İLERİ DİNAMİK

Yücel Ercan

İLERİ DİNAMİK

Yücel Ercan

Birinci Sürüm: Aralık 2014

ISBN: **978-605-030-981-2**

İLERİ DİNAMİK

YÜCEL ERCAN

YAZAR HAKKINDA

Yücel Ercan 1943 yılında Konya'da doğdu. 1961 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nın yükseköğretim bursunu kazanarak makine mühendisliği eğitimi için ABD'ye gitti. Massachusetts Institute of Technology (MIT)'den sırasıyla lisans, yüksek lisans ve doktora derecelerini aldı. MIT'de araştırma asistanı ve araştırıcı olarak çalıştı. 1971 yılında yurda dönerek Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde öğretim üyesi olarak çalışmaya başladı. 1976'da doçent oldu. Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde rektör yardımcılığı ve bölüm başkan yardımcılığı yaptı. 1979-1981 yılları arasında Alexander von Humboldt Vakfı bursu kazanarak Almanya'da araştırmalarda bulundu. 1982'de profesör ünvanını aldı. Aynı yıl yeni kurulan Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi'ne dekan olarak atandı ve 1992'ye kadar dekanlık görevini sürdürdü. 2005 yılında TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'nde çalışmaya başladı. TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'nde rektör vekilliği ve rektör yardımcılığı, dekanlık, fen bilimleri enstitüsü müdürlüğü, bölüm başkanlığı gibi idari görevlerde bulunan yazar halen aynı üniversitenin makine mühendisliği bölümünde profesör olarak çalışmaktadır. Yazar, sistem dinamiği, otomatik kontrol, akışkan gücü kontrolü, dinamik, modelleme ve simülasyon konularında çalışmalar yapmaktadır. Daha önce *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği* ve *Akışkan Gücü Kontrolü Teorisi* isimli kitapları yayınlanmış olan yazarın yurt içinde ve yurt dışında yayınlanmış veya sunulmuş 150 kadar makale, bildiri ve teknik araştırma raporu vardır. İngilizce ve Almanca bilen yazar, evli ve iki çocuk babasıdır.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Mühendislik eğitiminde lisans düzeyinde okutulan temel dinamik dersleri için yeterli Türkçe kaynak olmasına karşın, yüksek lisans düzeyinde okutulan ileri düzeydeki dinamik dersleri için aynısını söylemek mümkün değildir. Bu kitap özellikle bu ihtiyaca cevap vermek üzere hazırlanmıştır. Bu yüzden ileri dinamik konularını çok kapsamlı ve ayrıntılı olarak ele almak yerine, kitabın içeriği bir dönemlik bir ileri dinamik dersinde yer alabilecek konularla sınırlı tutulmuştur. Öğrencinin eğitimine yardımcı olmak amacıyla olduğunca fazla sayıda örnek verilmiş, bölümlerin sonuna çok sayıda problem eklenmiştir.

Yurt dışında lisans düzeyinde öğretilen Hamilton prensibinin Türkiye'de yürütülen mühendislik lisans programlarında yer almaması önemli bir eksikliktir. Bu eksikliği telafi etmek için kitabın başlangıcına Hamilton prensibinin anlatıldığı bir bölüm koyulmuş, Lagrange denklemleri Hamilton prensibinden türetilerek ileri dinamik konularına geçiş yapılmıştır.

Yazar kitabın tüm öğrencilere ve eğitimcilere ücretsiz olarak erişimini sağlamak amacıyla, yayın haklarını herhangi bir yayınevine devretmemiş, telif haklarını kendi üzerinde tutmuş ve açık kaynak olarak elektronik ortamda yayılmasına olanak sağlamıştır. Bu kitap kaynak göstermek kaydıyla çoğaltılabilir ve dağıtılabilir.

Yücel Ercan
Aralık 2014, Ankara

1

NEWTON KANUNU

Dinamik problemlerinin çözümünde neredeyse daima iki temel yaklaşımdan **b**iri kullanılır. Bunlardan biri Newton Kanunun doğrudan uygulanmasıdır. Diğer yaklaşım ise Hamilton Prensibi adı verilen dolaylı bir yaklaşımdır. Newton Kanunu ve Hamilton Prensibi biri diğeri yerine kullanılabilen hipotezlerdir. Yani bunlar kanıtlanmaz, doğrulukları varsayılır. Dinamikte kullanılan bütün denklemler bu hipotezlerin birinden ya da diğerinden türetilebilir. Ancak, karmaşık problemlerde Hamilton Prensibinin kullanılması Newton Kanununa göre daha kolaydır. Bu bölümde karmaşık problemlerde Newton Kanununun kullanımında karşılaşılan güçlükler açıklanacaktır.

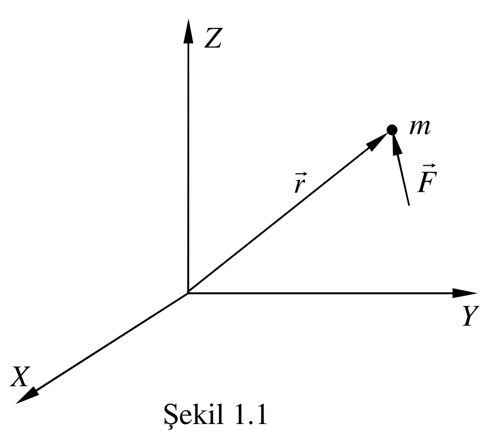
1.1 Newton Kanunu

Newton Kanunu bir kütle parçacığının momentumunun değişme hızıyla bu parçacığa uygulanan kuvvet arasında

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{1.1}$$

gibi bir ilişki olduğunu varsayar. Bu vektörel ifade Newton Kanunu'nun en öz ifade biçimidir. Mühendislikte kullanılan muhtelif Newton Kanunu ifadelerinin hepsi yukarıdaki denklemden türetilmiştir.

Şekil 1.1'deki *XYZ* eksenleri bir atalet koordinat sistemine ait olsun. Atalet koordinat sistemi bu sisteme göre koordinatları sabit olan bir kütle parçacığını yerinde tutmak için kuvvet uygulanmasını gerektirmeyen bir koordinat sistemidir. Örneğin yıldızlara göre sabit bir koordinat sistemi ya da dönmeden uzayda sabit hızla kayan bir koordinat sistemi atalet koordinat sistemi olarak alınabilir. Herhangi bir eksen etrafında dönen ya da ivmeyle kayan bir koordinat sistemi ise atalet koordinat sistemi olamaz.



Şekil 1.1

Şekilde görülen atalet koordinat sistemi içinde kütlesi m olan bir parçacık olsun. Bu parçacığın koordinat sistemi içindeki yeri bir $\vec{r}$ konum vektörüyle tanımlanmış olsun. Kütle parçacığının hızı ise konumun zamana göre türevi olduğundan

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{1.2}$$

olarak yazılabilir. Momentum ise hız ve kütlenin çarpımı olduğundan denklem (1.1)'den aşağıdaki denklemler türetilebilir:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \tag{1.3}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) \tag{1.4}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \tag{1.5}$$

Şimdi de n sayıda kütle parçacığından oluşan rijit (yani esnemeyen) bir gövdeyi ele alalım. k'ıncı parçacığa diğer parçacıklar tarafından uygulanan sistem içi kuvvetlerin toplamı $\vec{F}_{ik}$, dışardan uygulanan kuvvetlerin toplamı ise $\vec{F}_{dk}$ ise, bu parçacık için Newton Kanunu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\vec{F}_{dk} + \vec{F}_{ik} = \frac{d}{dt}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \tag{1.6}$$

Yukarıdaki denklem n sayıdaki parçacığın her biri için yazılır ve yazılan bu denklemler toplanırsa, aşağıdaki denklem bulunur:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{dk} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_k \dot{\vec{r}}_k) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \tag{1.7}$$

Newton'un 3. Kanunu gereği tepki etkiye eşit olduğundan iç kuvvetlerin toplamı sıfırdır:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = 0 \tag{1.8}$$

Dolayısıyla, n parçacığa sahip sistem için Newton Kanunu aşağıdaki hali alır:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{dk} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \tag{1.9}$$

Ağırlık merkezinin konumu $\vec{r}_C$ aşağıdaki denklemle tanımlanırsa,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)\vec{r}_C = M\,\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{n}(m_k \vec{r}_k) \tag{1.10}$$

n parçacığa sahip sistem için Newton Kanunu ağırlık merkezinin konumu ve gövdenin toplam kütlesi cinsinden aşağıdaki hali alır:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{dk} = \frac{d}{dt}(M\,\dot{\vec{r}}_C) \tag{1.11}$$

$\vec{r}$ konum vektörüyle tanımlanan bir noktaya uygulanan bir $\vec{F}$ kuvvetinin orijine göre momenti $\vec{M}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.12}$$

Tek bir kütle parçacığı olan sistem için, denklem (1.4)'ün iki tarafı soldan $\vec{r}$ ile çarpılırsa,

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) \tag{1.13}$$

ya da,

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \tag{1.14}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \tag{1.15}$$

ve $\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$ olduğundan, denklem (1.14) aşağıdaki hali alır:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) \tag{1.16}$$

Bu denklemde geçen $(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$ terimine yörüngesel açısal momentum denir. Dolayısıyla, söz konusu kütle parçacığı için Newton Kanunu, "*açısal momentumun değişme hızı momente eşittir*" olarak da ifade edilebilir.

n sayıda kütle parçacığından oluşan rijit bir gövdenin her bir parçacığı için denklem (1.16) yazılırsa ve bu denklemler toplanırsa,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\vec{r}_k \times (\vec{F}_{dk} + \vec{F}_{ik})\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m\dot{\vec{r}}_k) \tag{1.17}$$

bulunur. Denklem (1.8) kullanılırsa, *n* parçacığa sahip bir gövde için Newton Kanunu alternatif olarak aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times \vec{F}_{dk}) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times m\dot{\vec{r}}_k) \tag{1.18}$$

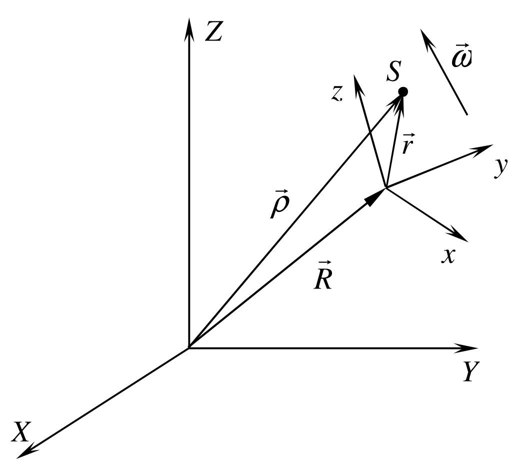
Denklem (1.9) ya da bunun alternatifi olan denklem (1.18), rijit bir gövdenin dinamiğini tanımlar. Eğer incelenen sistemde birden fazla gövde varsa, bu sistemin dinamik davranışını belirlemek için her bir gövde için bu denklemlerin yazılarak çözülmesi gerekir. Ancak bu çözüm sırasında gövdeler arasındaki karşılıklı kuvvetlerin de çözülmesi gerektiğinden Newton Kanununun çok gövdeli karmaşık sistemlere doğrudan uygulanması zordur. Diğer bir zorluk da denklemlerde hızların türevlerinin, yani ivmelerin yer almasıdır.

Hamilton Prensibi ve bundan türetilen Lagrange denklemleri, bir sistemde yer alan gövdeler arasındaki kuvvetlerin çözülmesini gerektirmeyen ve ivmelerin doğrudan kullanılmadığı alternatif bir yöntemdir. Yöntem bu özellikleri dolayısıyla özellikle çok gövdeli ve karmaşık yapılı sistemlerin dinamik denklemlerinin çıkarılmasında büyük kolaylık sağlar.

1.2 Kinematik İlişkiler

Mühendislikte karşılaşılan pek çok problemin çözümünde hareket halinde olan koordinat sistemleri kullanılır. Örneğin uçuş halinde bir uçağın kanat titreşimlerinin analizi yapılırken bu titreşimler uçak gövdesine sabitlenmiş koordinatlara göre belirlenir. Uçak gövdesine bağlı olan koordinatlar ise coğrafi koordinatlara göre hareket halindedir. Coğrafi koordinatlar ise dünyanın uzaydaki hareketi dolayısıyla yıldızlara göre sabit olan atalet koordinatlarına göre hareket eder. Newton Kanunu atalet koordinatlarının kullanılmasını gerektirir. Dinamik problemlerinin çözümünde hareketli koordinatlar da işin içine girdiğinde, Newton Kanununun gerektirdiği ivmelerin hareketli koordinatlara göre tanımlanmış değişkenler cinsindenden bulunması çok zor olabilir.

Şekil 1.2'de *XYZ*-koordinat sistemi atalet koordinat sistemidir. *xyz*-koordinat sistemi ise buna göre hareket halinde olan bir koordinat sistemidir. Uzayda bir *S* noktasının *xyz*-koordinat sistemine göre konumu bir $\vec{r}$ vektörüyle, *xyz*-koordinat sisteminin orijininin *XYZ*-koordinat sistemine göre konumu ise bir $\vec{R}$ vektörüyle tanımlansın. *xyz*-koordinatlarının *XYZ*-koordinat sistemine göre açısal hızı $\vec{\omega}$ olsun.



Şekil 1.2

1.2.1 Konum

S noktasının atalet koordinat sistemine göre konumu olan $\vec{\rho}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r} \tag{1.19}$$

1.2.2 Hız

Hız konumun türevi olduğuna göre *S* noktasının atalet koordinat sistemine göre olan hızı $\dot{\vec{\rho}}$ denklem (1.19)'un türevini alarak elde edilir:

$$\vec{v} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \tag{1.20}$$

Bu denklemde geçen $\dot{\vec{R}}$ terimi *xyz*'nin orijininin atalet koordinat sistemine göre hızıdır. Hareketli koordinat sistemi içinde tanımlanan $\vec{r}$ bir vektördür ve her vektör gibi boyu ve yönü ile tanımlanır. Bu iki özelliğinden herhangi biri veya ikisi değişirse bir türeve sahiptir. $\vec{r}$ vektörünün *x*, *y* ve *z* yönlerindeki bileşenlerinin boyları sırasıyla *x*, *y* ve *z*; bu yönlerdeki birim vektörler de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ ve $\vec{u}_z$ ise,

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{1.21}$$

ya da,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z + x\dot{\vec{u}}_x + y\dot{\vec{u}}_y + z\dot{\vec{u}}_z \tag{1.22}$$

yazılabilir. Denklem (1.22)'nin sağ tarafındaki ilk üç terim $\vec{r}$ vektörünün *xyx*-koordinat sistemine göre göreli değişimidir ve kısaca aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \tag{1.23}$$

xyz-koordinat sistemi içinde boyu ve yeri sabit bir $\vec{A}$ vektörü olsaydı, bu vektörün değişimi sadece *xyz*-koordinat sisteminin açısal hızı $\vec{\omega}$ dolayısıyla ve yön değişikliği şeklinde olabilirdi. $\vec{A}$ vektöründeki bu değişim aşağıdaki gibi olurdu:

$$\dot{\vec{A}} = \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{1.24}$$

$\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ ve $\vec{u}_z$ vektörleri de *xyz*-koordinat sistemine gömülü vektörler olduğundan, denklem (1.24)'le verilen yöntem bu vektörlere uygulanırsa, denklem (1.22)'nin son üç terimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} x\dot{\vec{u}}_x + y\dot{\vec{u}}_y + z\dot{\vec{u}}_z &= x\vec{\omega}\times\vec{u}_x + y\vec{\omega}\times\vec{u}_y + z\vec{\omega}\times\vec{u}_z \\ &= \vec{\omega}\times(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = \vec{\omega}\times\vec{r} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Şimdiye kadar elde edilen sonuçlar denklem (1.20)'de kullanılırsa, *S* noktasının hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r \tag{1.26}$$

Yukarıdaki sonuçlar dikkate alındığında herhangi bir $\vec{B}$ vektörünün *XYZ*'ye göre değişim hızını bulmak için aşağıdaki ifadenin kullanılabileceği görülür:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{B} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times\right] \vec{B} \tag{1.27}$$

Bu ifadenin sağ tarafında yer alan, köşeli parantez içindeki terim vektörlerin *XYZ*'ye göre değişim hızılarını bulmak için bir operatör gibi kullanılabilir.

1.2.3 İvme

İvme hızın türevi olduğuna göre, *S* noktasının ivmesi $\vec{a}$, denklem (1.26)'nın türevini alarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{r} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r\right] \tag{1.28}$$

Denklem (1.28)'deki köşeli parantez içindeki terim bir vektör olup, bunun değişim hızını bulmak için denklem (1.27) ile verilen genel ifade kullanılırsa *S* noktasının ivmesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times\right]\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r \tag{1.29}$$

ya da,

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_r + \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}\right)_r \tag{1.30}$$

Denklem (1.30)'un sağ tarafındaki üçüncü terim merkezcil ivme, dördüncü terim ise koriyolis (*coriolis*) ivmesidir.

Newton Kanunu uygulanırken ivmelerin kullanılması gerekir. Atalet eksen takımında ivmelerin bulunması ise denklem (1.30)'dan görüldüğü gibi çok karmaşık bir hal alabilir. Bu durum Newton Kanununun karmaşık sistemlerde kullanılmasının önündeki en önemli engeldir. Bir sonraki bölümde ayrıntıları anlatılacak olan Hamilton Prensibi ise ivmelere gerek duymaz; sadece hızların ve konumların belirlenmesi yeterlidir. Bu yüzden özellikle karmaşık sistemlerde kullanılması daha kolaydır.

2

MEKANİK SİSTEMLER İÇİN HAMİLTON PRENSİBİ

2.1 Kinetik Enerji ve Kinetik Ko-enerji

Bir kütle parçacığı için Newton Kanunu,

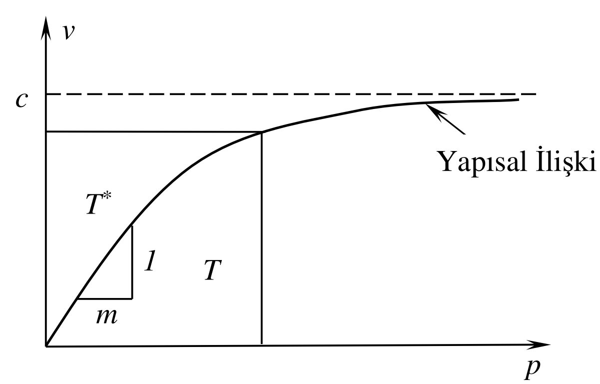
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.1}$$

olarak ifade edilir. Bu ifade atalet referans koordinatlarına göre geçerli olup, $\vec{p}$ terimi kütle parçacığının momentumudur. Momentumla kütlenin hızı $\vec{v}$ arasında aşağıdaki gibi tanımlanan bir yapısal ilişki vardır (Şekil 2.1).

$$\vec{p}(\vec{v}) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.2}$$

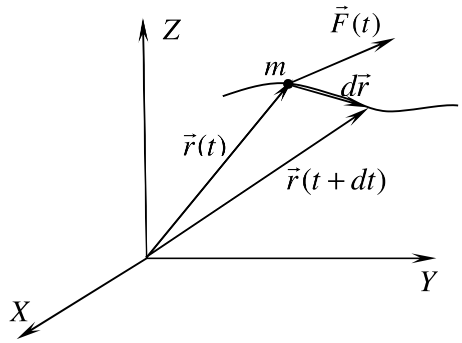
Burada c ışık hızıdır. Eğer kütle parçacığının hızı ışık hızının çok altında ise yapısal ilişki ifadesi aşağıdaki gibi lineer hale gelir:

$$\vec{p}(\vec{v}) = m\vec{v} \tag{2.3}$$



Şekil 2.1

Şekil 2.2'deki gibi $\vec{r}(t)$ vektörüyle tanımlanan bir yol ve bu yol boyunca hareket eden m kütlesine sahip bir parçacık olsun.



Şekil 2.2

Bu parçacığa $\vec{F}$ gibi bir kuvvet uygulanırken parçacık yol boyunca $d\vec{r}$ kadar hareket ederse yapılan iş,

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}dt=\vec{v}\cdot d\vec{p} \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. Kütle parçacığının momentumunun büyüklüğü sıfır değerinden bir p değerine kadar artırılırken parçacığa yapılan iş kütle tarafından kinetik enerji olarak depolanır ve aşağıdaki ifadeyle verilir:

$$T=\int_0^p \vec{v}\cdot d\vec{p} \tag{2.5}$$

Hız, yapısal ilişki ifadesinden momentumun fonksiyonu olarak çekilerek denklem (2.3)'de yerine koyulursa, kinetik enerji ifadesi aşağıdaki hali alır:

$$T(p)=\int_0^p \vec{v}(\vec{p})\cdot d\vec{p} \tag{2.6}$$

Denklem (2.6)'dan görüldüğü gibi kinetik enerji, kütlenin o andaki momentumunun büyüklüğü p'nin bir durum foksiyonudur. Denklem (2.6)'da Şekil 2.2'deki p-ekseni boyunca integral alındığından, yapısal ilişki eğrisiyle p-ekseni arasında kalan alan kinetik enerjiye eşittir.

Parçacığın hızı ışık hızından çok küçük ise denklem (2.3) geçerli olacağından kinetik enerji aşağıdaki hali alır:

$$T(p)=\frac{p^2}{2m} \tag{2.7}$$

Şekil 2.1'de yapısal ilişki eğrisiyle v-ekseni arasında kalan alana kinetik ko-enerji denir. Kinetik ko-enerji v-ekseni boyunca integral alarak,

$$T^*(v)=\int_0^v \vec{p}(\vec{v})\cdot d\vec{v} \tag{2.8}$$

ifadesinden bulunur. Parçacığın hızı ışık hızından çok küçük ise denklem (2.3)'ü kullanarak kinetik ko-enerji için aşağıdaki ifade elde edilir:

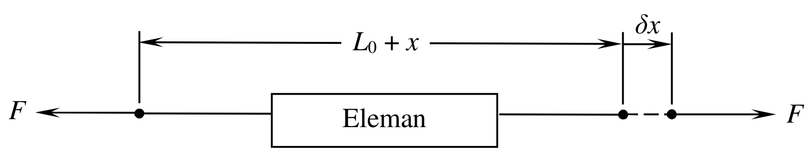
$$T^*(v) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.9}$$

Kinetik ko-enerji hızın bir durum fonksiyonu olup, kinetik enerji ile karıştırılmamalıdır. Işık hızından küçük hızlarda kinetik enerji ve kinetik ko-enerjinin büyüklükleri bir birine eşit olduğundan kinetik enerjiyi bulmak için $T = \frac{1}{2}mv^2$ ifadesi kullanılagelmiştir. Bu denklem kinetik enerjinin büyüklüğünü bulmak için kullanılabilir, ancak kinetik enerjiyi momentumun fonksiyonu olarak ifade etmediğinden kavramsal olarak yanlıştır. Kinetik enerjinin momentumun bir durum fonksiyonu olduğu, kinetik ko-enerjinin ise hızın bir durum fonksiyonu olduğunun bilinmesi Hamilton Prensibinin uygulanması açısından çok önemlidir.

2.2 İş ve Potansiyel Enerji

2.2.1 İki-Kuvvet Elemanı

Saf bir iki-kuvvet elemanı kütlesi olmayan ve iki ucuna kuvvet uygulanan bir elemandır. Uçlara uygulanan kuvvetler iki uç arasına çizilen doğru boyunca, eşit büyüklükte ve zıt yönlerdedir. Şekil 2.3'de temsili olarak çizilen iki-kuvvet elemanında, F kuvveti sıfırken elemanın uzunluğu L_0 ile gösterilmiştir. x ise F kuvveti uygulandığında elemanın uzama miktarıdır.



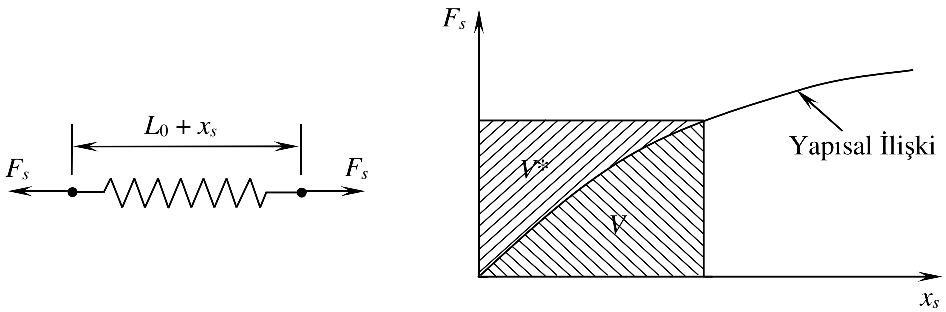
Şekil 2.3

F kuvveti uygulanmış haldeyken elemanın boyu δx kadar uzatılırsa *eleman tarafından* yapılan iş aşağıdaki denklemden bulunur:

$$\delta W = -F\delta x \tag{2.10}$$

Mühendislikte karşılaşılan iki-kuvvet elemanlarında elemana uygulanan kuvvet, geometrik zorlamanın bir fonksiyonu olarak eleman tarafından belirlenir. Kuvveti belirleyen bu fonksiyona elemanın yapısal ilişkisi denir. Örneğin Şekil 2.4'deki yayda kuvvet, yayın yapısal ilişkisine göre yayın esnemesi cinsinden belirlenir. Eğer yay doğrusalsa bu ilişki yay sabiti K cinsinden aşağıdaki gibidir:

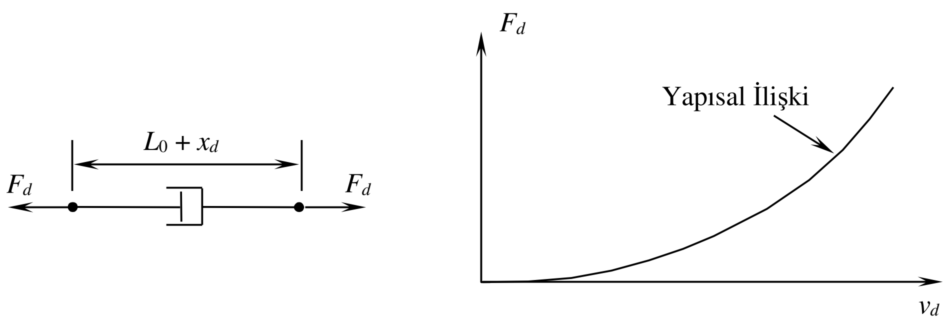
$$F_s = Kx_s \tag{2.11}$$



Şekil 2.4

Şekil 2.5'deki sönümleyicide ise kuvvet, sönümleyicinin yapısal ilişkisine göre yayın iki ucu arasındaki hız farkı $v_d = \dot{x}_d$ cinsinden belirlenir. Eğer sönümleyici doğrusalsa bu ilişki sönüm sabiti *b* cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$F_d = b\dot{x}_d \tag{2.12}$$



Şekil 2.5

2.2.2 Korunumlu İki-Kuvvet Elemanı

Eğer bir iki-kuvvet elemanının kuvveti sadece elemanın uzama miktarının tek değerli bir fonksiyonuysa, elemanı $x = 0$ referans konumundan herhangi bir son duruma getirmek için yapılan iş başlangıç ve son durum arasında izlenen yolun şekline bağlı değildir. Böyle bir elemana *korunumlu eleman* denir. Korunumlu *elemana yapılan iş* eleman tarafından potansiyel enerji olarak depolanır ve geri kazanılabilir. Örneğin, korunumlu bir eleman olan Şekil 2.4'deki yayı ele alalım. Bu eleman $x_s = 0$ durumundan bir x_s konumuna esnetilirken eleman tarafından depolanan potansiyel enerji elemana yapılan işe eşit olup, aşağıdaki ifadeden elde edilir:

$$V(x_s) = \int_0^{x_s} F_s(x_s)\,dx_s \tag{2.13}$$

Yukarıdaki ifadeden görüldüğü gibi, potansiyel enerji sadece x_s'ye bağlı olan bir durum fonksiyonudur. Denklem (2.13)'de x_s ekseni boyunca integral alındığından, Şekil 2.4'de yapısal ilişki eğrisiyle x_s ekseni arasında kalan alan potansiyel enerjiye eşittir.

Potansiyel ko-enerji ise,

$$V^*(F_s) = \int_0^{F_s} x_s(F_s)dF_s \tag{2.14}$$

ifadesiyle tanımlanır. Yapısal ilişki eğrisiyle F_s ekseni arasında kalan alan potansiyel ko-enerjiye eşittir.

2.3 Kuvvet Alanı

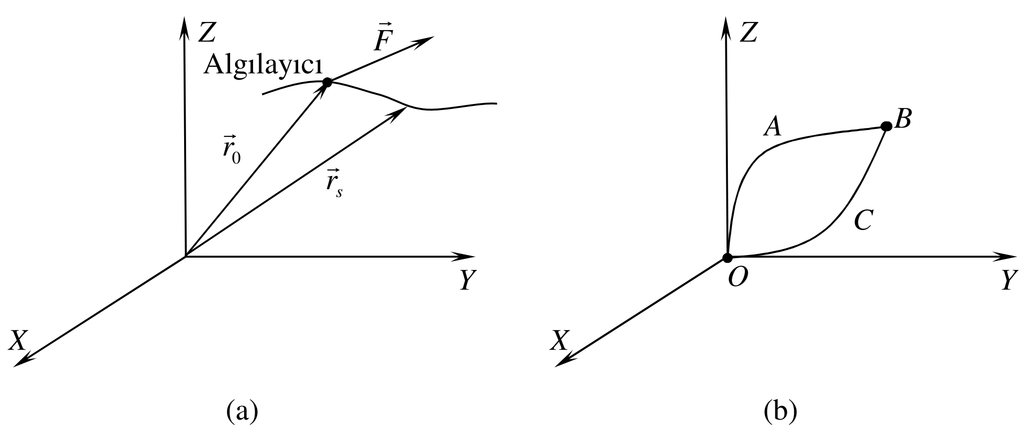
Bir kuvvet algılayıcısının, algılayıcının konumu, hızı veya diğer özelliklerine bağlı olarak bir kuvvet hissettiği uzay bölgesine *kuvvet alanı* denir (Şekil 2.6a). Kuvvet algılayıcısını taşıyan bir elemana bir $\vec{r}_0$ başlangıç konumundan bir $\vec{r}_s$ son konumuna gelirken $\vec{F}$ kuvveti uygulanıyorsa, algılayıcı vasıtasıyla elemana kuvvet alanı tarafından yapılan iş aşağıdaki ifadeden bulunur:

$$\textit{Alan tarafından elemana yapılan iş} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_s} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2.15}$$

Eleman tarafından yapılan iş ise bunun ters işaretlisi olup, aşağıdaki gibidir:

$$\textit{Eleman tarafından alana yapılan iş} = +\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_s} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2.16}$$

Denklem (2.15) ile tanımlanan iş integralinin sadece başlangıç ve son duruma bağlı olması, yani iki uç arasında takip edilen yoldan bağımsız olması halinde kuvvet alanına *korunumlu* denir. Bir kuvvet alanının korunumlu olması için gerekli olan şart kolayca



Şekil 2.6

bulunabilir. Şekil 2.6b'deki *O* ve *B* noktalarını birbirine bağlayan iki farklı yol *A* ve *C* olsun. Bu durumda *OAB* ve *OCB* boyunca alınacak integraller birbirine eşit olacağından, *OABCO* kapalı eğrisi boyunca alınacak integral sıfıra eşit olur. Yani aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{2.17}$$

ya da,

$$\nabla \times \vec{F} = curl\,\vec{F} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

Yukarıdaki ifade korunumlu alanın matematiksel tanımıdır. Korunumlu alan tarafından elemana yapılan iş *V* sadece elemanın başlangıç ve son konumuna bağlıdır. Bu iş eleman tarafından potansiyel enerji olarak depolanır ve aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$V = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.19}$$

V için $-\nabla V = \vec{F}$ ifadesi geçerlidir.

Örnek: Yerçekimi Alanı

Yerçekimi alanında bir kütle parçacığı kuvvet algılayıcısıdır. Elemanın kütlesi *m* ise, alanın elemana uyguladığı kuvvet (Şekil 2.7) aşağıdaki gibi negatif radyal yöndedir:

$$\vec{F} = -\frac{Km}{r^2}\vec{u}_r \tag{2.20}$$

Elemana yapılan iş eleman tarafından potansiyel enerji olarak depolanır ve $r = \infty$ referans durumuna göre aşağıdaki gibidir:

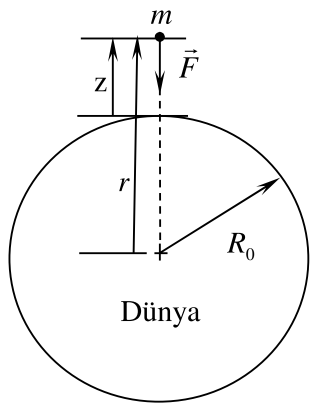
$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} (-\frac{Km}{r^2}\vec{u}_r) \cdot d\vec{r} = -\frac{Km}{r} \tag{2.21}$$

Bu *m* kütlesi yer yüzeyine yakın bir noktada ve yüzeyden *z* kadar yukarıda olsun. Bu durumda,

$$r = R_0 + z \qquad (z/R_0 << 1) \tag{2.22}$$

olur ve $V(r)$ terimi *z* cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V(r) = V(R_0 + z) = -\frac{Km}{R_0 + z} = -\frac{Km}{R_0}\left(1 - \frac{z}{R_0} + \frac{z^2}{R_0^2} - \cdot\cdot\cdot\cdot\right) \tag{2.23}$$



Şekil 2.7

ya da,

$$V(R_0 + z) - V(R_0) \cong \frac{Km}{R_0^2} z \tag{2.24}$$

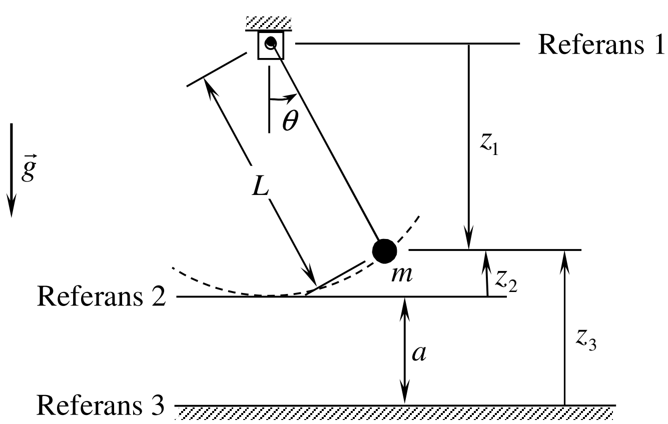
Yerçekimi ivmesi g,

$$g = \frac{K}{R_0^2} \tag{2.25}$$

olarak tanımlanırsa, $r = \infty$ yerine $r = R_0$ referans alındığında elemana yapılan iş ve eleman tarafından depolanan potansiyel enerji aşağıdaki hali alır:

$$V(z) = mgz \tag{2.26}$$

Denklem (2.26) yazılırken yer yüzüne göre yüksekliği değişmeyen bir referans seçilmesi gerekir. Eğer z bu referanstan yukarı yönde ölçülüyorsa '+' işaretle, aşağı yönde ölçülüyorsa '-' işaretle alınmalıdır. Örneğin, Şekil 2.8'deki düzlemsel basit sarkaç için z'nin yazımıyla ilgili bazı seçenekler seçilen referansa göre $V = mgz_1 = -mgL\cos\theta$, $V = mgz_2 = mgL(1-\cos\theta)$ veya $V = mgz_3 = mg[a + L(1-\cos\theta)]$ olarak yazılabilir.



Şekil 2.8

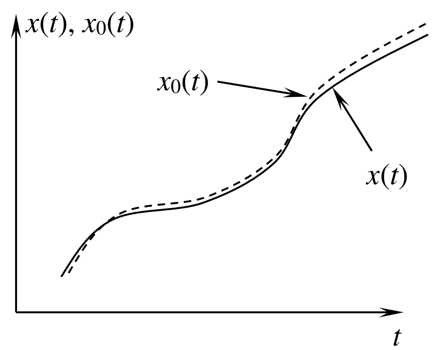
2.4 Varyasyon

Bir $x(t)$ fonksiyonu ve bunun komşusu olan bir $x_0(t)$ fonksiyonu olsun (Şekil 2.9). Bu iki fonksiyonun birbirinin komşusu olması demek, bütün t değerleri için $x - x_0$ ve $\dot{x} - \dot{x}_0$ terimlerinin çok küçük olmaları demektir. x'in *varyasyonu* δx aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta x = x - x_0 \tag{2.27}$$

$V(x)$ ise $x(t)$'nin scalar bir fonksiyonu olsun. Argümanı bir fonksiyon olan fonksiyonlara *fonksiyon fonksiyonu* ya da kısaca *fonksiyonel* denir. $V(x)$'in argümanı x'den x_0'a değiştirildiğinde V'nin değerinde olan ΔV değişikliğine V'nin toplam varyasyonu denir ve aşağıdaki ifadeyle tanımlanır:

$$\Delta V = V(x) - V(x_0) = V(x_0 + \delta x) - V(x_0) \tag{2.28}$$



Şekil 2.9

Eğer $V(x_0 + \delta x)$ terimi Taylor serisiyle açılırsa, ΔV aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Delta V = V(x_0) + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{x_0} \delta x^3 + \cdots - V(x_0) \tag{2.29}$$

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots \tag{2.30}$$

Yukarıdaki ifadede geçen δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, . . . terimlerine sırasıyla V'nin birinci varyasyonu (ya da kısaca V'nin varyasyonu), V'nin ikinci varyasyonu, V'nin üçüncü varyasyonu, . . denir. Bu terimler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta V = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0} \delta x \tag{2.31}$$

$$\delta^2 V = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0} \delta x^2 \tag{2.32}$$

$$\delta^3 V = \left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{x_0} \delta x^3 \tag{2.33}$$

.

.

δV'nin tanımı incelendiğinde, bir fonksiyon fonksiyonunun varyasyonunu alırken uygulanan kurallarla, bir fonksiyonun diferansiyelini alırken uygulanan kuralların aynı olduğu görülür. Örneğin, v bir fonksiyon ise,

$$\delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = m v \delta v \tag{2.34}$$

olur. Eğer yukarıdaki denklemde v hız ise, $v = \dot{x}$ olacağından aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = m v \delta v = m v \delta(\dot{x}) = m \dot{x} \delta(\dot{x}) \tag{2.35}$$

2.5 Hamilton Prensibi

Daha önce de belirtildiği gibi Newton Kanunu doğruluğu varsayılan bir hipotezdir. Dolayısıyla kanıtlanması beklenmez. Dinamiğin bütün esasları bu hipotez üzerine inşa edilebilir. Newton Kanununun bir diğer alternatifi ise yine doğruluğu varsayılan bir hipotez olan Hamilton Prensibidir. Dinamiğin bütün esasları Hamilton Prensibi üzerine de inşa edilebilir. Hamilton prensibi de Newton Kanunu gibi sadece dinamik denklemleri verir; bu denklemlerin çözümlerini vermez. Hamilton Prensibi aşağıdaki gibi ifade edilir.

Hamilton Prensibi:

Bir dinamik sistem t_1 zamanında sabit bir konfigürasyondan t_2 zamanında başka bir sabit bir konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton İntegralini sıfır yapar.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i f_i \delta x_i \right) dt \tag{2.36}$$

Bu integralin altındaki terimler, sistemdeki bütün kuvvet elemanları, kuvvet alanları, atalet kuvvetleri ve dış kuvvetler ***tarafından*** *yapılan iş terimleridir.*

Denklem (2.36)'da geçen iş terimleri sistemde bulunan korunumlu iki-kuvvet elemanları, korunumlu kuvvet alanları ve kütleler için, farklı şekilde de ifade edilebilir. Bunlar aşağıda sırayla incelenecektir.

Korunumlu İki-Kuvvet Elemanı

Sistemde korunumlu bir iki-kuvvet elemanı (örneğin bir yay) varsa, eleman *tarafından* yapılan iş denklem (2.10)'dan aşağıdaki gibidir:

$$\delta W = -f \delta x \tag{2.37}$$

Denklem (2.13)’den ise aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\delta V = f\delta x \tag{2.38}$$

Denklemler (2.37) ve (2.38) karşılaştırıldığında,

$$\delta W = -\delta V \tag{2.39}$$

elde edilir. O halde, korunumlu iki-kuvvet elemanları için Hamilton integralinde geçen iş terimleri denklem (2.39) uyarınca potansiyel enerji varyasyonu olarak da ifade edilebilir.

Korunumlu Kuvvet Alanı

Sistemde korunumlu kuvvet alanı (örneğin yerçekimi alanı) varsa, kütle elemanı *tarafından* alana yapılan iş için denklem (2.16)’dan,

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{2.40}$$

denklem (2.19)’dan ise aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\delta V = -\vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{2.41}$$

Denklemler (2.40) ve (2.41) karşılaştırıldığında,

$$\delta W = -\delta V \tag{2.42}$$

elde edilir. O halde, korunumlu kuvvet alanları için Hamilton integralinde geçen iş terimleri denklem (2.42) uyarınca potansiyel enerji varyasyonu olarak da ifade edilebilir.

Kütle

Bir kütle parçacığının atalet kuvveti (D’Alambert kuvveti) *ma* büyüklüğünde ve ivme ile ters yöndedir. Dolayısıyla, atalet kuvveti dolayısıyla elemana yapılan iş $-ma\delta x$, eleman tarafından yapılan iş δW ise aşağıdaki gibidir:

$$\delta W = ma\delta x = m\frac{\delta v}{\delta t}\delta x = mv\delta v = p\delta v \tag{2.43}$$

Denklem (2.8)’den ise aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\delta T^{*} = p\delta v \tag{2.44}$$

Denklemler (2.43) ve (2.44) karşılaştırıldığında,

$$\delta W = \delta T^{*} \tag{2.45}$$

elde edilir. O halde, kütleler için Hamilton integralinde geçen iş terimleri denklem (2.45) uyarınca kinetik ko-enerji varyasyonu olarak da ifade edilebilir.

