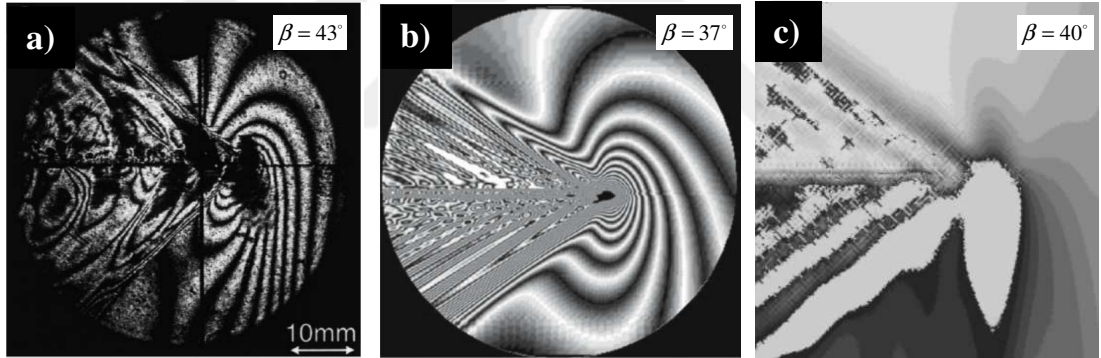
Tüm çarpma süreleri için elde edilen çatlak hızları başlangıçta örtüşmektedir.  $t_p = 3 \mu s$  için çatlak hızı,  $t = 17 \mu s$  anından itibaren hızlı bir şekilde düşmektedir. Diğer çatlak hızları yaklaşık  $t = 18 \mu s$ 'e kadar artmaya devam etmektedir. Bu andan itibaren,  $t_p = 4 \mu s$  için elde edilen çatlak hızı, diğerlerinden saptmaya başlamaktadır.  $t_p = 4 \mu s$  için çatlak ucu hızı 1830 m/s değerine artmakta ve  $t = 25 \mu s$  anında yavaşlayarak  $\sqrt{2}c_S$  (1769) m/s değerine ulaşmaktadır.  $\sqrt{2}c_S$  intersonik çatlak hızı yalnızca  $t = 25.0 - 26.8 \mu s$  aralığında korunabilmiş, daha sonra ise hızla azalarak  $c_R$ 'a düşmüştür. Bu durum, Burrige vd. (1979) tarafından varılan intersonik bölgenin  $c_S$  ve  $\sqrt{2}c_S$  aralığında kararlı olduğu sonucunu desteklemektedir. Değişken çarpma süreleri ile yapılan PD analizlerine göre,  $\sqrt{2}c_S$  intersonik hızının yeterince kısa çarpma süreleri için elde edilebileceği sonucuna varılmıştır. Benzer değerlendirmeler Needleman (1999), Abraham ve Gao (2000) tarafından yapılan çalışmalarda da yer almaktadır.



Şekil 5.26: Çarpma süresi,  $t_p$ 'nin çatlak ucu hızı,  $v_c$ 'ye etkisi.

PD analizler sonucu elde edilen Mach dalgaları, Rosakis vd. (1999) tarafından elde edilen deneysel sonuçlar ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından elde edilen nümerik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Tüm çalışmalarda elde edilen en düşük intersonik çatlak hızlarına karşılık gelen Mach dalgaları ele alınmıştır. Rosakis vd. (1999) tarafından  $v_c = 1.47c_S$  çatlak ucu hızı için deneysel olarak elde edilen kesme gerilmesi dağılımı