Bir sistemde kütleler, korunumlu iki-kuvvet elemanları veya korunumlu kuvvet alanları varsa, Hamilton integralindeki bunlarla ilgili iş terimlerinin (2.39), (2.42) ve (2.45) numaralı denklemlere göre potansiyel enerji ve kinetik ko-enerji varyasyonları olarak ifade edilmesi büyük kolaylık sağlar ve bu yüzden tercih edilir. Bu terimler,

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j} \delta T^{*}_{j} - \sum_{k} \delta V_{k} \tag{2.46}$$

şeklinde bir araya toplanır. Bu denklemdeki $\mathcal{L}$ terimi *Lagrange Fonksiyoneli* olarak anılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L} = \sum_{j} T^{*}_{j} - \sum_{k} V_{k} \tag{2.47}$$

Kütleler, korunumlu iki-kuvvet elemanları ve korunumlu kuvvet alanları ile ilgili iş terimleri Lagrange fonksiyoneli cinsinden ifade edilirse, denklem (2.36) ile ifade edilen Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

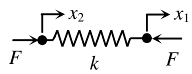
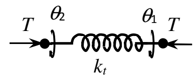
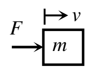
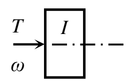
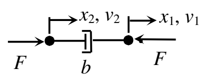
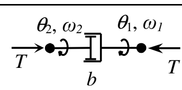
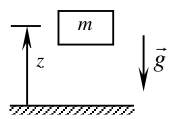
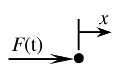
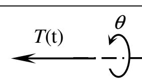
$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \mathcal{L} + \sum_{i} f_i \delta x_i \right) dt \tag{2.48}$$

Denklem (2.48)'de yer alan $\sum_{i} f_i \delta x_i$ teriminde sadece varsa sönümleyiciler gibi korunumlu olmayan elemanlar ile sisteme dışarıdan uygulanan kuvvet zorlamalarına ait iş terimleri yer alır. Hamilton prensibinin uygulanmasında sisteme dışardan uygulanan kuvvet girişleri de iş yaptıklarından ayrı birer eleman olarak kabul edilir ve bunlara ait iş terimleri Hamilton integralinin $\sum_{i} f_i \delta x_i$ kısmına dahil edilir.

Bu bölümdeki örneklerde kolaylık olsun diye öteleme elemanları kullanılmıştır. Sistemde dönel elemanlar varsa, bunlar da yukarıdakilere benzer şekilde ele alınır. Böyle bir durumda dönel yayların potansiyel enerjileri ve dönen kütlelerin kinetik ko-enerjileri Lagrange fonksiyoneline dahil edilir. Dönel sönümleyicilerin ve sisteme uygulanan dış momentlerin iş terimleri ise Hamilton integralinin $\sum_{i} f_i \delta x_i$ kısmına dahil edilir. Çizelge 2.1'de öteleme ve dönel türde lineer mekanik elemanlara ilişkin bilgiler verilmiştir.

Hamilton integrali sadece Lagrange fonksiyoneli vasıtasıyla ya da doğrudan ifade edilmiş iş terimlerini içerdiğinden sistemdeki iş yapmayan kuvvetler, Newton Kanunu uygulamasının aksine, problem formülasyonuna girmez. Örneğin, sürtünmesiz yataklardaki reaksiyon kuvvetleri, yuvarlanan yüzeylerdeki kuvvetler, kütlesiz rijit bağlantı elemanları (kollar, halatlar, vb.) tarafından aktarılan kuvvetler Hamilton integraline katkıda bulunmaz. Bu elemanlar ileride görüleceği gibi geometric kabul edilebilirlik şartlarına katkıda bulunurlar.

Çizelge 2.1 Lineer Mekanik Elemanlar

Eleman Tipi	Fiziksel Eleman	Diyagram	Yapısal İlişki	Hamilton İntegraline Katkı
Korunumlu İki-kuvvet Elemanı	Öteleme Yayı		$F = k(x_2 - x_1)$	$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$
	Dönel Yay		$T = k_t(\theta_2 - \theta_1)$	$V = \frac{1}{2}k_t(\theta_2 - \theta_1)^2$
Kütle	Öteleme Halinde Kütle		$p = mv$	$T^* = \frac{1}{2}mv^2$
	Dönel Kütle		$h = I\omega$	$T^* = \frac{1}{2}I\omega^2$
Sönümleyici	Öteleme Sönümleyici		$F = bv_{21}$	$\sum f_i \delta x_i = -F\delta x_{21} = -b\dot{x}_{21}\delta x_2$
	Dönel Sönümleyici		$T = b_t\omega_{21}$	$\sum f_i \delta x_i = -T\delta\theta_{21} = -b_t\dot{\theta}_{21}\delta\theta$
Kuvvet Alanı	Yerçekimi Alanında Kütle		-	$V = mgz$
Dış Zorlama	Dış Kuvvet		$F = F(t)$	$\sum f_i \delta x_i = F(t)\delta x$
	Dış Moment		$T = T(t)$	$\sum f_i \delta x_i = T(t)\delta\theta$
	Lineer veya Açısal Konum veya Hız Zorlaması	-	$x = x(t)$, $v = v(t)$ $\theta = \theta(t)$, $\omega = \omega(t)$	Hamilton integralinde iş terimi olarak yer almaz. Kabul edilebilirlik şartları olarak işlem görür.

F = kuvvet T = moment p = momentum h = açısal momentum
v = hız ω = açısal hız x = konum θ =.açısal konum
k = öteleme yayı sabiti k_t = açısal yay sabiti m = kütle I = atalet momenti
b = öteleme sönüm sabiti b_t = açısal sönüm sabiti

Örnek

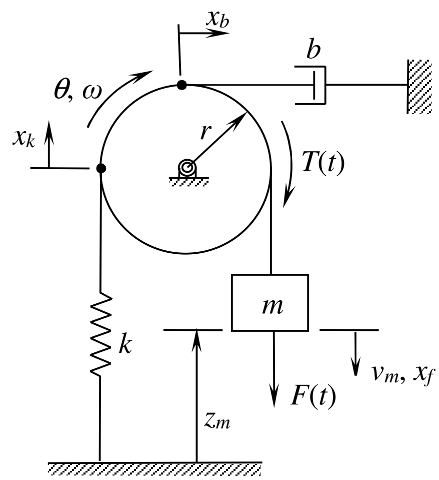
Şekil 2.10'da verilen sistemde makara kütlesizdir. Bu sistem için Lagrange fonksiyoneli ve iş terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}mv_m^2-\frac{1}{2}kx_k^2-mgz_m \qquad (2.49)$$

50)

$$\sum_i f_i\delta x_i=T(t)\delta\theta+F(t)\delta x_f-F_b\delta x_b$$

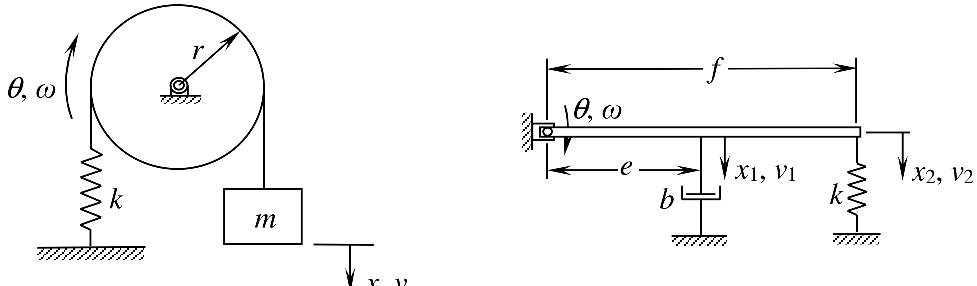
(2.



Şekil 2.10

2.6 Kabul Edilebilirlik Şartları

Hamilton prensibinin ifadesinde kabul edilebilir varyasyonlardan söz edilmektedir. Kabul edilebilirlik şartları iki grup halinde ele alınabilir. Eleman kabul edilebilirlik şartları olarak adlandırılan birinci grup kinematic ilişkilerden oluşur. Konumların türevlerinin hıza eşit olduğu gerçeğine dayanır. Örneğin, bir kütlenin konumu x, hızı v ise, $\dot{x}=v$ olduğundan bunların varyasyonları arasıda da $\delta(\dot{x})=\delta v$ ilişkisi vardır. İkinci gruba giren kabul edilebilirlik şartları ise, sistemin yapısı ve geometriden kaynaklanan şartlardır. Örneğin, Şekil 2.11a'daki sistem için, $\theta r=x$, $\omega r=v$, $r\delta\theta=\delta x$ ve $r\delta\omega=\delta v$ şartları yazılabilir. Şekil 2.11b'deki sistem için ise, $x_1/e=x_2/f=\theta$, $v_1/e=v_2/f=\omega$, $\delta x_1/e=\delta x_2/f=\delta\theta$ ve $\delta v_1/e=\delta v_2/f=\delta\omega$ şartları yazılabilir.



(a) (b)

Şekil 2.11

2.7 Hamilton Prensibinin Uygulanması

Hamilton prensibinin uygulanması aşağıdaki aşamaları içerir:

a) Sistem elemanlarının tanımlanması. (Dış kuvvet ve moment girişleri de birer eleman olarak kabul edilir.)

b) Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartlarının yazılması.

c) Lagrange fonksiyoneli ve iş terimlerinin yazılması.

d) İş terimlerinde geçen kuvvetlerin eleman denklemlerinden yazılması.

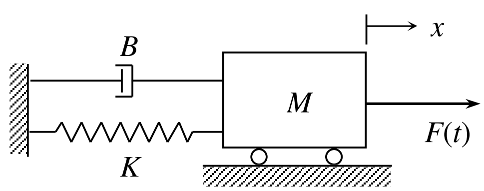
e) Kabul edilebilirlik şartlarının uygulanması.

f) Hamilton prensibinin uygulanması.

Yukarıdaki aşamalardan kabul edilebilirlik şartlarının uygulanması genellikle işlemler boyunca yeri geldiğinde yapılabilir. Kabul edilebilirlik şartlarından bazıları Hamilton integrali altındaki varyasyon işlemi öncesinde veya sonrasında uygulanabileceği gibi, Lagrange çarpanları yöntemi de kullanılabilir. Kabul edilebilirlik şartlarının uygulanış yöntemleri ileride ayrı bir kısımda incelenecektir.

Örnek 1:

Şekil 2.12'de verilen sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini uygulayarak elde edelim.



Şekil 2.12

Sistem elemanları: Kütle, M; yay, K; sönümleyici, B; zorlama kuvveti, $F(t)$.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M v_m^2 - \frac{1}{2} K x_k^2 \tag{2.51}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i \delta x_i = F(t)\delta x_F - F_b \delta x_b \tag{2.52}$$

Sönümleyici için eleman denklemi:

$$F_b = Bv_b \tag{2.53}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\dot{x} = v \ ; \ \ \dot{x}_k = v_k \ ; \ \ \dot{x}_b = v_b \ ; \ \ \dot{x}_F = v_F \tag{2.54}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$x = x_k = x_b = x_F \tag{2.55}$$

$$v = v_k = v_b = v_F \tag{2.56}$$

Hamilton integrali:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M v_m^2 - \frac{1}{2} K x_k^2 \right) + F(t)\delta x_F - F_b \delta x_b \right] dt \tag{2.57}$$

Sönümleyicinin eleman denklemi kullanılır ve kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa, Hamilton integrali x cinsinden aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 \right) + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x \right] dt \tag{2.58}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[M\dot{x}\delta\dot{x} - Kx\delta x + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x \right] dt \tag{2.59}$$

İntegralin altındaki birinci terimin kısmi integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} M\dot{x} \frac{d}{dt}(\delta x) dt = M\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} M\ddot{x}\delta x dt \tag{2.60}$$

Hamilton prensibine göre t_1 ve t_2 zamanlarında sistem konfigürasyonunun sabit olduğu kabul edilir. Bu yüzden t_1 ve t_2'de sisteme varyasyon uygulanamaz, yani $\delta x(t_1) = 0$ ve $\delta x(t_2) = 0$ şartı vardır. Bu şart dolayısıyla denklem (2.60)'ın sağ tarafındaki ilk terim sıfıra eşittir. Denklem (2.60) ile elde edilen sonuç, denklem (2.59)'da kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-M\ddot{x} - B\dot{x} - Kx + F(t) \right] \delta x dt \tag{2.61}$$

Hamilton prensibine göre rastgele δx varyasyonları için bu integralin sıfır olması gerekir:

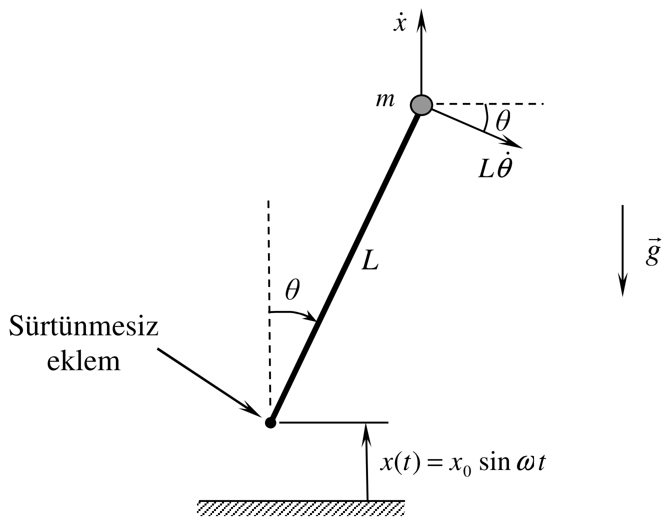
$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}-B\dot{x}-Kx+F(t)\right]\delta x dt=0 \qquad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \qquad (2.62)$$

Yukarıdaki integralin rastgele δx varyasyonları için sıfır olabilmesi, ancak δx'in katsayısının yani köşeli parantez içindeki terimin sıfır olmasıyla mümkün olacağından, sistemin dinamik denklemi bu terimi sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx=F(t) \qquad (2.63)$$

Örnek 2:

Şekil 2.13'de bir basit evrik sarkaç görülmektedir. Sarkacın hareketi düzlemseldir. Sarkacın eklem noktası düşey yönde $x(t)=x_0 \sin\omega t$ şeklinde hareket etmeye zorlanmaktadır. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibiyle elde edelim.



Şekil 2.13

Sistem elemanları: Kütle, *m*

Kinetik ko-enerji:

Şekil 2.13'de m kütlesinin hız bileşenleri görülmektedir. Bu hız bileşenlerinin düşey ve yatay yönde projeksiyonları alınırsa, m kütlesinin bu yönlerdeki hız bileşenleri v_d ve v_y aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_d=\dot{x}-L\dot{\theta}\sin\theta \qquad (2.64)$$

$$v_y=L\dot{\theta}\cos\theta \qquad (2.65)$$

Bu bileşenler birbirine dik olduğundan, m kütlesinin hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_m^2=(\dot{x}-L\dot{\theta}\sin\theta)^2+(L\dot{\theta}\cos\theta)^2 \qquad (2.66)$$

Sistemin kinetik ko-enerjisi ise aşağıdaki gibidir:

$$T^* = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m\left[(\dot{x} - L\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (L\dot{\theta}\cos\theta)^2\right] \tag{2.67}$$

$$T^* = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right] \tag{2.68}$$

Potansiyel enerji:

Şeklin altındaki referans düzlemini esas alarak potansiyel enerji için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$V = mgz = mg(x + L\cos\theta) \tag{2.69}$$

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right] - mg(x + L\cos\theta) \tag{2.70}$$

İş terimleri:

Dışardan kuvvet zorlaması olmadığından iş terimleri sıfırdır:

$$\sum_i f_i \delta x_i = 0 \tag{2.71}$$

Hamilton integrali:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right] - mg(x + L\cos\theta) \right) \right] dt \tag{2.72}$$

Yukarıdaki ifadede varyasyon işlemi alınırken $\delta x = 0$ ve $\delta\dot{x} = 0$ olduğu unutulmamalıdır. Zira $x(t)$ dışarıdan uygulanan bir zorlama olduğundan hem kendisi hem de türevi belirlidir ve bu terimlerin varyasyonları sıfırdır. Bu hususu dikkate alarak varyasyon işlemi uygulanırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[mL^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - mL\dot{x}\sin\theta\delta\dot{\theta} - mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\delta\theta + mgL\sin\theta\delta\theta \right] dt \tag{2.73}$$

$\delta\dot{\theta}$ içeren terimlere kısmi integral uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa, aşağıdaki ifade elde edilir.:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-mL^2\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}(mL\dot{x}\sin\theta) - mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgL\sin\theta \right] \delta\theta \, dt = 0$$

(Rastgele $\delta\theta$ için) (2.74)

Yukarıdaki integralin rastgele $\delta\theta$ varyasyonları için sıfır olabilmesi, ancak $\delta\theta$'nın katsayısının sıfır olmasıyla mümkün olacağından, bu terim sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-mL^2\ddot{\theta}+\frac{d}{dt}(mL\dot{x}\sin\theta)-mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+mgL\sin\theta=0 \tag{2.75}$$

ya da,

$$mL^2\ddot{\theta}-mgL\sin\theta-mL\sin\theta\ddot{x}=0 \tag{2.76}$$

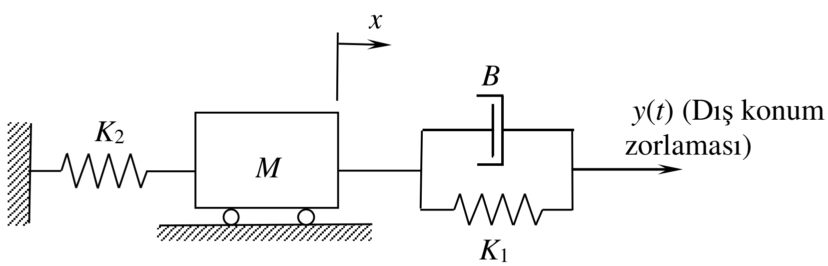
Eğer sistemin hareketi sırasında θ açısı küçük kalırsa, $\sin\theta=\theta$ yazılabilir. Ayrıca dış zorlama fonksiyonu $x(t)=x_0\sin\omega t$ yerine koyulursa sistemin dinamik denklemi aşağıdaki hale gelir:

$$\ddot{\theta}+\left(-\frac{g}{L}+\frac{x_0}{L}\omega^2\sin\omega t\right)\theta=0 \tag{2.77}$$

Yukarıdaki denklem Matthieu denklemidir. Bu denklemin çözümü ve zorlanmış evrik sarkacın davranışı ileride ayrıca incelenecektir.

Örnek 3:

Şekil 2.14'de verilen sistemdeki kütle yatay düzlem üzerinde sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Bu sisteme Hamilton prensibini uygulayarak dinamik denklemlerini elde edelim.



Şekil 2.14

Sistem elemanları: Kütle, M; yay, K_1; yay, K_2; sönümleyici, B.

Bu sistemde $y(t)$ kuvvet zorlaması olmadığından sistem elemanı olarak alınmaz. Fakat kabul edilebilirlik şartı olarak probleme girer.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}Mv_m^2-\frac{1}{2}K_1[x-y(t)]^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{2.78}$$

$\dot{x}=v_m$ (kabul edilebilirlik şartı) olduğundan denklem (2.78) aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1[x-y(t)]^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{2.79}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i \delta x_i = -F_b \delta x = -B[\dot{x} - \dot{y}(t)]\delta x \tag{2.80}$$

Denklem (2.80) yazılırken, $y(t)$ dış zorlama olduğundan $\delta y(t) = 0$ alınmıştır.

Hamilton integrali:

$\delta y(t) = 0$ olduğunu dikkate alarak, denklemler (2.79) ve (2.80)'den Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M\dot{x}^2 - \frac{1}{2} K_1 [x - y(t)]^2 - \frac{1}{2} K_2 x^2 \right) - B[\dot{x} - \dot{y}(t)]\delta x \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [M\dot{x}\delta\dot{x} - K_1[x - y(t)]\delta x - K_2 x \delta x - B[\dot{x} - \dot{y}(t)]\delta x] dt \tag{2.81}$$

İntegralin altındaki ilk terime kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

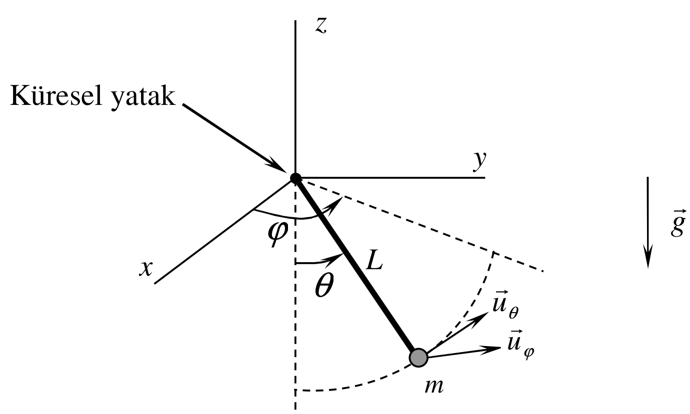
$$\int_{t_1}^{t_2} [-M\ddot{x} - B\dot{x} - (K_1 + K_2)x + K_1 y(t) + B\dot{y}(t)]\delta x dt = 0 \quad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \tag{2.82}$$

olur ve sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + (K_1 + K_2)x = K_1 y(t) + B\dot{y}(t) \tag{2.83}$$

Örnek 4:

Şekil 2.15'de verilen küresel sarkacın dinamik denklemlerini Hamilton prensibini uygulayarak elde edelim. Bu sistemde kütlenin konumu θ ve φ koordinatlarıyla belirlenebilir. Bu iki koordinat birbirinden bağımsız olduğu için bunlara bağımsız olarak varyasyonlar uygulanabilir. $\vec{u}_\theta$ ve $\vec{u}_\varphi$ sırasıyla θ ve φ'deki değişimlerin kütlede yaratttığı hareket yönlerindeki birim vektörlerdir. Θ ve φ'nin tanımlanma biçimleri dolayısıyla bu birim vektörler ortagonaldir.



Şekil 2.15

Sistem elemanı: Kütle, *m*.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2} m v_m^2 - mgz \tag{2.84}$$

Yukarıdaki denklemde,

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta + L\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \tag{2.85}$$

olduğundan,

$$v^2 = L^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \tag{2.86}$$

elde edilir. *xy*-düzlemi referans alınırsa, *z* için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$z = -L\cos\theta \tag{2.87}$$

Denklemler (2.86) ve (2.87), denklem (2.84)'de kullanılırsa Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(L^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mgL\cos\theta \tag{2.88}$$

İş terimleri:

Dışarıdan uygulanan bir kuvvet zorlaması olmadığından iş terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\sum_i f_i \delta x_i = 0 \tag{2.89}$$

Hamilton integrali:

Denklemler (2.88) ve (2.89)'dan Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} m(L^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mgL\cos\theta \right) \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(mL^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta} + mL^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} + mL^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\delta\theta - mgL\sin\theta\delta\theta \right) dt \tag{2.90}$$

İntegralin altındaki ilk iki terime kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-mL^2\ddot{\theta} + mL^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgL\sin\theta \right]\delta\theta + \left[-\frac{d}{dt}(mL^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) \right]\delta\varphi \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\theta$ ve $\delta\varphi$ için) (2.91)

Rastgele $\delta\theta$ ve $\delta\varphi$ için yukarıdaki integralin sıfır olması için bu terimleri çarpan katsayıların sıfır olması gerektiğinden, sistemin dinamiğini tanımlayan diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta - mL^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \tag{2.92}$$

$$\frac{d}{dt}(mL^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0 \tag{2.93}$$

Denklem (2.93) $mL^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$ teriminin sabit olduğunu göstermektedir. Bu terim sistemin z-ekseni etrafındaki açısal momentumudur. Bu eksen etrafında sisteme herhangi bir moment uygulanmadığından, başlangıçta sistemin sahip olduğu açısal momentum sabit kalır.

Örnek 5:

Şekil 2.16'daki sistemde sarkaç düzlemseldir. Hamilton prensibini uygulayarak bu sistemin dinamik denklemlerinin x ve θ cinsinden elde edilmesi istenmektedir. Sistem yapısından görüleceği gibi x ve θ birbirinden bağımsızdır.

Sistem elemanları: Kütle, M; kütle, m; yay, K; sönümleyici, B; zorlama kuvveti, $F(t)$.

Lagrange fonksiyoneli:

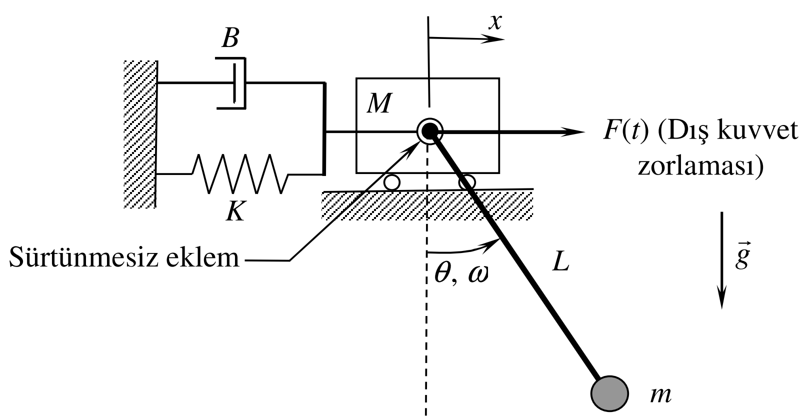
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{1}{2}Kx_K^2 - mgz_m \tag{2.94}$$

Kütlenin yüksekliği:

$$z_m = -L\cos\theta \tag{2.95}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i\delta x_i = F(t)\delta x_F - F_B\delta x_B \tag{2.96}$$



Şekil 2.16

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\dot{x}_M = v_M\,;\quad \dot{x}_B = v_B\,;\quad \dot{x}_K = v_K\,;\quad \dot{x}_F = v_F\,;\quad \dot{\theta} = \omega \tag{2.97}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$x_M = x_B = x_K = x_F = x \tag{2.98}$$

$$v_M = v_B = v_K = v_F = v \tag{2.99}$$

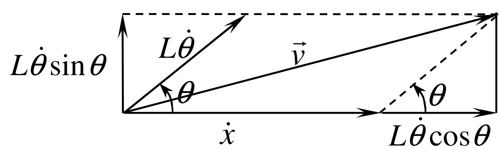
Sönümleyici için eleman denklemi:

$$F_b = B v_B \tag{2.100}$$

m kütlesinin hızı:

m kütlesinin hızı Şekil 2.17'deki vektör diyagramından bulunursa, v_m^2 için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$v_m^2 = (L\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 = L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta \tag{2.101}$$



Şekil 2.17

Hamilton integrali:

Sönümleyicinin eleman denklemi (2.100) kullanılırsa ve kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa, Hamilton integrali *x* ve *θ* cinsinden aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta) - \frac{1}{2}Kx^2 + mgL\cos\theta\right) + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x\right]dt \tag{2.102}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[M\dot{x}\delta\dot{x} + mL^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + m\dot{x}\delta\dot{x} + m\dot{\theta}L\cos\theta\delta\dot{x} + m\dot{x}L\cos\theta\delta\dot{\theta} - m\dot{x}\dot{\theta}L\sin\theta\delta\theta +$$
$$- Kx\delta x - mgL\sin\theta\delta\theta + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x\Big]dt \tag{2.103}$$

İntegral altındaki türevlerin varyasyonlarını içeren terimlerin kısmi integrali alınarak terimler yeniden düzenlenirse ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[-(M+m)\ddot{x} - B\dot{x} - Kx + F(t) - \frac{d}{dt}(m\dot{\theta}L\cos\theta)\right]\delta x +\right.$$
$$\left.+\left[-mL^2\ddot{\theta} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}L\cos\theta) - m\dot{x}\dot{\theta}L\sin\theta - mgL\sin\theta\right]\delta\theta\right\} = 0$$

(Rastgele δx ve $\delta\theta$ varyasyonları için) (2.104)

Yukarıdaki integralin rastgele δx ve $\delta\theta$ varyasyonları için sıfır olabilmesi, ancak bu varyasyonların katsayılarının sıfır olmasıyla mümkün olacağından, sistemin dinamik denklemleri bu katsayıları sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(M+m)\ddot{x}+B\dot{x}+Kx+mL\ddot{\theta}\cos\theta-mL\dot{\theta}^2\sin\theta=F(t) \tag{2.105}$$

$$mL^2\ddot{\theta}+m\ddot{x}L\cos\theta+mgL\sin\theta=0 \tag{2.106}$$

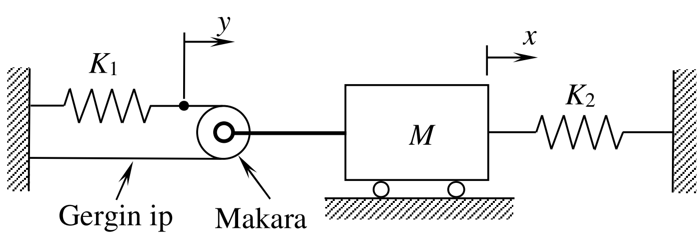
Eğer sarkaç düşeyden küçük açılarla ayrılıyorsa $\sin\theta=\theta$ ve $\cos\theta=1$ olacağından bu özel hal için denklemler aşağıdaki hali alır:

$$(M+m)\ddot{x}+B\dot{x}+Kx+mL\ddot{\theta}-mL\dot{\theta}^2\theta=F(t) \tag{2.107}$$

$$mL^2\ddot{\theta}+m\ddot{x}L+mgL\theta=0 \tag{2.108}$$

2.8 Kabul Edilebilirlik Şartlarını Uygulama Yöntemleri

Hamilton prensibi bir probleme uygulanırken eleman kabul edilebilirlik şartları varyasyon alma işlemi öncesinde kolaylıkla uygulanabilir. Sistem kabul edilebilirlik şartları ise varyasyon alma işlemi öncesinde veya sonrasında ya da dolaylı olarak Lagrange çarpanları yöntemiyle uygulanabilir. Bu üç yaklaşım Şekil 2.18'de verilen sistem üzerinde gösterilecektir.



Şekil 2.18

Lagrange fonksiyoneli ve iş terimleri:

Bu sistem için eleman kabul edilebilirlik şartı $\dot{x}=v$ doğrudan uygulanırsa, Lagrange fonksiyoneli ve iş terimleri aşağıdaki yazılabilir:

$$\mathcal{L}=T^*-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1y^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{2.109}$$

$$\sum_i f_i\delta x_i=0 \tag{2.110}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartı:

$$y=2x \tag{2.111}$$

Yöntem 1: Kabul Edilebilirlik Şartının Varyasyon İşlemi Öncesinde Uygulanması

Denklem (2.111), denklem (2.109)'da yerine koyulursa, Hamilton integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1(2x)^2-\frac{1}{2}K_2x^2\right)\right]dt \tag{2.112}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[M\dot{x}\delta\dot{x}-4K_1x\delta x-K_2x\delta x\right]dt \tag{2.113}$$

olur. İntegral altındaki birinci terimin kısmi integrali alınarak terimler yeniden düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}-4K_1x-K_2x\right]\delta x\,dt=0 \qquad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \tag{2.114}$$

Sistemin dinamik denklemi δx'in katsayısını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M\ddot{x}+(4K_1+K_2)x=0 \tag{2.115}$$

Yöntem 2: Kabul Edilebilirlik Şartının Varyasyon İşleminden Sonra Uygulanması

Denklemler (2.109) ve (2.110) kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1y^2-\frac{1}{2}K_2x^2\right)\right]dt \tag{2.116}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[M\dot{x}\delta\dot{x}-K_1y\delta y-K_2x\delta x\right]dt \tag{2.117}$$

olur. İntegral altındaki birinci terimin kısmi integrali alınırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}\delta x-K_1y\delta y-K_2x\delta x\right]dt=0 \tag{2.118}$$

Denklem (2.111)'in iki tarafının varyasyonu alınırsa, δy ve δx varyasyonları arasında aşağıdaki ilişki bulunur:

$$\delta y=2\delta x \tag{2.119}$$

Denklemler (2.111) ve (2.119), denklem (2.118)’de kullanılırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}\delta x-K_1(2x)(2\delta x)-K_2 x\delta x\right]dt=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}\delta x-4K_1 x\delta x-K_2 x\delta x\right]dt=0 \qquad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \qquad (2.120)$$

Sistemin dinamik denklemi δx’in katsayısını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi bulunur:

$$M\ddot{x}+(4K_1+K_2)x=0 \qquad (2.121)$$

Yöntem 3: Kabul Edilebilirlik Şartının Lagrange Çarpanı Yöntemiyle Uygulanması

Kısıtlayıcı şartların Lagrange çarpanı yöntemiyle uygulanması hakkında ayrıntılı bilgi matematik kitaplarında bulunabilir. Burada sadece yöntemin uygulanma şekli matematik ispatlara girilmeden verilecektir. Bu yöntem Hamilton prensibinde kullanılırken kabul edilebilirlik şartları eşitliklerin bir tarafı sıfır olacak biçimde, $\varphi=0$ gibi yazılır. Eğer problemde *n* sayıda kısıtlayıcı şart varsa, bunlar $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$,…., $\varphi_n=0$ şeklinde yazılır.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\mathcal{L}+\sum_i f_i\delta x_i\right)dt \qquad (2.122)$$

integralinin $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$,…., $\varphi_n=0$ şartlarına tabi olarak, probleme ait rastgele varyasyonlar için sıfır olması ile,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta(\mathcal{L}-\sum_n\lambda_n\varphi_n)+\sum_i f_i\delta x_i\right)dt \qquad (2.123)$$

integralinin herhangi bir şart olmadan probleme ait rastgele varyasyonlar ve λ_n’nin rastgele varyasyonları için sıfır olması aynı dinamik denklemleri verir. Burada λ_n (*i* = 1,…, *n*) terimleri Lagrange çarpanlarıdır.

Şimdi bu yöntemi yukarıdaki örnek probleme uygulayalım. Bu durumda kabul edilebilirlik şartı eşitliğin bir tarafı sıfır olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi=2x-y=0 \qquad (2.124)$$

Hamilton integrali kısıtlayıcı şartı içerecek biçimde yazılırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta(\mathcal{L}-\lambda\varphi)\right]dt \qquad (2.125)$$

olur. Terimler yerine koyulur ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1y^2-\frac{1}{2}K_2x^2-\lambda(2x-y)\right)\right]dt=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[M\dot{x}\delta\dot{x}-K_1y\delta y-K_2x\delta x-\delta\lambda(2x-y)-2\lambda\delta x+\lambda\delta y\right]dt=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-(M\ddot{x}+K_2x+2\lambda)\delta x-(K_1y-\lambda)\delta y-(2x-y)\delta\lambda\right]dt=0$$

(Rastgele δx, δy ve $\delta\lambda$ için) (2.126)

Yukarıdaki ifadede δx, δy ve $\delta\lambda$'nin katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki denklemler bulunur:

$$M\ddot{x}+K_2x+2\lambda=0 \tag{2.127}$$

$$K_1y-\lambda=0 \tag{2.128}$$

$$2x-y=0 \tag{2.129}$$

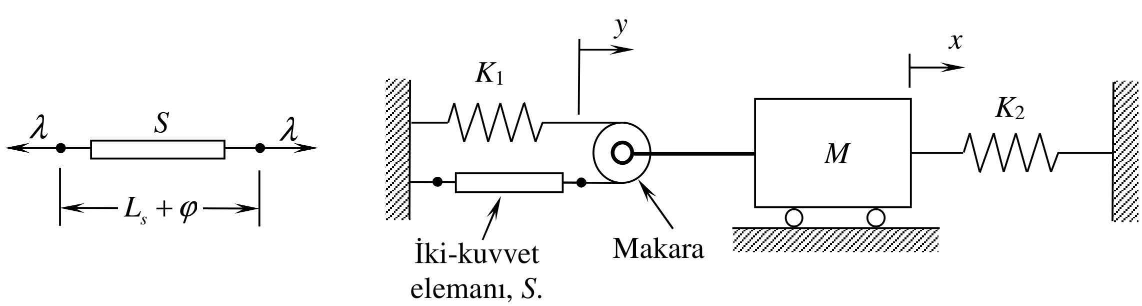
Dikkat edilirse yukarıdaki üç denklemden biri kabul edilebilirlik şartı olan denklem (2.124) ile aynıdır. Elde edilen denklemler arasında kabul edilebilirlik şartlarının da yer alması Lagrange yönteminin bir özelliğidir.

Denklemler (2.127), (2.128) ve (2.129) kullanılarak y ve λ yok edilirse, sistemin dinamik denklemi x cinsinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$M\ddot{x}+(4K_1+K_2)x=0 \tag{2.130}$$

Sınırlayıcı Kuvvetlerin Lagrange Çarpanıyla Bulunması

Kabul edilebilirlik şartını zorlayan elemandaki kuvvet Lagrange çarpanından bulunabilir. Bunu gösterebilmek için Şekil 2.18'deki sistemde x ve y'nin birbirinden bağımsız hale gelmesi için ipin üzerinde S gibi hayali bir iki-kuvvet elemanı olduğunu varsayalım (Şekil 2.19). Bu elemanın kuvvet sıfırken boyu L_s, bir λ kuvveti uygulandığında uzama miktarı ise $\varphi=2x-y$ kadar olsun.



Şekil 2.19

Şekil 2.19'daki sistemde S elemanı tarafından yapılan iş $-\lambda\delta\varphi$ olduğundan bu elemanın Lagrange integraline katkısı iş terimi içinde ve aşağıdaki gibidir:

$$\sum_i f_i\delta x_i=-\lambda\delta\varphi \tag{2.131}$$

Bu durumda Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L} - \lambda \delta \varphi) dt \qquad (2.132)$$

Ama, $\delta(\lambda\varphi) = \varphi\delta\lambda + \lambda\delta\varphi$ olduğundan,

$$\lambda\delta\varphi = \delta(\lambda\varphi) - \varphi\delta\lambda \qquad (2.133)$$

yazılabilir ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (\mathcal{L} - \lambda\varphi) + \varphi\delta\lambda \right] dt \qquad (2.134)$$

Şimdi S elemanı öyle bir eleman olsun ki, λ kuvvetini ayarlayarak φ uzamasını sıfır yapsın; yani uzamayan bir ip özelliğini taşısın. Bu durumda Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

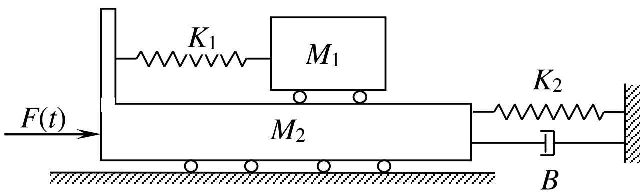
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (\mathcal{L} - \lambda\varphi) \right] dt \qquad (2.135)$$

Görüldüğü gibi, (2.125) ve (2.135)'deki integral ifadeler birbirinin aynıdır. O halde, Lagrange çarpanı λ, ipteki gerilme kuvvetini verir.

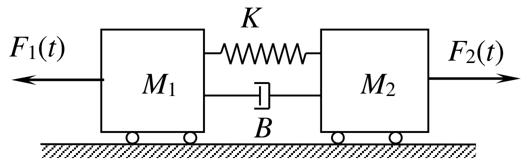
PROBLEMLER

Aşağıdaki sistemlerin hareket denklemlerini Hamilton Prensibini uygulayarak bulun.

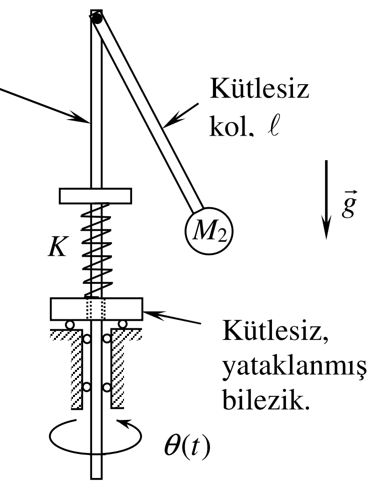
Problem 2.1



Problem 2.2

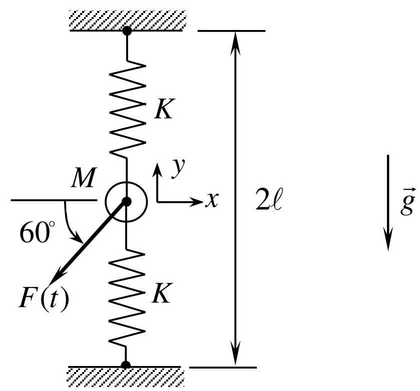


Problem 2.3



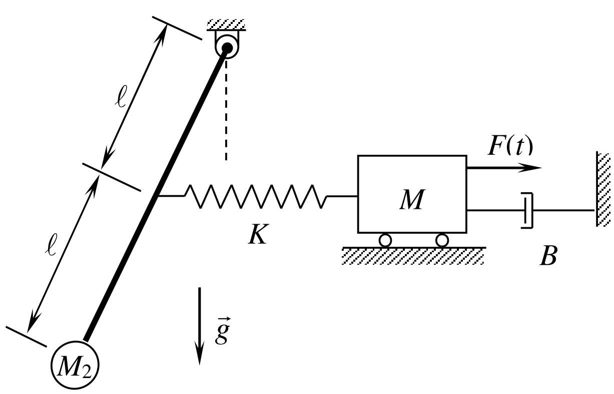
Not: Mil düşey yönde hareket edebiliyor. Milin atalet momentini ihmal edin.

Problem 2.4



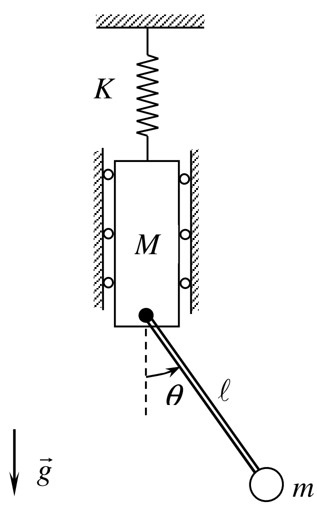
Not: Noktasal kütle M iki boyutlu olarak hareket ediyor.

Problem 2.5

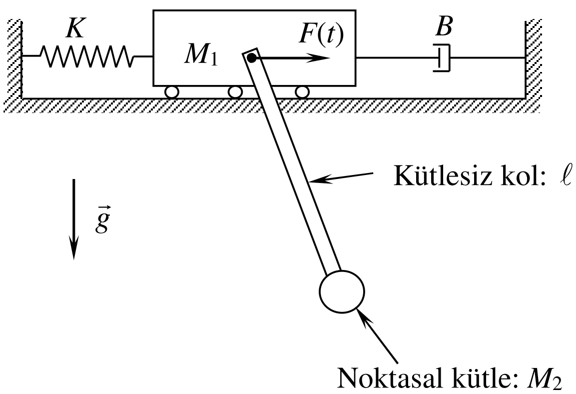


Not: Kol düşeyden küçük açılarla ayrılıyor.

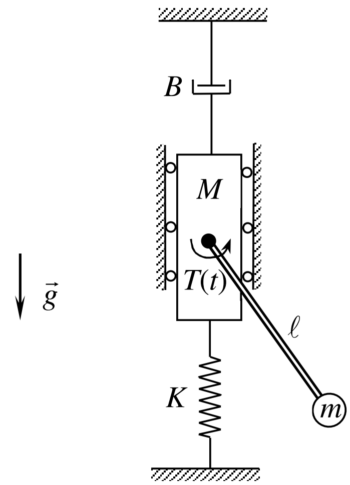
Problem 2.6



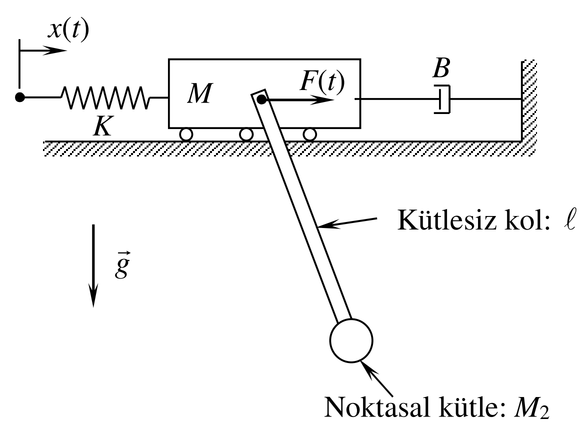
Problem 2.7



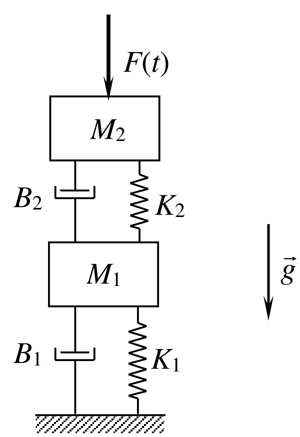
Problem 2.8



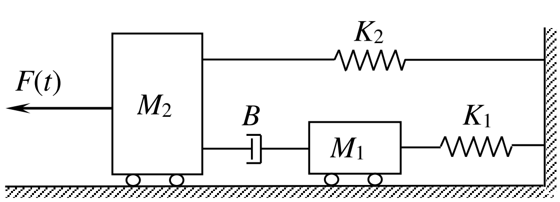
Problem 2.9



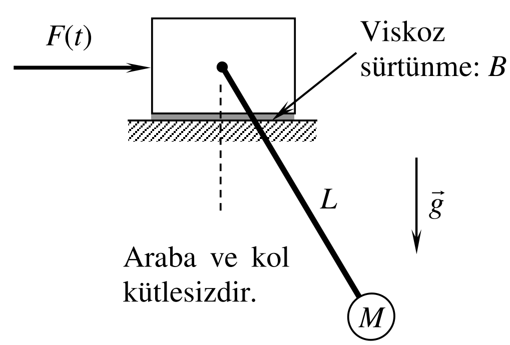
Problem 2.10



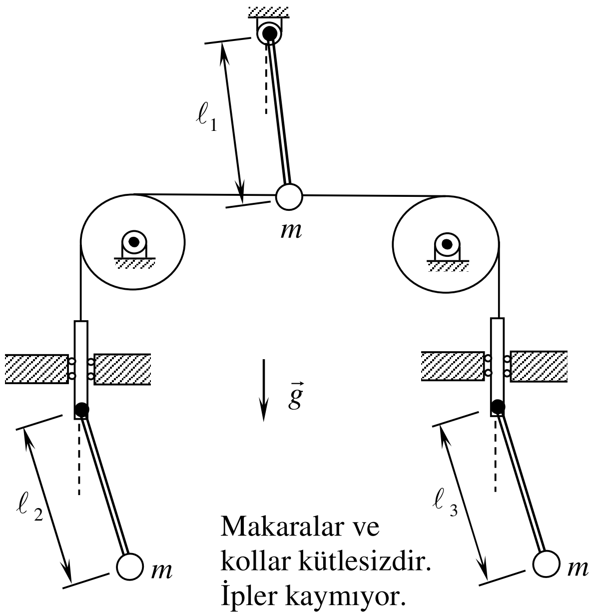
Problem 2.11



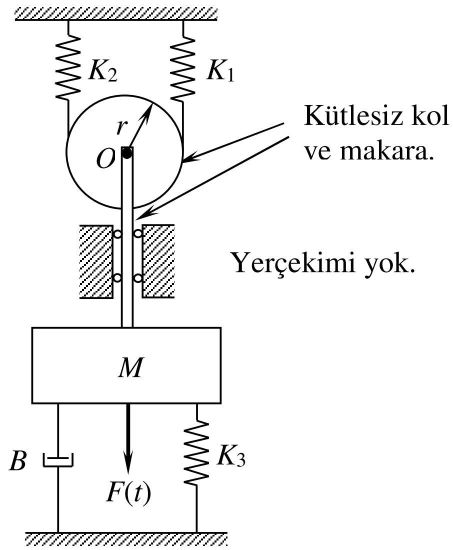
Problem 2.12



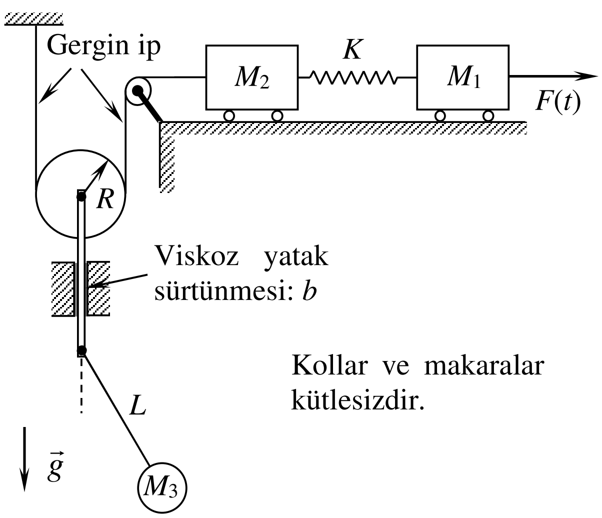
Problem 2.13



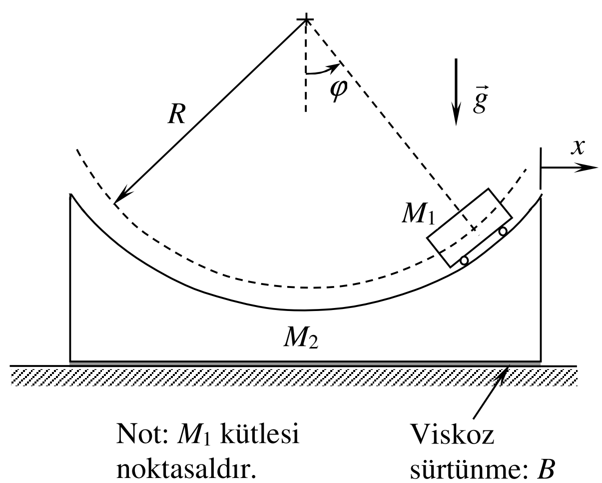
Problem 2.14



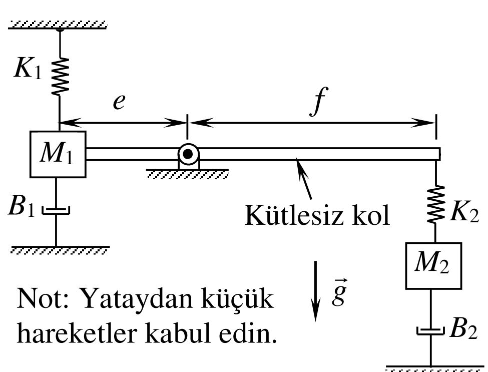
Problem 2.15



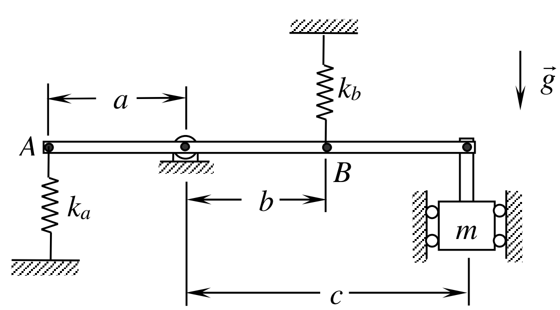
Problem 2.16



Problem 2.17

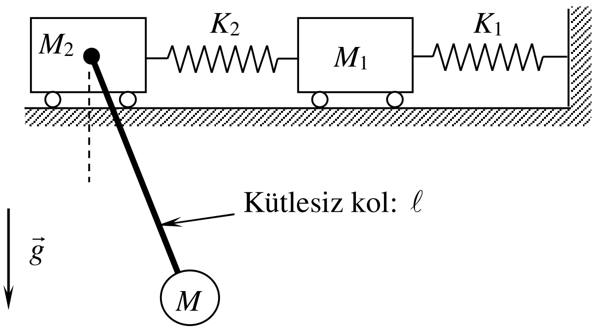


Problem 2.18

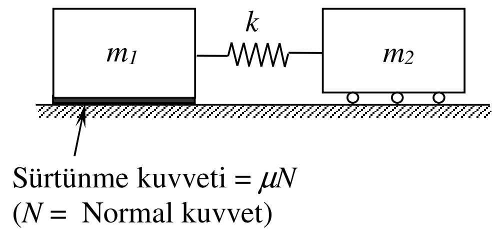


Not: Kol kütlesiz. Yataydan
küçük hareketler kabul edin.

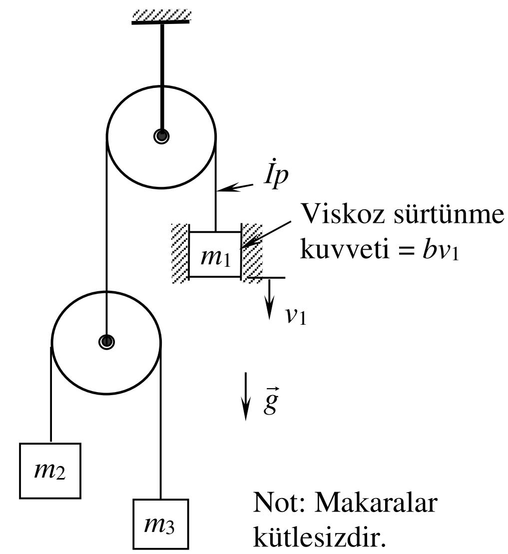
Problem 2.19



Problem 2.20

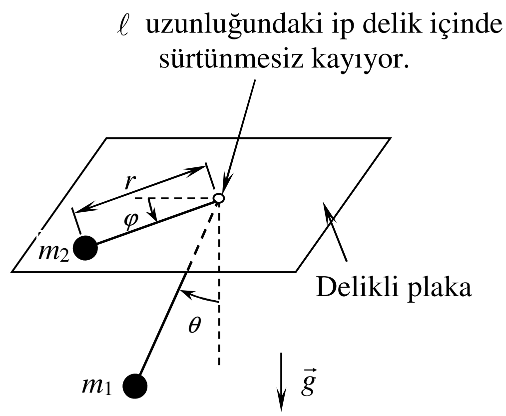


Problem 2.21



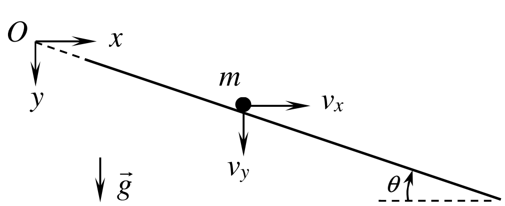
Not: Makaralar kütlesizdir.

Problem 2.22



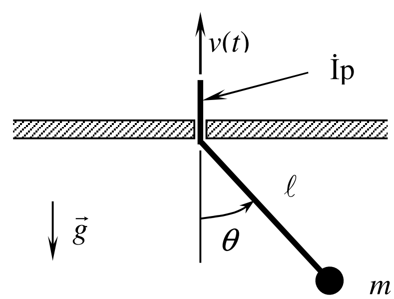
Not: m_1 kütlesi 3-boyutlu harekete sahiptir.

Problem 2.23



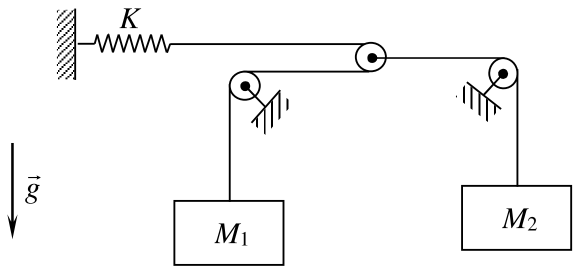
Not: Sürtünme yok. x ve y koordinatlarını kullanın ve geometrik sınırlamaları Lagrange çarpanlarıyla probleme dahil edin.

Problem 2.24



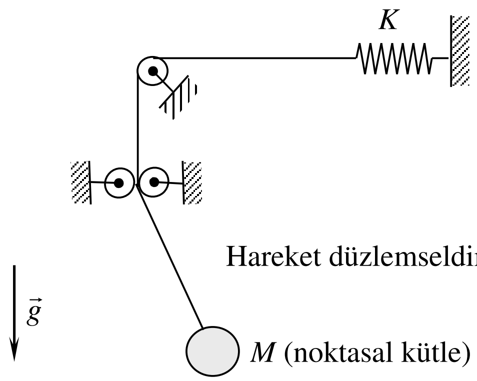
Not: Hareket düzlemsel. Hamilton prensibini ve Lagrange çarpanlarını kullanarak ipteki gerilme kuvvetini $v(t)$, ℓ, θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ cinsinden bulun.

Problem 2.25



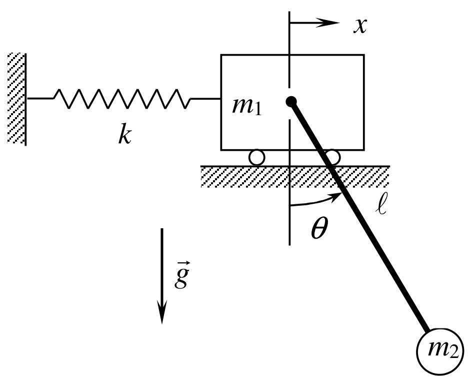
Hareket düzlemseldir.

Problem 2.26

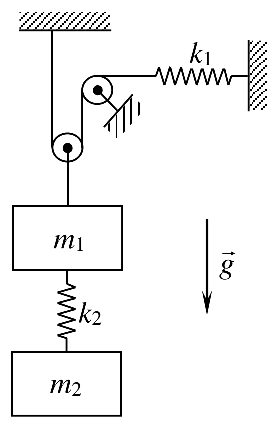


Hareket düzlemseldir.

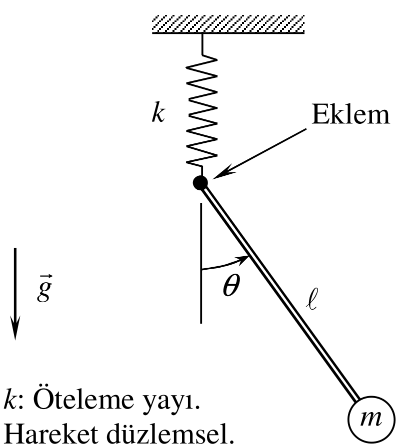
Problem 2.27



Problem 2.28

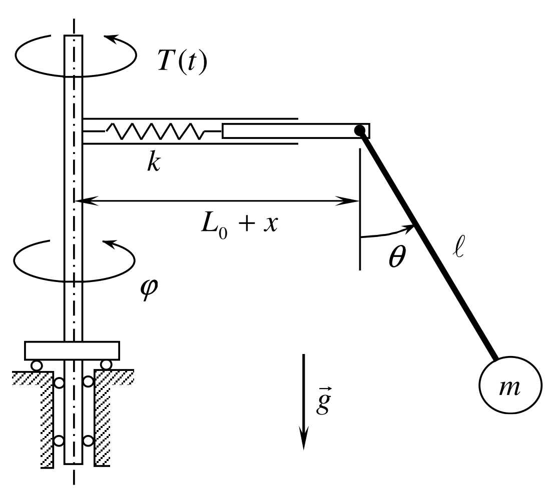


Problem 2.29

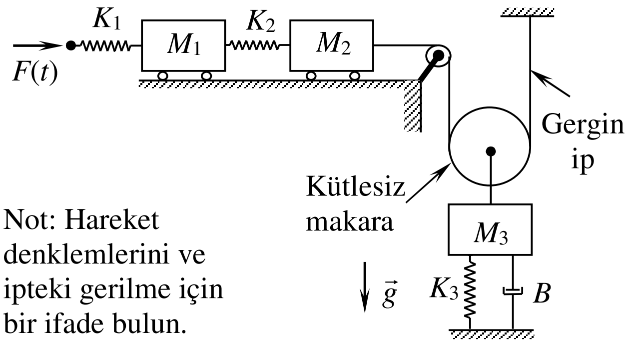


k: Öteleme yayı.
Hareket düzlemsel.

Problem 2.30

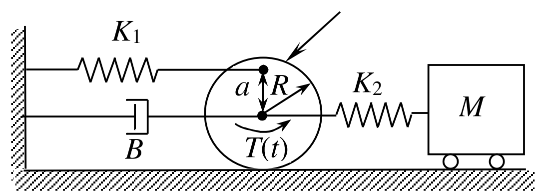


Problem 2.31



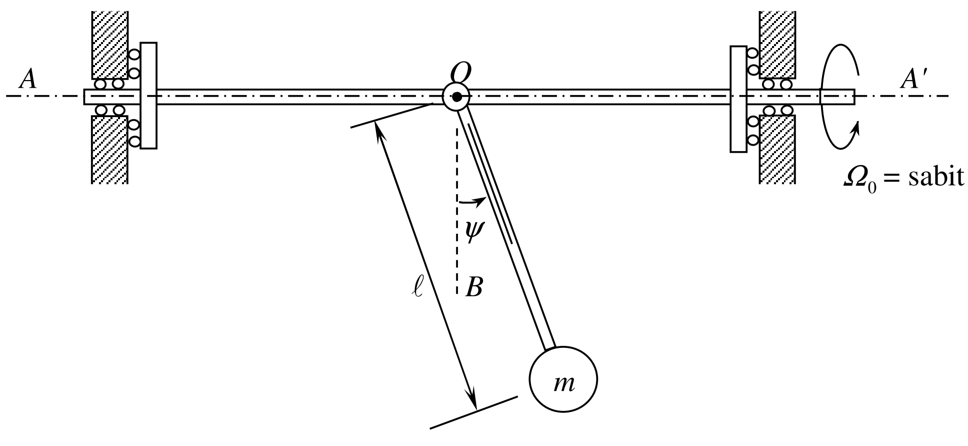
Not: Hareket denklemlerini ve ipteki gerilme için bir ifade bulun.

Problem 2.32



Problem 2.33

Şekildeki sistemde mil ve kol kütlesizdir. Yerçekimi yoktur. Mil AA' etrafında Ω_0 sabit hızıyla döndürülmektedir. Kol ise mil ve kolun oluşturduğu düzlem içinde O eklemi etrafında dönebilmektedir. Her hangi bir anda kolun OB ile yaptığı açı ψ ise, kolun hareketini ψ cinsinden veren diferansiyel denklemi Hamilton prensibini kullanarak bulun.



3

LAGRANGE DENKLEMİ

3.1 Genelleştirilmiş Koordinatlar

Genelleştirilmiş koordinatlar dinamik bir sistemin konumunu bir referans sistemine göre tanımlamaya yarar. Kartezyen koordinatlar gibi alışılmış koordinatlardan farkı, bu koordinatlarla hiç ilgisi olmayan fakat uygun olarak seçilmiş konumların ve açıların da genelleştirilmiş koordinat olarak seçilebilmesidir.

Örneğin, Şekil 2.18'deki sistem için x ve y; Şekil 2.15'deki sistem için θ ve φ genelleştirilmiş koordinat olarak seçilebilir.

Genelleştirilmiş Koordinatların Tam Olması

Eğer bir sistemde genelleştirilmiş koordinatların değerleri verildiğinde sistemin bütün elemanlarının yeri belirlenebiliyorsa, bu genelleştirilmiş koordinatlara *tam* denir.

Genelleştirilmiş Koordinatların Bağımsız Olması

Eğer bir genelleştirilmiş koordinat takımındaki herhangi bir koordinat dışındaki bütün koordinatlar sabitlenip geri kalan koordinata farklı değerler verilebiliyor ve sistemin geometrik sınırlamalarla uyumlu farklı konfigürasyonları elde edilebiliyorsa, bu koordinat takımına *bağımsız* denir.

Örnek:

Şekil 2.18'deki sistem için x ve y genelleştirilmiş koordinatları tam, fakat bağımsız değildir. Şekil 2.15'deki sistem için θ ve φ genelleştirilmiş koordinatları ise tam ve bağımsızdır.

Varyasyonların Tam ve Bağımsız Olması

Eğer bir sisteme uygulanabilecek kabul edilebilir her varyasyon, bir varyasyon takımındaki varyasyonların lineer bir kombinezonu olarak ifade edilebiliyorsa, bu varyasyon takımına *tam* denir.

Eğer bir varyasyon takımındaki varyasyonlardan herhangi biri dışında diğerleri uygulanmazsa (yani sıfır olursa) ve geri kalan varyasyon serbestçe uygulanabiliyorsa, bu varyasyon takımına *bağımsız* denir.

Serbestlik Derecesi

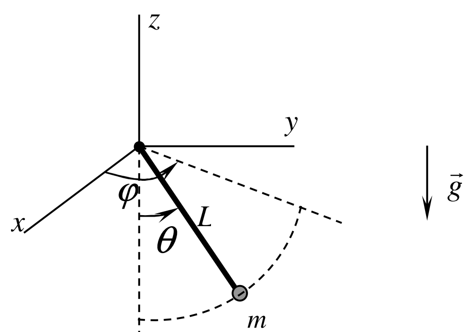
Bir sistem için tanımlanan tam bir varyasyon takımındaki bağımsız kabul edilebilir varyasyonların sayısına sistemin *serbestlik derecesi* denir.

Holonomik Sistem

Bir dinamik sistemde tam bir genelleştirilmiş koordinat takımındaki bağımsız koordinat sayısı, sistemin serbestlik derecesine eşitse, bu sisteme *holonomik* sistem denir. Aksi takdirde sistem *non-holonomik* olur. Holonomik sistemlerde bağımsız ve tam genelleştirilmiş koordinatların varyasyonları, basitlik için bağımsız ve tam varyasyon takımı olarak kullanılır.

Örnek: Holonomik Sistem

Küresel sarkaç (Şekil 3.1):



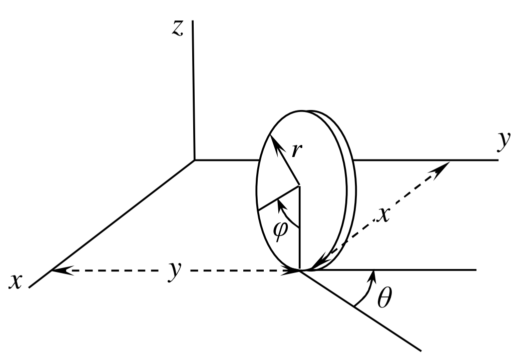
Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinat sayısı: 2 (θ ve φ)

Tam ve bağımsız varyasyon: 2 ($\delta\theta$ ve $\delta\varphi$)

Şekil 3.1

Örnek: Non-holonomik Sistem

Yatay düzlemde dik olarak kaymadan yuvarlanabilen disk (Şekil 3.2):



Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinat sayısı: 4 (x, y, θ ve φ)

Tam ve bağımsız varyasyon: 2 ($\delta\theta$ ve $\delta\varphi$)

Şekil 3.2

Yukarıdaki sistemde disk kaymadan yuvarlanabildiği için sadece $\delta\theta$ ve $\delta\varphi$ bağımsızdır. δx ve δy ise bağımsız varyasyonlar cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$\delta x = r\sin\theta\delta\varphi \tag{3.1}$$

$$\delta y = r\cos\theta\delta\varphi \tag{3.2}$$

3.2 Genelleştirilmiş Koordinatlar ve Hız

Dinamik bir sistemin tam ve bağımsız koordinat takımı aşağıdaki gibi olsun:

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots,\ q_n \tag{3.3}$$

Eğer bu sistem holonomik ise serbestlik derecesi n olur. Tam ve bağımsız varyasyon takımı genelleştirilmiş koordinatların varyasyonları olarak aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \delta q_3, \ldots,\ \delta q_n \tag{3.4}$$

Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinatlar sistemin bütün elemanlarının konumlarını tanımlamak için yeterli olduğundan, sistem içindeki herhangi bir noktanın konumu $\vec{r}$ genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots,\ q_n) \tag{3.5}$$

Bu noktanın hızı ise aşağıdaki gibi olur:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{3.6}$$

Dolayısıyla, $\vec{v}$ terimi hem genelleştirilmiş koordinatların hem de genelleştirilmiş koordinatların türevlerinin fonksiyonudur:

$$\vec{v} = \vec{v}(q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots,\ q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_3,\ \ldots,\ \dot{q}_n) \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) numaralı ifadelerde geçen $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ terimlerine *genelleştirilmiş hız* denir. Genelleştirilmiş hızlar sadece genelleştirilmiş koordinatların türevleri olup, fiziksel hızlara karşılık gelmeyebilir. Fiziksel hızlar genellikle (3.7) numaralı ifadeden anlaşılacağı gibi, hem genelleştirilmiş koordinatların hem de genelleştirilmiş hızların fonksiyonudur.

Örnek:

Şekil 3.3'deki teker kaymadan yuvarlanmaktadır. K_2 yayının boyu değiştikçe sarkacın boyu da değişmektedir. K_2 yayının esneme miktarı x'dir. $x = 0$ iken sarkaç kolunun boyu L_0 kadardır. Bu sistem için mümkün olabilecek tam ve bağımsız bir genelleştirilmiş koordinat takımı y, x ve θ olabilir.

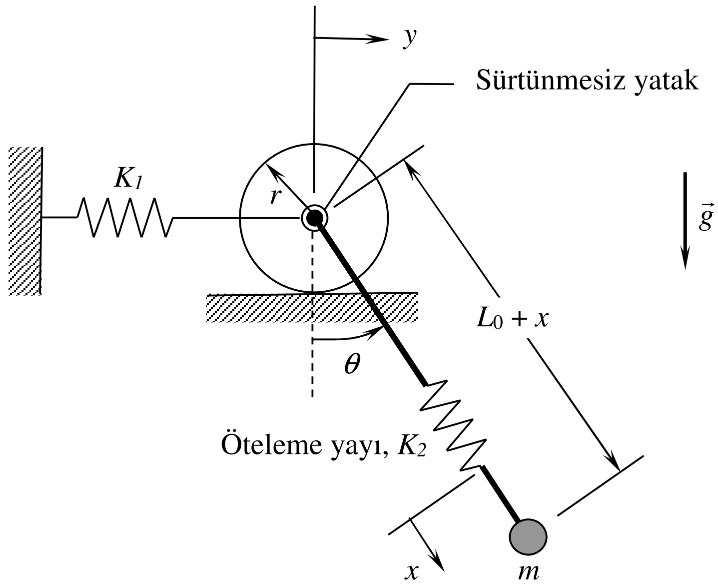
Şimdi m kütlesinin hızını bulalım. m kütlesinin hız bileşenleri Şekil 3.4'deki vektör diyagramında görülmektedir. Bu diyagramdan $\vec{v}$ vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{v} = (L_0 + x)\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{x}\vec{u}_r \tag{3.8}$$

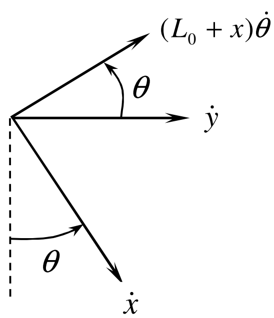
Vektör diyagramından düşey ve yatay yöndeki bileşenler bulunursa, $\vec{v}$ vektörünün büyüklüğünün karesi için aşağıdaki ifade bulunur:

$$v^2 = \left[(L_0 + x)\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y} + \dot{x}\sin\theta\right]^2 + \left[(L_0 + x)\dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\cos\theta\right]^2 \tag{3.9}$$

Bu denklemden görüldüğü gibi hız hem genelleştirilmiş koordinatların hem de genelleştirilmiş hızların fonksiyonudur.



Şekil 3.3



Şekil 3.4

3.3 Genelleştirilmiş Kuvvet

Hamilton prensibinde Lagrange fonksiyoneli vasıtasıyla integrale dahil edilmemiş olan bütün elemanların iş terimleri $\sum_i f_i \delta x_i$ ifadesine dahil edilir. Sistemin herhangi bir varyasyonu, sistemin tam ve bağımsız varyasyonları cinsinden ifade edilebileceğinden, aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\sum_i f_i \delta x_i = \sum_i f_i \delta x_i (\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \ldots, \delta q_n) = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \qquad (3.10)$$

Yukarıdaki ifadedeki Q_j $(j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ terimlerine *genelleştirilmiş kuvvet* denir. q_j'nin boyutuna bağlı olarak, genelleştirilmiş kuvvet Q_j kuvvet ya da moment boyutuna sahiptir.

Genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki formülü kullanarak bulunabilir:

$$Q_j = \frac{\begin{array}{c}\textit{Sisteme sadece } \delta q_j \textit{ varyasyonu uygulandığında} \\ \textit{dış kuvvetler ve momentler tarafından yapılan iş.}\end{array}}{\delta q_j} \tag{3.11}$$

Örnek 1:

Seçilen genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak Şekil 3.5'deki sistem için genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki gibidir.

a) Genelleştirilmiş koordinatlar: x, θ

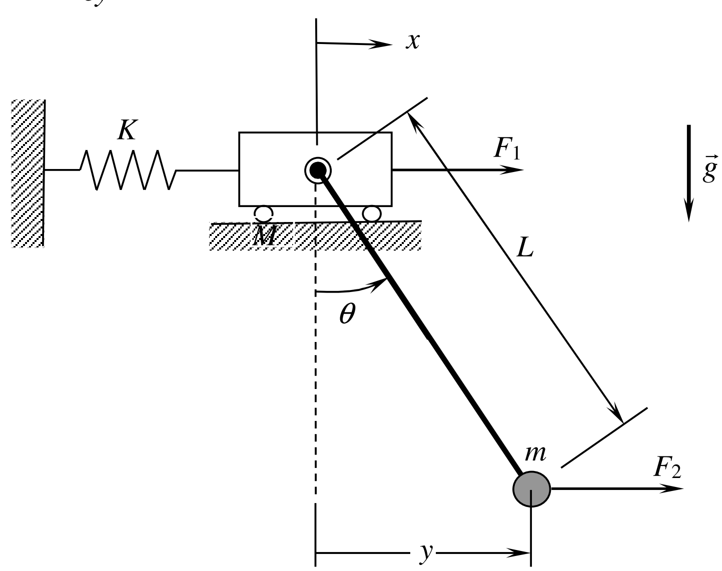
$$Q_x = \frac{F_1 \delta x + F_2 \delta x}{\delta x} = F_1 + F_2 \tag{3.12}$$

$$Q_\theta = \frac{(F_2 \cos\theta) L \delta\theta}{\delta\theta} = F_2 L \cos\theta \tag{3.13}$$

b) Genelleştirilmiş koordinatlar: x, y

$$Q_x = \frac{F_1 \delta x + F_2 \delta x}{\delta x} = F_1 + F_2 \tag{3.14}$$

$$Q_y = \frac{F_2 \delta y}{\delta y} = F_2 \tag{3.15}$$



Şekil 3.5

Örnek 2:

Şekil 3.6'daki sistemde K_1 ve K_2 yayları öteleme yaylarıdır ve sadece düşey yönde hareket edebilmektedir. Kol yataydan küçük açılarla ayrılmaktadır. Seçilen genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak bu sistem için genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki gibidir.

a) Genelleştirilmiş koordinatlar: x, θ

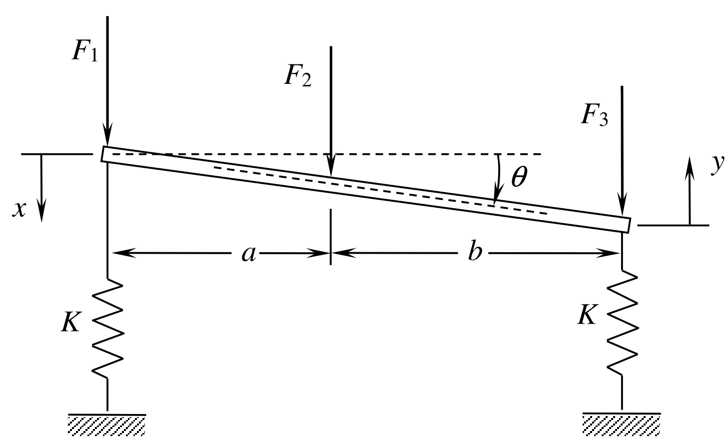
$$Q_x = \frac{F_1\delta x + F_2\delta x + F_3\delta x}{\delta x} = F_1 + F_2 + F_3 \tag{3.16}$$

$$Q_\theta = \frac{F_2 a\delta\theta + F_3(a+b)\delta\theta}{\delta\theta} = F_2 a + F_3(a+b) \tag{3.17}$$

b) Genelleştirilmiş koordinatlar: x, y

$$Q_x = \frac{F_1\delta x + F_2\left(\frac{b}{a+b}\right)\delta x}{\delta x} = F_1 + F_2\left(\frac{b}{a+b}\right) \tag{3.18}$$

$$Q_y = \frac{-F_2\left(\frac{a}{a+b}\right)\delta y - F_3\delta y}{\delta y} = -F_2\left(\frac{a}{a+b}\right) - F_3 \tag{3.19}$$



Şekil 3.6

3.4 Lagrange Denklemi

Hamilton prensibi holonomik sistemlere genelleştirilmiş değişkenler kullanarak uygulanırsa, genelleştirilmiş değişkenler cinsinden bütün holonomik sistemlerde kullanılabilecek bir denklem elde edilir. Bu denkleme Lagrange denklemi denir.

n serbestlik derecesine sahip holonomik bir dinamik sistem olsun. Bu sistem için tam ve bağımsız bir genelleştirilmiş koordinat takımı,

$$q_1,\, q_2,\, q_3,\, \ldots ,q_n \tag{3.20}$$

olarak tanımlanmış olsun.

Sistem içindeki herhangi bir noktanın konumu genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden belirlenebileceğine göre, bu sistemin potansiyel enerjisi de bu koordinatlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$V = V(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \ldots ,q_n) \tag{3.21}$$

Diğer yandan sistemin herhangi bir noktasının hızı ise hem genelleştirilmiş koordinatlar hem de genelleştirilmiş hızlara bağlı olabileceğinden, hızların fonksiyonu olan kinetik ko-enerji için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$T^* = T^*(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \ldots ,q_n,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \dot{q}_3,\, \ldots ,\dot{q}_n) \tag{3.22}$$

Bu durumda Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \mathcal{L}(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \ldots ,q_n,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \dot{q}_3,\, \ldots ,\dot{q}_n) \tag{3.23}$$

Denklem (3.10) kullanılarak Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\, \mathcal{L}(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \ldots ,q_n,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \dot{q}_3,\, \ldots ,\dot{q}_n) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt \tag{3.24}$$

ya da,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt \tag{3.25}$$

Hamilton prensibinin gereği, t_1 ve t_2 uç noktalarında varyasyonların sıfır olması gerektiğinden, denklem (3.25)'in ilk teriminin kısmi integralinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i)\, dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt \tag{3.26}$$

Denklem (3.26), Hamilton integrali ifadesi (3.25)'de kullanılır ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i dt = 0 \qquad \text{(Rastgele } \delta q_i \text{ için)} \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu integralin rastgele δq_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ için sıfır olması her bir δq_i'nin katsayısının ayrı ayrı sıfır olmasıyla mümkün olduğundan, Lagrange denklemleri denilen n sayıda denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (3.28)$$

3.5 Lagrange Denkleminin Kullanımına Örnekler

Örnek 1:

Şekil 3.5'deki dinamik sistem holonomiktir. Bu sistemin dinamik denklemlerini Lagrange denkleminden yararlanarak elde edelim.

Sistemin serbetlik derecesi n = 2'dir. Bu sistem için genelleştirilmiş koordinatları x ve θ olarak seçelim. Sistemin iki tane genelleştirilmiş koordinatı olduğuna göre, iki tane de Lagrange denklemi (biri x, diğeri θ için) yazılması gerekir. Bu sistemde kinetik ko-enerji aşağıdaki gibidir:

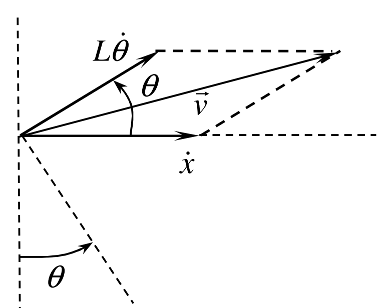
$$T^* = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 \qquad (3.29)$$

Şekil 3.7'de m kütlesinin hız vektör diyagramı görülmektedir. Bileşenlerin düşey ve yatay yönde projeksiyonları alınırsa $\vec{v}$ vektörünün büyüklüğü aşağıdaki gibi bulunur:

$$v^2 = (L\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x})^2 + (L\dot{\theta}\sin\theta)^2 = L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \qquad (3.30)$$

Denklemler (3.29) ve (3.30)'dan T^* aşağıdaki gibi bulunur:

$$T^* = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right] \qquad (3.31)$$



Şekil 3.7

Sistemin potansiyel enerjisi,

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 - mgL\cos\theta \qquad (3.32)$$

olup, Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2+2L\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\right]-\left(\frac{1}{2}Kx^2-mgL\cos\theta\right) \quad (3.33)$$

Bu sistemin genelleştirilmiş kuvvetleri denklemler (3.12) ve (3.13) ile daha önce aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$Q_x=F_1+F_2 \quad (3.34)$$

$$Q_\theta=F_2L\cos\theta \quad (3.35)$$

Yukarıdaki bilgiler kullanılırsa, x için Lagrange denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left[M\dot{x}+m(L\cos\theta\dot{\theta}+\dot{x})\right]-(-Kx)=F_1+F_2 \quad (3.36)$$

ya da,

$$(M+m)\ddot{x}+mL\cos\theta\ddot{\theta}+Kx-mL\sin\theta\dot{\theta}^2=F_1+F_2 \quad (3.37)$$

θ için Lagrange denklemi ise aşağıdaki gibi elde edilir:

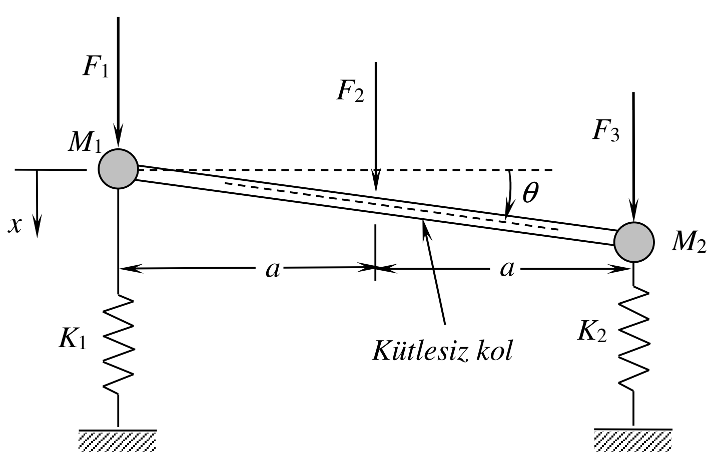
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=\frac{d}{dt}\left[mL^2\dot{\theta}+mL\cos\theta\,\dot{x}\right]-\left(-mL\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}-mgL\sin\theta\right)=F_2L\cos\theta \quad (3.38)$$

ya da,

$$mL^2\ddot{\theta}+mL\cos\theta\,\ddot{x}+mgL\sin\theta=F_2L\cos\theta \quad (3.39)$$

Örnek 2:

Şekil 3.8'deki dinamik sistemde kol yataydan küçük açılarla ayrılmaktadır. Yerçekimi yoktur. Holonomik olan bu sistem için genelleştirilmiş koordinatları x ve θ kabul ederek dinamik denklemleri Lagrange denkleminden yararlanarak elde edelim.



Şekil 3.8

Sistemin kinetik ko-enerjisi:

$$T^* = \frac{1}{2}M_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2(\dot{x} + 2a\dot{\theta})^2 \tag{3.40}$$

Sistemin potansiyel enerjisi:

$$V = \frac{1}{2}K_1x^2 + \frac{1}{2}K_2(x + 2a\theta)^2 \tag{3.41}$$

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2(\dot{x} + 2a\dot{\theta})^2 - \left(\frac{1}{2}K_1x^2 + \frac{1}{2}K_2(x + 2a\theta)^2\right) \tag{3.42}$$

Denklemler (3.16) ve (3.17)'den genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_x = F_1 + F_2 + F_3 \tag{3.43}$$

$$Q_\theta = aF_2 + 2aF_3 \tag{3.44}$$

x için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left[M_1\dot{x} + M_2(\dot{x} + 2a\dot{\theta})\right] - \left[-K_1x - K_2(x + 2a\theta)\right] = F_1 + F_2 + F_3 \tag{3.45}$$

ya da,

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} + 2M_2a\ddot{\theta} + (K_1 + K_2)x + 2aK_2\theta = F_1 + F_2 + F_3 \tag{3.46}$$

θ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left[2M_2a(\dot{x} + 2a\dot{\theta})\right] - \left[-2aK_2(x + 2a\theta)\right] = aF_2 + 2aF_3 \tag{3.47}$$

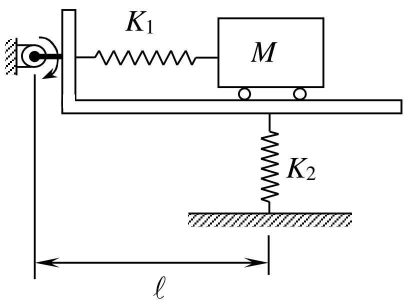
ya da,

$$4M_2a^2\ddot{\theta} + 2M_2a\ddot{x} + 4a^2K_2\theta + 2aK_2x = aF_2 + 2aF_3 \tag{3.48}$$

PROBLEMLER

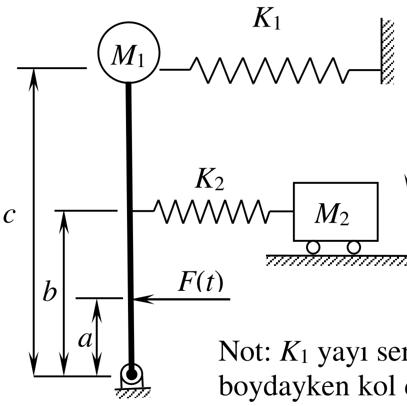
Aşağıdaki sistemlerin dinamik denklemlerini Lagrange denklemini kullanarak bulun.

Problem 3.1



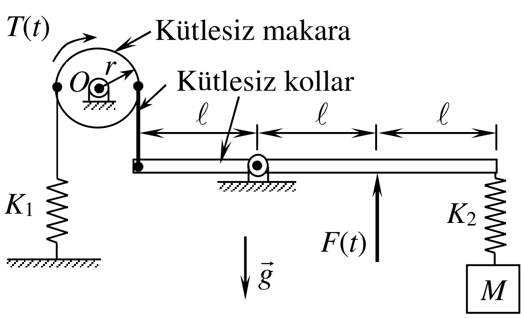
Not: Yay serbest boydayken kütlenin ekleme uzaklığı ℓ dir. Kol yataydan az ayrılmaktadır.

Problem 3.2



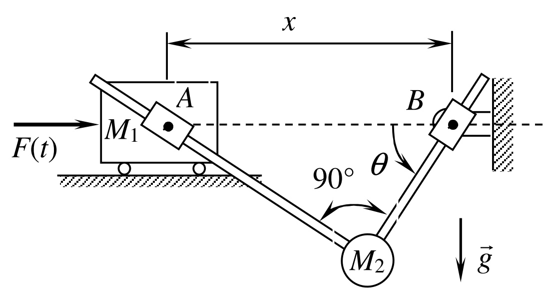
Not: K_1 yayı serbest boydayken kol düşeydir ve hareket sırasında düşeyden az ayrılmaktadır.