Şekil 5.27a'da görülmektedir [56]. Aynı problem Daphalapurkar vd. (2007) GMNM nümerik metodu ile incelendiğinde en düşük intersonik çatlak hızını  $v_c = 1.66c_S$  olarak elde edilmiştir. Bu hıza karşılık gelen kesme gerilmesi dağılımı Şekil 5.27b'de görülmektedir [59]. Rosakis vd. (1999) ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından elde edilen Mach açıları sırasıyla  $\beta = 43^\circ$  ve  $\beta = 37^\circ$  dir. PD analizlerinde elde edilen en düşük intersonik çatlak hızına ( $v_c = 1.57c_S$ ) karşılık gelen parçacı hız dağılımı Şekil 5.27c'de görülmektedir. Bu dağılım çarpma hızı,  $V_i = 10.2$  m/s ve kırılma tokluğu,  $G_{II} = 1.2$  Pa.m için elde edilen dağılımdır. Bu dağılımda görülen Mach dalgalarının  $\beta = 40^\circ$  açısına sahip olduğu görülmektedir. Şekil 5.27a-c'de yapılan karşılaştırmaya göre, PD yöntem ile düşük intersonik hız için elde edilen Mach dalgalarının, Rosakis vd. (1999) tarafından yapılan deneysel çalışma ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından yapılan nümerik çalışma ile uyumlu olduğu görülmektedir. Ayrıca bu karşılaştırma sonucu, Denklem (3.27)'de görülen PMG malzeme modelinin intersonik çatlak ilerlemesinin modellenmesi için geçerli bir model olduğu sonucuna varılabilir.



Şekil 5.27: Kararlı haldeki intersonik çatlak etrafındaki konturlar: a) deneysel kesme gerilmeleri (Rosakis vd. 1999), b) kesme gerilmelerini nümerik tahmini (Daphalapurkar vd. 2007), c) parçacı hız dağılımı PD sonuçları.





## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu kısımda, tez kapsamında yapılan çalışmalardan çıkarılan sonuçlar özetlenmiştir. Daha sonra ise öneriler sunulmuştur.

### 6.1 Sonuçlar

Bölüm 4’de, eğilme yüküne maruz kalan kalın kompozit yapılarda meydana gelen deformasyon dağılımını çözmeye yönelik bir plaka modeli geliştirilmiştir. Bu amaçla sanal iş prensibi kullanılarak, ortotropik Mindlin plakası için PD hareket denklemleri türetilmiştir. PD hareket denklemlerindeki bağ sabitleri, Taylor serisi açılımıyla SOM teorisindeki karşılıklarına dönüştürülerek elde edilmiştir. Daha sonra PD plaka formülasyonuna kritik bağ deformasyonlarına bağlı hasar davranışı entegre edilmiştir. Oluşturulan plaka modeli, kalın ortotropik plakalarda kesme deformasyonlarını dikkate alması açısından özgün bir formülasyona sahiptir. Geliştirilen ortotropik PD Mindlin plakası modeli ile yapılan çalışmalardan şu sonuçlar çıkarılmıştır:

- PD formülasyonu geliştirilen ortotropik Mindlin plakası modeli, analitik olarak Diyaroğlu vd. (2015) tarafından öne sürülen izotropik PD formülasyonuna dönüşmektedir. Ayrıca kullanılan yöntem ile elde edilen izotropik sonuçlar da literatür ile örtüşmektedir. Bu durum analitik olarak çıkarımı yapılan modelin geçerliliğini ortaya koymaktadır.
- Enine kesme ve sabit basınç yüklemeleri etkisindeki farklı katılık değerlerine sahip ortotropik plakaların deformasyon dağılımı, PD ve SEA ile elde edilmiştir. Elde edilen PD sonuçlarının, SEA ile elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. Geliştirilen ortotropik PD Mindlin plakası modeli, izotropik ve ortotropik kalın plakaların eğilme yüklemesi altındaki deformasyonlarını belirlemek için elverişlidir.

- Öne sürülen PD plaka modelinde, plakanın eğilme davranışı sırasında herhangi bir bükülme deformasyonu olmadığı varsayımı yapılmıştır. Dengelenmemiş oryantasyona sahip kompozit plakalarda, eğilme davranışı ile bükülme davranışı etkileşim halindedir. Bu nedenle, PD ve SEA ile elde edilen sehim ve rotasyonlar arasında görülen en büyük sapma  $45^\circ$  oryantasyonuna sahip plakada görülmüştür.
- Merkezi çatlak içeren plakalarda çatlak ilerlemesi analizleri gerçekleştirilmiştir. Kompozit malzemelerde fiber malzemesinin matris malzemesine oranla daha yüksek dayanıma sahip olması nedeniyle, çatlak ilerlemesinin fiber yönüne paralel olarak, fiberlerin arasında ilerleyecek şekilde olması beklenmektedir. Geliştirilen ortotropik PD Mindlin plakası modeli ile elde edilen çatlak ilerlemesi analizlerinde, çatlağın fiber yönüne paralel olarak ilerlediği görülmektedir. Buradan, öne sürülen ortotropik PD Mindlin plakası modeli ve hasar davranışının, kalın ortotropik plakalarda görülen eğilme hasarının modellenmesi için uygun bir yöntem olduğu görülmektedir.

Bölüm 5’de saf mod II yüklemesi altında gerçekleşen intersonik kırılmalar, bağ bazlı PD’nin ABAQUS sonlu elemanlar programına entegre edilmesiyle incelenmiştir. Bu problem, literatürde ilk kez PD yöntemi ile bu tez kapsamında incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda yapılan çıkarımlar şu şekildedir:

- ABAQUS programında giriş elemanlar ile oluşturulan iki boyutlu PD modeli ile kalın Homalit plaka üzerinde çarpma etkisinde oluşan genleşme dalgası ve kesme dalgasının ilerlemesi modellenmiştir. PD modeli üzerinden hesaplanan dalga hızları  $c_D$  ve  $c_S$ ’nin malzeme özellikleri kullanılarak hesaplanan teorik değerler ile uyumlu olduğu görülmüştür. Buradan, yapılan PD modellemenin elastik dalga ilerlemesinin modellenmesi için uygun bir yöntem olduğu çıkarılabilir.
- Yapıştırılmış Homalit plaka üzerinde mod II çatlaklarının dinamik olarak ilerlemesi incelenmiştir. Kırılma tokluğu,  $G_{II}$  ve çarpma hızı,  $V_i$ ’nin çatlak hızı,  $v_c$  üzerindeki etkisi parametrik olarak incelenmiştir. Her iki parametrik çalışmada da Rayleigh altı ve intersonik çatlak hızları elde edilmiş, her iki çatlak rejimi

için de karakteristik olan parçacık hız dağılımları elde edilmiştir. İntersonik kırılmalar için çatlak bölgesi civarında, çatlak hızı,  $v_c$  ile uyumlu Mach dalgaları görülmüştür.

- Genel olarak Rayleigh altı hızların düşük çarpma hızı,  $V_i$ , yüksek kırılma tokluğu,  $G_{II}$  için, intersonik hızların ise yüksek çarpma hızı,  $V_i$  ve düşük kırılma tokluğu,  $G_{II}$  için elde edildiği gözlemlenmiştir.
- Belirli çarpma hızı,  $V_i$  ve kırılma tokluğu,  $G_{II}$  kombinasyonları için, çatlak oluşumunun Rayleigh altı bölgede gerçekleştiikten sonra çatlak hızının  $v_c = 1.57c_S$  değerine yakınsayarak intersonik bölgeye geçiş yaptığı görülmüştür. Burridge-Andrews mekanizması olarak bilinen bu geçiş sırasında görülen parçacık hızı yoğunluğunun, intersonik çatlak hızını Rayleigh dalgası hızı,  $c_R$  ile takip ettiği görülmüştür. Bu durum PD teori ile literatürde ilk kez gözlemlenmiştir.
- Yapılan parametrik analizlerde  $1.57c_S$  ile  $c_D$  arasındaki hızlarda kararlı intersonik çatlak ilerlemesi gözlemlenmiş,  $c_R$  ile  $1.57c_S$  arasındaki bölgenin ise kararsız olduğu görülmüştür.
- Çarpma süresi, yeterince düşürüldüğünde ( $t_p = 4 \mu s$ ), çatlak ucu hızı intersonik bölgede  $\sqrt{2}c_S$  hızının üzerine çıktıktan sonra, aniden  $\sqrt{2}c_S$  değerine düşerek belirli bir süre  $\sqrt{2}c_S$  hızında devam etmektedir. Fakat  $\sqrt{2}c_S$  hızının uzun süre korunamadığı gözlemlenmiştir. Benzer çıkarıma Needleman (1999) tarafından KBM ile yapılan nümerik çalışmada da varılmıştır.
- Dinamik mod II kırılmaları hakkında PD yöntem ile elde edilen sonuçların genel olarak Rosakis vd. (1999) tarafından yapılan deneysel çalışma ve Needleman (1999), Abraham ve Gao (2000) ve Daphalapurkar vd. (2007) tarafından yapılan nümerik çalışmalar ile uyumlu olması, bağ bazlı PD'nin dinamik mod II kırılmasının incelenmesi için uygun bir yöntem olduğunu göstermektedir.