Problem 3.3



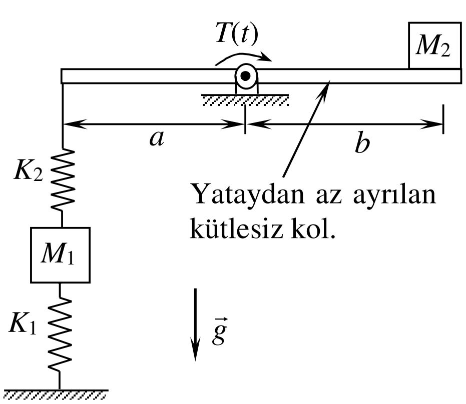
Not: Büyük kol yataydan az ayrılıyor.

Problem 3.4

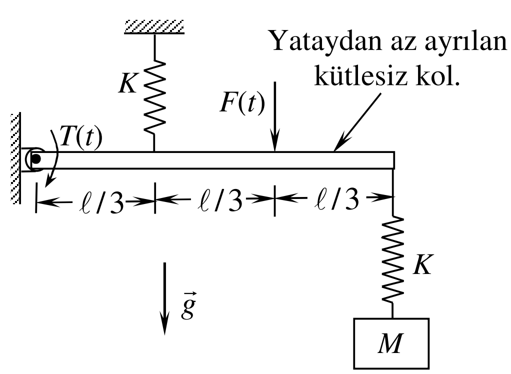


Not: A ve B eklemlerinde kayar yataklar var. Sistemde sürtünme yok. x ve θ değişkenlerini kullanın.

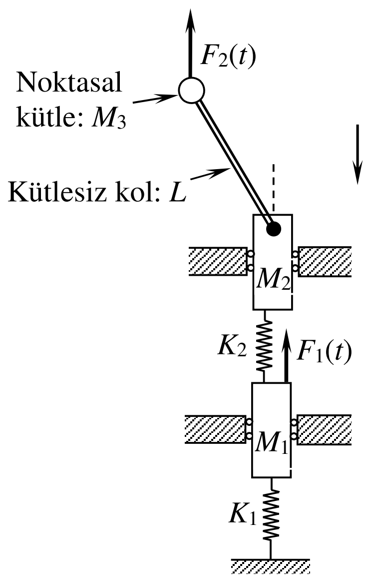
Problem 3.5



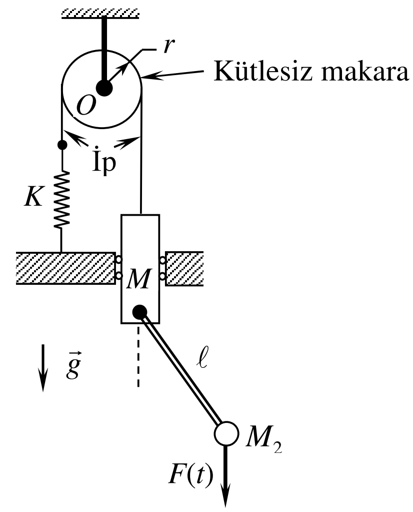
Problem 3.6



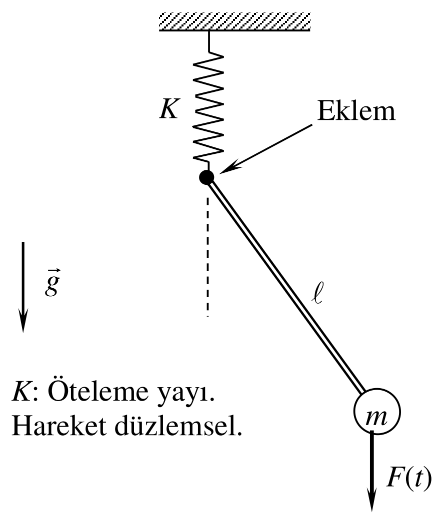
Problem 3.7



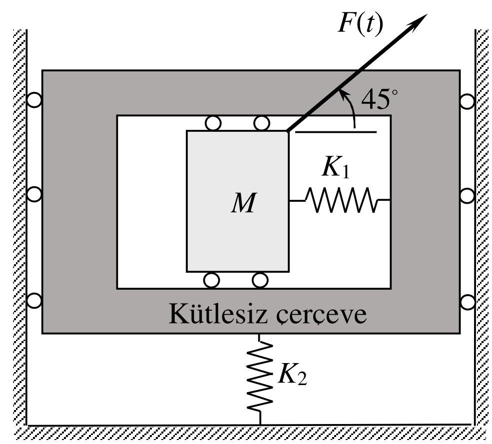
Problem 3.8



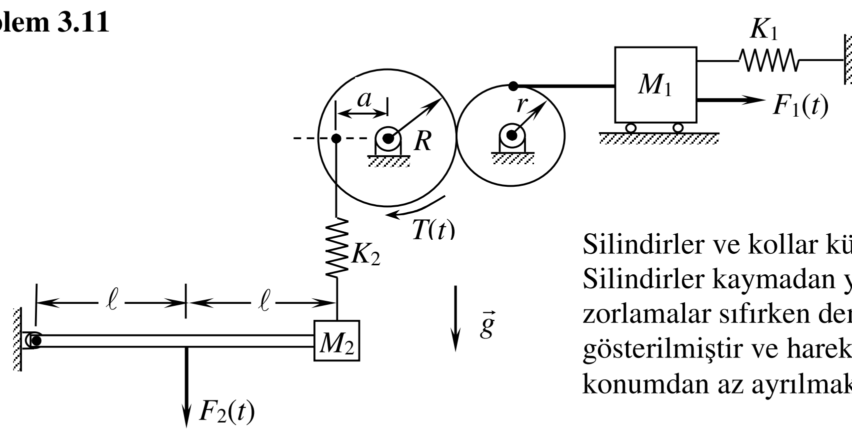
Problem 3.9



Problem 3.10

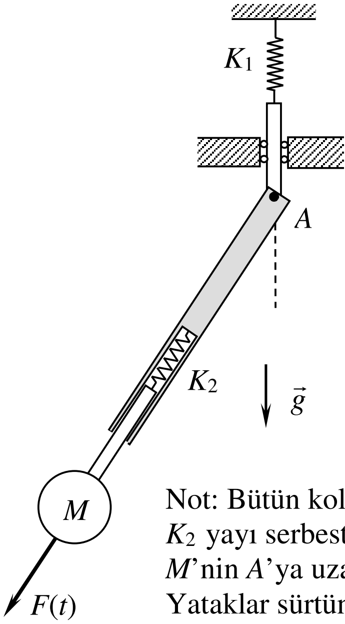


Problem 3.11



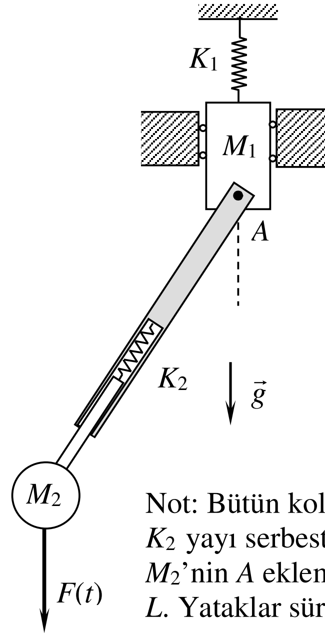
Silindirler ve kollar kütlesizdir. Silindirler kaymadan yuvarlanıyor. Sistem zorlamalar sıfırken denge konumunda gösterilmiştir ve hareket sırasında bu konumdan az ayrılmaktadır.

Problem 3.12



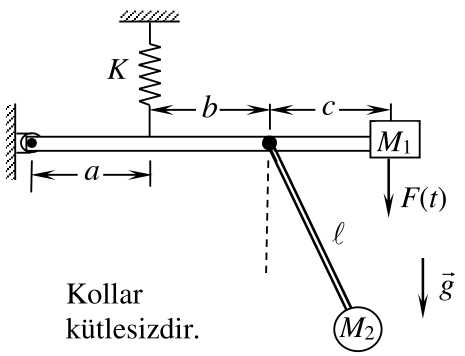
Not: Bütün kollar kütlesiz. K_2 yayı serbest boydayken M'nin A'ya uzaklığı L. Yataklar sürtünmesiz.

Problem 3.13



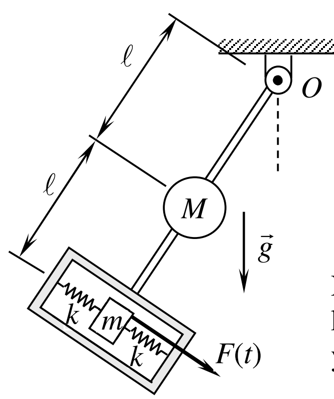
Not: Bütün kollar kütlesiz. K_2 yayı serbest boydayken M_2'nin A eklemine uzaklığı L. Yataklar sürtünmesiz.

Problem 3.14



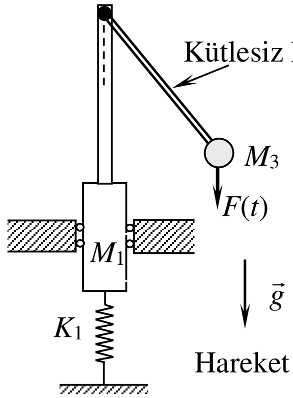
Kollar kütlesizdir.

Problem 3.15



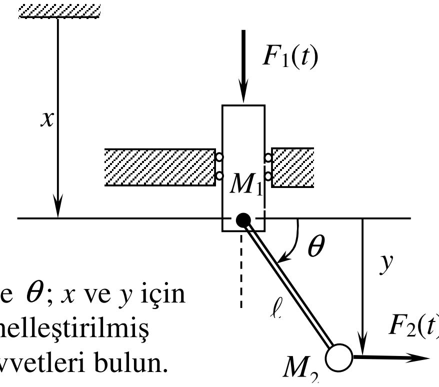
Not: Verilen kütleler dışında yapı kütlesizdir.

Problem 3.16



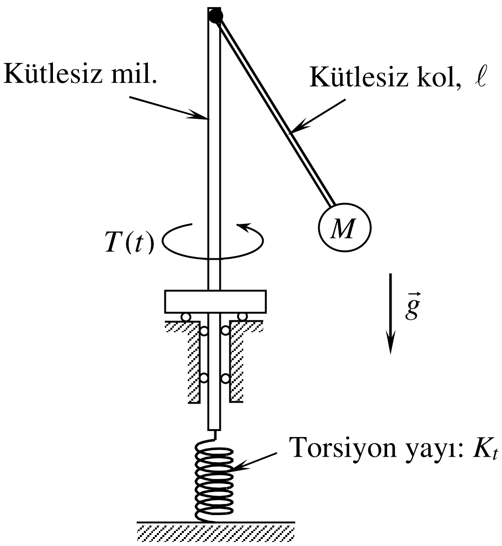
Hareket düzlemsel.

Problem 3.17

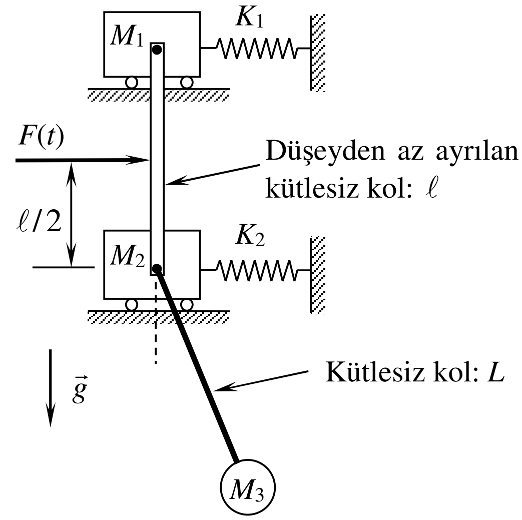


x ve θ; x ve y için genelleştirilmiş kuvvetleri bulun.

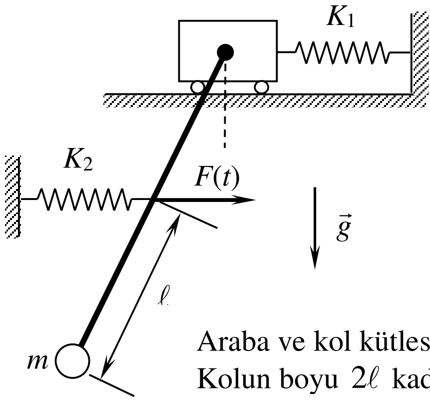
Problem 3.18



Problem 3.19

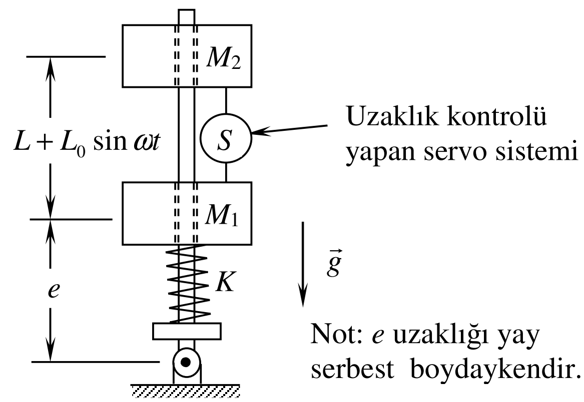


Problem 3.20



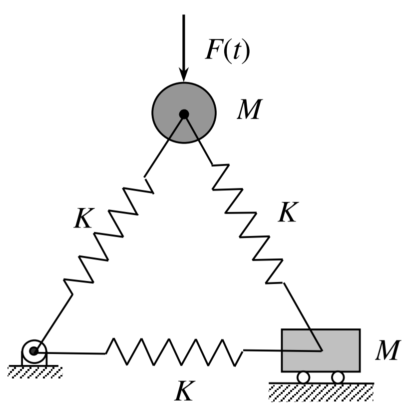
Araba ve kol kütlesizdir.
Kolun boyu 2ℓ kadardır.

Problem 3.21



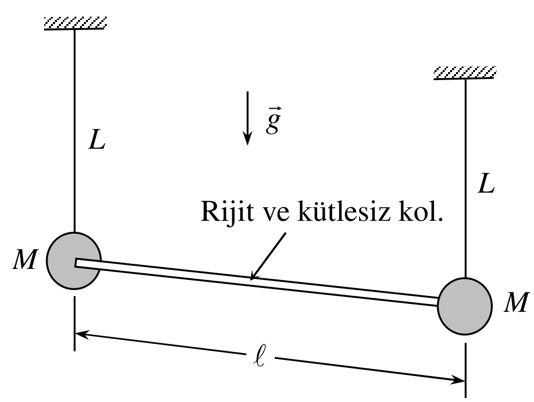
Not: e uzaklığı yay serbest boydaykendir.

Problem 3.22



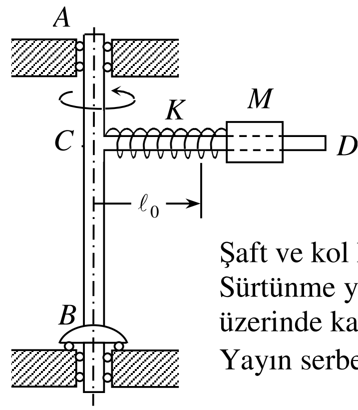
Not: Yaylar $F(t) = 0$ iken bir eşkenar üçgen meydana getirmektedir. Hareket düzlemseldir.

Problem 3.23



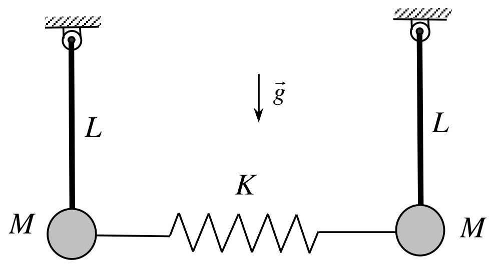
Not: Hareket düzlemsel değildir.

Problem 3.24



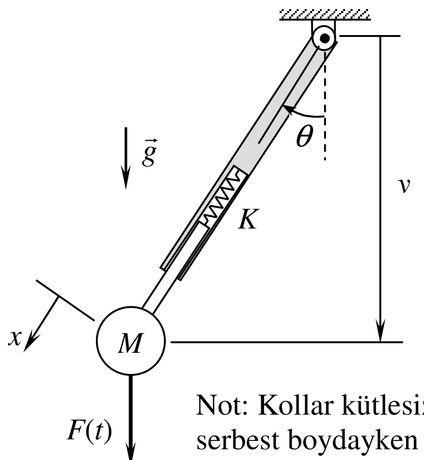
Şaft ve kol kütlesiz. Sürtünme yok. M kol üzerinde kayabiliyor. Yayın serbest boyu ℓ_0.

Problem 3.25



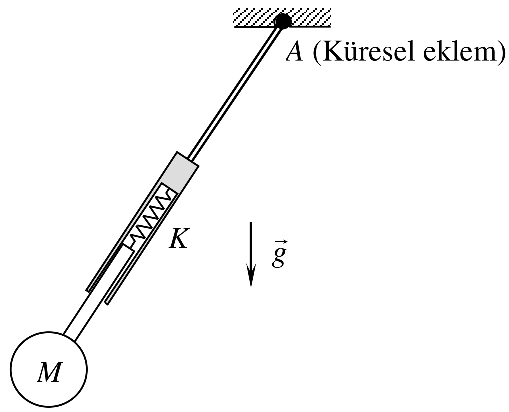
Not: Hareket düzlemseldir.

Problem 3.26



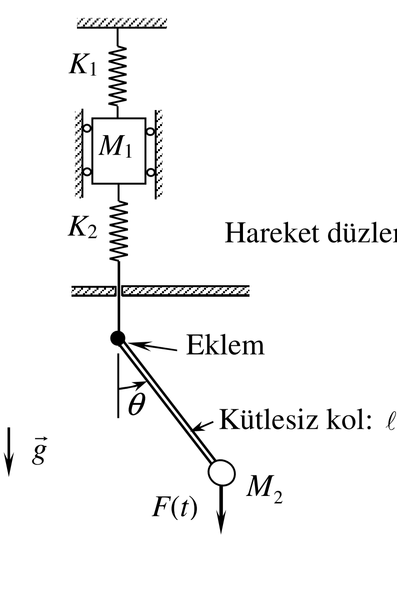
Not: Kollar kütlesizdir. Yay serbest boydayken M'nin ekleme uzaklığı ℓ_0. Yataklar sürtünmesiz. x ve θ; x ve y için genelleştirilmiş kuvvetleri bulun.

Problem 3.27



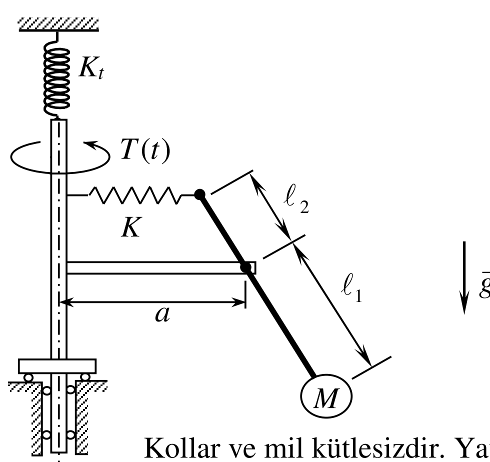
Not: Bütün kollar kütlesizdir. K yayı serbest boydayken M'nin A eklemine uzaklığı ℓ_0.

Problem 3.28



Hareket düzlemseldir.

Problem 3.29



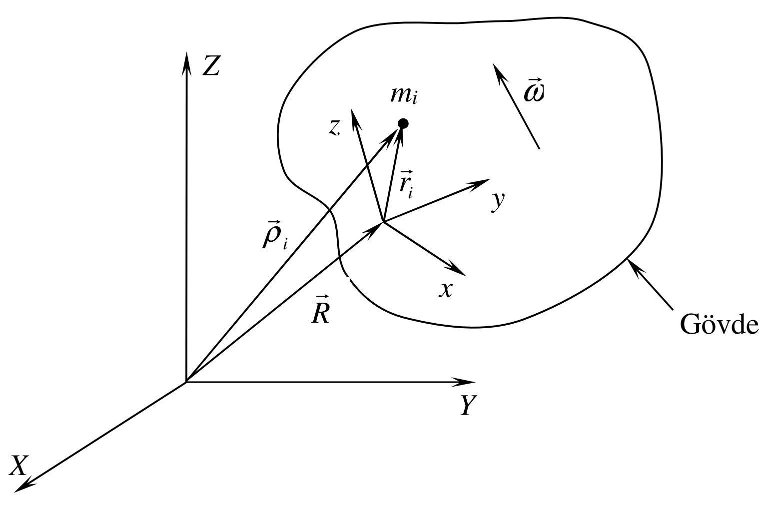
Kollar ve mil kütlesizdir. Yay serbest boyundayken kol düşeydir. Kol düşeyden az ayrılmaktadır.

4
RİJİT GÖVDESİ OLAN SİSTEMLER

Bölüm 3'de incelenen sistemlerdeki bütün kütleler noktasal olduğundan kinetik ko-enerji ifadesine katkıları $\frac{1}{2}mv^2$ şeklindeydi. Bu bölümde rijit gövdelere sahip dinamik sistemlerde Hamilton prensibinin ve Lagrange denkleminin kullanılması incelenecektir. Bu yeni durumun noktasal kütleye sahip sistemlerden tek farkı, rijit gövdelerin kinetik ko-enerjilerinin saptanmasıdır. Gövdelerin kinetik ko-enerjileri saptanarak Lagrange fonksiyonuna koyulduktan sonra daha önce kullanılan yöntemler aynen kullanılabilir.

4.1 Rijit Bir Gövdenin Kinetik Ko-enerjisi

Şekil 4.1'de atalet koordinat sistemi *XYZ* ile gösterilmiştir. *xyz* ise gövdeye sabitlenmiş bir koordinat sistemidir. m_i , gövde içinde herhangi bir kütle parçacığını göstermektedir. Bu kütle parçacığının atalet koordinat sistemine göre konumu $\vec{\rho}_i$, gövde koordinat sistemine göre konumu ise $\vec{r}_i$ vektörüyle gösterilmiştir. *xyz*-koordinat sisteminin orijininin atalet koordinat sistemi içindeki konumu ise $\vec{R}$ vektörüyle belirlenmektedir. $\vec{\omega}$ gövdenin açısal hızıdır.



Şekil 4.1

m_i kütle parçacığının konumu ve hızı için Bölüm 1'de daha önce elde edilen (1.19) ve (1.26) numaralı denklemlerden aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\vec{\rho}_i = \vec{R} + \vec{r}_i \tag{4.1}$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i + \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)_r \tag{4.2}$$

Hem xyz-koordinat eksenlerinin hem de m_i kütle parçacığının gövde içindeki konumları sabit olduğundan, denklem (4.2)'de,

$$\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)_r = 0 \tag{4.3}$$

olur ve rijit gövde üzerinde bir kütle parçacığı için hız aşağıdaki hali alır:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i \tag{4.4}$$

Gövdede N sayıda kütle parçacığı varsa, gövdenin toplam kinetik ko-enerjisi tüm parçacıkların kinetik ko-enerjilerinin toplamı olarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$T^* = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\dot{\vec{R}}^2 + 2\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_i + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}}\cdot\vec{\omega}\times\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \tag{4.5}$$

$\sum_{i=1}^{N}m_i = M$ ve denklem (1.10)'dan $\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i = M\vec{r}_C$ yazılırsa ve denklem (4.5)'in son terimindeki vektör ve skalar çarpımın sırası değiştirilirse, kinetik ko-enerji ifadesi aşağıdaki hali alır:

$$T^* = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + M(\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_C) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right] \tag{4.6}$$

Özel Hal 1:

Eğer rijit gövdenin atalet referans sisteminde O gibi sabit bir noktası varsa ve xyz-koordinat sisteminin orijini bu nokta olarak seçilirse, $\dot{\vec{R}} = 0$ olur. Bu özel hal için kinetik ko-enerji ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$T^* = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{r}_{Oi}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{Oi})\right] \tag{4.7}$$

i'inci kütle parçacığının O'ya göre açısal momentumu h_{Oi} aşağıdaki gibidir (denklem 1.16):

$$h_{Oi} = \vec{r}_{Oi}\times m_i\dot{\vec{r}}_{Oi} = \vec{r}_{Oi}\times m_i\vec{v}_i = m_i\vec{r}_{Oi}\times\vec{v}_i = m_i\vec{r}_{Oi}\times(\omega\times\vec{r}_{Oi}) \tag{4.8}$$

Bu yüzden denklem (4.7)'nin sağındaki ikinci vektör, gövdenin O noktasına göre toplam açısal momentumu $\vec{H}_O$'dur. $\vec{H}_O$, aşağıda denklem (4.9)'da verilmiştir:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_{Oi} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Oi})\right] \tag{4.9}$$

Dolayısıyla, bu özel hal için kinetik ko-enerji aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T^* = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{H}_O \tag{4.10}$$

Özel Hal 2:

Eğer *xyz*-koordinat sisteminin orijini gövdenin ağırlık merkezinde seçilirse, bu durumda $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_C$ ve $\vec{r}_C = 0$ olur; denklem (4.6) aşağıdaki hale dönüşür:

$$T^* = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_{Ci} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Ci})\right] \tag{4.11}$$

Gövdenin ağırlık merkezine göre açısal momentumu $\vec{H}_C$,

$$\vec{H}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_{Ci} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Ci})\right] \tag{4.12}$$

ifadesiyle verildiğinden, bu özel hal için kinetik ko-enerji aşağıdaki gibi bulunur:

$$T^* = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{H}_C \tag{4.13}$$

4.2 Açısal Momentum ve Atalet Matrisi

Denklemler (4.9) ve (4.12)'de geçen genel ifade *o* ve *c* indisleri kaldırılarak aşağıda tekrardan yazılmıştır.

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right] \tag{4.14}$$

Bu denklem,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} \tag{4.15}$$

vektör özdeşliği kullanılarak yeniden yazılırsa, aşağıdaki hale gelir:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i^{\,2}\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i\right] \tag{4.16}$$

$\vec{H}$, $\vec{\omega}$ ve $\vec{r}_i$ vektörlerini *xyz*-koordinat sisteminin (gövdeye bağlı koordinat sistemi) eksenleri boyunca olan bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazalım:

$$\vec{H} = H_x\vec{u}_x + H_y\vec{u}_y + H_z\vec{u}_z \tag{4.17}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z \tag{4.18}$$

$$\vec{r}_i = x_i \vec{u}_x + y_i \vec{u}_y + z_i \vec{u}_z \tag{4.19}$$

Yukarıdaki üç denklemde $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ ve $\vec{u}_z$ sırasıyla x, y ve z yönlerindeki birim vektörleri, bunların önündeki çarpanlar ise o yönlerdeki vektör bileşenlerinin büyüklüklerini göstermektedir. $\vec{H}$, $\vec{\omega}$ ve $\vec{r}_i$ vektörleri denklemler (4.17), (4.18) ve (4.19)'dan alınıp denklem (4.16)'da yerine koyulursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z) - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(x_i \vec{u}_x + y_i \vec{u}_y + z_i \vec{u}_z) \right] \tag{4.20}$$

Bu denklemin terimleri yeniden düzenlenirse aşağıdaki hali alır,

$$\begin{aligned} \vec{H} = {} & \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(y_i^2 + z_i^2)\omega_x + (-x_i y_i)\omega_y + (-z_i x_i)\omega_z \right] \vec{u}_x + \\ & \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(-x_i y_i)\omega_x + (x_i^2 + z_i^2)\omega_y + (-y_i z_i)\omega_z \right] \vec{u}_y + \\ & \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(-x_i z_i)\omega_x + (-y_i z_i)\omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z \right] \vec{u}_z \end{aligned} \tag{4.21}$$

Atalet momentleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) \tag{4.22a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$ (4.22b)

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) \tag{4.23a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$ (4.23b)

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \tag{4.24a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$ (4.24b)

Atalet çarpımları ise aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_{i=1}^{N} (-m_i x_i y_i) \tag{4.25a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm$ (4.25b)

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_{i=1}^{N} (-m_i x_i z_i) \tag{4.26a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{xz} = I_{zx} = -\int xzdm$ (4.26b)

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i=1}^{N} (-m_i y_i z_i) \tag{4.27a}$$

ya da yayılı kütle için $I_{yz} = I_{zy} = -\int yzdm$ (4.27b)

Atalet momentleri ve atalet çarpımları denklem (4.21)'de yerine koyulursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\vec{H} = H_x \vec{u}_x + H_y \vec{u}_y + H_z \vec{u}_z = (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\vec{u}_x +$$

$$(I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\vec{u}_y + (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\vec{u}_z \tag{4.28}$$

Denklem (4.28)'deki bileşenler matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

olur ve uygun şekilde tanımlanan matrisler cinsinden kısaca aşağıdaki ifade elde edilir:

$$[H] = [I][\omega] \tag{4.30}$$

$\vec{H}$ 'nin bileşenleri olan H_x, H_y ve H_z kullanılan *xyz*-koordinat sistemine bağlıdır. Buna karşılık, $\vec{H}$ bir vektör olduğundan herhangi bir koordinat sisteminden bağımsız ve sadece boyu ve yönü ile tamamen belirlenir. Denklem (4.30)'daki $[I]$ matrisine *atalet matrisi* denir.

4.3 Kinetik Ko-enerjinin Matrisler Cinsinden Yazılması

Atalet referans sistemine göre sabit bir *O* noktası olan bir gövdede *xyz*-koordinat sisteminin orijini *O* noktasında alındığında (Özel Hal 1), denklem (4.10) ile verilen kinetik ko-enerji ifadesi matrisler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

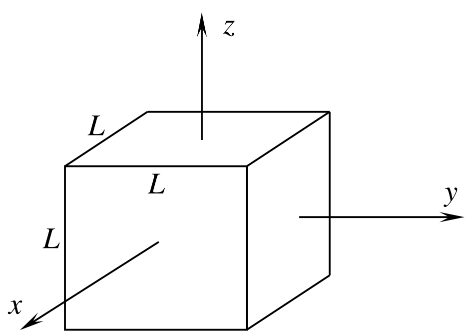
$$T^* = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_O = \frac{1}{2}[\omega]^T[H]_O = \frac{1}{2}[\omega]^T[I]_O[\omega] \tag{4.31}$$

xyz-koordinat sisteminin orijini gövdenin ağırlık merkezinde seçilirse, denklem (4.13) ile verilen kinetik ko-enerji ifadesi ise matrisler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T^{*}=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_C=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}[\omega]^T[H]_C=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}[\omega]^T[I]_C[\omega] \qquad (4.32)$$

Örnek :

Şekil 4.2'deki verilen küpün kütlesi *M* ve kütle dağılımı muntazamdır. *xyz*-koordinat sisteminin orijini ağırlık merkezindedir. Bu cismin atalet matrisini bulalım:



Şekil 4.2

Bu cismin içinde *dxdydz* boyutlarında bir eleman alınırsa, *dm* aşağıdaki gibi olur:

$$dm=\frac{M}{L^3}dxdydz \qquad (4.33)$$

Atalet Momentleri:

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)dm=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(y^2+z^2)\frac{M}{L^3}dxdydz=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(y^2+z^2)\frac{M}{L^3}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right)dydz$$

$$=\frac{M}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(y^2z+\frac{z^3}{3})\Bigg|_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}}dy=\frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(y^2+\frac{L^2}{12})dy=\frac{M}{L}\left(\frac{y^3}{3}+\frac{L^2}{12}y\right)\Bigg|_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}=\frac{1}{6}ML^2 \qquad (4.34)$$

Denklem (4.34)'e benzer biçimde diğer atalet momentleri de hesaplanırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$I_{yy}=\frac{1}{6}ML^2 \qquad (4.35)$$

$$I_{zz}=\frac{1}{6}ML^2 \qquad (4.36)$$

Atalet Çarpımları:

$$I_{xy} = -\int xydm = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xy\frac{M}{L^3}dxdydz = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xy\frac{M}{L^2}dxdy = -\frac{M}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} dx = 0$$

(4.37)

Denklem (4.36)'ya benzer biçimde diğer atalet çarpımları da hesaplanırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$I_{xz} = 0 \tag{4.38}$$

$$I_{yz} = 0 \tag{4.39}$$

Dolayısıyla Şekil 4.2'deki küp için atalet matrisi aşağıdaki gibidir:

$$[I]_C = \begin{bmatrix} ML^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & ML^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & ML^2/6 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Kinetik ko-enerji ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$T^* = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ML^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & ML^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & ML^2/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{bmatrix}$$

ya da,

$$T^* = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{ML^2}{12}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \tag{4.41}$$

4.4 Rijit Gövdenin Asal Eksenleri

Rijit bir gövde için *xyz* eksen takımı rastgele tanımlanmışsa, gövdeye uygulanan bir $\vec{\omega}$ açısal hızının yaratacağı açısal momentum vektörü $\vec{H}$, $\vec{\omega}$ vektörüyle aynı yönde değildir. Örneğin, böyle bir gövdeye z yönünde bir açısal hız uygulanırsa, aşağıdaki denklemden görüldüğü gibi x ve y yönlerinde de açısal momentum vektör bileşenleri ortaya çıkar:

$$[H] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xz}\omega_x \\ I_{yz}\omega_y \\ I_{zz}\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Ancak her gövdede, $\vec{\omega}$ gibi bir açısal hız uygulandığında bununla aynı yönde bir $\vec{H}$ vektörü elde edilen, birbirine dik üç yön bulunur. Bu yönlere *asal yönler*, orijinden bu yönlerde çizilen eksenlere de *asal eksenler* denir.

Asal yönler, verilen bir *xyz* eksen takımına göre (gövde içinde sabit eksenler) yukarıdaki özellikten yararlanarak kolayca bulunabilir. $\vec{u}$ vektörü asal yönde ve birim uzunlukta bir vektör olsun. $[u]$ matrisi de $\vec{u}$ vektörünün *x*, *y* ve *z* yönlerindeki bileşenlerini içeren matris olsun.

Eğer,

$$\vec{\omega} = \omega\vec{u} \tag{4.43}$$

yani

$$[\omega] = \omega[u] \tag{4.44}$$

ise, asal eksenlerin tanım şekli dolayısıyla,

$$[H] = H[u] = [I][\omega] \tag{4.45}$$

olur. Denklem (4.44)'den $[\omega]$ alınarak denklem (4.45)'de yerine koyulursa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$[I][u] = \frac{H}{\omega}[u] \tag{4.46}$$

Bu denklemde,

$$\lambda = \frac{H}{\omega} \tag{4.47}$$

olarak tanımlanır ve terimler düzenlenirse,

$$[I][u] - \lambda[u] = 0 \tag{4.48}$$

ya da,

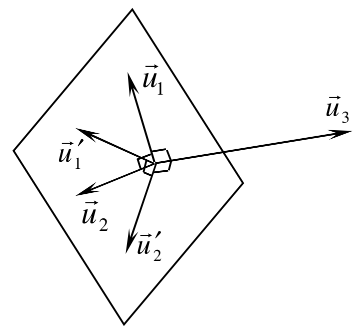
$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \\ \lambda u_z \end{bmatrix} = 0 \tag{4.49}$$

ya da,

$$\begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = 0 \tag{4.50}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden görüldüğü gibi, $\vec{u}$ vektörünün yönünün bulunması, bir özdeğer probleminin çözümünü gerektirir. Denklem (4.47) ile tanımlanan λ'lar, $[I]$ matrisinin özdeğerleri, $\vec{u}$ ise özvektörleridir.

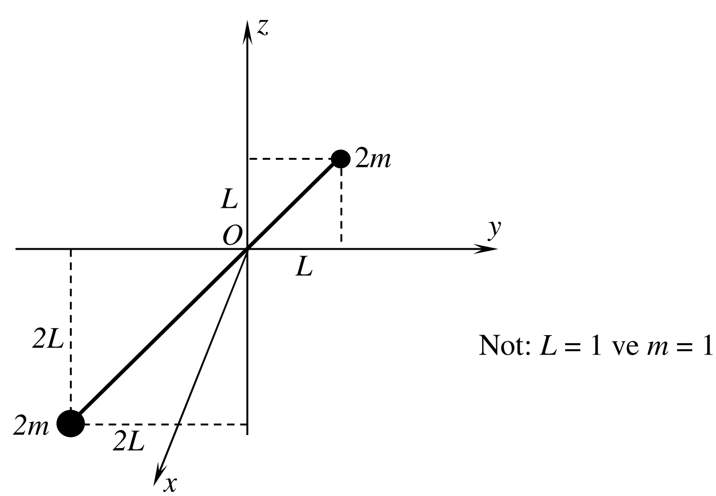
Denklem (4.50)'den $\vec{u}$'nun bileşenleri cinsinden üç denklem yazılabilir. Ancak bu denklemler homojen olduğundan, sadece katsayılarının determinantı, yani denklem (4.50)'deki katsayı matrisinin determinantı sıfır olduğunda sıfırdan farklı bir çözüm mümkündür. Genel halde, λ_1, λ_2 ve λ_3 gibi üç özdeğer ve bunlara karşılık gelen $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ve $\vec{u}_3$ gibi üç özvektör bulunur. Bu üç özvektör, *xyz*-koordinatlarına göre gövdenin asal yönlerini belirler. Eğer λ_1, λ_2 ve λ_3 birbirinden farklı değerlere sahipse, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ve $\vec{u}_3$ yönleri birbirlerine diktir ve tek bir çözüm olarak bulunur. Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ ise, $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$'nin çözümleri tek değildir. $\vec{u}_3$ yönüne dik olan her yön, asal yön özelliğine sahiptir (Şekil 4.3). $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$ vektörleri, $\vec{u}_3$ yönüne dik olan düzlem içinde çizilen ve biribirine dik olan herhangi iki yönde alınabilir. Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ise her yön asal yön özelliğindedir. Bu durumda $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ve $\vec{u}_3$ vektörleri birbirlerine dik olan herhangi üç yönde alınabilir.



Şekil 4.3

Örnek :

Şekil 4.4'deki gövdede rijit ve kütlesiz kollarla birbirine bağlı iki kütle vardır. *xyz*-koordinat sistemi gövdeye bağlı olup, kütlelerin hepsi *yz*-düzlemi üzerindedir. Bu gövdenin asal eksenlerini bulalım.



Şekil 4.4

Atalet momentleri:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{2} m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2m(L^2 + L^2) + 2m(4L^2 + 4L^2) = 20mL^2 \qquad (4.51)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{2} m_i (x_i^2 + z_i^2) = 2mL^2 + 2m(4L^2) = 10mL^2 \qquad (4.52)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{2} m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2mL^2 + 2m(4L^2) = 10mL^2 \qquad (4.53)$$

Atalet çarpımları:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{2} (-m_i x_i y_i) = 0 \qquad (4.54)$$

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^{2} (-m_i x_i z_i) = 0 \qquad (4.55)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{2} (-m_i y_i z_i) = -2m(L)(L) - 2m(-2L)(-2L) = -10mL^2 \qquad (4.56)$$

Atalet matrisi:

$$[I] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} mL^2 \qquad (4.57)$$

Özdeğerlerin bulunması:

$$\det \begin{bmatrix} 20-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 10-\lambda & -10 \\ 0 & -10 & 10-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.58)$$

ya da,

$$(20-\lambda)(10-\lambda)(10-\lambda) - (20-\lambda)(-10)(-10) = 0 \qquad (4.59)$$

ya da,

$$\lambda^3 - 40\lambda^2 + 400\lambda = \lambda(\lambda^2 - 40\lambda + 400) = \lambda(\lambda - 20)^2 = 0 \qquad (4.60)$$

ya da,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 20 \qquad (4.61)$$

λ_1'e karşılık gelen özvektör $\vec{u}_1$'i bulmak için önce denklem (4.50) kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = 0 \tag{4.62}$$

ya da,

$$20u_x = 0 \tag{4.63}$$

$$10u_y - 10u_z = 0 \tag{4.64}$$

$$-10u_y + 10u_z = 0 \tag{4.65}$$

bulunur. Görüldüğü gibi, denklem (4.62)'den yazılan üç denklemden (4.64) ve (4.65) numaralılar birbirinin aynıdır. $\vec{u}_1$ vektörünün çözülmesi gereken bileşen sayısı ise üç olduğundan (u_x, u_y, u_z) bir denkleme daha gerek vardır. Üçüncü denklem ise $\vec{u}_1$ vektörünün birim vektör olma özelliğinden elde edilir:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{4.66}$$

Denklemler (4.63), (4.64) ve (4.66)'dan $\vec{u}_1$'in bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

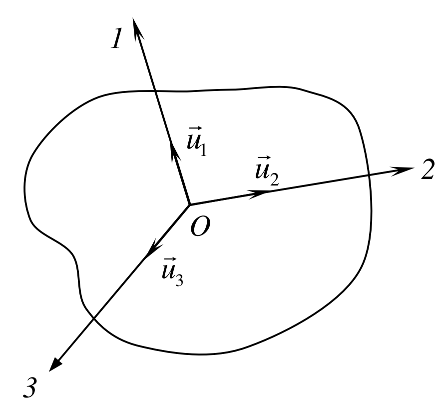
$$u_x = 0 \qquad , \quad u_y = u_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.67}$$

Bu bileşen değerleri incelendiğinde, $\vec{u}_1$ vektörünün iki kütleyi birleştiren kol üzerinde ve sağ tarafa doğru olduğu görülür. $\lambda_2 = \lambda_3$ olduğundan $\vec{u}_2$ ve $\vec{u}_3$ vektörleri $\vec{u}_1$'e dik olan düzlemde birbirine dik olacak şekilde rastgele seçilebilir.