## 6.2 Öneriler

Tez kapsamında yapılan çalışmaların, gelecek çalışmalarda geliştirilmesi için şu öneriler sunulmaktadır:

- Bu tez kapsamında öne sürülen ortotropik PD Mindlin plaka modeli, eğilme yükü etkisindeki değişken bal peteği kalınlıklarına sahip kompozit plakalardaki deformasyon ve hasarın tahminine uygulanabilir.
- Öne sürülen ortotropik PD Mindlin plaka modeli, düzlemsel yükleme koşullarını da kapsayacak şekilde genişletilerek, genelleştirilmiş bir PD kabuk yaklaşımı elde edilebilir. Bu şekilde üç boyutlu mühendislik yapılarının kombine yüklemeler altındaki hasar analizi, PD Mindlin plakası yaklaşımı ile analiz edilebilir.
- Bu tez kapsamında mod II yüklemesi altında oluşan dinamik hasar, arayüz boyunca sabit tokluğa sabit numuneler kullanılarak incelenmiştir. Tez kapsamında uygulanan PD model ile arayüz boyunca değişken tokluğa sahip (fonksiyonel derecelendirilmiş) arayüzlerde dinamik çatlak ilerlemesi araştırılabilir.
- Dinamik mod II çatlak ilerlemesi, aynı malzemedan oluşan iki plakanın yapıştırılmasıyla elde edilen arayüzde incelenmiştir. Yapılan çalışmalar, farklı iki malzeme çiftinin yapıştırılmasıyla oluşturulan yapışma arayüzündeki çatlak ilerlemesinin incelenmesi için genişletilebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Abaqus, V.**, (2014). 6.14 documentation. Dassault Systemes Simulia Corporation 651 , 6–2.
- [2] **Griffith, A. A.**, (1921). The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical transactions of the royal society of London A* 221(582-593), 163-198.
- [3] **Dugdale, D. S.**, (1960). Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2), 100-104.
- [4] **Barenblatt.**, (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in applied mechanics*, 7(1), 55-129.
- [5] **Hillerborg, A., Mod er, M., Petersson, P. E.**, (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6(6), 773-781.
- [6] **Xu, X.-P., and Needleman, A.**, (1994). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42, 9.
- [7] **Klein, P. A., Foulk, J. W., Chen, E. P., Wimmer, S. A., Gao, H.**, (2001). Physics-based modeling of brittle fracture: cohesive formulations and the application of meshfree methods. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* , 37(1-3), 99-166.
- [8] **Belytschko, T, and Black, T.**, (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal of Numer Meth Eng* 45, 601–620.
- [9] **Zi, G., Rabczuk, T., Wall, W.**, (2007). Extended meshfree methods without branch enrichment for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, 40(2), 367-382.
- [10] **Silling, S.A.**, (2000). Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (48)1, 175-209.
- [11] **Silling, S. A., and Lehoucq, R. B.**, (2008). Convergence of peridynamics to classical elasticity theory. *Journal of Elasticity*, (93)1, 13.
- [12] **Silling, S. A., Epton, M., Weckner, O., Xu, J., and Askari, E.**, (2007). Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity*, (88)2, 151–184.
- [13] **Silling, S.A**, (2010). Linearized theory of peridynamic states. *Journal of Elasticity*, 85–111.

- [14] **Silling, S.A., and Askari, E.,** (2005). A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & structures* , (83)17-18, 1526–1535.
- [15] **Kılıç, B., Madenci, E.,** (2010). An adaptive dynamic relaxation method for quasi-static simulations using the peridynamic theory. *heoretical and Applied Fracture Mechanics*, 53(3), 194-204.
- [16] **Bobaru, F., Yang, M., Alves, L. F., Silling, S. A., Askari, E., Xu, J.,** (2009). onvergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 852–877.
- [17] **Bobaru, F., Ha, Y. D.,** (2011). Adaptive refinement and multiscale modeling in 2D peridynamics. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9 (6): 635–659.
- [18] **Dipasquale, D., Zaccariotto, M., Galvanetto, U.,** (2014). Crack propagation with adaptive grid refinement in 2D peridynamics. *International Journal of Fracture*, 190(1-2), 1-22.
- [19] **Shojaei, A., Mossaiby, F., Zaccariotto, M., Galvanetto, U.,** (2018). An adaptive multi-grid peridynamic method for dynamic fracture analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1144, 600-617.
- [20] **Macek, R. W., and Silling, S.A.,** (2007). Peridynamics via finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design* 43, 15, 1169–1178.
- [21] **Madenci, E., Dorduncu, M., Barut, A., Phan, N.,** (2018). A state-based peridynamic analysis in a finite element framework. *Engineering Fracture Mechanics*, 195, 104-128.
- [22] **Huang, X., Bie, Z., Wang, L., Jin, Y., Liu, X., Su, G., and He, X.,** (2019). Finite element method of bond-based peridynamics and its abaqus implementation. *Engineering Fracture Mechanics* 206, 408–426.
- [23] **Beckmann, R., Mella, R., and Wenman, M.,**(2013). Mesh and timestep sensitivity of fracture from thermal strains using peridynamics implemented in abaqus. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 263, 71–80.
- [24] **Yang, Z., Oterkus, E., Nguyen, C. T., and Oterkus, S.,** (2019). Implementation of peridynamic beam and plate formulations in finite element framework. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31, 1, 301-315.
- [25] **Oterkus, E., Madenci, E., Weckner, O., Silling, S.A., Bogert, P., Tessler, A.,** (2012). Combined finite element and peridynamic analyses predicting failure in stiffened composite curved panel with a central slot. *Composite Structures*, 38(8), 3037-3048.
- [26] **Yaghoobi, A., and Chorzepa, M.G.,** (2015). Formulation of symmetry boundary modeling in non-ordinary state-based peridynamics and coupling with finite element analysis. *Mathematics and Mechanics of Solids* , 23(8), 1156-1176.