Asal Eksenlere Göre Atalet Matrisi

Bir gövdeye asal eksenlerinden herhangi birisi etrafında bir açısal hız uygulanırsa, meydana gelecek olan açısal momentum vektörü de aynı eksen yönünde olmak zorundadır. Yani, gövdenin asal eksenleri Şekil 4.5'deki gibi *1*, *2* ve *3* ile gösterilirse, aşağıdaki ifade geçerli olur:

$$H_i = I_i \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.68}$$



Şekil 4.5

Bu şartın sağlanabilmesi için, asal eksenlere göre yazılan atalet matrisinin diyagonal olma zorunluluğu vardır. Bu durumda $\vec{H}$ vektörünün bileşenleri ile $\vec{\omega}$ vektörünün bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

Örneğin, gövdeye *1*-yönünde bir açısal hız uygulanırsa, açısal momentum bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

Denklem (4.68) ve (4.69) karşılaştırılırsa, $\dfrac{H_i}{\omega_i} = \lambda_i = I_i$ olacağından, asal eksenlere göre atalet momentlerinin, $[I]$ matrisinin özdeğerlerine eşit olduğu görülür:

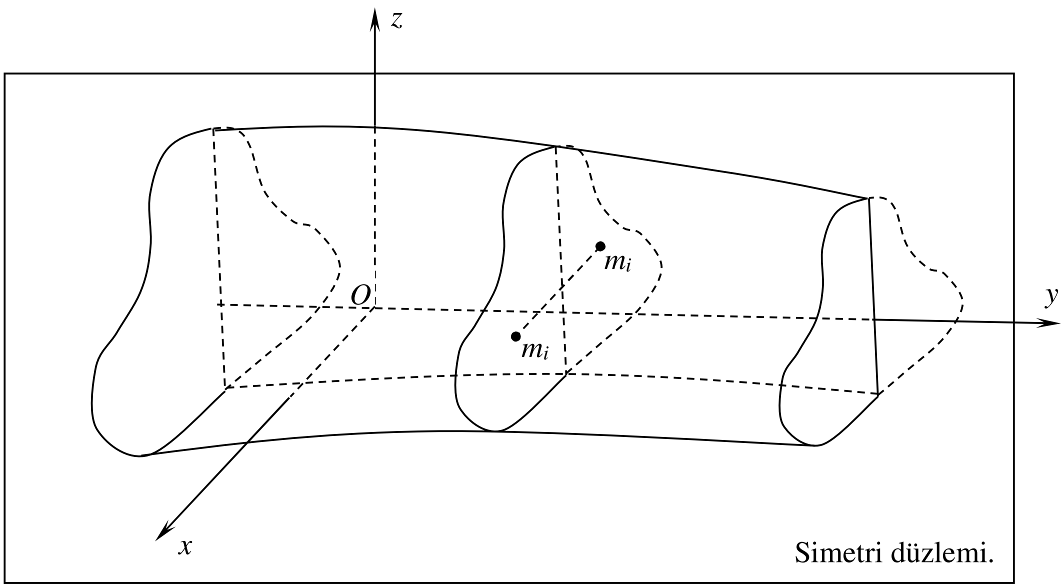
$$I_i = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.71}$$

Bir gövdenin asal eksenleri biliniyorsa, problem çözümlerinde bu eksenlerin kullanılması işlemlerde büyük kolaylık sağlar. Zira, $[I]$ matrisinin diyagonal dışında bütün elemanları sıfırdır. Eğer asal eksenler problemin başında bilinmiyorsa, bu eksenlerin bulunması pek çok problemde bir özdeğer probleminin çözülmesini gerektireceğinden, asal eksenleri kullanmanın getireceği basitlik ile özdeğer probleminin gerektireceği ek işlemler karşılaştırılarak en uygun olan yol tercih edilmelidir. Ancak, bazı problemlerde gövdenin bir veya daha fazla simetri düzlemi olabilir. Bu durumda asal eksenler bu özellikten yararlanarak, aşağıdaki kısımda açıklandığı gibi, özdeğer problemini çözmeden de bulunabilir.

Simetriden Yararlanarak Asal Eksenlerin Bulunması

Simetri özelliğine sahip gövdelerin asal eksenleri, bu özellikten yararlanarak herhangi bir hesaplama yapmadan bulunabilir. Örneğin, Şekil 4.6'daki gövdenin *S* gibi bir simetri düzlemi olsun. *xyz*-koordinat sisteminin orijini *O*'yu bu düzlem üzerinde alalım. *x* ekseni simetri düzlemine dik yönde alınsın. Bu durumda *y* ve *z* eksenleri simetri düzlemi üzerinde olur. Gövdenin simetri özelliği dolayısıyla, (*x*, *y*, *z*) koordinatında bulunan herhangi bir kütle parçacığı m_i'nin, (-*x*, *y*, *z*) koordinatında bir simetriği vardır. Bu simetrik kütle parçacıklarının I_{xy} terimine katkıları $-(m_i x_i y_i - m_i x_i y_i) = 0$ ve I_{xz} terimine katkıları ise $-(m_i x_i z_i - m_i x_i z_i) = 0$ şeklinde birbirlerini götüreceğinden, Şekil 4.6'daki gibi simetri özelliğine sahip bir gövde için atalet matrisi aşağıdaki hali alır:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.72}$$



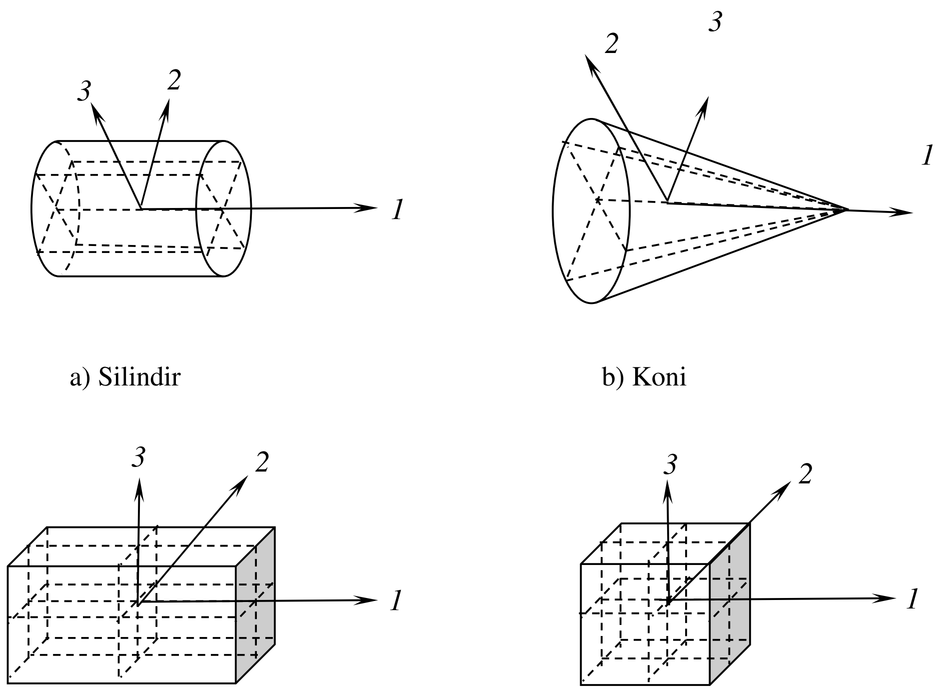
Şekil 4.6

Bu gövdeye x ekseni etrafında ω_x gibi bir açısal hız uygulanırsa, gövdenin açısal momentum bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Denklem (4.73)'den görüldüğü gibi *x* ekseni yönünde uygulanan açısal hız vektörü yine aynı yöne bir açısal momentum vektörü yaratmaktadır. Bu ise asal eksen özelliğidir; yani *x* ekseni asal eksendir. Sonuç olarak, kütlesel simetri eksenine dik olan yön, asal yön özelliğini taşır ve bu yönde çizilen eksen asal eksendir.

Şekil 4.7'de simetri özelliğinden yararlanarak asal eksenleri çizilen bazı gövdeler verilmiştir. Şekil 4.7(a) ve (b)'de *1* eksenine dik olan düzlemde birbirine dik herhangi iki eksen *2* ve *3* ekseni olarak seçilebilir. Şekil 4.7(c)'deki dikdörtgenler pirizmasında birbirine dik üç simetri düzlemi olduğundan bunlara dik *1*, *2* ve *3* eksenleri asal eksenlerdir. Şekil 4.7(d)'deki küpte ise atalet matrisi denklem (4.69)'daki gibi diyagonal olduğundan ortagonal herhangi bir eksen takımı asal eksenler olarak seçilebilir.



a) Silindir

b) Koni

c) Dikdörtgenler prizması

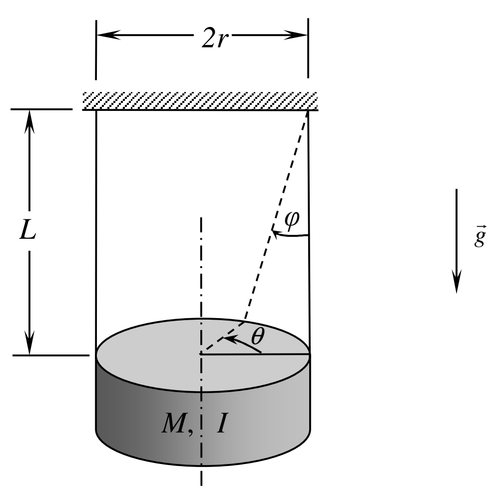
d) Küp

Şekil 4.7

4.5 Rijit Gövdeli Sistemlere Hamilton Prensibinin Uygulama Örnekleri

Örnek 1:

Şekil 4.8'de verilen iki ipli sarkaç düşey eksen etrafında dönel hareket yapmaktadır. İki ipli sarkaç, uçunda asılı olan kütlenin düşey eksen etrafındaki atalet momentini bulmak amacıyla kullanılır. Hamilton prensibini uygulayarak bu sistemin dinamik denklemini elde edelim.



Şekil 4.8

Sistem elemanları: Kütle, M; atalet momenti, I.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}Mv_m^2+\frac{1}{2}I\omega^2-MgL(1-\cos\varphi) \tag{4.74}$$

Sarkaç düşey eksen etrafında φ açısı kadar döndürüldüğünde M kütlesi $x=L(1-\cos\varphi)$ kadar yukarı çıkacağından, $v_m=\dot{x}=L\dot{\varphi}\sin\varphi$ olur ve denklem (4.74) aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-MgL(1-\cos\varphi) \tag{4.75}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i\delta x_i=0 \tag{4.76}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartı:

$$r\theta=L\varphi \tag{4.77}$$

Hamilton integrali:

Sistem kabul edilebilirlik şartı uygulanarak Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-MgL(1-\cos\varphi)\right)\right]dt \tag{4.78}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[ML^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}+ML^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi\delta\varphi+I\left(\frac{L}{r}\right)^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-MgL\sin\varphi\delta\varphi\right]dt$$

Şimdi sarkacın küçük genlikle hareket ettiğini kabul edelim. Yukarıdaki integralin terimleri incendiğinde ilk iki terimin diğer terimlere göre daha yüksek mertebeli küçük terimler içerdiği görülür. Bu yüzden ilk iki terim diğerleri yanında ihmal edilebilir ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[I\left(\frac{L}{r}\right)^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-MgL\sin\varphi\delta\varphi\right]dt \tag{4.79}$$

$\delta\dot{\varphi}$ içeren terimlere kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-I\left(\frac{L}{r}\right)^2\ddot{\varphi}-MgL\sin\varphi\right]\delta\varphi dt=0 \qquad \text{(Rastgele } \delta\varphi \text{ için)} \tag{4.80}$$

olur ve sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

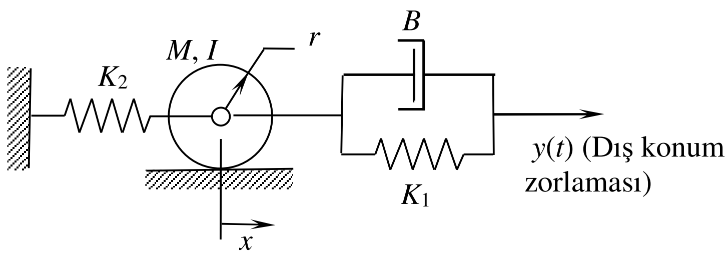
$$I\left(\frac{L}{r}\right)^2\ddot{\varphi}+MgL\sin\varphi=0 \tag{4.81}$$

Küçük hareketler için $\sin\varphi=\varphi$ alınır ve terimler yeniden düzenlenirse dinamik denklem aşağıdaki hali alır:

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgr^2}{IL}\varphi=0 \tag{4.82}$$

Örnek 2:

Şekil 4.9'da verilen sistemdeki teker yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Bu sisteme Hamilton prensibini uygulayarak dinamik denklemlerini elde edelim.



Şekil 4.9

Sistem elemanları: Kütle, M; atalet momenti, I; yay, K_1; yay, K_2; sönümleyici, B.

Bu sistemde $y(t)$ kuvvet zorlaması olmadığından sistem elemanı olarak alınmaz. Fakat kabul edilebilirlik şartı olarak probleme girer.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}Mv_m^2+\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}K_1[x-y(t)]^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{4.83}$$

$\dot{x}=v_m$ ve $\omega=\dot{x}/r$ (kabul edilebilirlik şartları) olduğundan denklem (4.83) aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1[x-y(t)]^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{4.84}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i\delta x_i=-F_b\delta x=-B\dot{x}\delta x \tag{4.85}$$

Denklem (4.85) yazılırken, $y(t)$ dış zorlama olduğundan $\delta y(t)=0$ alınmıştır.

Hamilton integrali:

Denklemler (4.84) ve (4.85)'den Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}K_1[x-y(t)]^2-\frac{1}{2}K_2x^2\right)-B\dot{x}\delta x\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(M+\frac{I}{r^2}\right)\dot{x}\delta\dot{x}-K_1[x-y(t)]\delta x-K_2x\delta x-B\dot{x}\delta x\right]dt \tag{4.86}$$

İntegralin altındaki ilk terime kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-\left(M+\frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}-B\dot{x}-(K_1+K_2)x+K_1y(t)\right]\delta x dt=0 \quad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \tag{4.87}$$

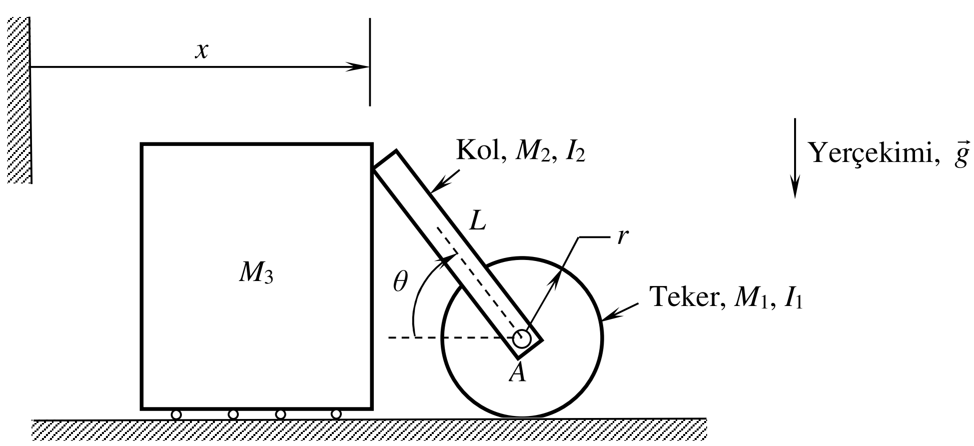
olur ve sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left(M+\frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}+B\dot{x}+(K_1+K_2)x=K_1y(t) \tag{4.88}$$

4.6 Rijit Gövdeli Sistemlere Lagrange Denkleminin Uygulama Örnekleri

Örnek 1:

Şekil 4.10'daki sistemde teker yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Kolun bir ucu A noktasında tekerin ortasına yataklanmış, diğer ucu ise M_3 kütlesinin kenar yüzeyinden ayrılmadan sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Kolun ve tekerin kütleleri muntazam dağılıdır. Bütün atalet momentleri ağırlık merkezine göredir. Yataklar sürtünmesizdir. Bu sistemin dinamik davranışını tanımlayan diferansiyel denklemi Lagrange denklemini kullanarak bulalım.



Şekil 4.10

Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinatlar:

Bu problem için farklı koordinat takımları seçilmesi mümkündür. Burada genelleştirilmiş koordinatlar olarak x ve θ seçilsin. Sistem iki serbestlik dereceli ve holonomiktir.

Kinetik ko-enerji:

$$T^* = \frac{1}{2}M_1 v_A^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_G^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_3\dot{x}^2 \tag{4.89}$$

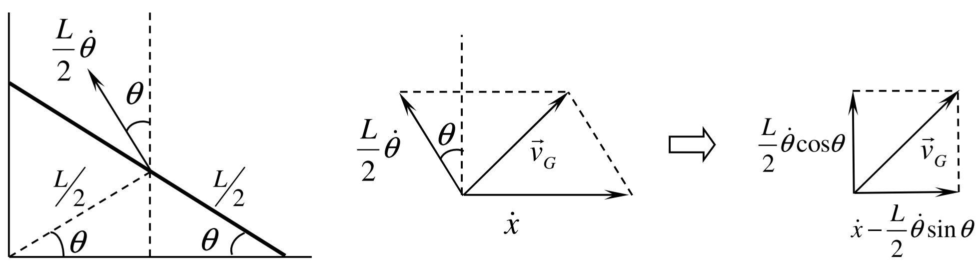
Burada, ω_1 ve v_A aşağıdaki gibidir:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r} \tag{4.90}$$

$$v_A = \frac{d}{dt}(x + L\cos\theta) = \dot{x} - L\sin\theta\dot{\theta} \tag{4.91}$$

Kolun ağırlık merkezinin hızı v_G ise dik üçgenin özelliğinden yararlanarak Şekil 4.11'den aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$v_G^2 = \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right) = \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \dot{x}^2 - L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \tag{4.92}$$



Şekil 4.11

Potansiyel-enerji:

Tekerin merkezinin yüksekliği sabittir. Bu yükseklik referans alınırsa, potansiyel enerji aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V = \left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)M_2 g \tag{4.93}$$

Lagrange Fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{I_1}{r^2}\right)(\dot{x} - L\sin\theta\dot{\theta})^2 +$$

$$+\frac{1}{2}M_2\left[\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2+\dot{x}^2-L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right]+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M_3\dot{x}^2-\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)M_2 g \tag{4.94}$$

Genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_x = 0 \qquad\qquad Q_\theta = 0 \tag{4.95}$$

x için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=Q_x \tag{4.96}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M_1+\frac{I_1}{r^2}\right)\left(\dot{x}-L\sin\theta\dot{\theta}\right)+M_2\dot{x}-\frac{1}{2}M_2 L\dot{\theta}\sin\theta+M_3\dot{x}\right]=0 \tag{4.97}$$

$$\left(M_1+M_2+M_3+\frac{I_1}{r^2}\right)\dot{x}-\left(M_1+\frac{1}{2}M_2+\frac{I_1}{r^2}\right)L\sin\theta\dot{\theta}=Sabit \tag{4.98}$$

θ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}=Q_\theta \tag{4.99}$$

ya da,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\left(M_1+\frac{I_1}{r^2}\right)\left(\dot{x}-L\sin\theta\dot{\theta}\right)\left(-L\sin\theta\right)+M_2\frac{L^2}{4}\dot{\theta}-\frac{1}{2}M_2 L\dot{x}\sin\theta+I_2\dot{\theta}\right]\\&-\left[\left(M_1+\frac{I_1}{r^2}\right)\left(\dot{x}-L\sin\theta\dot{\theta}\right)(-L\cos\theta\dot{\theta})-\frac{1}{2}M_2 L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-M_2 g\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)\right]=0\end{aligned} \tag{4.100}$$

Özel Hal:

Yukarıdaki problemde $M_1=0$, $I_1=0$ olsun. Bu durumda dinamik denklemler aşağıdaki hali alır:

$$\left(M_2+M_3\right)\dot{x}-\frac{1}{2}M_2 L\sin\theta\dot{\theta}=Sabit \tag{4.101}$$

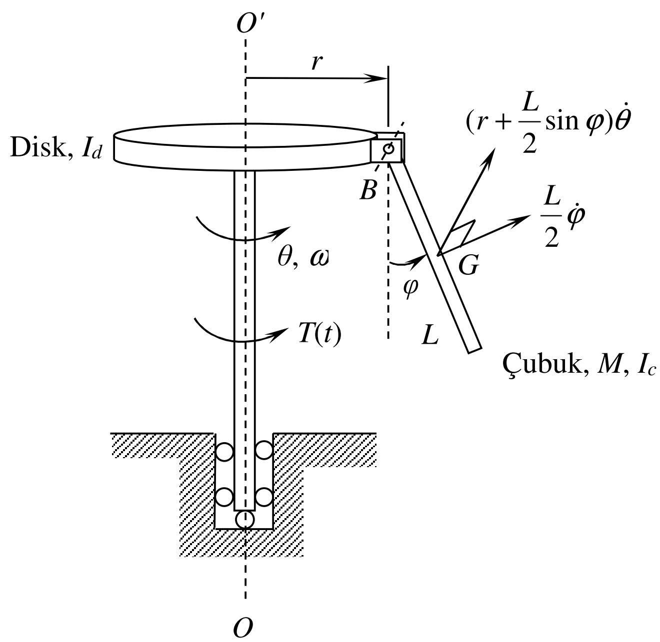
$$\begin{aligned}&\left(M_2\frac{L^2}{4}+I_2\right)\ddot{\theta}-M_2\frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot{x}+-M_2\frac{L}{2}\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}\\&\qquad+\frac{1}{2}M_2 L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta+\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)mg=0\end{aligned} \tag{4.102}$$

Örnek 2:

Şekil 4.12'deki sistem düşey etrafında serbestçe dönebilmektedir. *B* noktasında tekere eklemle bağlı olan çubuk radyal düzlem içinde serbestçe sallanabilmektedir. Çubuk dairesel kesitlidir ve kütlesi muntazam olarak dağılmıştır. Çubuğun boyu *L*, kütlesi *M*, ağırlık merkezinden geçen ve çubuğa dik eksen etrafındaki atalet momenti J_c'dir. Çubuk boyunca olan simetri ekseni etrafındaki çubuk atalet momenti ihmal edilebilir.Düşey mile OO' etrafında $T(t)$ gibi bir dış moment uygulanmaktadır. Bu sistemin dinamik denklemlerini Lagrange denklemiyle bulalım.

Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinatlar:

Genelleştirilmiş koordinatlar olarak θ ve φ seçilsin. Sistem iki serbestlik dereceli ve holonomiktir.



Şekil 4.12

Kinetik ko-enerji:

Denklem (4.41)'den yararlanarak,

$$T^* = \frac{1}{2}I_d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_c(\dot{\theta}\sin\varphi)^2 \tag{4.103}$$

Şekil 4.12'de $\dot{\theta}$ ve $\dot{\varphi}$ hız bileşenlerinin sebep oldukları $\vec{v}_G$ vektörü bileşenleri görülmektedir. Bu bileşenler birbirine dik olduğundan v_G^2 aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_G^2 = \left(\frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \left(r + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)^2 \dot{\theta}^2 \tag{4.104}$$

Potansiyel-enerji:

Referans olarak diskin bulunduğu yükseklik alınırsa, potansiyel enerji aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V = -Mg\left(\frac{L}{2}\cos\varphi\right) \tag{4.105}$$

Lagrange Fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2}I_d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \left(r + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_c(\dot{\theta}\sin\varphi)^2 + Mg\left(\frac{L}{2}\cos\varphi\right) \tag{4.106}$$

Genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_\theta = T(t) \qquad\qquad Q_\varphi = 0 \tag{4.107}$$

θ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = Q_\theta \tag{4.108}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_d\dot{\theta} + M\left(r + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)^2\dot{\theta} + I_c\sin^2\varphi\dot{\theta}\right] = T(t) \tag{4.109}$$

φ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = Q_\varphi \tag{4.110}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_c\right)\dot{\varphi}\right] - \left[M\dot{\theta}^2\left(r + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\frac{L}{2}\cos\varphi + I_c\dot{\theta}^2\cos\varphi - Mg\left(\frac{L}{2}\sin\varphi\right)\right] = 0 \tag{4.111}$$

ya da,

$$\left[M\left(\frac{L}{2}\right)^2+I_c\right]\ddot{\varphi}+Mg\left(\frac{L}{2}\right)\sin\varphi-M\dot{\theta}^2\left(r+\frac{L}{2}\sin\varphi\right)\frac{L}{2}\cos\varphi-I_c\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi=0$$

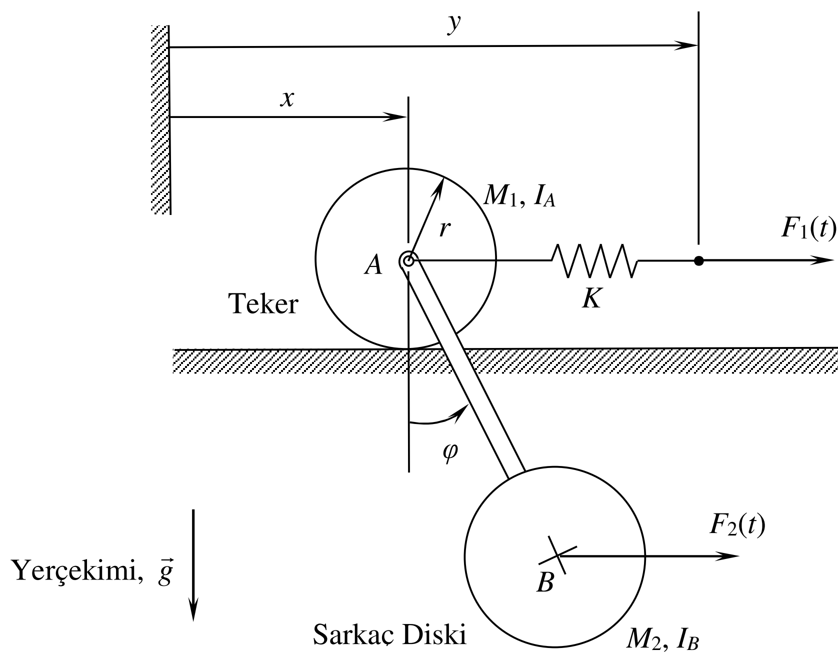
(4.112)

Örnek 3:

Şekil 4.13'deki sistemde teker yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanabilmektedir. Sarkaç diskini tekerin merkezine bir yatak vasıtasıyla bağlayan çubuk kütlesizdir. AB uzaklığı L kadardır. $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ yatay yönde uygulanan dış kuvvetlerdir. Bu sistemin dinamik denklemlerini Lagrange denklemiyle bulalım.

Tam ve bağımsız genelleştirilmiş koordinatlar:

Genelleştirilmiş koordinatlar x, y ve φ olarak seçilsin. Sistem üç serbestlik dereceli ve holonomiktir.



Şekil 4.13

Kinetik ko-enerji:

$$T^*=\frac{1}{2}M_1v_A^2+\frac{1}{2}I_A\omega_A^2+\frac{1}{2}M_2v_B^2+\frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2 \qquad (4.113)$$

ya da,

$$T^* = \frac{1}{2}M_1 v_A^2 + \frac{1}{2}I_A\left(\frac{v_A}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2 v_B^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{I_A}{r^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2 v_B^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2 \tag{4.114}$$

Şekil 4.14'deki hız vektör diyagramından bileşenlerin düşey ve yatay yönde projeksiyonları alınırsa $\vec{v}_B$ vektörünün büyüklüğü aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_B^2 = (L\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{x})^2 + (L\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 = L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2L\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} \tag{4.115}$$

Denklemler (4.114) ve (4.115)'den T^* aşağıdaki gibi bulunur:

$$T^* = \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{I_A}{r^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2\left(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2L\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}\right) + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2 \tag{4.116}$$

Potansiyel-enerji:

Referans olarak *A* noktasının yüksekliği alınırsa, potansiyel enerji aşağıdaki gibi yazılabilir:

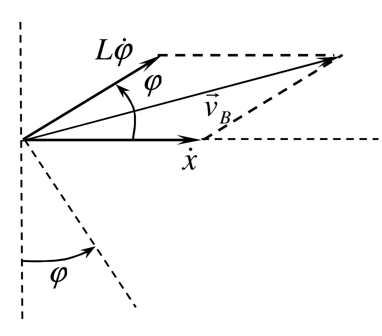
$$V = -\left(L\cos\varphi\right)M_2 g + \frac{1}{2}K(y-x)^2 \tag{4.117}$$

Lagrange Fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{I_A}{r^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2\left(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2L\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}\right) + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2 + \left(L\cos\varphi\right)M_2 g - \frac{1}{2}K(y-x)^2 \tag{4.118}$$

Genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_x = F_2(t) \qquad Q_y = F_1(t) \qquad Q_\varphi = L\cos\varphi\, F_2(t) \tag{4.119}$$



Şekil 4.14

x için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=Q_x \tag{4.120}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M_1+\frac{I_A}{r^2}+M_2\right)\dot{x}+M_2 L\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right]-\left[K(y-x)\right]=F_2(t) \tag{4.121}$$

ya da,

$$\left(M_1+M_2+\frac{I_A}{r^2}\right)\ddot{x}+M_2 L\cos\varphi\,\ddot{\varphi}-M_2 L\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2+Kx-Ky=F_2(t) \tag{4.122}$$

y için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=Q_y \tag{4.123}$$

ya da,

$$-\left[-K(y-x)\right]=F_1(t) \tag{4.124}$$

ya da,

$$K(y-x)=F_1(t) \tag{4.125}$$

φ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}=Q_\varphi \tag{4.126}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[\left(I_B+M_2L^2\right)\dot{\varphi}+M_2L\cos\varphi\,\dot{x}\right]-\left[M_2L\dot{x}\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\right)+LM_2g\left(-\sin\varphi\right)\right]=L\cos\varphi\,F_2(t) \tag{4.127}$$

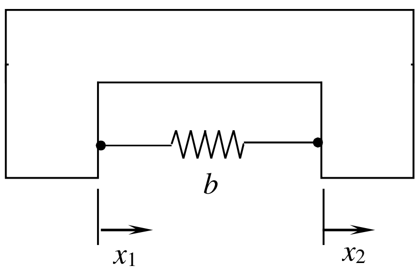
ya da,

$$\left(I_B+M_2L^2\right)\ddot{\varphi}+M_2L\cos\varphi\,\ddot{x}+M_2L\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}+M_2gL\sin\varphi=L\cos\varphi\,F_2(t) \tag{4.128}$$

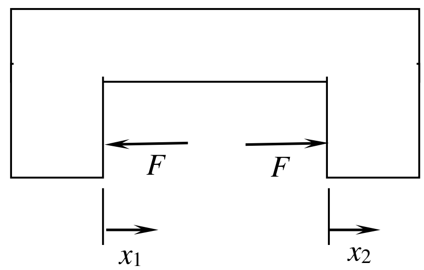
4.7 Viskoz Sönümleyicilere Sahip Sistemlerde Lagrange Denkleminin Kullanılması – Rayleigh Yayılım Fonksiyonu

Bölüm 3'de Lagrange denklemleri çıkarılırken sistemin korunumlu elemanlarına ait (kütle/atalet, yay, yerçekimi alanı) iş terimleri kinetik ko-enerji ve potansiyel enerji ifadelerinde, dış kuvvetler ise genelleştirilmiş kuvvetler içinde dikkate alınmıştı. Sistemde sürtünme elemanları olmadığı kabul edilmişti. Eğer sistemde hızla orantılı kuvvete sahip sürtünme elemanları varsa (viskoz sönümleyici) genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş hızlar cinsinden *Rayleigh Yayılım Fonksiyonu* olarak adlandırılan bir fonksiyon tanımlanarak Lagrange denklemi bu tür sistemler için yeniden düzenlenebilir.

Holonomik bir mekanik sistemin genelleştirilmiş koordinatları $q_i \quad (i = 1, \ldots, N)$ olsun. Bu sistem üzerindeki x_1 ve x_2 noktaları arasında Şekil 4.15'deki gibi b sönüm sabitli viskoz bir sönümleyici bulunsun.



Şekil 4.15



Şekil 4.16

Bu sönümleyici üzerinden iletilen F kuvveti,

$$F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \tag{4.129}$$

kadardır. Şimdi bu elemanı sistemden kaldıralım ve bunun yerine sisteme x_1 ve x_2 noktalarında bu F kuvvetinin Şekil 4.16'daki gibi uygulandığını düşünelim. Şekil 4.16'daki sistem, Şekil 4.15'deki sistemin eşdeğeri olup, iki sistemin dinamik denklemleri birbirinin aynıdır. Şekil 4.16'daki gibi sisteme eklenen F kuvvetlerinin genelleştirilmiş kuvvetlere katkılarının ne olacağını bulalım. Eğer x_1 ve x_2 noktaları δx_1 ve δx_2 kadar yer değiştirirse, F kuvvetleri tarafından yapılan iş miktarı δW aşağıdaki gibidir:

$$\delta W = -F(\delta x_1 - \delta x_2) \tag{4.130}$$

δx_1 ve δx_2 değişimleri genelleştirilmiş koordinatların değişimleri cinsinden,

$$\delta x_1 = \sum_{j=1}^{N} c_j \delta q_j \tag{4.131}$$

$$\delta x_2 = \sum_{k=1}^{N} d_k \delta q_k \tag{4.132}$$

şeklinde yazılabileceğinden, iş ifadesi aşağıdaki hali alır:

$$\delta W = -F\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \delta q_j - \sum_{k=1}^{N} d_k \delta q_k\right) \tag{4.133}$$

F kuvvetlerinin i'inci genelleştirilmiş kuvvete olan katkısı hesaplanırken i'inci genelleştirilmiş koordinat dışındaki koordinatlar sabit kabul edildiğinden ve bu yüzden bunların varyasyonları sıfır olacağından, denklem (4.133)'den F kuvvetlerinin Q_i genelleştirilmiş kuvvete katkısı Q_{Fi} aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q_{Fi} = -F(c_i - d_i) = -b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(c_i - d_i) \tag{4.134}$$

Diğer yandan, sönümleyici tarafından ısıya dönüştürülen güç P aşağıdaki gibidir:

$$P = F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tag{4.135}$$

Bu ifadenin $\dot{q}_i$'ne göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki denklemler bulunur:

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P}{\partial(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)} \frac{\partial(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{\partial \dot{q}_i} = 2b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(c_i - d_i) \tag{4.136}$$

Denklemler (4.134) ve (4.136) karşılaştırılırsa, sönümleyici kuvveti F'nin, Q_i genelleştirilmiş kuvvete katkısı olan Q_{Fi} için aşağıdaki eşitliğin yazılabileceği görülür:

$$Q_{Fi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial(P/2)}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.137}$$

Eğer sistemde birden fazla viskoz sönümleyici varsa ve P hesaplanırken bütün sönümleyicilerin ısıya çevirdiği güç hesaba katılırsa, benzer düşünce tarzıyla denklem (4.137)'nin bu genel hal için de geçerli olduğu görülür.

Rayleigh yayılım fonksiyonu,

$$R = \frac{1}{2} P \tag{4.138}$$

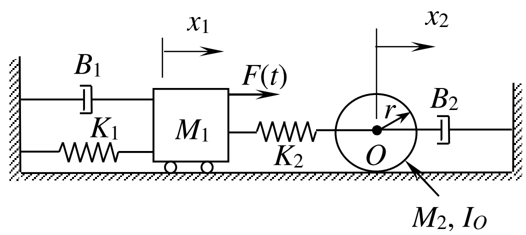
olarak tanımlanır. Q_{Fi} terimi Rayleigh fonksiyonu cinsinden yazılır ve Lagrange denkleminin sol tarafına taşınırsa, viskoz sönümleyiciye sahip sistemler için Lagrange denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad (i = 1,......, N) \tag{4.139}$$

Örnek 1:

Şekil 4.17'deki sistemde kütle dağılımı muntazam olan bir silindir yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Lagrange denklemini kullanarak sistem dinamiğini tanımlayan denklemlerin bulunması istenmektedir.

Sistem iki serbestlik dereceli ve holonomiktir. Sistemin genelleştirilmiş koordinatları olarak x_1 ve x_2 seçilsin.



Şekil 4.17

Kinetik ko-enerji:

$$T^* = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I_O\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 \tag{4.140}$$

Potansiyel Enerji:

$$V = \frac{1}{2}K_1 x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2 \tag{4.141}$$

Lagrange Fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I_O\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1 x_1^2 - \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2 \tag{4.142}$$

Genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_{x1} = F(t) \qquad\qquad Q_{x2} = 0 \tag{4.143}$$

Rayleigh Fonksiyonu:

$$R = \frac{1}{2}B_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}B_2\dot{x}_2^2 \tag{4.144}$$

x_1 *için Lagrange denklemi:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = Q_{x1} \tag{4.145}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[M_1\dot{x}_1\right]-\left[-K_1x_1-K_2(x_1-x_2)\right]+B_1\dot{x}_1=F(t) \tag{4.146}$$

ya da,

$$M_1\ddot{x}_1+B_1\dot{x}_1+(K_1+K_2)x_1-K_2x_2=F(t) \tag{4.147}$$

x_2 için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial\dot{x}_2}=Q_{x2} \tag{4.148}$$

ya da,

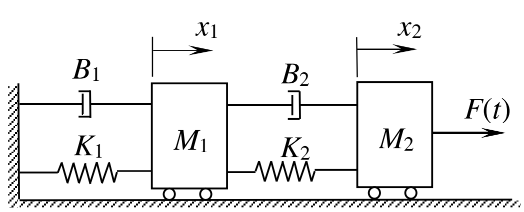
$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{I_O}{r^2}+M_2\right)\dot{x}_2\right]-K_2(x_1-x_2)+B_2\dot{x}_2=0 \tag{4.149}$$

ya da,

$$\left(\frac{I_O}{r^2}+M_2\right)\ddot{x}_2+B_2\dot{x}_2+K_2x_2-K_2x_1=0 \tag{4.150}$$

Örnek 2:

Şekil 4.18'deki sistemin dinamiğini tanımlayan denklemlerin Lagrange denklemini kullanarak bulunması istenmektedir.



Şekil 4.18

Sistem iki serbestlik dereceli ve holonomiktir. Sistemin genelleştirilmiş koordinatları olarak x_1 ve x_2 seçilsin.

Kinetik ko-enerji:

$$T^*=\frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 \tag{4.151}$$

Potansiyel Enerji:

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2 \tag{4.152}$$

Lagrange Fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = T^* - V = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 x_1^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2 \tag{4.153}$$

Genelleştirilmiş kuvvetler:

$$Q_{x1} = 0 \qquad\qquad Q_{x2} = F(t) \tag{4.154}$$

Rayleigh Fonksiyonu:

$$R = \frac{1}{2} B_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} B_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tag{4.155}$$

x_1 *için Lagrange denklemi:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = Q_{x1} \tag{4.156}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[M_1 \dot{x}_1\right] - \left[-K_1 x_1 - K_2 (x_1 - x_2)\right] + B_1 \dot{x}_1 + B_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \tag{4.157}$$

ya da,

$$M_1 \ddot{x}_1 + (B_1 + B_2)\dot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 - B_2 \dot{x}_2 - K_2 x_2 = 0 \tag{4.158}$$

x_2 *için Lagrange denklemi:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = Q_{x2} \tag{4.159}$$

ya da,

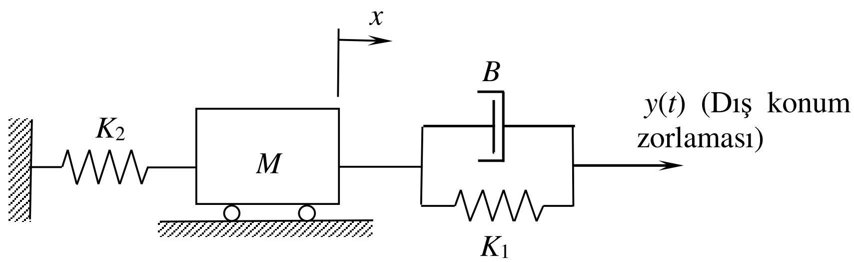
$$\frac{d}{dt}\left[M_2 \dot{x}_2\right] - K_2 (x_1 - x_2) - B_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F(t) \tag{4.160}$$

ya da,

$$M_2 \ddot{x}_2 + B_2 \dot{x}_2 + K_2 x_2 - B_2 \dot{x}_1 - K_2 x_1 = F(t) \tag{4.161}$$

Örnek 3:

Daha önce Bölüm 2'de Hamilton prensibini uygulayarak çözülen ve aşağıda Şekil 4.19'da verilen sistemin dinamik denklemlerini bu sefer Lagrange denklemini kullanarak tekrar elde edelim.



Şekil 4.19

Sistem bir serbestlik dereceli ve holonomiktir. Genelleştirilmiş koordinat olarak x seçilsin. Bu sistemde $y(t)$ kuvvet zorlaması olmadığından genelleştirilmiş kuvvetlere katkısı yoktur; sınırlayıcı şart olarak probleme girer.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_1\left[x - y(t)\right]^2 - \frac{1}{2}K_2 x^2 \tag{4.162}$$

Genelleştirilmiş kuvvet:

$$Q_x = 0 \tag{4.163}$$

Rayleigh Fonksiyonu:

$$R = \frac{1}{2}B\left[\dot{x} - \dot{y}(t)\right]^2 \tag{4.164}$$

x *için Lagrange denklemi:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = Q_x \tag{4.165}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[M\dot{x}\right] + \left[K_1(x - y(t)\right] + K_2 x + B\left[\dot{x} - \dot{y}(t)\right] = 0 \tag{4.166}$$

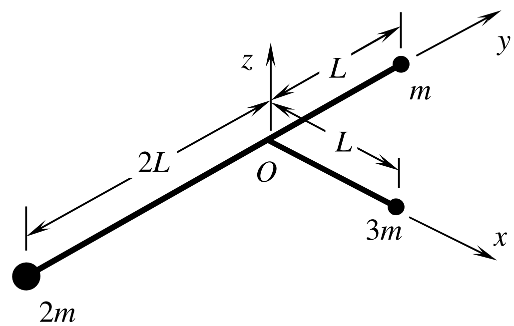
ya da,

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + (K_1 + K_2)x = B\dot{y}(t) + K_1 y(t) \tag{4.167}$$

PROBLEMLER

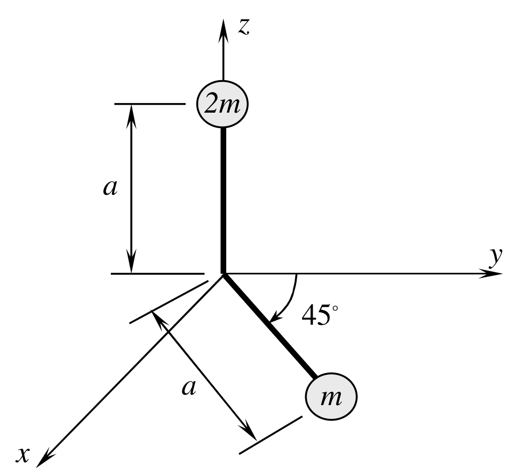
Problem 4.1

Aşağıda verilen gövdenin, verilen koordinat eksenlerine göre atalet matrisini bulun. Gövdenin asal yönlerini bulun. Verilen eksenlerden hangileri asaldır?



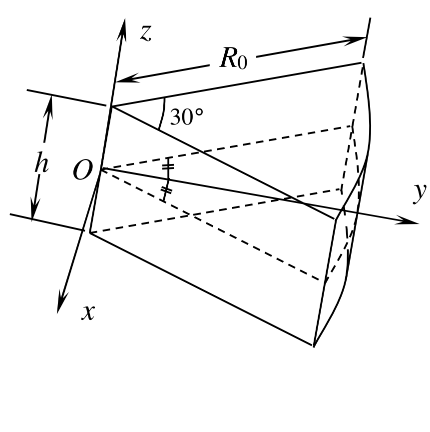
Problem 4.2

Şekilde verilen gövdede kollar kütlesizdir. Noktasal olan kütlelerden biri z ekseni üzerinde, diğeri ise xy düzlemi üzerindedir. Verilen eksenlere göre bu gövdenin atalet matrisini bulun. Asal eksenleri bulun ve asal eksenlere göre atalet matrisini yazın.