- [27] **Giannakeas, I.N., Papathanasiou, T.K., and Bahai, H.,** (2018). Simulation of thermal shock cracking in ceramics using bond-based peridynamics and FEM. *Journal of the European Ceramic Society*, 94(3), 839-850.
- [28] **Shojaei, A., Mudric, T., Zaccariotto, M., Galvanetto, U.,** (2016). A coupled meshless finite point/peridynamic method for 2D dynamic fracture analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 119, 419-431.
- [29] **Pagano, N.,** (1969). Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials* , 3(3), 398-411.
- [30] **Reissner, E.,** (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* , (12), A69-A77.
- [31] **Mindlin, R.,** (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* , (18), 31-38.
- [32] **Whitney, J.,** (1969). The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composite Materials* , 3(3), 534-547.
- [33] **Murthy, M.,** (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. *NASA Technical Paper* , 1903.
- [34] **Reddy, J., ve Liu, C. A.,** (1985). A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int J Eng Sci* , 23(3):319–330.
- [35] **O’Grady, J., Foster, J.,** (2014) Peridynamic plates and flat shells: A non-ordinary, state-based model. *International Journal of Solids and Structures*, 51(25-26), 4572-4579.
- [36] **Taylor, M., Steigmann, D.J.,** (2015). A two-dimensional peridynamic model for thin plates. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(8), 998-1010.
- [37] **Taştan, A., Yolum, U., Güler, M., Zaccariotto, M., Galvanetto, U.,** (2016). A 2D peridynamic model for failure analysis of orthotropic thin plates due to bending. *Procedia Struct Integrity* , (2), 261-268.
- [38] **Taştan, A.,** (2016). Çekme ve eğilme yükleri altındaki izotropik ve kompozit yapılarda hasarı tahmin eden bağ bazlı peridinamik teoriyi kullanan bir yöntem geliştirilmesi. *Master Tezi* , TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [39] **Chowdhury, S.R., Roy, P., Roy, D.,** (2016). A peridynamic theory for linear elastic shells. *International Journal of Solids and Structures* , (84), 110-132.
- [40] **Diyaroglu, C., Oterkus, E., Oterkus, S., and Madenci, E.,** (2015). Peridynamics for bending of beams and plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures* , (69), 152-168.
- [41] **Yolum, U., Güler, M. A.,** (2020). On the peridynamic formulation for an orthotropic Mindlin plate under bending. *Mathematics and Mechanics of Solids* , 25(2), 263-287.
- [42] **Freund, L. B.,** (1998). *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge university press.

- [43] **Broberg, K. B.**, (1999). *Cracks and fracture*. Elsevier.
- [44] **Ravi-Chandar, K., and Knauss, W.**, (1984). An experimental investigation into dynamic fracture: I. crack initiation and arrest. *International Journal of Fracture* 25(4), 247-262.
- [45] **Lee, O. S., Knauss, W. G.**, (1989). Dynamic crack propagation along a weakly bonded plane in a polymer. *Experimental mechanics*, 29(3), 342-345.
- [46] **Washabaugh, P. D., Knauss, W. G.**, (1994). A reconciliation of dynamic crack velocity and Rayleigh wave speed in isotropic brittle solids. *International Journal of Fracture*, 65(2), 97-114.
- [47] **Broberg, K.**, (1989). The near-tip field at high crack velocities. In *Structural Integrity*. Springer, 1-13.
- [48] **Freund, L. B.**, (1979). The mechanics of dynamic shear crack propagation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 84(B5), 2199-2209.
- [49] **Andrews, D.**, (1976). Rupture velocity of plane strain shear cracks. *Journal of Geophysical Research* 81, 32, 5679–5687.
- [50] **Burridge, R., Conn, G., and Freund, L.**, (1979). The stability of a rapid mode II shear crack with finite cohesive traction. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* , 84(B5), 2210-2222.
- [51] **Sharon, E., and Fineberg, J.**, (1996). Microbranching instability and the dynamic fracture of brittle materials. *Physical Review B* 54, 10, 7128.
- [52] **Abraham, F. F., Gao, H.**,(2000). How fast can cracks propagate? *Physical Review Letters*, 84(14), 3113.
- [53] **Liu, C., Lambros, J., and Rosakis, A. J.**, (1993). Highly transient elastodynamic crack growth in a bimaterial interface: higher order asymptotic analysis and optical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 12, 1887–1954.
- [54] **Lambros, J., and Rosakis, A. J.**, (1995). Shear dominated transonic interfacial crack growth in a bimaterial-i. experimental observations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 2, 169–188.
- [55] **Rosakis, A. J., Samudrala, O., Singh, R. P., and Shukla, A.**, (1998). Intersonic crack propagation in bimaterial systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, 1789-1814.
- [56] **Rosakis, A., Samudrala, O., and Coker, D.**, (1999). Cracks faster than the shear wave speed. *Science*, 5418, 1337–1340.
- [57] **Needleman, A.**, (1999). An analysis of intersonic crack growth under shear loading. *Journal of Applied Mechanics*, 66(4): 847-857.
- [58] **Samudrala, O., Huang, Y., Rosakis, A. J.**, (2002). Subsonic and intersonic mode II crack propagation with a rate-dependent cohesive zone. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(6), 1231-1268.