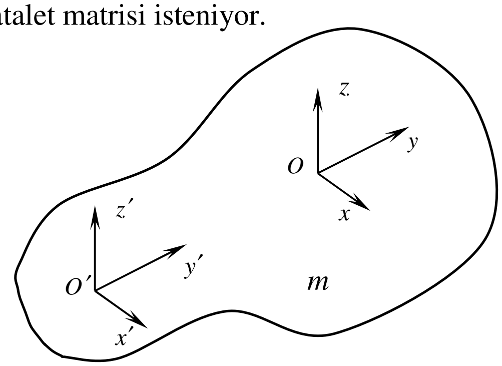
Problem 4.3

Aşağıda verilen gövdenin, verilen koordinat eksenlerine göre atalet matrisini bulun. Verilen eksenlerden hangileri asaldır?



Problem 4.4

Bir gövde üzerinde, orijinleri sırasıyla O ve O' olan, paralel eksenli iki koordinat sistemini düşünün. O'ya tekabül eden atalet matrisi $[I]$ biliniyor. O' noktasına tekabül eden $[I]'$ atalet matrisi isteniyor.



Not: O noktası O' noktasına göre

$x' = x + a$, $y' = y + b$ ve

$z' = z + c$ olacak şekilde

kaymıştır.

$$[I]' = [I] + m\begin{bmatrix} 2by_c + 2cz_c & -(bx_c + ay_c) & -(cx_c + az_c) \\ -(bx_c + ay_c) & 2cz_c + 2ax_c & -(cy_c + bz_c) \\ -(cx_c + az_c) & -(cy_c + bz_c) & 2ax_c + 2by_c \end{bmatrix}$$

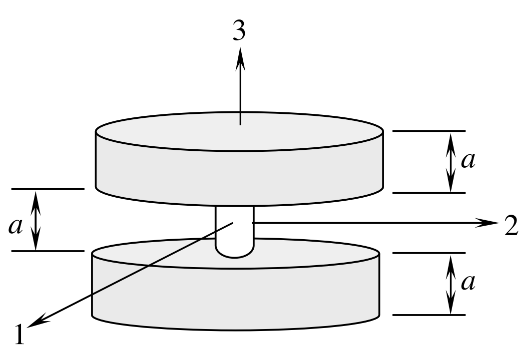
$$+ m\begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterin. Burada x_c, y_c, z_c terimleri, ağırlık merkezinin xyz-koordinat sistemine göre koordinatlarıdır. O noktası ağırlık merkezi olursa sonuç ne olur?

Problem 4.5

Aşağıdaki gövdede disklerin yarıçapları $2a$, herbir diskin kütlesi muntazam dağılmış ve M'dir. Diskler kütlesiz olan bir aksla birbirine rijit olarak bağlıdır. 1, 2, 3 ile gösterilen eksenler ağırlık merkezi G'den geçen asal eksenlerdir. I_1, I_2, I_3 atalet momentlerini bulun. $\vec{\omega} = \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3$ için $\vec{H}_G$'yi bulun.

.

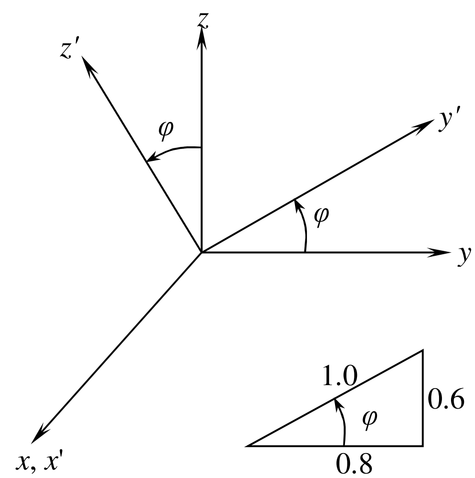


Problem 4.6

Bir gövdenin şekilde görülen *xyz* eksenlerine göre atalet matrisi aşağıdaki gibidir.

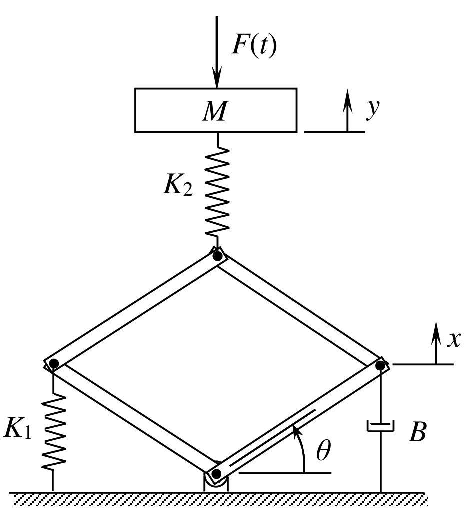
$$[I]=\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

x'y'z' eksenlerine göre atalet matrisini bulun.



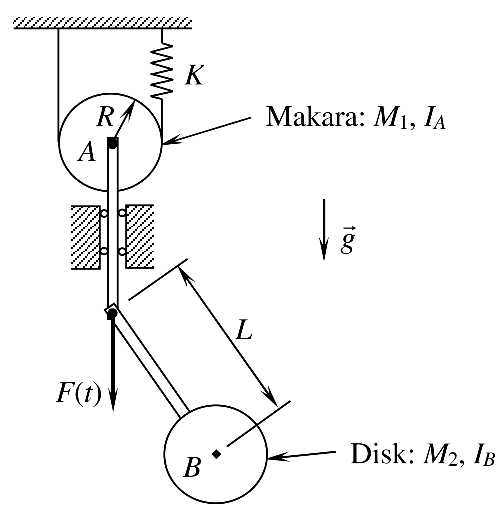
Aşağıdaki sistemlerin dinamik denklemlerini Lagrange denklemini kullanarak elde edin.

Problem 4.7



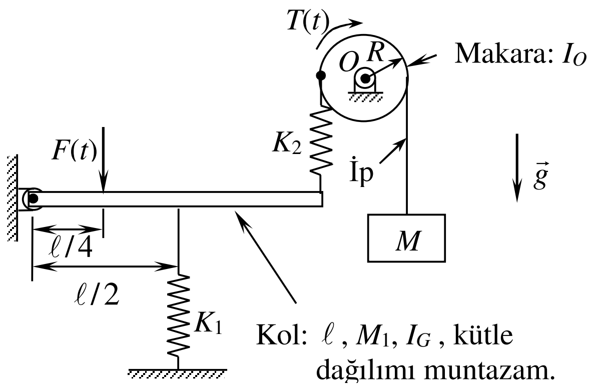
Yerçekimi yok.
Kollar: L, m, I_G , kütle dağılımı muntazam.
Statik denge konumunda $\theta = 30^\circ$
x ve y'yi genelleştirilmiş koordinatlar alın.

Problem 4.8

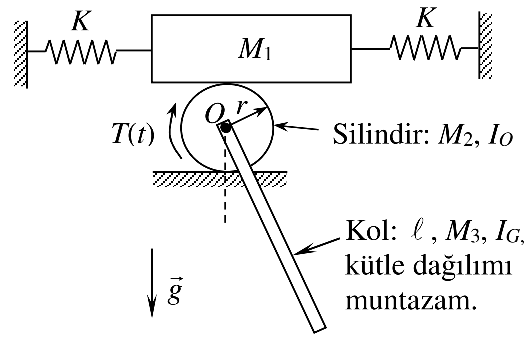


Kollar kütlesizdir.
A ve B ağırlık merkezleridir.

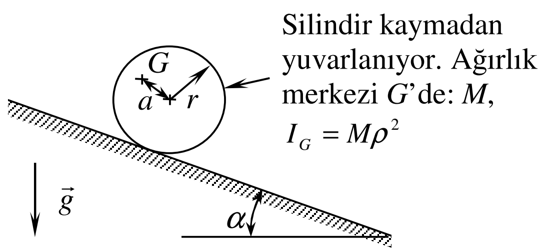
Problem 4.9



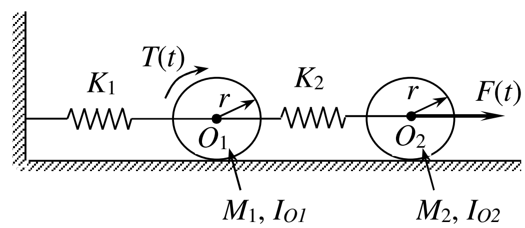
Problem 4.10



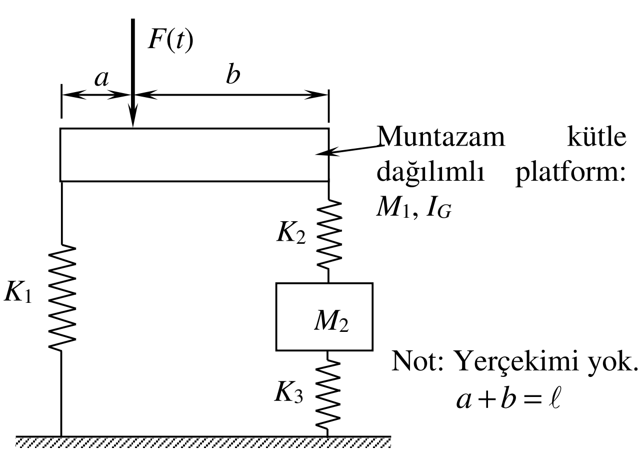
Problem 4.11



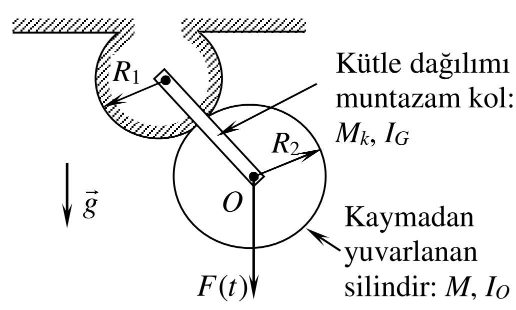
Problem 4.12



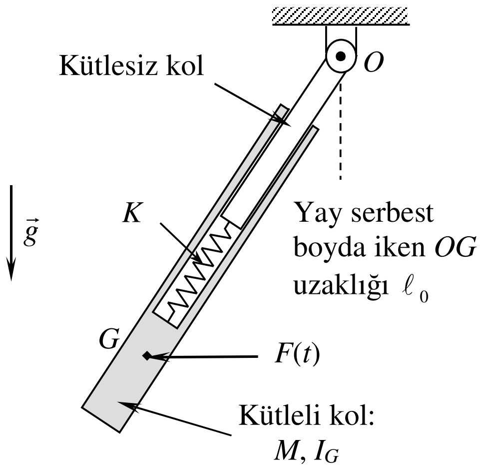
Problem 4.13



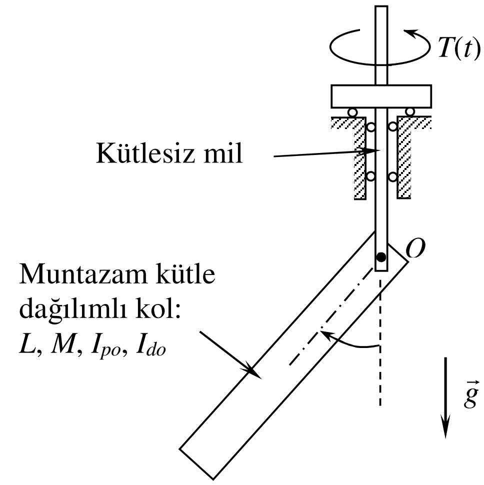
Problem 4.14



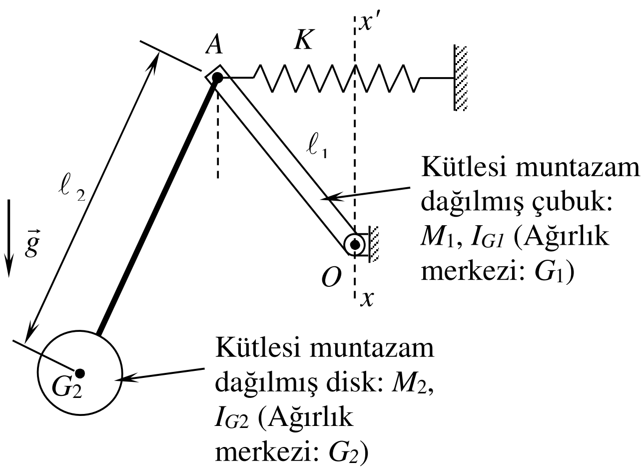
Problem 4.15



Problem 4.16

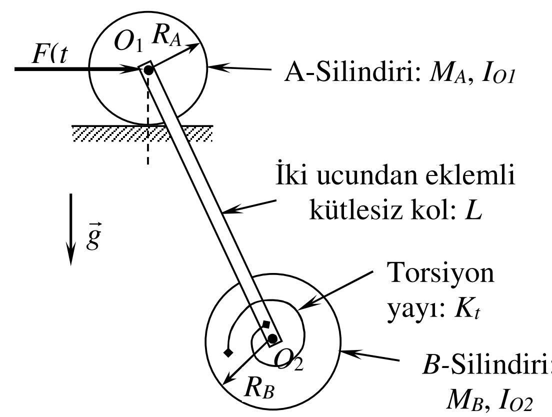


Problem 4.17



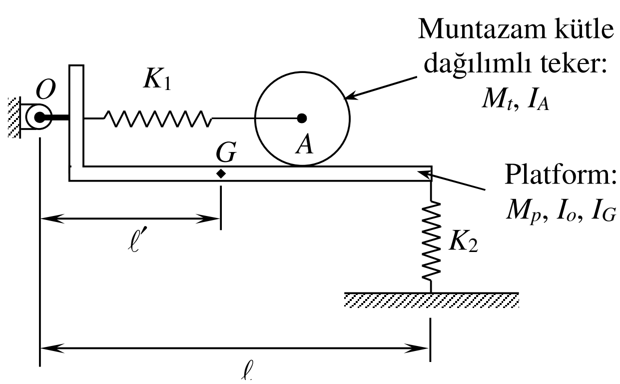
Not: Yay serbest boyda iken A noktası xx' üzerindedir.

Problem 4.18



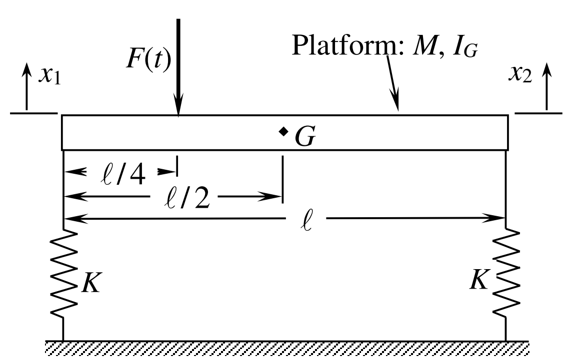
Silindir kütleleri muntazam dağılıdır. A-silindiri kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.19



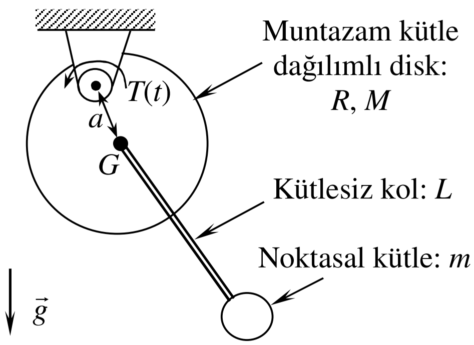
Not: Platform yataydan az ayrılıyor. Teker kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.20

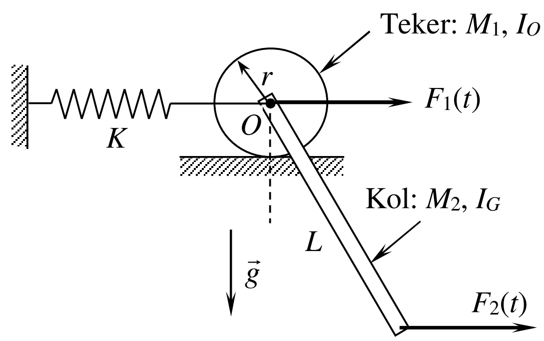


Not: Yerçekimi yok. x_1 ve x_2'yi kullanın.

Problem 4.21

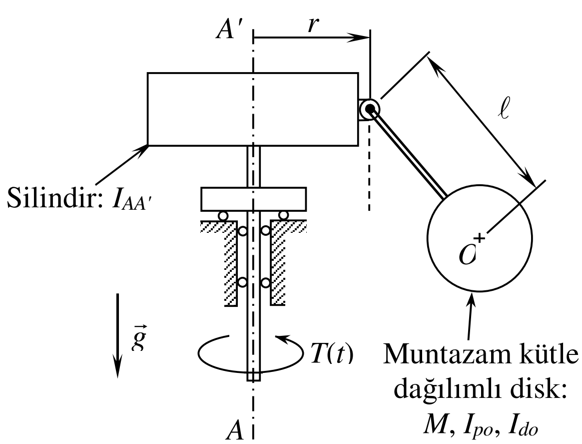


Problem 4.22



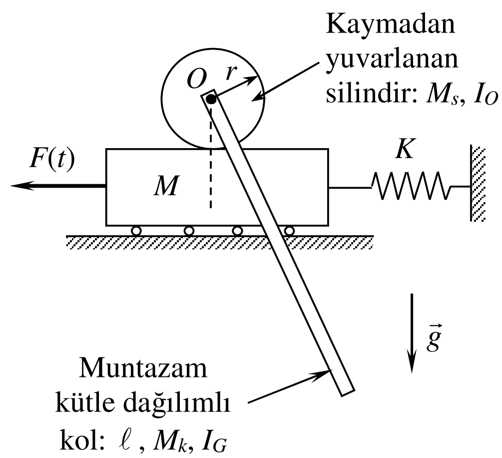
Not: Teker ve kolun kütle dağılımları muntazamdır. Teker kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.23

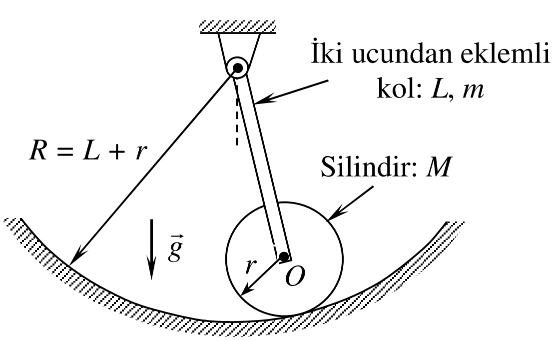


Not: Kol kütlesizdir.

Problem 4.24

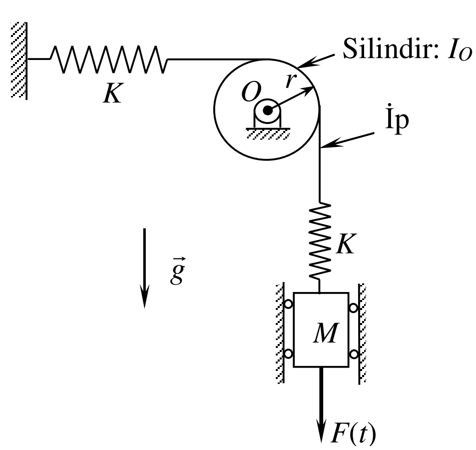


Problem 4.25

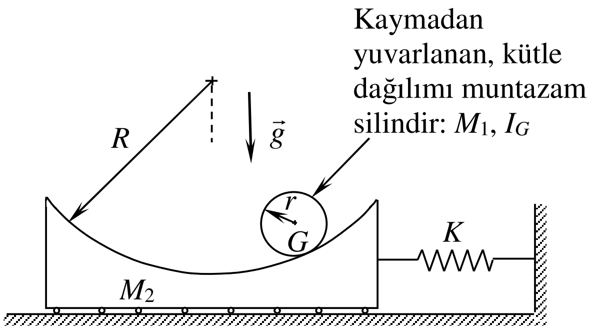


Not: Kol ve silindirin kütle dağılımları muntazamdır. Silindir kaymadan yuvarlanıyor.

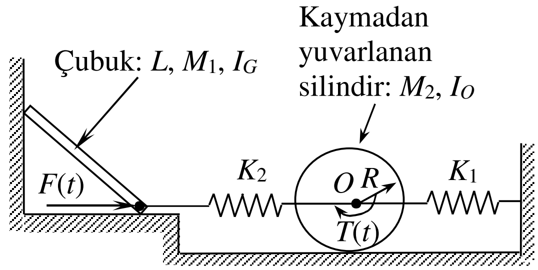
Problem 4.26



Problem 4.27

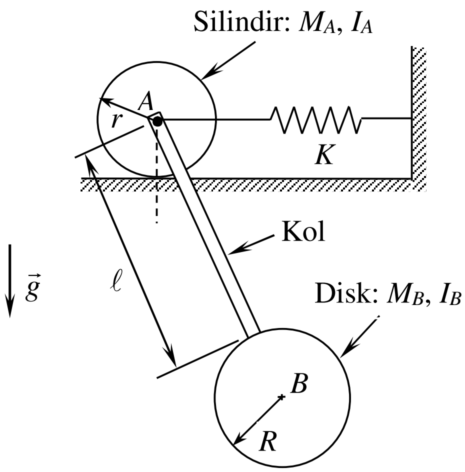


Problem 4.28



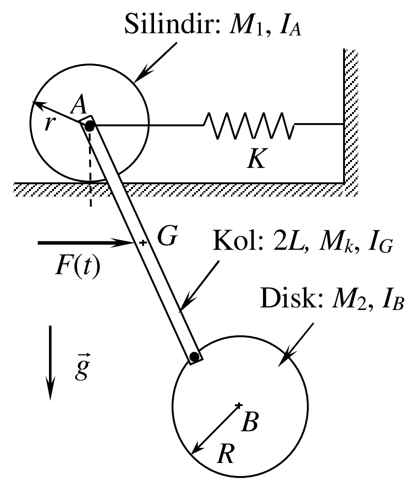
Not: Çubuk ve silindirin kütle dağılımları muntazam. Çubuğun uçları sürtünmesiz ve daima duvarlarla temas halindedir.

Problem 4.29



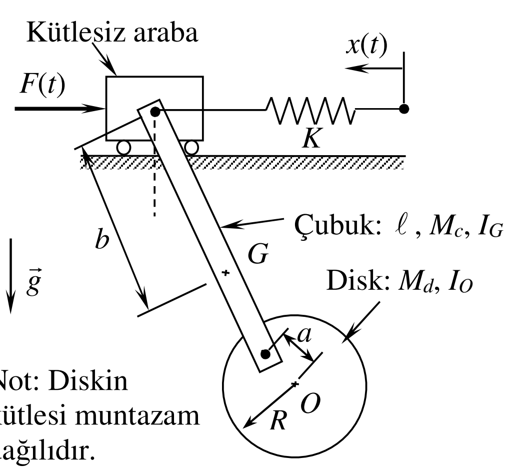
Not: Silindir ve diskin kütleleri muntazam dağılıdır. Silindir kaymadan yuvarlanıyor. Kol kütlesizdir.

Problem 4.30



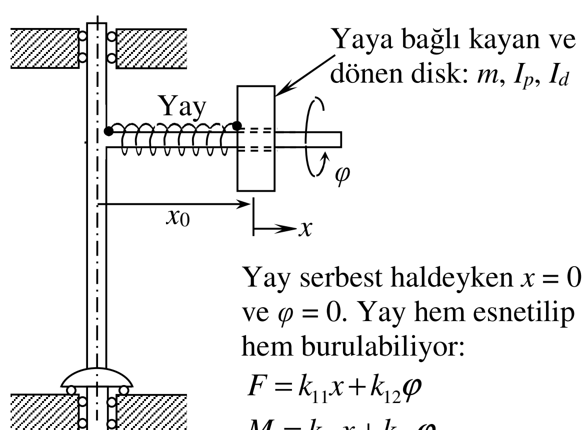
Silindir, kol ve disk kütleleri muntazam dağılıdır. Silindir kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.31



Not: Diskin kütlesi muntazam dağılıdır.

Problem 4.32

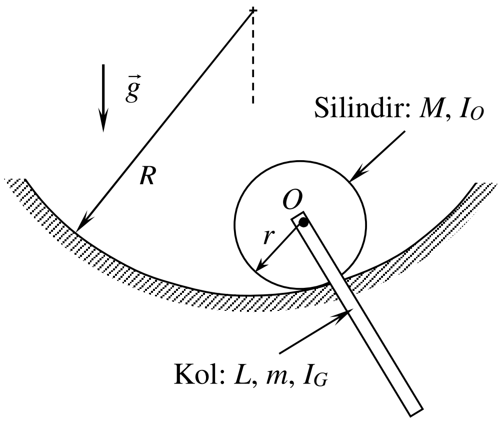


Yay serbest haldeyken $x = 0$ ve $\varphi = 0$. Yay hem esnetilip hem burulabiliyor:

$$F = k_{11}x + k_{12}\varphi$$

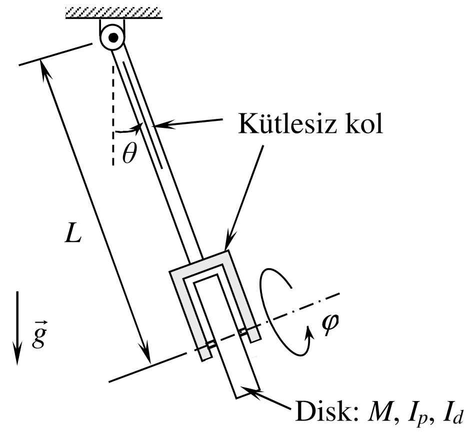
$$M = k_{12}x + k_{22}\varphi$$

Problem 4.33



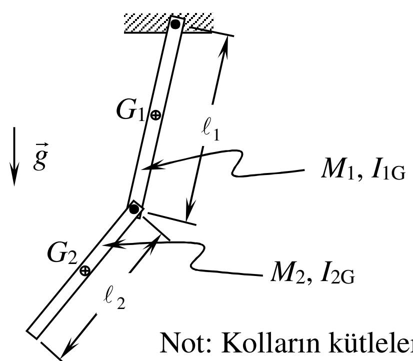
Not: Kol ve silindirin kütleleri muntazam dağılıdır.Silindir kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.34



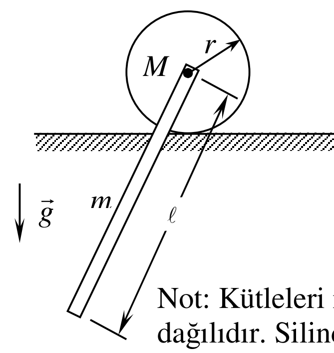
Not: Diskin kütlesi muntazam dağılıdır. θ ve φ'yi kullanın.

Problem 4.35



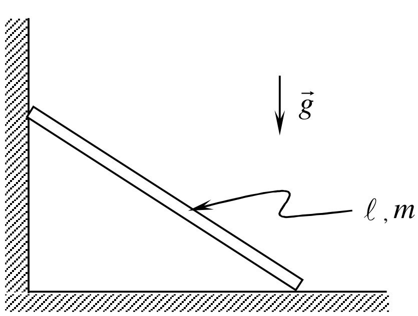
Not: Kolların kütleleri muntazam dağılıdır.

Problem 4.36



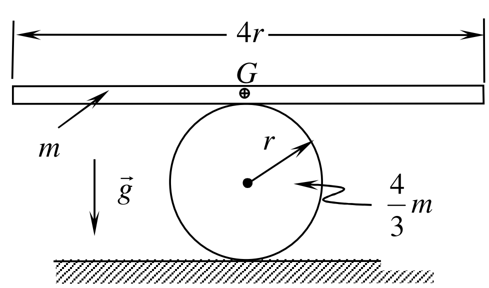
Not: Kütleleri muntazam dağılıdır. Silindir kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.37



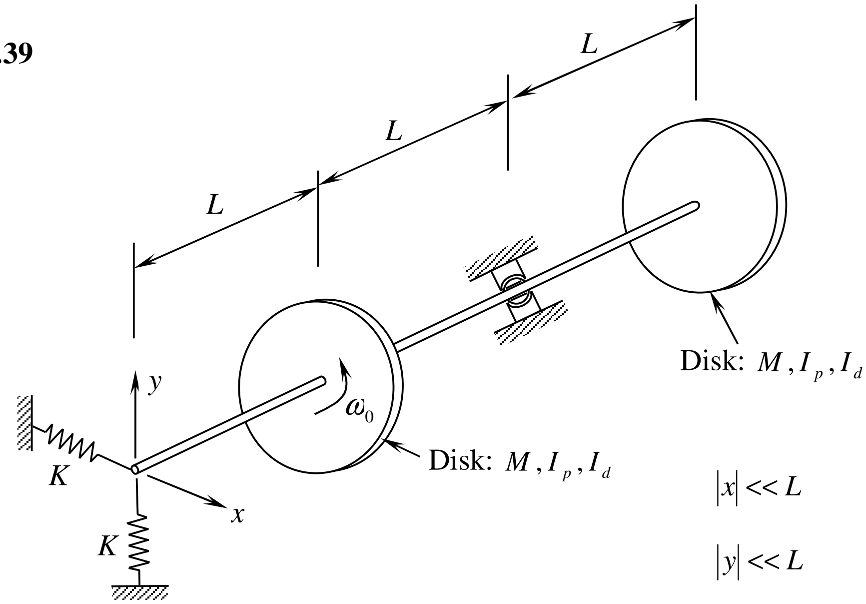
Not: Çubuğun kütlesi muntazam dağılı, uçları sürtünmesiz ve duvarlarla daima temas halindedir.

Problem 4.38

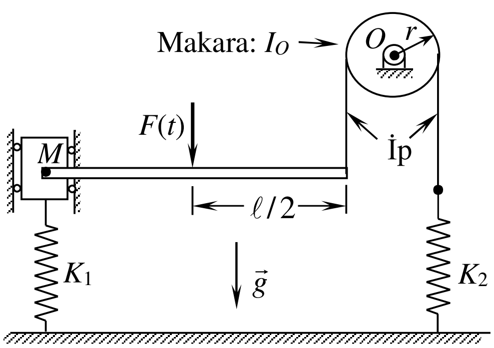


Kayma yok. Görülen konum etrafında küçük hareketler kabul edin. Sistemin kararlılığını da inceleyin.

Problem 4.39

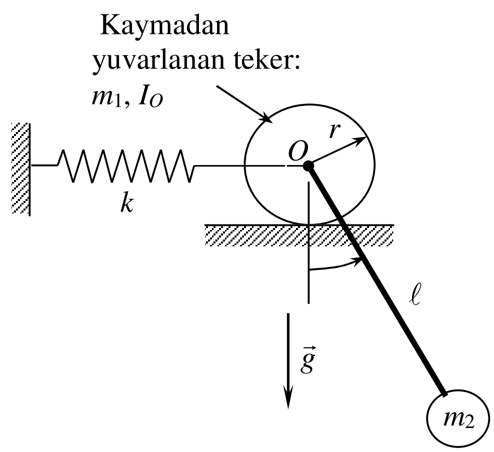


Problem 4.40

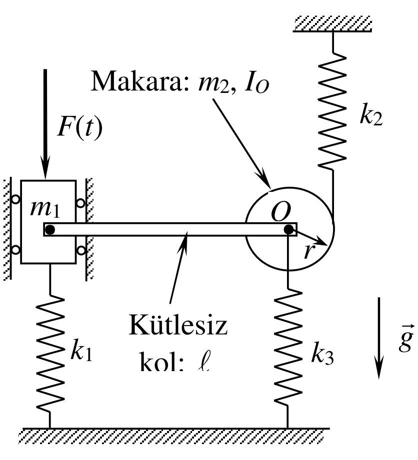


Not: Kol yataydan küçük açılarla ayrılıyor, kütlesiz ve ℓ uzunluğundadır.

Problem 4.41

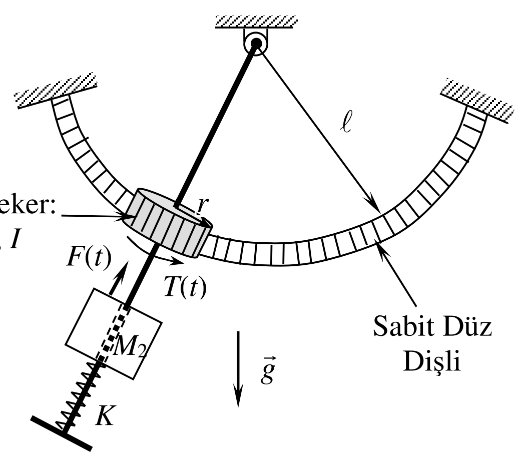


Problem 4.42

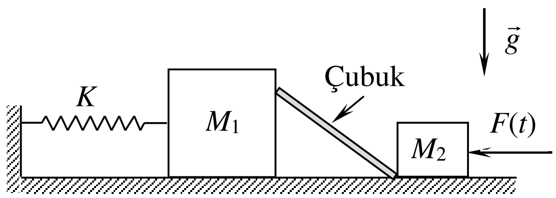


Kol yataydan küçük açılarla ayrılıyor.

Problem 4.43

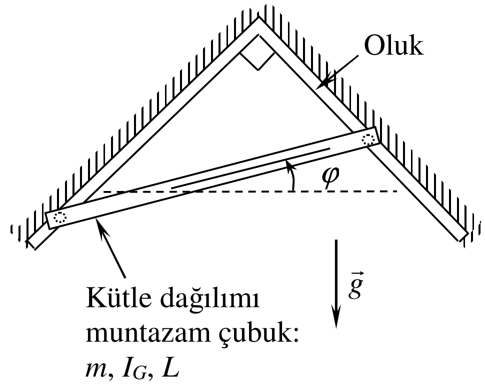


Problem 4.44

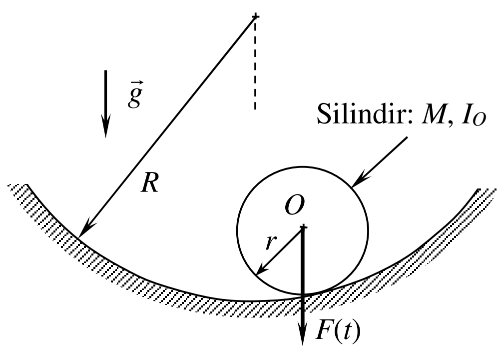


Not: Sistemde sürtünme yok. Çubuğun kütle dağılımı muntazam, boyu ℓ, kütlesi m, ağırlık merkezine göre atalet momenti I_G. Çubuk, M_1 ve M_2 kütleleri ve yatay düzlemle daima temas halindedir.

Problem 4.45

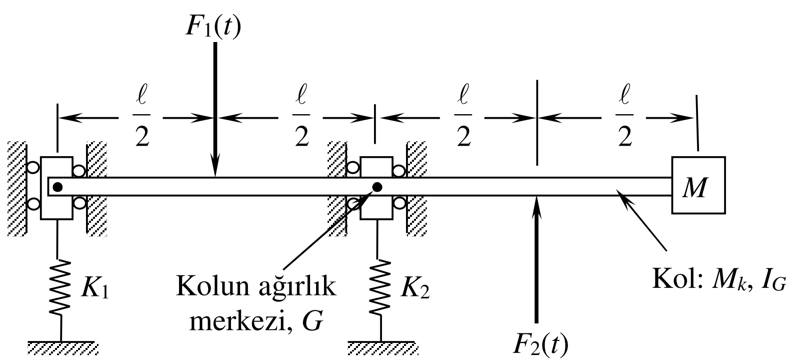


Problem 4.46



Not: Silindirin kütlesi muntazam dağılıdır. Silindir kaymadan yuvarlanıyor.

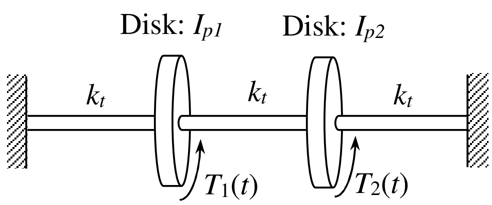
Problem 4.47



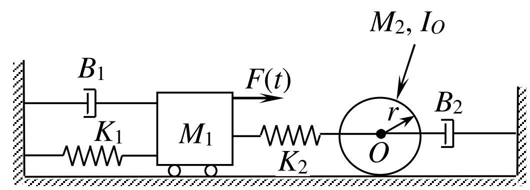
Not: Yerçekimi yoktur.

Aşağıdaki sistemlerin dinamik denklemlerini Hamilton Prensibini kullanarak elde edin.

Problem 4.48

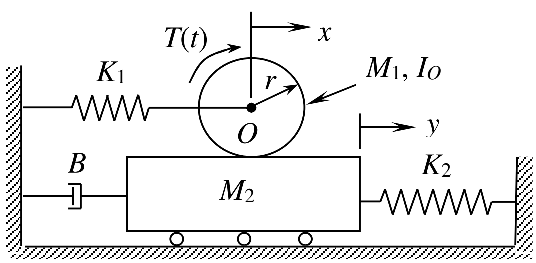


Problem 4.49



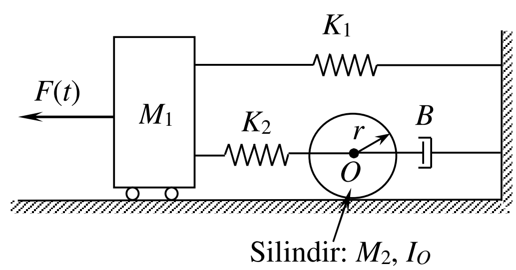
Not: Muntazam kütle dağılımlı silindir kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.50



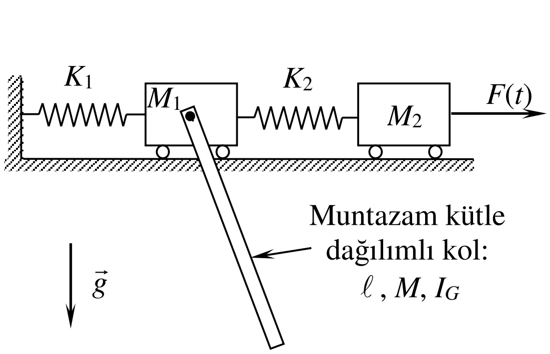
Not: Muntazam kütle dağılımlı silindir kaymadan yuvarlanıyor. x ve y değişkenlerini kullanın.

Problem 4.51

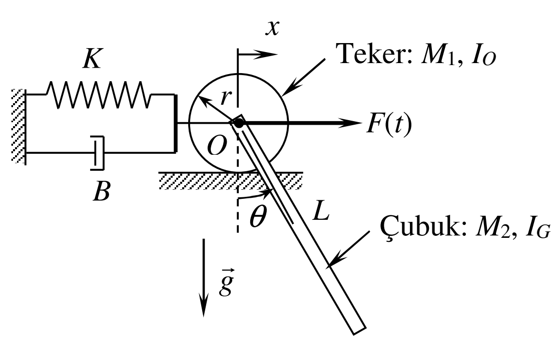


Not: Muntazam kütle dağılımlı silindir kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.52

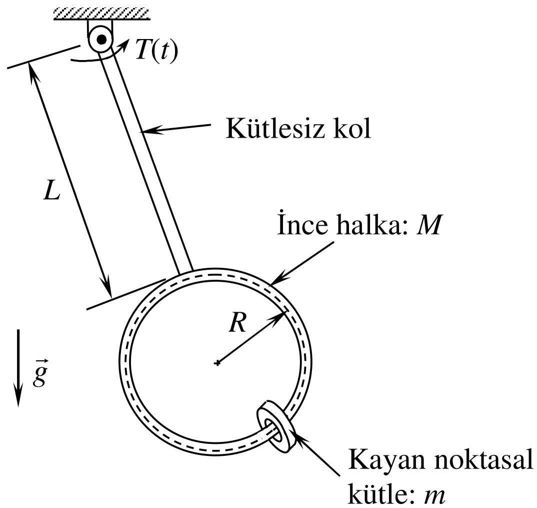


Problem 4.53

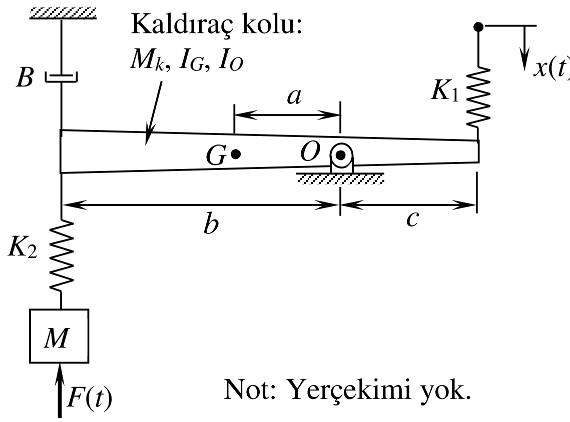


Teker ve çubuğun kütle dağılımları muntazamdır. x ve θ değişkenlerini kullanın.

Problem 4.54

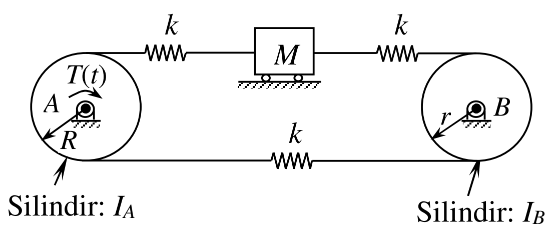


Problem 4.55

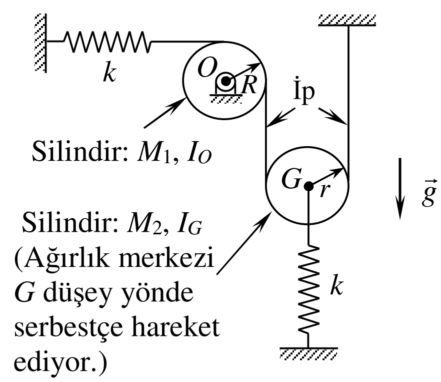


Not: Yerçekimi yok.

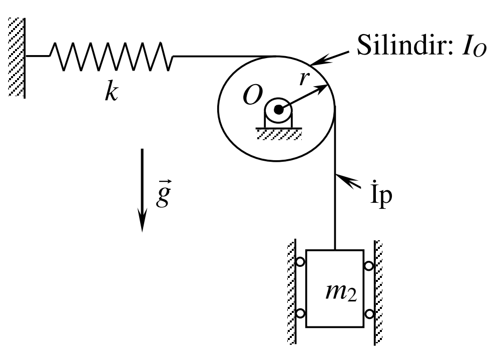
Problem 4.56



Problem 4.57

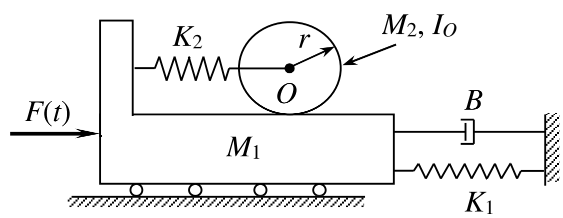


Problem 4.58



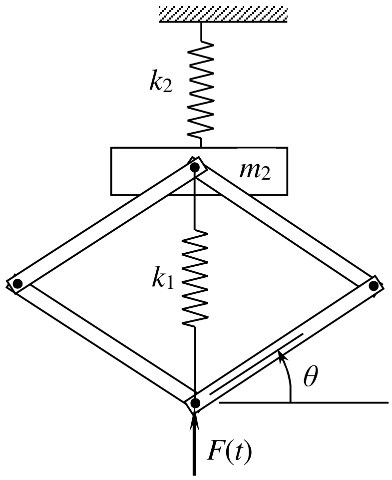
Not: Lagrange çarpanlarını kullanın.

Problem 4.59



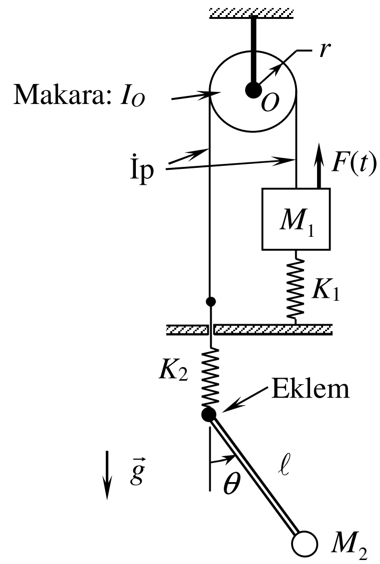
Teker kütlesi muntazam dağılıdır.
Teker kaymadan yuvarlanıyor.

Problem 4.60

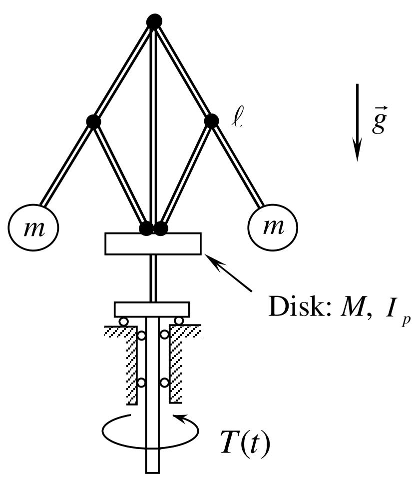


Yerçekimi yok.
Kollar: L, m_1, I_G , kütle dağılımı muntazam.
Statik denge konumunda $\theta = 30^\circ$

Problem 4.61



Problem 4.62



Not: Kollar ve mil kütlesiz. Uzun kollar ℓ uzunluğunda. Kısa kollar $\ell/2$ uzunluğunda ve uzun kolların ortasına eklemle bağlı. Diğer eklemler düşey dönme ekseni üzerindedir. Disk eksen boyunca düşey yönde kayabiliyor.

Problem 4.63

Aşağıdaki sistemlerin dinamik denklemlerini Lagrange denklemiyle bulun.

a) Problem 2.11'deki sistem,

b) Problem 2.17'deki sistem,

c) Problem 2.14'deki sistem (tekeri kütleli kabul edin).

5

RİJİT GÖVDELERİN 3-BOYUTLU HAREKETİ

5.1 Euler Açıları

Rijit bir gövdenin uzaydaki hareketi için $\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$ denklemini genellemek mümkün değildir. Zira θ gibi bir açısal konum tanımlanması mümkün değildir. Bu yüzden açısal konumun farklı bir biçimde tanımlanması ve açısal hızın bu tanımlamayla ilişkilendirilmesi gereklidir. Bu amaçla Euler açıları kullanılır. Euler açıları rijit bir gövdenin yönelimini bir atalet koordinat sistemine göre tanımlamaya yarar.

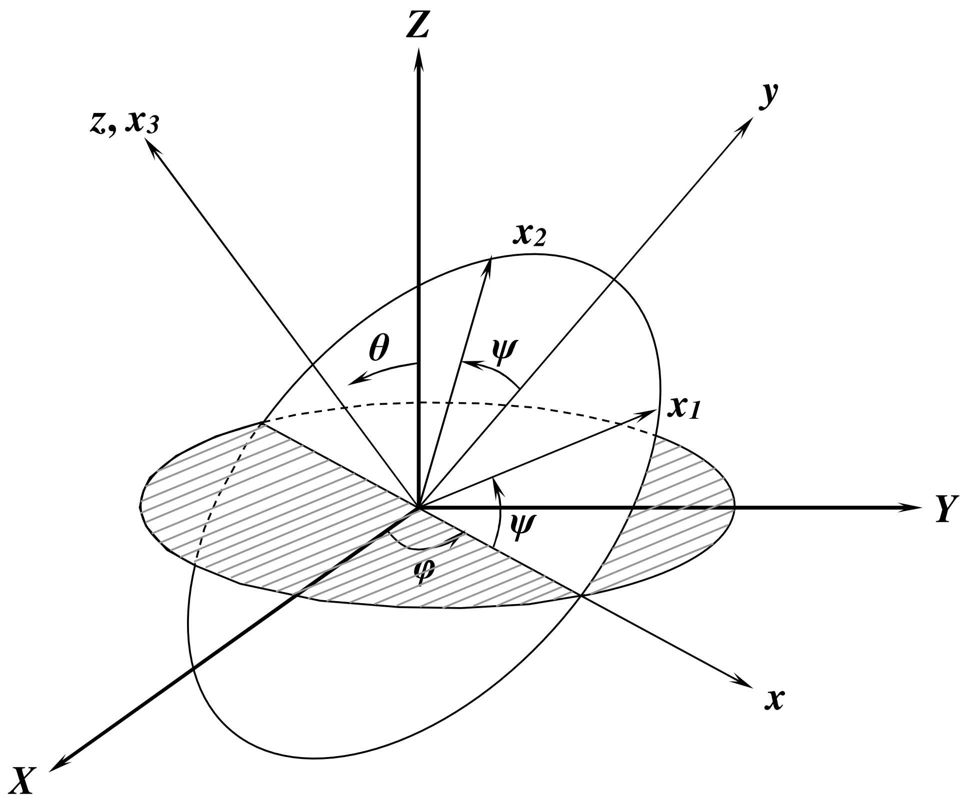
Şekil 5.1'deki rijit gövdenin ağırlık merkezi koordinat sistemlerinin ortak orijininde olsun. *XYZ*-koordinat sistemi, atalet koordinat sistemini (referans sistem); $x_1x_2x_3$-eksen takımı ise rijit gövde içinde sabit olan, gövdenin asal eksenleridir. Asal eksenlerin atalet koordinat sistemine göre yönelimini tanımlamak için başlangıçta x_1 ekseninin X ekseni üzerinde, x_2 ekseninin Y ekseni üzerinde, x_3 ekseninin ise Z ekseni üzerinde olduğunu kabul edelim. $x_1x_2x_3$-eksen takımını bu başlangıç durumundan Şekil 5.1'de görülen duruma taşımak için $x_1x_2x_3$-eksen takımınına sırasıyla aşağıdaki dönme hareketlerini uygulayalım:

1. $x_1x_2x_3$-eksen takımı önce Z ekseni etrafında φ açısı kadar döndürülsün. Bu dönme hareketi sonunda x_3 ekseni hala Z ekseni üzerinde kalırken, x_1 ekseni x ekseni üzerine gelir.
2. Daha sonra $x_1x_2x_3$-eksen takımı x ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülsün. Bu hareket sonunda x_1 ekseni x ekseni üzerinde kalırken, x_2 ekseni y ekseni üzerine, x_3 ekseni ise şekilde görülen z ekseni üzerine gelir.
3. Son olarak $x_1x_2x_3$-eksen takımı z ekseni etrafında ψ açısı kadar döndürülsün. Bu hareket sonunda $x_1x_2x_3$-eksen takımı şekilde görülen son konumuna erişir.

İleride işlenecek konuları anlama açısından, Şekil 5.1'deki eksenlerin aşağıdaki özelliklerini vurgulamakta yarar vardır:

1. Şekil 5.1'deki *XYZ*-, *xyz*- ve $x_1x_2x_3$-eksen takımları ortagonal takımlardır; yani kendi eksenleri birbirine diktir.
2. x, x_1, y ve x_2 eksenleri aynı düzlem üzerinde (beyaz oval düzlem); X, x ve Y eksenleri aynı düzlem üzerinde (taralı düzlem); z, x_3, Z ve y eksenleri aynı düzlem üzerindedir.

3. Z ekseni kendisine dik olan düzlem (taralı düzlem) üzerindeki X, x ve Y eksenlerine diktir.
4. x ekseni kendisine dik olan düzlem üzerindeki z, x_3, Z ve y eksenlerine diktir.
5. z, x_3 ortak eksenleri kendilerine dik olan düzlem (beyaz oval düzlem) üzerindeki x, x_1, y ve x_2 eksenlerine diktir.



Şekil 5.1

Şekil 5.1'deki gibi tanımlanan θ, φ ve ψ açılarına Euler açıları denir. Bu açıların değerleri bilindiğinde $x_1 x_2 x_3$ eksen takımının yönelimi, XYZ takımına göre belirlenmiş olur. Euler açıları bir gövdenin yönelimini belirleyen genelleştirilmiş koordinatlar olarak seçilebilir.

5.2 Açısal Hız Vektörünün Euler Açıları Cinsinden İfadesi

Net yanal kuvvetler uygulanmayan bir gövdenin kinetik ko-enerjisinin yazılabilmesi için gövdenin o andaki açısal hız vektörü $\vec{\omega}$'nın bilinmesine gerek vardır. $\vec{\omega}$ vektörünün bileşenleri kullanılan koordinat sistemine bağlı olarak, Euler açılarının kendileri ve türevleri cinsinden (θ, φ, ψ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$) aşağıdaki gibi farklı biçimlerde yazılabilir. Bunun için önce çeşitli koordinat eksenleri boyunca aşağıdaki birim vektörler tanımlansın:

<u>Eksenler</u>	<u>Birim Vektörler</u>
X, Y, Z	$\vec{u}_X$, $\vec{u}_Y$, $\vec{u}_Z$
x, y, z	$\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$
x_1, x_2 , x_3	$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$

Şekil 5.1'den görüldüğü gibi, θ açısının değişme hızı $\dot{\theta}$, x ekseni yönünde bir vektördür. Benzer biçimde, φ açısının değişme hızı $\dot{\varphi}$, Z yönünde bir vektör; ψ açısının değişme hızı $\dot{\psi}$ ise z (ya da x_3) yönünde bir vektördür. Bu üç bileşenin toplamı aşağıdaki denklemde verildiği gibi $\vec{\omega}$ vektörünü verir.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{u}_x + \dot{\varphi}\,\vec{u}_Z + \dot{\psi}\,\vec{u}_3 \tag{5.1}$$

Yukarıdaki denklemde $\vec{\omega}$ vektörü farklı koordinat sistemlerine ait karışık birim vektörler cinsinden yazılmıştır. Halbuki $\vec{\omega}$ vektörünün gövdenin asal eksenleri yönlerindeki bileşenler cinsinden ifade edilmesi, kinetik ko-enerjinin yazılmasında büyük kolaylık sağlar. Bunu yapmak için önce Şekil 5.1'den aşağıdaki denklemler yazılsın:

$$\vec{u}_Z = \cos\theta\,\vec{u}_3 + \sin\theta\,\vec{u}_y \tag{5.2}$$

$$\vec{u}_y = \sin\psi\,\vec{u}_1 + \cos\psi\,\vec{u}_2 \tag{5.3}$$

$$\vec{u}_x = \cos\psi\,\vec{u}_1 - \sin\psi\,\vec{u}_2 \tag{5.4}$$

Denklemler (5.2)-(5.4) denklem (5.1)'de yerine koyulursa, $\vec{\omega}$ vektörü gövdenin asal yönlerindeki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmiş olur:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= (\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi)\,\vec{u}_1 + (\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi)\,\vec{u}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{u}_3 \\ &= \omega_1\,\vec{u}_1 + \omega_2\,\vec{u}_2 + \omega_3\,\vec{u}_3\end{aligned} \tag{5.5}$$

5.3 Net Moment Uygulanmayan Rijit Bir Gövdenin Hareketi

Bu örnekte dış kuvvetler tarafından net bir moment uygulanmayan rijit bir gövdenin (örneğin hiç dış kuvvet uygulanmayan uzayda bir gövde, ya da sadece yer çekimi uygulanan bir gövde gibi) hareketi ayrıntılı olarak incelenecektir. Bu gövdenin ağırlık merkezinden geçen asal eksenlerine göre atalet momentleri I_1, I_2 ve I_3 olsun. Ayrıca $I_1 = I_2 \neq I_3$ olsun. (Bu şartın sağlanması için gövdenin eksenel simetriye sahip olması yeterlidir, ancak gerekli değildir.)

Gövdenin kinetik ko-enerjisi $\vec{\omega}$ vektörünün denklem (5.5)'de verilen asal yönlerdeki bileşenlerini kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T^* = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \tag{5.6}$$

$$T^* = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \tag{5.7}$$

Daha önce belirtildiği gibi, θ, φ ve ψ genelleştirilmiş koordinatlardır. Potansiyel enerji terimi olmadığı ve gövdeye net bir dış moment uygulanmadığından genelleştirilmiş kuvvetlerin sıfır olduğu dikkate alınırsa, θ, φ ve ψ için Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

θ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0 \tag{5.8}$$

ya da,

$$I_1\ddot{\theta} - I_1\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \tag{5.9}$$

φ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} = 0 \tag{5.10}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta\right] = 0 \tag{5.11}$$

ya da,

$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = Sabit \tag{5.12}$$

ψ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \psi} = 0 \tag{5.13}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\right] = \frac{d}{dt}\left[I_3\omega_3\right] = 0 \tag{5.14}$$

ya da,

$$I_3\omega_3 = Sabit \tag{5.15}$$

Lagrange denklemlerinden elde edilen denklemler (5.9), (5.11) ve (5.14)'ün θ'nın sabit olduğu bir çözümü bulunabilir. Bu çözümde,

$$\theta = \theta_0 = Sabit_1 \tag{5.16}$$

olsun. Bu durumda, denklemler (5.11) ve (5.14)'ün $\dot{\varphi} = Sabit_2$ ve $\dot{\psi} = Sabit_3$ şeklinde çözümler vereceği açıktır. Denklem (5.15) dikkate alınırsa, denklem (5.11)'den $\dot{\varphi}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos\theta_0} = Sabit_2 \tag{5.17}$$

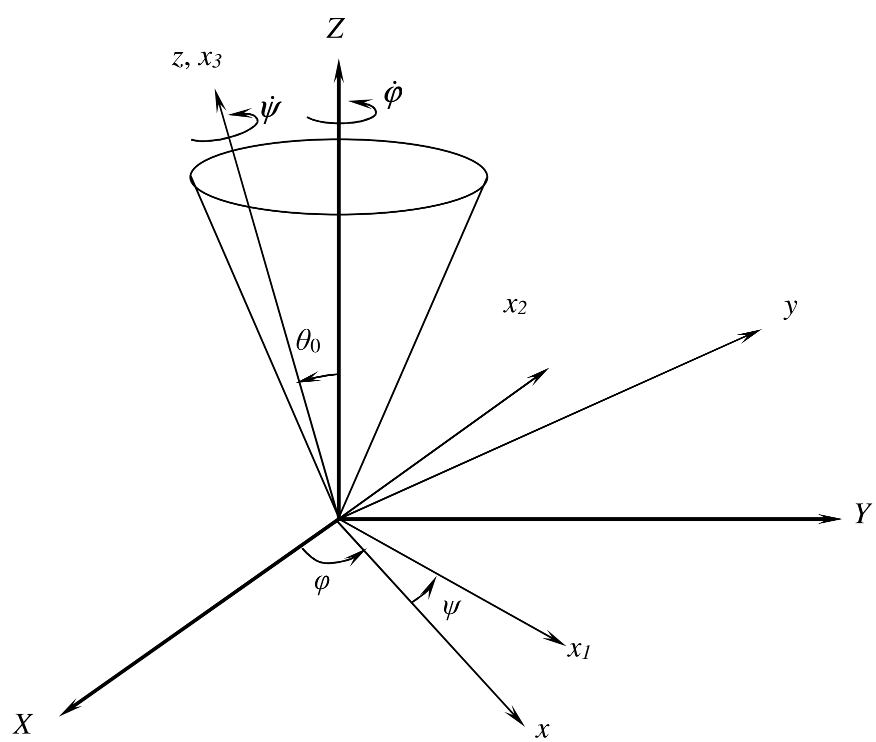
Denklem (5.9)'dan,

$$\dot{\psi} = \frac{(I_1 - I_3)\dot{\varphi}\cos\theta_0}{I_3} \tag{5.18}$$

ya da denklem (5.17) kullanılırsa, $\dot{\psi}$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{\psi} = \omega_3 \frac{I_1 - I_3}{I_1} \tag{5.19}$$

Denklemler (5.16), (5.17) ve (5.19) tarafından tanımlanan çözüm, x_3 ekseninin uzayda sabit olan Z ekseniyle sabit bir θ_0 açısı yaptığını ve Z ekseni etrafında sabit bir $\dot{\varphi}$ açısal hızla döndüğünü göstermektedir. (x_3 ekseni Z etrafında bir koni çizer.) Aynı anda, x_1 ve x_2 eksenleri ile bunların içine gömülü olduğu rijit gövde ise x_3 ekseni etrafında sabit bir $\dot{\psi}$ açısal hızıyla dönmektedir. (Şekil 5.2)



Şekil 5.2

Diğer yandan denklem (5.1)’den,

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{u}_x + \dot{\varphi}\,\vec{u}_Z + \dot{\psi}\,\vec{u}_3 = \dot{\varphi}\,\vec{u}_Z + \dot{\psi}\,\vec{u}_3 \tag{5.20}$$

elde edilir. Yani $\vec{\omega}$ vektörünün sadece Z ve x_3 yönlerinde bileşenleri vardır. O halde $\vec{\omega}$ vektörü daima x_3 ve Z ile aynı düzlemde kalır. Şekil 5.3’de $\vec{\omega}$ vektörü ve $\vec{\omega}$ vektörünün farklı biçimde ayrılmış bileşenleri görülmektedir. Bu şekilden aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\vec{\omega} = \omega_3\vec{u}_3 + \omega_y\,\vec{u}_y \tag{5.21}$$

$$\vec{\omega}_y = \omega_y\,\vec{u}_y = \omega_1\,\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 \tag{5.22}$$

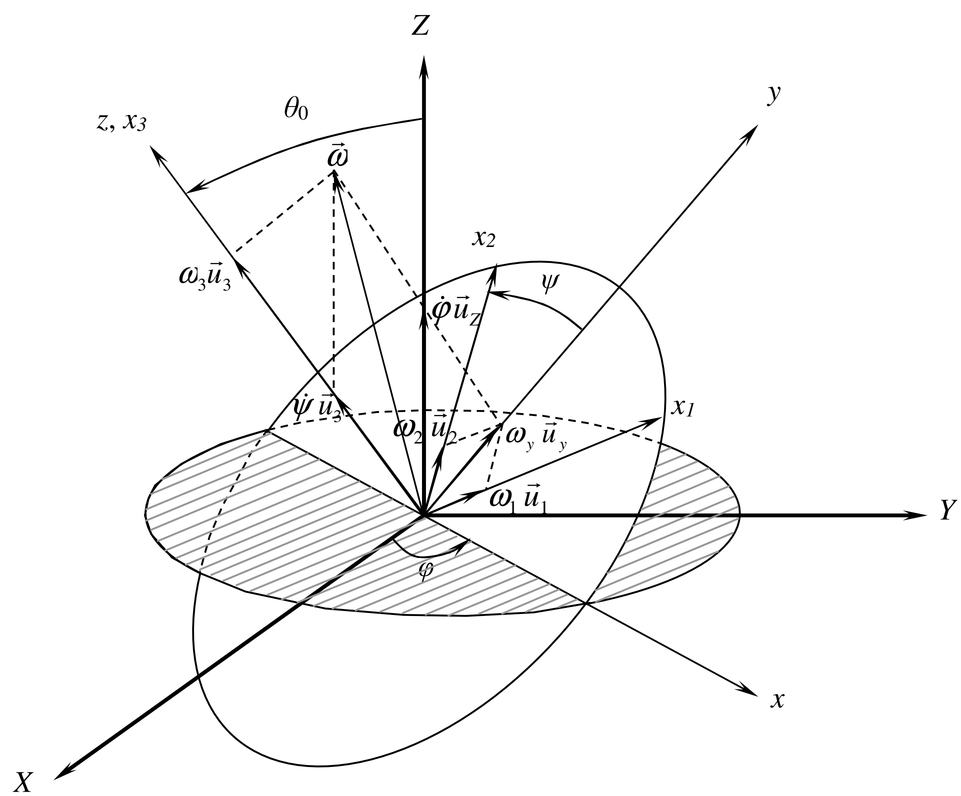
$$\omega_1\,\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta_0\,\vec{u}_y \tag{5.23}$$

Denklem (5.17) yukarıdaki denklemlerle birlikte kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

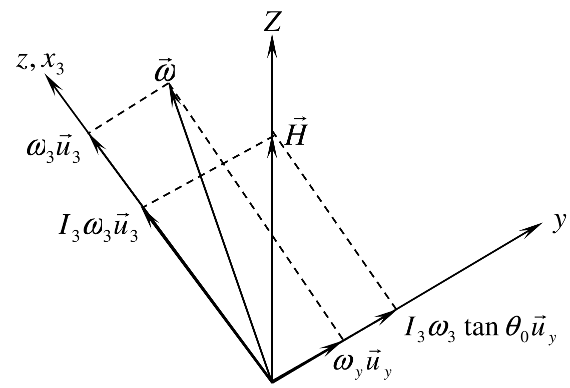
$$\vec{\omega} = \omega_1\,\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3 = \frac{I_3\omega_3}{I_1}\tan\theta_0\,\vec{u}_y + \omega_3\vec{u}_3 \tag{5.24}$$

$\vec{H}$ vektörü ise $\vec{\omega}$ vektörünün asal yönlerdeki bileşenlerini kullanarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{H} = I_1(\omega_1\,\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2) + I_3\omega_3\vec{u}_3 = I_3\omega_3(\tan\theta_0\,\vec{u}_y + \omega_3\vec{u}_3) \tag{5.25}$$



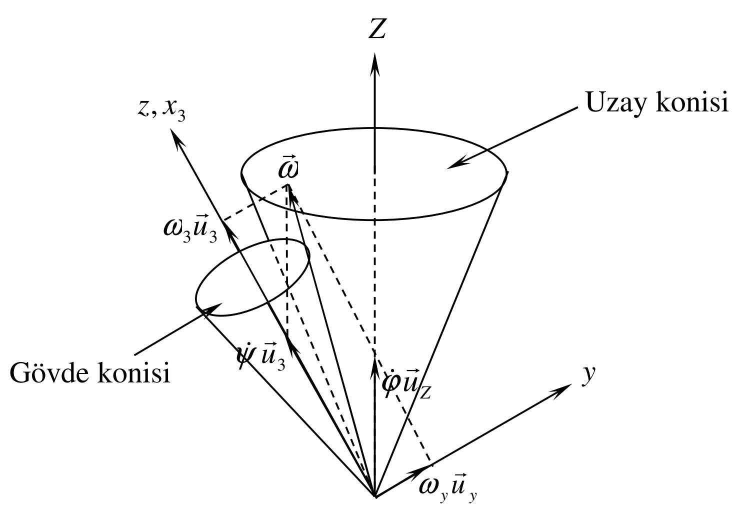
Şekil 5.3



Şekil 5.4

Denklem (5.25)'deki bileşenler Şekil 5.3 ile birlikte incelenirse, $\vec{H}$ vektörünün Z ekseni üzerinde olduğu, yani gövdenin hareketi sırasında boyunun ve yönünün değişmediği görülür. Gövdeye herhangi bir dış moment uygulanmadığına göre, bu beklenen bir sonuçtur. Şekil 5.4'de $\vec{\omega}$ ve $\vec{H}$ vektörlerinin bileşenleri $x_3 y$ düzleminde daha açık bir biçimde görülmektedir.

$\vec{\omega}$ vektörü daima x_3 ve Z ile aynı düzlemde olduğundan, bu düzlem Z ekseni etrafında $\dot{\varphi}$ sabit açısal hızla dönerken $\vec{\omega}$ vektörü de Z ekseni etrafında aynı hızla döner ve bu sırada Z etrafında Şekil 5.5'deki gibi bir koni çizer. Uzayda sabit olan bu koniye *uzay konisi* denir. Diğer taraftan gövde x_3 ekseni etrafında da $\dot{\psi}$ açısal hızıyla dönmektedir. Bu dönme dolayısıyla $\vec{\omega}$ vektörü gövde içinde x_3 ekseni etrafında bir başka koni daha çizer. Bu koni $\vec{\omega}$ vektörünün gövde üzerinde bulunduğu yerlerin eğrisidir ve gövde içinde sabittir. Bu koniye *gövde konisi* denir. Şekil 5.5'deki $\vec{\omega}$ vektörünün üzerinde hızlar sıfır olduğundan, gövdenin hareketi sırasında gövde konisi uzay konisinin üzerinde yuvarlanır.

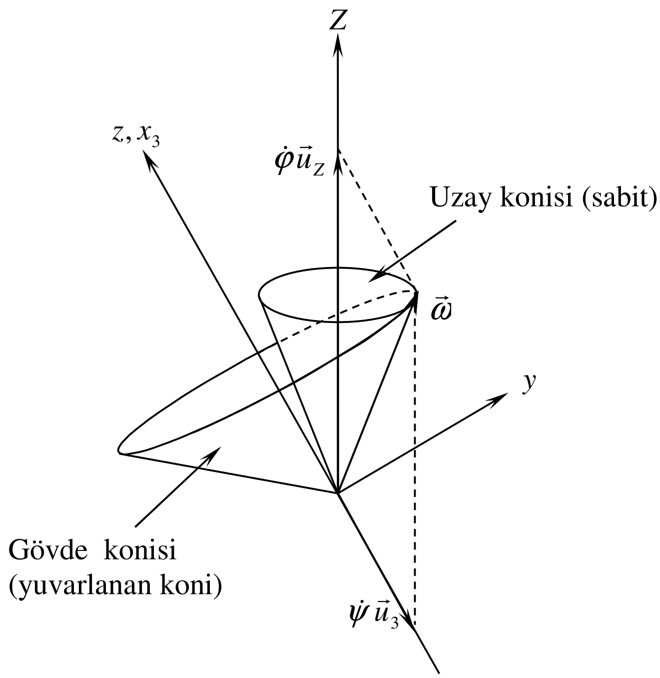


Şekil 5.5

Şekil 5.5'de $\dot{\psi}\vec{u}_3$ vektörü x_3 ekseninin artı yönü doğrultusundadır. Denklem (5.19)'a göre,

$$\dot{\psi} = \omega_3 \frac{I_1 - I_3}{I_1} > 0 \tag{5.26}$$

olduğundan, $\omega_3 > 0$ için bu şekil $I_1 > I_3$ özelliğinde bir gövdeye aittir. (Örneğin, ince bir çubuk gibi.) Eğer $\omega_3 > 0$ ve $I_1 < I_3$ ise (örneğin bir disk) $\dot{\psi} < 0$ olur ve bu özelliğe sahip bir gövde için uzay ve gövde konileri Şekil 5.6'daki gibi olur. Bu durumda gövde konisi hala uzay konisi üzerinde yuvarlanır. Ancak yuvarlanma sırasında gövde konisinin iç yüzeyi uzay konisiyle temas halindedir.



Şekil 5.6

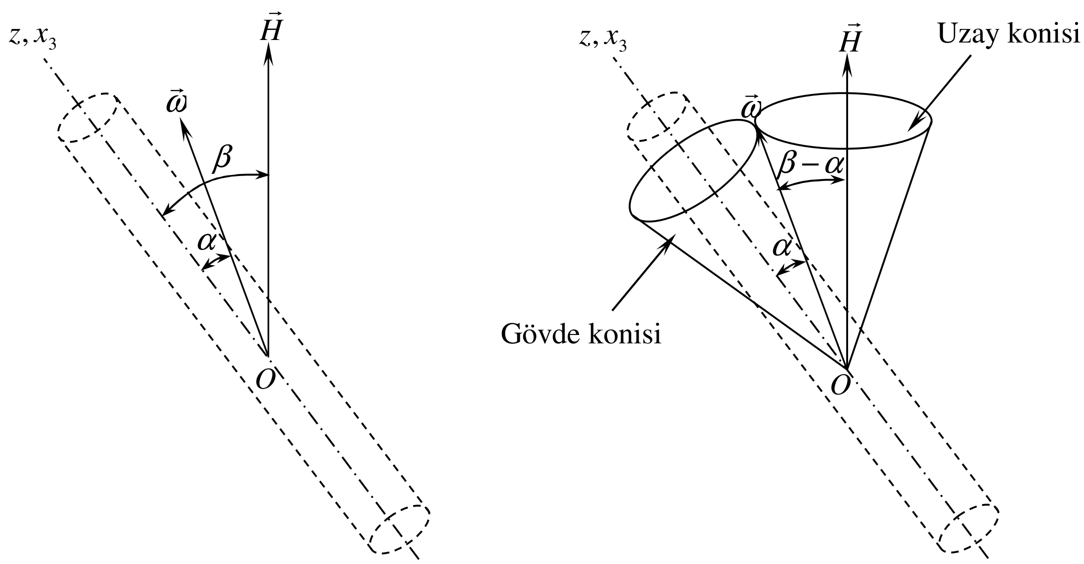
Çubuğu ve diski andıran gövdeler için $\vec{H}$ ve $\vec{\omega}$ vektörlerinin gövdenin simetri eksenine (z, x_3) göre konumları ile gövde ve uzay konileri Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de tekrardan özetlenmiştir. Gövdeye dışarıdan moment uygulanmadığından her iki tür gövde için de $\vec{H}$ vektörü uzayda sabittir. $\vec{\omega}$ vektörü, çubuk için $\vec{H}$ ile simetri ekseni arasında; disk için ise dışındadır. $I_1 = I_2 = I_d$ çapsal (diametrik) atalet momenti, I_3 ise simetri ekseni etrafındaki (polar) atalet momentidir. x_3 ile $\vec{\omega}$ arasındaki açı α, x_3 ile $\vec{H}$ arasındaki açı β olsun.

Aşağıdaki üç açısal hızı inceleyelim:

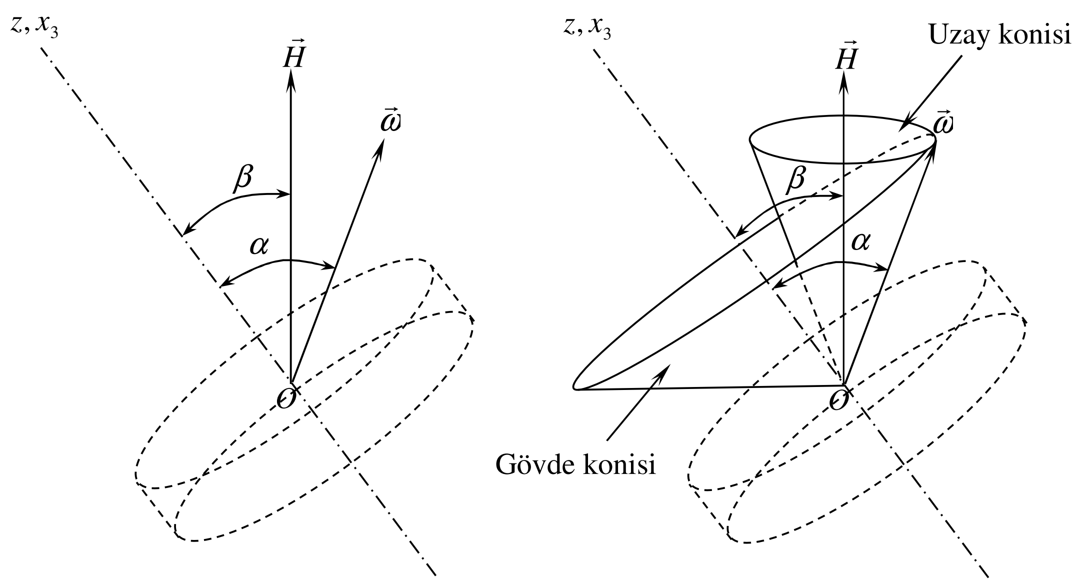
$\vec{\omega}$ - Belli bir anda gövdenin uzaydaki açısal hızı.

$\vec{\Omega}$ - Belli bir anda x_3-$\vec{\omega}$ düzleminin uzayda $\vec{H}$ etrafındaki açısal hızı (yani $\dot{\varphi}$).

$\vec{n}$ - Belli bir anda $\vec{\omega}$'nın gövdeye göre göreli açısal hızı, nütasyon hızı (yani $-\dot{\psi}$).



Şekil 5.7



Şekil 5.8

Gövdenin uzaydaki açısal hızı ($\vec{\omega}$); gövdenin $\vec{\omega}$ vektörünün üzerinde bulunduğu eksen etrafındaki hızı (-$\vec{n}$) ile $\vec{\omega}$ vektörünün üzerinde bulunduğu eksenin uzaya göre (yani Z ekseni etrafındaki) açısal hızının ($\vec{\Omega}$) toplamı olacağına göre aşağıdaki denklem yazılabilir:[1]

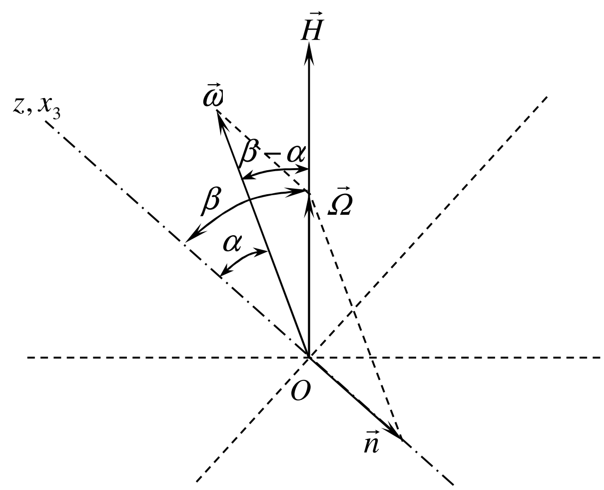
$$\vec{\omega} = -\vec{n} + \vec{\Omega} \tag{5.27}$$

ya da,

$$\vec{\Omega} = \vec{n} + \vec{\omega} \tag{5.28}$$

[1]Bu düşünce tarzı, trende yürüyen bir yolcunun yere göre olan hızının, yolcunun trene göre olan hızı ile trenin yola göre olan hızının toplamı olmasına paraleldir.

Denklem (5.28)'den yararlanarak $\vec{H}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ ve $\vec{n}$ vektörlerinin birbirlerine göre durumları Şekil 5.9'da gösterilmiştir. (Şekil çubuğu andıran gövde için çizilmiştir.) Şekil 5.9'da verilen vektör diyagramından yararlanarak $\vec{n}$ ve $\vec{\Omega}$ vektörlerinin büyüklükleri aşağıdaki gibi bulunabilir:



Şekil 5.9

$\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ ve $\vec{n}$ vektörlerinin oluşturduğu vektör diyagramının gövde simetri eksenine dik yön üzerinde izdüşümünü alarak, bu yöndeki bileşenler cinsinden aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\omega \sin\alpha = \Omega \sin\beta \tag{5.29}$$

ya da,

$$\Omega = \omega \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{5.30}$$

Vektör diyagramının $\vec{\Omega}$ vektörüne dik olan yön üzerine izdüşümünü alarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$n \sin\beta = \omega \sin(\beta - \alpha) \tag{5.31}$$

ya da,

$$n = \omega \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{5.32}$$

Simetri eksenine paralel yöne ilişkin terimleri p indisiyle ((polar yön), bu eksene dik yöne (çapsal ya da diametrik yön) ilişkin terimleri de d indisiyle gösterelim. Bu indisler kullanılarak aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\omega_d = \omega \sin\alpha \tag{5.33}$$

$$\omega_p = \omega \cos\alpha \tag{5.34}$$

$$H_d = H \sin\beta = I_d \omega_d \tag{5.35}$$

$$H_p = H \cos\beta = I_p \omega_p \tag{5.36}$$

Yukarıdaki dört denklemden sinüs ve kosinüslü terimler alınarak denklem (5.32)'de yerine koyulursa, $\vec{n}$ vektörünün büyüklüğü aşağıdaki gibi bulunur:

$$n = \frac{\dfrac{I_d \omega_d \omega_p}{H} - \dfrac{I_p \omega_p \omega_d}{H}}{\dfrac{I_d \omega_d}{H}} \tag{5.37}$$

$$n = \frac{I_d - I_p}{I_d} \omega_p \tag{5.38}$$

Denklemler (5.30), (5.33) ve (5.35)'dan ise $\vec{\Omega}$ vektörünün büyüklüğü bulunur:

$$\Omega = \frac{H}{I_d} \tag{5.39}$$

Özel Hal: α ve β Açıları Küçük

Bu durumda gövdenin dönme hareketi simetri eksenine yakın bir eksen etrafındadır. $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ ve $\vec{n}$ vektörlerinin simetri ekseni (z, x_3) üzerinde oldukları kabul edilebilir. Bu özel hale uyan bazı gövdeler için denklemler aşağıdaki hale dönüşür.

Çubuğu andıran gövde:

Eğer gövde ince bir çubuk ise, Şekil 5.9'daki vektör diyagramı Şekil 5.10a'daki hali alır ve aşağıdaki denklemler geçerlidir:

$$I_d >> I_p \tag{5.40}$$

$$|\vec{n}| \cong |\vec{\omega}| \tag{5.41}$$

$$|\vec{\omega}| >> |\vec{\Omega}| \cong 0 \tag{5.42}$$

Diski andıran gövde:

Eğer gövde ince bir disk ise, Şekil 5.9'daki vektör diyagramı Şekil 5.10b'daki hali alır ve aşağıdaki denklemler geçerlidir:

$$I_d \cong \frac{1}{2} I_p \tag{5.43}$$

$$\vec{n} \cong -\vec{\omega} \tag{5.44}$$

$$|\vec{n}| \cong |\vec{\omega}| \tag{5.45}$$

$$\vec{\Omega} \cong 2\vec{\omega} \tag{5.46}$$

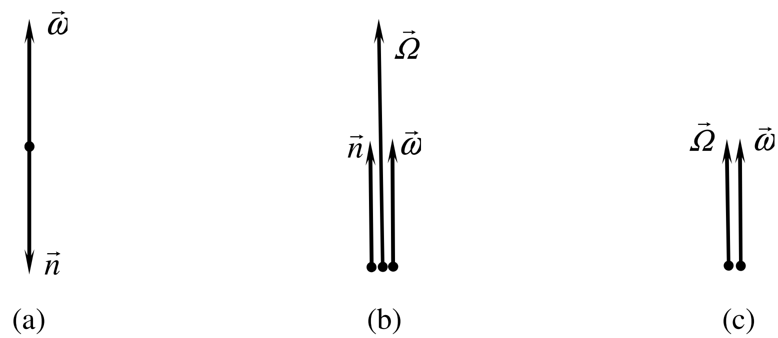
Küre:

Eğer gövde küre ise, Şekil 5.9'daki vektör diyagramı Şekil 5.10c'deki hali alır ve aşağıdaki denklemler geçerlidir:

$$I_d = I_p \tag{5.47}$$

$$\vec{n} = 0 \tag{5.48}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} \tag{5.49}$$



Şekil 5.10

5.4 Euler Denklemleri

Rijit bir gövdenin hareketini belirleyen temel denklem aşağıda vektörel olarak ifade edilen Newton Kanunudur. Bir vektör sadece yönü ve boyuyla tanımlandığından, bu ifadenin geçerliği kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} \tag{5.50}$$

Gövdenin asal eksenleri *x*, *y*, *z*; bu yönlerdeki birim vektörler ise sırasıyla $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ olsun. Asal eksenler gövdeye gömülü olduklarından gövdeyle birlikte hareket etmekte, bunlar üzerindeki bu birim vektörlerin de yönleri değişmektedir. Herhangi bir anda $\vec{H}$ vektörünü gövdenin asal eksen yönlerindeki bileşenleri cinsinden yazalım:

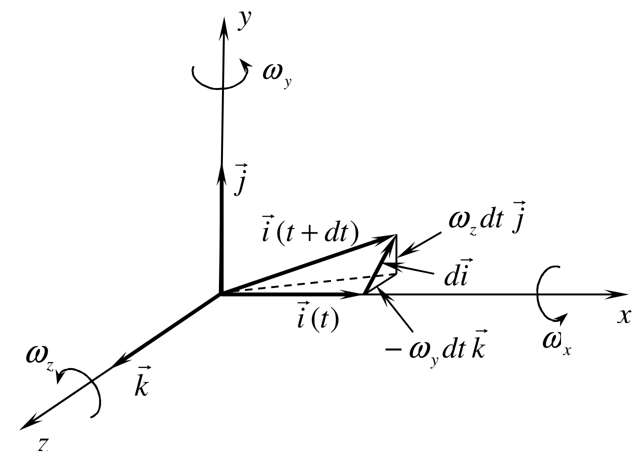
$$\vec{H} = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k} \tag{5.51}$$

$\vec{H}$ vektörünün türevi ise aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \left(\frac{dH_x}{dt}\vec{i} + H_x\frac{d\vec{i}}{dt}\right) + \left(\frac{dH_y}{dt}\vec{j} + H_y\frac{d\vec{j}}{dt}\right) + \left(\frac{dH_z}{dt}\vec{k} + H_z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \tag{5.52}$$

Yukarıdaki denklemde geçen $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ birim vektörlerinin türevlerini bulmak için Şekil 5.11'den yararlanalım. Bu vektörlerin boyları sabit olduğundan bunların türevleri ancak yönleri değiştiğinde ortaya çıkar. Bu ise gövdenin dönmesi sonucu oluşabilir. Örneğin $\vec{i}$ vektöründeki bir değişim ancak ω_y veya ω_z hız bileşenlerinden en az birinin var olmasıyla mümkündür. Şekil 5.11'den görüldüğü gibi, $\vec{i}$ vektörünün türevi için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = 0.\omega_x - \omega_y \vec{k} + \omega_z \vec{j} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k} \tag{5.53}$$



Şekil 5.11

$\vec{j}$ ve $\vec{k}$ birim vektörlerinin türevleri de benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\omega_z \vec{i} + \omega_x \vec{k} \tag{5.54}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \omega_y \vec{i} - \omega_x \vec{j} \tag{5.55}$$

Birim vektörlerin türevleri denklemler (5.53)-(5.55)'den alınarak denklem (5.52)'de yerine koyulur ve terimler düzenlenirse, $\vec{H}$ vektörünün türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \left(\frac{dH_x}{dt} - \omega_z H_y + \omega_y H_z\right)\vec{i} + \left(\frac{dH_y}{dt} - \omega_x H_z + \omega_z H_x\right)\vec{j} + \left(\frac{dH_z}{dt} - \omega_y H_x + \omega_x H_y\right)\vec{k} \tag{5.56}$$

Gövdeye uygulanan toplam dış moment $\vec{M}$ de asal yönlerdeki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \tag{5.57}$$

Denklemler (5.56) ve (5.57), denklem (5.50)'de yerine koyursa ve bu şekilde elde edilen denklemin sağ ve solunda bulunan aynı yöndeki bileşenler eşitlenirse Euler denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{dH_x}{dt}+\omega_y H_z-\omega_z H_y=M_x \tag{5.58a}$$

$$\frac{dH_y}{dt}+\omega_z H_x-\omega_x H_z=M_y \tag{5.58b}$$

$$\frac{dH_z}{dt}+\omega_x H_y-\omega_y H_x=M_z \tag{5.58c}$$

ya da,

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z(I_z-I_y)=M_x \tag{5.59a}$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z(I_x-I_z)=M_y \tag{5.59b}$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_x\omega_y(I_y-I_x)=M_z \tag{5.59c}$$

ya da,

$$\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z\frac{(I_z-I_y)}{I_x}=\frac{M_x}{I_x} \tag{5.60a}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z\frac{(I_x-I_z)}{I_y}=\frac{M_y}{I_y} \tag{5.60b}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_x\omega_y\frac{(I_y-I_x)}{I_z}=\frac{M_z}{I_z} \tag{5.60c}$$

Yukarıda (5.58), (5.59) ve (5.60) numarayla verilen üçlü denklemler Euler denklemlerinin farklı şekildeki yazım biçimleridir.