- [59] **Daphalapurkar, N. P., Lu, H., Coker, D., and Komanduri, R.,** (2007). Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (gimp) method. *International Journal of Fracture*, 1, 79–102.
- [60] **Ha, Y. D., and Bobaru, F.,** (2010). Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture* 162, 1-2, 229-244.
- [61] **Agwai, A., Guven, I., and Madenci, E.,** (2011). Predicting crack propagation with peridynamics: a comparative study. *International journal of fracture* 171, 1, 65.
- [62] **Hu, W., Wang, Y., Yu, J., Yen, C.-F., and Bobaru, F.,** (2013). Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing. *International Journal of Impact Engineering* 62, 152-165.
- [63] **Mehrmashhadi, J., Wang, L., and Bobaru, F.,** (2019). Uncovering the dynamic fracture behavior of pmma with peridynamics: The importance of softening at the crack tip. *Engineering Fracture Mechanics* 219, 106617.
- [64] **Ghajari, M., Iannucci, L., and Curtis, P.,** (2014). A peridynamic material model for the analysis of dynamic crack propagation in orthotropic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 276, 431-452.
- [65] **Yolum, U., Coker, D., Guler, M.A.,** (2021). Intersonic Shear Crack Propagation using Peridynamic Theory *International Journal of Fracture*, 1-24.
- [66] **Mase, G. T., Smelser, R. E., Rossmann, J. S.,** (2020). Continuum mechanics for engineers *CRC press*.
- [67] **Gerstle, W., Sau, N., Silling, S.A.,** (2005). Peridynamic modeling of plain and reinforced concrete structures. *18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 18)*.
- [68] **Ren, H., Zhuang, X., Cai, Y., Rabczuk, T.,** (2016). Dual-horizon peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(12), 1451–1476.
- [69] **Zhang, T., Zhou, X.,** (2019). A modified axisymmetric ordinary state-based peridynamics with shear deformation for elastic and fracture problems in brittle solids. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77, 103810.
- [70] **Gerstle, W., Sau, N., Silling, S.A.,** (2007). Peridynamic modeling of concrete structures. *Nuclear engineering and design*, 237(12-13), 1250-1258.
- [71] **Du, W., Fu, X., Sheng, Q., Chen, J., Du, Y., Zhang, Z.,** (2020). Study on the failure process of rocks with closed fractures under compressive loading using improved bond-based peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 240, 107315.
- [72] **Day, A. S.,** (1965). An introduction to dynamic relaxation. *The engineer*, 219, 218–221.

- [73] **Underwood, P.**, (1983). Dynamic relaxation. *Computational method for transient analysis*, 1, 245–263.
- [74] **Madenci, E., Oterkus, E.**, (2014). Peridynamic Theory and Its Applications. *Springer, New York, NY.*, 1.
- [75] **Soedel, W.**, (2004). Vibrations of shells and plates. *CRC Press*.
- [76] **Rahman, M., Michelitsch, T.**, (2006). A note on the formula for the Rayleigh wave speed. *Wave motion*, 43(3), 272-276.
- [77] **Rayleigh, L.**, (1885). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London mathematical Society*, 1(1), 4-11.
- [78] **Sanford, R. J.**, (2003). Principles of fracture mechanics. *Pearson College Division*, 236-251.
- [79] **Rosakis, A. J.**, (2002). Intersonic shear cracks and fault ruptures. *Advances in physics*, 51(4), 1189-1257.
- [80] **Shirley, D. J., Hampton, L. D.**, (1978). Shear-wave measurements in laboratory sediments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(2), 607-613.