Özel Hal 1: $I_x=I_1,\ I_y=I_z=I_2$

Bu özel halin geçerli olması için gövdenin *x* eksenine göre eksenel simetriye sahip olması yeterli, ancak gerekli değildir. Bu durumda Euler denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\dot{\omega}_x=\frac{M_x}{I_x} \tag{5.61}$$

$$\dot{\omega}_y+\omega_x\omega_z\frac{(I_1-I_2)}{I_2}=\frac{M_y}{I_2} \tag{5.62}$$

$$\dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y\frac{(I_2-I_1)}{I_2}=\frac{M_z}{I_2} \tag{5.63}$$

Özel Hal 2: $I_x = I_1,\ I_y = I_z = I_2,\ M_x = 0$

Bu özelde Özel Hal 1'deki şartlara ek olarak *x* ekseni etrafında gövdeye moment uygulanmadığı kabul edilmiştir. Bu durumda Euler denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\omega_x = \Omega_0 = Sabit \qquad (\dot{\omega}_x = 0) \tag{5.64}$$

$$\dot{\omega}_y + \omega_z \left[\Omega_0 \frac{(I_1 - I_2)}{I_2} \right] = \frac{M_y}{I_2} \tag{5.65}$$

$$\dot{\omega}_z + \omega_y \left[\Omega_0 \frac{(I_2 - I_1)}{I_2} \right] = \frac{M_z}{I_2} \tag{5.66}$$

Eğer,

$$\alpha = \Omega_0 \frac{(I_1 - I_2)}{I_2} \tag{5.67}$$

olarak tanımlanırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\dot{\omega}_y + \alpha \omega_z = \frac{M_y}{I_2} \tag{5.68}$$

$$\dot{\omega}_z - \alpha \omega_y = \frac{M_z}{I_2} \tag{5.69}$$

Örnek 1: Moment Uygulanmayan Serbest Jiroskop

Bu durumda dış moment uygulanmadığından denklemler (5.68) ve (5.69) aşağıdaki hali alır:

$$\dot{\omega}_y + \alpha \omega_z = 0 \tag{5.70}$$

$$\dot{\omega}_z - \alpha \omega_y = 0 \tag{5.71}$$

Bu denklemlerden ω_z yok edilirse,

$$\ddot{\omega}_y + \alpha^2 \omega_y = 0 \tag{5.72}$$

bulunur. Bu denklem çözülürse,

$$\omega_y = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t \tag{5.73}$$

olur. Uygun başlangıç koşulları seçilirse aşağıdaki gibi bir çözüm bulunabilir:

$$\omega_y = \sin \alpha t \tag{5.74}$$

$$\omega_z = -\cos \alpha t \tag{5.75}$$

Bu çözüm x ekseni etrafında α açısal hızıyla dönen bir $\vec{\omega}$ vektörünün izdüşümünden Şekil 5.12'deki gibi elde edilebilir.

Örnek 2: Simetri Eksenine Dik Bir Eksene Moment Uygulanması

Şekil 5.13'deki gibi, yerçekimi alanı içinde x ekseninin bir ucundan düşey olarak (bir iple veya ucu yataklı çubukla) asılmış olarak dönen bir disk verilmiş olsun. $\omega_x = \omega_0 = Sabit$ olsun. x ekseni diskin simetri ekseni olduğundan ve bu eksen etrafında herhangi bir moment uygulanmadığından (5.68) ve (5.69) geçerlidir. Bu denklemler $I_1 = I_p$ (polar atalet momenti) ve $I_2 = I_d$ (çapsal atalet momenti) kabul edilerek yazılırsa aşağıdaki hali alırlar:

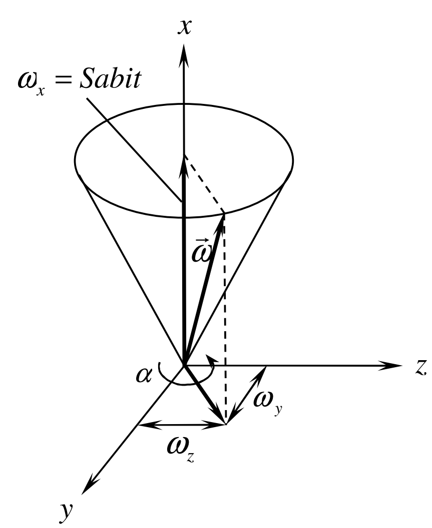
$$\dot{\omega}_y + \alpha\omega_z = \frac{M_y}{I_d} \tag{5.76}$$

$$\dot{\omega}_z - \alpha\omega_y = \frac{M_z}{I_d} \tag{5.77}$$

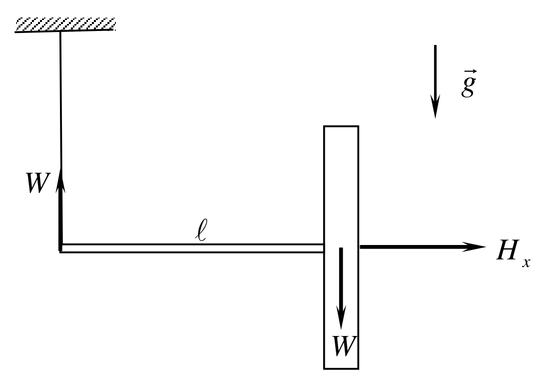
Burada α aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\alpha = \omega_0 \frac{I_p - I_d}{I_d} \tag{5.78}$$

W kuvvet çiftinin uyguladığı moment $M_0 = W\ell$ büyüklüğünde ve şekil düzleminden içeri doğru yöndedir. $t = 0$ anında z ekseninin M_0 yönünde olduğu kabul edilirse, herhangi



Şekil 5.12

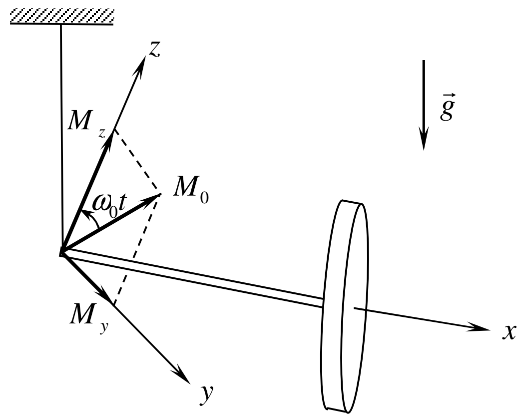


Şekil 5.13

bir t anında moment vektörünün y ve z yönündeki bileşenleri Şekil 5.14'deki gibi olur. Bu bileşenlerin büyüklükleri aşağıdaki gibidir:

$$M_y = M_0 \sin \omega_0 t \tag{5.79}$$

$$M_z = M_0 \cos \omega_0 t \tag{5.80}$$



Şekil 5.14

Momentler yerine koyulursa Euler denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\dot{\omega}_y + \alpha\omega_z = \frac{M_0}{I_d}\sin\omega_0 t \tag{5.81}$$

$$\dot{\omega}_z - \alpha\omega_y = \frac{M_0}{I_d}\cos\omega_0 t \tag{5.82}$$

Bu denklemlerin özel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\omega_z = A\sin\omega_0 t \tag{5.83}$$

$$\omega_y = -A\cos\omega_0 t \tag{5.84}$$

Burada *A* aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$A = \frac{M_0}{I_d(\alpha+\omega_0)} = \frac{M_0}{I_d\omega_0\left(\dfrac{I_p - I_d}{I_d}+1\right)} = \frac{M_0}{I_p\omega_0} \tag{5.85}$$

Eğer disk çok yüksek bir ω_0 hızıyla dönüyorsa,

$$H \cong I_p\omega_0 \tag{5.86}$$

olacağından,

$$\omega_z = \frac{M_0}{H}\sin\omega_0 t \tag{5.87}$$

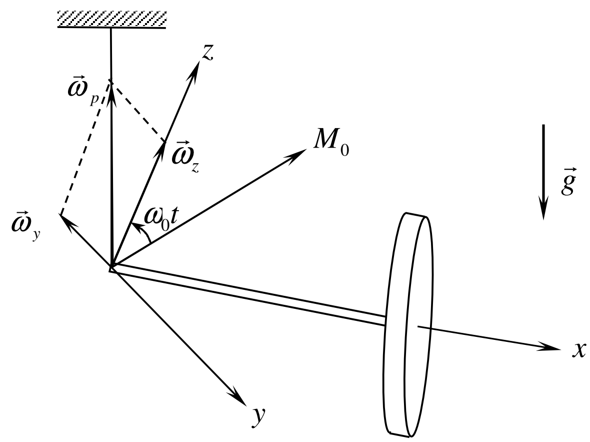
$$\omega_y = -\frac{M_0}{H}\cos\omega_0 t \tag{5.88}$$

olur. Bu denklemlerden görüldüğü gibi, yukarıdaki bileşenler diskin asılı olduğu düşey askı elemanının üzerinde bulunan M_0/H büyüklüğündeki bir $\vec{\omega}_p$ hız vektörünün y ve z yönündeki izdüşümleridir. Yani,

$$\left|(\vec{\omega}_y+\vec{\omega}_z)\right|=\frac{M_0}{H}=\omega_p \tag{5.89}$$

$$\omega_p=\frac{M_0}{H}=\frac{W\ell}{I_p\omega_0} \tag{5.90}$$

olup, disk x ekseni etrafında ω_0 açısal hızıyla dönerken x ekseni de düşey etrafında ω_p açısal hızıyla döner (Şekil 5.15). Düşey etrafındaki bu harekete *presesyon* hareketi, ω_p'ye ise *presesyon açısal hızı* denir.



Şekil 5.15

Presesyon Hızı ω_p'nin Alternatif Yöntemle Bulunması:

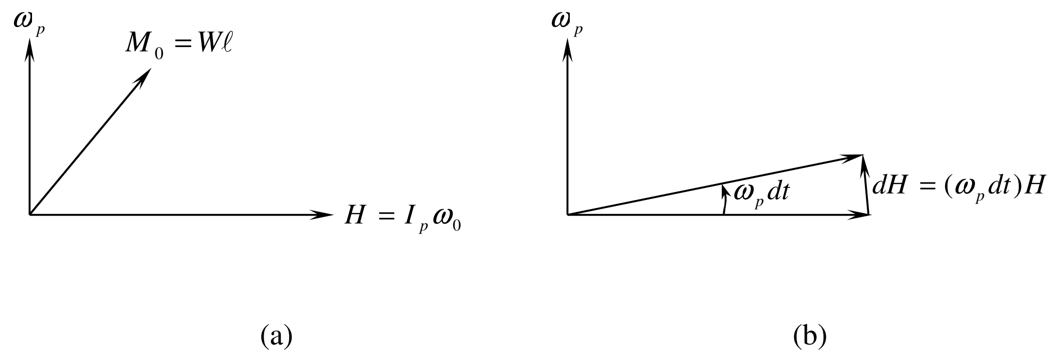
Bu örnekteki presesyon açısal hızının yönü ve büyüklüğü vektörel olarak ifade edilmiş Newton Kanununu sisteme doğrudan uygulayarak da bulunabilir. (Kolaylık için ω_0'ın çok büyük olduğu ve denklem (5.86)'nın geçerli olduğu kabul edilecektir.) Sistemin vektörleri belli bir anda Şekil 5.16a'daki gibi olsun. $\vec{M}_0$ vektörü kağıdın içine doğru ve kağıda dik yönde, $\vec{H}$ vektörü ise kağıt düzlemi içinde yatay ve sağa doğrudur. $\vec{\omega}_p$ vektörünün düşey yönde ve yukarı doğru olduğunu varsayalım. Aradan dt kadar zaman geçtiğinde büyüklüğü $I_p\omega_0$ olan $\vec{H}$ vektörü düşey etrafında $\omega_p dt$ açısı kadar döner ve vektörün ucu kağıdın içine doğru dH kadar girer (Şekil 5.16b).

Denklem (5.50) vektörel bir ifadedir. Herhangi bir yöndeki bileşenleri cinsinden de yazılabilir. Bu denklem kağıdın içine doğru yöndeki bileşenler cinsinden, bu bileşenler i indisiyle gösterilerek yazılırsa,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_i = M_i \tag{5.91}$$

Bu örnekte $dH_i = (\omega_p dt)H = (\omega_p dt)I_p\omega_0$; $M_i = M_0 = W\ell$ olduğundan bu değerler denklem (5.91)'de yerine koyularak ω_p çözülürse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_p = \frac{M_0}{H} = \frac{W\ell}{I_p\omega_0} \tag{5.92}$$



Şekil 5.16

5.5 Gövdenin Elipsoidleri ve Kararlı Dönme Eksenleri

5.5.1 Gövdenin Elipsoidleri

Uzayda sabit bir *O* noktası olan Şekil 5.17'deki gibi bir rijit gövde olduğunu düşünün.[1] Bu gövdeye herhangi bir dış kuvvet uygulanmıyorsa, gövdenin kinetik ko-enerjisi ve açısal momentumu sabit kalacağından aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$2T^* = Sabit_1 \tag{5.93}$$

$$\left|\vec{H}\right| = Sabit_2 \tag{5.94}$$

ya da,

$$2T^* = \vec{H}\cdot\vec{\omega} = \left|\vec{H}\right|\left|\vec{\omega}\right|\cos\theta = Sabit \tag{5.95}$$

Denklem (5.95)'de T^* ve $\left|\vec{H}\right|$ sabit olduklarından, $\vec{\omega}$ vektörünün $\vec{H}$ vektörü üzerindeki izdüşümü olan $\left|\vec{\omega}\right|\cos\theta$ terimi de sabittir. $\vec{\omega}$ vektörünün $\vec{H}$ vektörü üzerindeki izdüşümü bir *A* noktasında olsun. Dolayısıyla gövdenin dinamik hareketi sırasında $\vec{\omega}$ vektörünün ucu daima *A* noktasında $\vec{H}$ vektörüne dik olan düzlem içinde kalır. $\vec{H}$ vektörü uzayda sabit olduğundan bu düzlem de uzayda sabittir. Bu düzlem aşağıda *sabit düzlem* olarak anılacaktır.

[1]Bu bölümdeki sonuçlar, koordinat merkezi ağırlık merkezi olarak alınmak kaydıyla, kendisine kuvvet uygulanmayan uzayda serbest bir gövde için de geçerlidir.

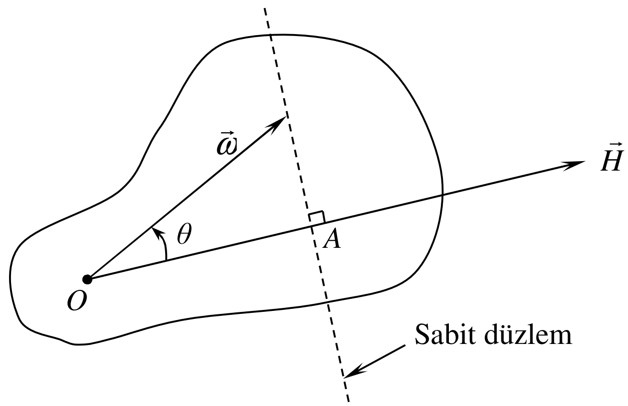
Şimdi bu gövde için aşağıdaki yer eğrilerini inceleyelim:

i. $2T^* = Sabit$ için $\vec{\omega}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi.

ii. $2T^* = Sabit$ için $\vec{H}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi.

iii. $\left|\vec{H}\right| = Sabit$ için $\vec{\omega}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi.

iv. $\left|\vec{H}\right| = Sabit$ için $\vec{H}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi.



Şekil 5.17

Aşağıda gösterileceği gibi bu yer eğrilerinin her biri gövdeye gömülü olan bir *elipsoid*'dir.

$2T^* = Sabit$ *için* $\vec{\omega}$ *vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi:*

Koordinat eksenleri olarak *O* noktasından geçen asal eksenler kabul edilsin. Asal eksenler *x*, *y* ve *z* olarak adlandırılsın. Aşağıdaki denklemleri yazalım:

$$2T^* = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = m\rho_x^2\omega_x^2 + m\rho_y^2\omega_y^2 + m\rho_z^2\omega_z^2 = Sabit_1 \quad (5.96)$$

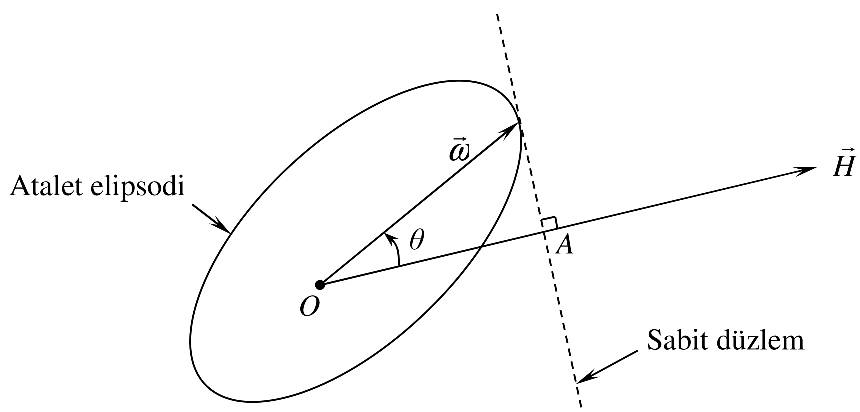
Yukarıdaki denklemde *m* gövdenin kütlesi; ρ_x, ρ_y ve ρ_z terimleri ise sırasıyla *x*, *y* ve *z* eksenleri etrafındaki *jirasyon yarıçapları*'dır. Denklem (5.96) yeniden düzenlenerek aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\frac{2T^*}{m} = \rho_x^2\omega_x^2 + \rho_y^2\omega_y^2 + \rho_z^2\omega_z^2 = Sabit_2 \quad (5.97)$$

$$\frac{2T^*}{m} = \frac{\omega_x^2}{\left(\frac{1}{\rho_x}\right)^2} + \frac{\omega_y^2}{\left(\frac{1}{\rho_y}\right)^2} + \frac{\omega_z^2}{\left(\frac{1}{\rho_z}\right)^2} = Sabit_2 \quad (5.98)$$

Denklem (5.98) major eksenleri gövdenin asal eksenleri ile aynı olan bir elipsoiddir. Semi-major eksenlerinin uzunlukları sırasıyla $\sqrt{\frac{2T^*}{m}\left(\frac{1}{\rho_x}\right)}$, $\sqrt{\frac{2T^*}{m}\left(\frac{1}{\rho_y}\right)}$, $\sqrt{\frac{2T^*}{m}\left(\frac{1}{\rho_z}\right)}$ olan bu elipsoide *Atalet Elipsoidi* denir. Atalet elipsoidi gövdenin şeklini andırır; yani en uzun ekseni gövdenin en uzun olan yönünde, en kısa ekseni ise gövdenin en kısa olduğu yöndedir.

$\vec{\omega}$ vektörünün ucu hem Şekil 5.17'deki sabit düzlem üzerinde hem de atalet elipsoidi üzerindedir. Burada ispatı verilmemekle birlikte, gövdenin hareketi sırasında atalet elipsoidi sabit düzleme teğettir ve onun üzerinde yuvarlanır (Şekil 5.18).



Şekil 5.18

$2T^* = Sabit$ için $\vec{H}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi:

Denklem (5.98) yeniden düzenlenirse,

$$\frac{2T^*}{m} = \frac{(\rho_x^2\omega_x)^2}{\rho_x^2} + \frac{(\rho_y^2\omega_y)^2}{\rho_y^2} + \frac{(\rho_z^2\omega_z)^2}{\rho_z^2} = Sabit_2 \tag{5.99}$$

ya da,

$$\frac{H_x^2}{\rho_x^2} + \frac{H_y^2}{\rho_y^2} + \frac{H_z^2}{\rho_z^2} = Sabit_3 \tag{5.100}$$

elde edilir. Bu denklem de bir elipsoid tanımlar. Buna *H-elipsoidi* denir. *H*-elipsodinin şekli gövdenin şeklinin tersini andırır. Yani gövdenin en uzun olduğu yönde en kısa; gövdenin en kısa olduğu yönde ise en uzundur.

$\left|\vec{H}\right| = Sabit$ için $\vec{\omega}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi:

$\vec{H}$ vektörünün büyüklüğü yazılırsa,

$$\left|\vec{H}\right|^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 = (I_x\omega_x)^2 + (I_y\omega_y)^2 + (I_z\omega_z)^2 = Sabit_4 \tag{5.101}$$

ya da,

$$\frac{\left|\vec{H}\right|^2}{m^2}=\frac{\omega_x^2}{\left(\frac{1}{\rho_x^2}\right)^2}+\frac{\omega_y^2}{\left(\frac{1}{\rho_y^2}\right)^2}+\frac{\omega_z^2}{\left(\frac{1}{\rho_z^2}\right)^2}=Sabit_5 \tag{5.102}$$

bulunur. Denklem (5.102) de bir elipsoid tanımlar. Bu elipsoidin şekli abartılı bir biçimde gövdenin şeklini andırır.

$\left|\vec{H}\right|=Sabit$ için $\vec{H}$ vektörünün ucunun gövde içindeki yer eğrisi:

$\vec{H}$ vektörünün büyüklüğü yazılırsa,

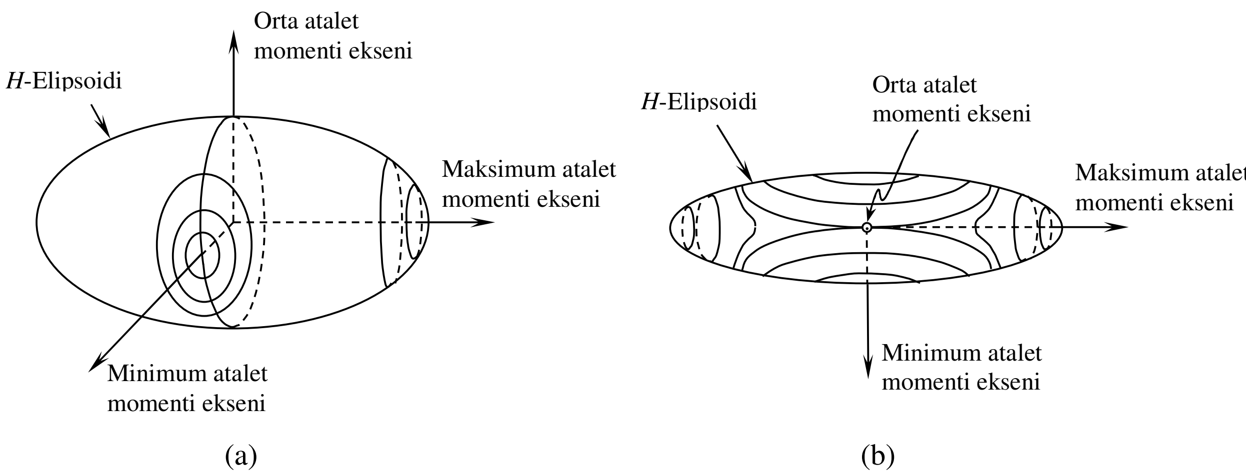
$$\left|\vec{H}\right|^2=H_x^2+H_y^2+H_z^2=Sabit_6 \tag{5.103}$$

olur. Bu denklem ise bir küreyi, yani elipsoidin özel bir halini tanımlar.

5.5.2 Kararlı dönme eksenleri

Teorik olarak gövdenin üç asal ekseni de sürekli dönme eksenidir. Zira bu eksenler etrafında gövdenin bir açısal hızı varsa, oluşacak olan açısal momentum vektörü de aynı eksen yönündedir. Örneğin, gövdenin, $[\omega]=[\omega_x \quad 0 \quad 0]^T$ gibi bir açısal hızı varsa, açısal momentumu $[H]=[I_x\omega_x \quad 0 \quad 0]^T$ gibidir. Yani $\vec{\omega}$ ve $\vec{H}$ vektörleri aynı yöndedir. Gövdeye dış kuvvetler uygulanmadığından $\vec{H}$ vektörü uzayda sabittir ve bunun üzerinde olan $\vec{\omega}$ vektörü de yönünü değiştirmez. Ancak bu sadece teoride böyledir. Bütün asal eksenler teoride sürekli dönme ekseni olmalarına rağmen sadece maksimum ve minimum atalet momentine sahip asal eksenler kararlı dönme eksenleridir. Orta değere sahip olan asal eksen ise kararsızdır. Bu husus yukarıda denklem (5.100) ile tanımlanan *H*-elipsoidi ve denklem (5.103) ile tanımlanan küre yardımıyla aşağıdaki gibi ispat edilebilir.

Hatırlanacağı gibi, *H*-elipsoidi gövdenin şeklinin tersini andırır. Şekil 5.19'da bir gövdenin asal eksenlerine göre *H*-elipsoidinin durumu görülmektedir. $\vec{H}$ vektörünün ucu hem bu elipsoidin üzerinde hem de denklem (5.103) ile tanımlanan küre üzerinde, yani küreyle *H*-elipsoidinin arakesitindedir. Bu arakesitlerin şeklini belirlemek için şeklin merkezinden itibaren küçük bir küreyi şişirelim ve *H*-elipsoidiyle olan arakesitlerinin nasıl değişeceğine bakalım. Küre önce *H*-elipsoidinin en kısa ekseninin olduğu taraftan elipsoidi kesmeye başlar ve minimum atalet momenti ekseni etrafında 5.19a'daki gibi kapalı arakesitler oluşturmaya başlar. Küreyi şişirmeye devam edersek, orta atalet momentine sahip eksenin olduğu yerde elipsoide teğet olur. Ancak bu eksen etrafındaki arakesitler kapalı değil, Şekil 5.19b'de görüldüğü gibidir. Küreyi daha da çok şişirirsek, bu sefer küre elipsoidi uzun olduğu taraftan keser ve maksimum atalet momenti ekseni etrafında kapalı arakesit eğrileri elde edilir. $\vec{H}$ vektörü başlangıçta minimum veya maksimum atalet eksenleri üzerinde ise ve



Şekil 5.19

herhangi bir nedenle bu konumundan ayrılırsa ucu kapalı bir arakesit eğrisi üzerine geleceğinden daha uzağa gitmez. Buna karşılık $\vec{H}$ vektörü başlangıçta orta atalet momenti ekseni üzerinde ise ve bu konumdan ayrılırsa, ucu Şekil 5.19b'deki arakesitlerden birini izleyerek bu eksenden uzaklaşır. Dolayısıyla orta atalet momenti ekseni etrafındaki dönme hareketi kararsız; minimum veya maksimum atalet momenti eksenleri etrafındaki dönme hareketleri kararlıdır. Eğer gövde orta atalet momenti ekseni etrafındaki döndürülmeye teşebbüs edilirse; düzensiz, takla atar görünümlü, karmaşık bir hareket gözlenir. Ancak bu karmaşık hareket sırasında $\vec{H}$ vektörü uzayda hala sabit kalır.

5.6 Newton Kanunu'nun Rijit Gövdelere Doğrudan Uygulanması[1]

Atalet referans sistemi içinde rijit bir gövdenin hareketini belirleyen temel ifade vektörel olarak denklem (5.50) ile verilen Newton Kanunudur. Bu denklem aşağıda yeniden verilmiştir. (Bir vektör sadece yönü ve boyuyla tanımlandığından bu denklemde geçen vektörler, incelenen sistem için kullanılan koordinat takımından bağımsız olarak uzayda herhangi bir noktada çizilebilir.)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} \tag{5.104}$$

Rijit gövdeli pek çok sistemin dinamik hareketi, vektörel olarak ifade edilmiş Newton Kanununu doğrudan uygulayarak kolayca analiz edilebilir. Yöntemin ana aşamaları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Geometrik zorlamalar (kaymama şartları, yuvarlanma, kol, halat ve yatakların sınırlamaları, v.b.) dolayısıyla sistemdeki hızlar arasındaki bağıntılar yazılır.
2. Açısal hız vektörünün verilen bileşenlerinden, asal yönlerdeki bileşenleri bulunur.
3. Asal yönlerdeki açısal hız bileşenleri bu yönler etrafındaki atalet momentleriyle çarpılarak, açısal momentum vektörünün asal yönlerdeki bileşenleri elde edilir.

[1] Kısım 5.6.3 hariç, Bölüm 5.6'da verilen örnekler J. P. Den Hartog'un İleri Dinamik derslerinde kullanmış olduğu örneklerdir.

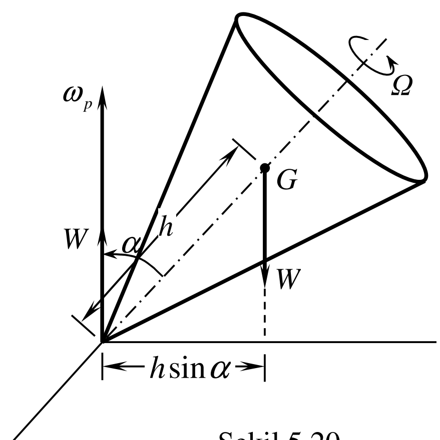
4. Sistemin hareketi dikkate alınarak $\dot{\vec{H}}$ vektörünün uygun yönlerdeki bileşenleri bulunur.

5. $\dot{\vec{H}}$ vektörünün bileşenleri aynı yöndeki moment bileşenlerine eşitlenerek denklem (5.104) bu yönlerdeki bileşenler cinsinden yazılır.

Aşağıda bu yaklaşımın uygulanmasıyla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

5.6.1 Hızlı Dönen Topaç

Yerçekimi alanında dönen bir topacın kendi ekseni etrafında dönerken, topaç ekseninin de düşey etrafında döndüğü (presesyon hareketi) bilinir. Bu örnekte hızlı dönen bir topacın dinamik davranışı incelenecektir. Sistem Şekil 5.20'de görülmektedir. Topaç eksenel simetriye sahiptir. Topacın ucu yatay zeminde sabittir. Topacın kendi ekseni etrafındaki açısal hızı Ω çok büyüktür. Topaç ekseninin düşey etrafındaki açısal hızı (presesyon açısal hızı) ω_p



Şekil 5.20

ile gösterilmiştir. Topacın ekseni etrafındaki atalet momenti (polar eksen) I_p'dir. Ağırlık merkezi G olup, topacın ağırlığı W'dir. Hareket sırasında ağırlık merkezinin düşey konumu değişmediğinden düşey yönde uygulanan net kuvvet sıfırdır. Bu yüzden topacın ucuna yer tarafından uygulanan düşey yöndeki kuvvet de W büyüklüğündedir.

Sabit olan Ω hızı çok büyük olduğundan toplam hız vektörü $\vec{\omega}_t$'nin yaklaşık olarak $\vec{\Omega}$ vektörünün üzerinde olduğu kabul edilebilir (Şekil 5.21). Bu durumda $\vec{H}$ vektörü de $\vec{\Omega}$ vektörünün yönünde alınabilir (Şekil 5.22). Başlangıçta $\vec{H}$ vektörünün kağıt düzleminde olduğunu varsayalım. dt kadar zaman sonra $\vec{\omega}_p$ hızı dolayısıyla $\vec{H}$ vektörünün ucu kağıt düzleminden içeri doğru girecektir. $\vec{H}$ vektörünün başlangıç ve son durumları arasındaki fark $d\vec{H}$ vektörü olup, bu vektör kağıt düzlemine dik ve içeri doğrudur. Dönme açısı $\omega_p dt$ kadar olduğundan Şekil 5.22'deki geometriden aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$dH_{içeri} = (H\sin\alpha)(\omega_p dt) = (I_p\Omega\sin\alpha)\omega_p dt \tag{5.105}$$

ya da,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{içeri} = \omega_p I_p \Omega \sin\alpha = \omega_p H \sin\alpha \tag{5.106}$$

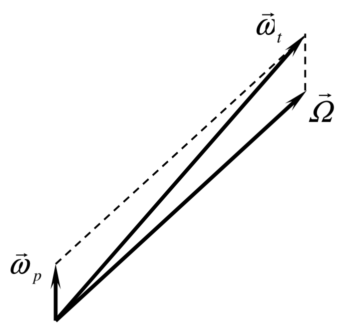
$\vec{H}$ 'nin türevinin içeri yönde olan bu bileşeni, Newton Kanunu gereği dış momentin aynı yöndeki bileşeni $M_{içeri}$ 'ye eşittir. Bu moment bileşeni ise Şekil 5.20 ve Şekil 5.22'den aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_{içeri} = Wh \sin\alpha \tag{5.107}$$

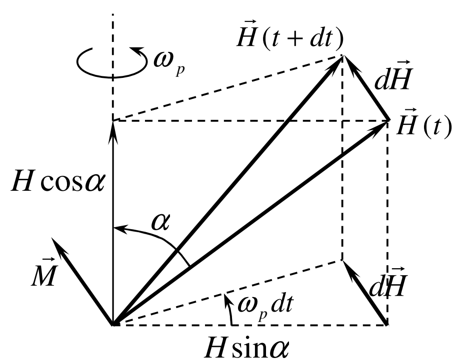
Denklem (5.106) ve denklem (5.107)'nin sağ tarafları eşitlenirse ω_p aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_p = \frac{Wh}{H} \tag{5.108}$$

$$\omega_p = \frac{Wh}{I_p \Omega} \tag{5.109}$$



Şekil 5.21



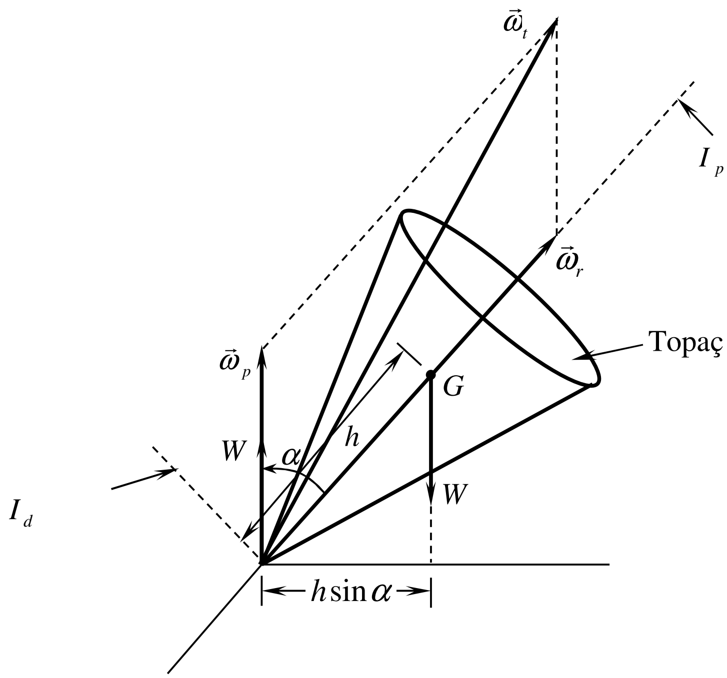
Şekil 5.22

5.6.2 Yavaş Dönen Topaç

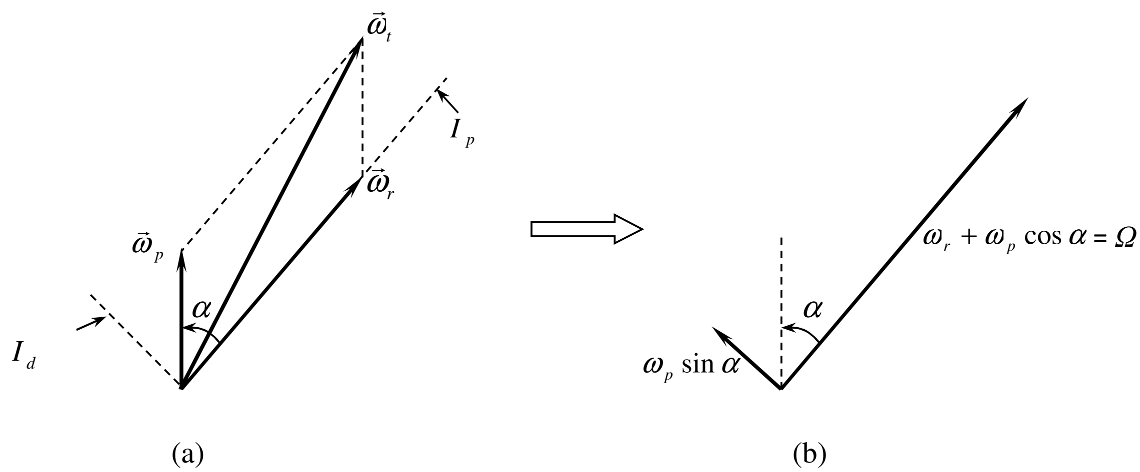
Bu örnekte topacın kendi ekseni etrafında $\vec{\omega}_r$ göreli hızıyla döndüğü ve bu hızın yavaş olduğu kabul edilecektir (Şekil 5.23). Bu durumda daha önceki örnekte olduğu gibi $\vec{\omega}_t$ vektörünün simetri ekseni üzerinde olduğu varsayımı geçersizdir. Açısal hız vektörleri Şekil 5.23'de verilmiş olup, aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r \tag{5.110}$$

Şekil 5.24a'daki hız vektörleri diyagramından I_p ve I_d eksenleri yönlerindeki açısal hız bileşenleri bulunmuş ve bunlar Şekil 5.24b'de gösterilmiştir.



Şekil 5.23



Şekil 5.24

Şekil 5.24b'deki diyagramda I_p ekseni yönündeki hız bileşeni I_p ile, I_d ekseni yönündeki hız bileşeni ise I_d ile çarpılırsa açısal momentumun bu yönlerdeki bileşenleri Şekil 5.25a'daki gibi bulunabilir. Sistemin presesyon hareketi düşey eksen etrafında olmaktadır. Bu yüzden $\vec{H}$ vektörünün düşey bileşeni değişmez. Bu hususu dikkate alarak $\vec{H}$ vektörünü Şekil 5.25b'deki gibi yatay ve düşey bileşenlerine (sırasıyla H_y ve H_d) ayıralım. Şekil 5.25b'de görülen $\vec{H}$ vektör diyagramı presesyon hareketi sırasında düşey eksen etrafında ω_p açısal hızıyla döner. Bu sırada yatay bileşenin ucu kağıt düzleminin içine doğru girerken, düşey bileşenin boyu ve yönü değişmez. Düşey bileşenin $\vec{H}$'nin türevine ($\dot{\vec{H}}$)

herhangi bir katkısı olmadığından hesaplanmasına bile gerek yoktur. Yatay bileşenin büyüklüğü ise aşağıdaki gibidir:

$$H_y = I_p \Omega \sin\alpha - I_d \omega_p \sin\alpha\cos\alpha \tag{5.111}$$

Aradan dt kadar bir zaman geçtiğinde Şekil 5.25b'deki diyagram $\omega_p dt$ açısı kadar döneceğinden ve H_y bileşeninin ucu,

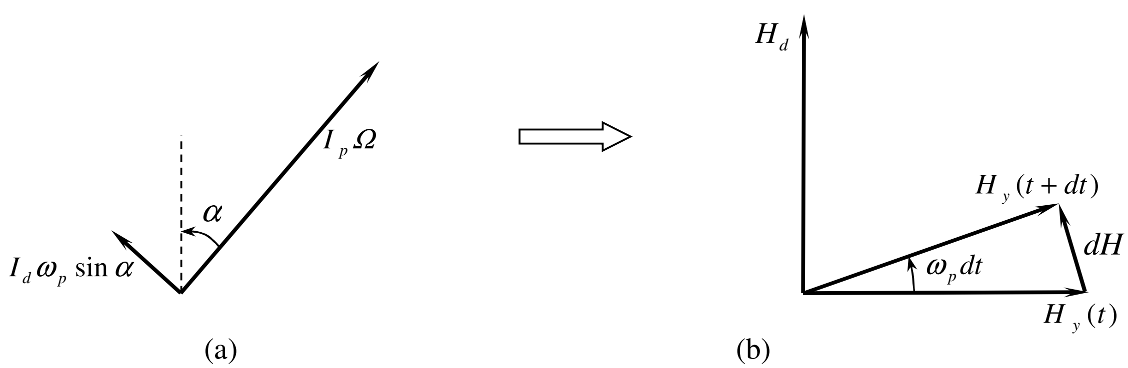
$$dH_{içeri} = (\omega_p dt) H_y = (\omega_p dt)(I_p \Omega \sin\alpha - I_d \omega_p \sin\alpha\cos\alpha) \tag{5.112}$$

kadar kağıt düzleminin içine gireceğinden, bu yöndeki $\dot{\vec{H}}$ bileşeni aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{içeri} = \omega_p (I_p \Omega \sin\alpha - I_d \omega_p \sin\alpha\cos\alpha) \tag{5.113}$$

Momentin aynı yöndeki bileşeni ise aşağıdaki gibidir:

$$M_{içeri} = Wh\sin\alpha \tag{5.114}$$



Şekil 5.25

Newton Kanunu gereği denklemler (5.113) ve (5.114)'ün sağ tarafları eşitlenirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\omega_p (I_p \Omega \sin\alpha - I_d \omega_p \sin\alpha\cos\alpha) = Wh\sin\alpha \tag{5.115}$$

Denklem (5.115)'in terimleri yeniden düzenlenirse,

$$\omega_p^2 - \omega_p \Omega \frac{I_p}{I_d\cos\alpha} + \frac{Wh}{I_d\cos\alpha} = 0 \tag{5.116}$$

elde edilir ve bu denklemden presesyon açısal hızı ω_p aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_p = \frac{1}{2}\left(\frac{I_p\Omega}{I_d\cos\alpha}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{I_p^2\Omega^2}{I_d^2\cos^2\alpha}\right) - \frac{Wh}{I_d\cos\alpha}} \tag{5.117}$$

Yukarıdaki denklem karekökün altındaki terim negatif olduğunda sanal kısma sahip bir değer verir. Bu ise varsayılan hareketin mümkün olmadığını gösterir. Topacın düşmeden dönebilmesi için karekökün altının pozitif olması ya da Ω hızının aşağıdaki şartı sağlaması gerekir:

$$\Omega^2 > \frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2} \tag{5.118}$$

Topacın düşme anındaki Ω değeri, Ω_m aşağıdaki gibidir:

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2}} \tag{5.119}$$

Düşme anındaki presesyon açısal hızı ω_{pm} ise denklem (5.119)'u denklem (5.117)'de yerine koyarak bulunur:

$$\omega_{pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_p\Omega_m}{I_d\cos\alpha}\right) = \frac{I_p}{2I_d\cos\alpha}\sqrt{\frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2}} \tag{5.120}$$

ya da,

$$\omega_{pm} = \sqrt{\frac{Wh}{I_d\cos\alpha}} \tag{5.121}$$

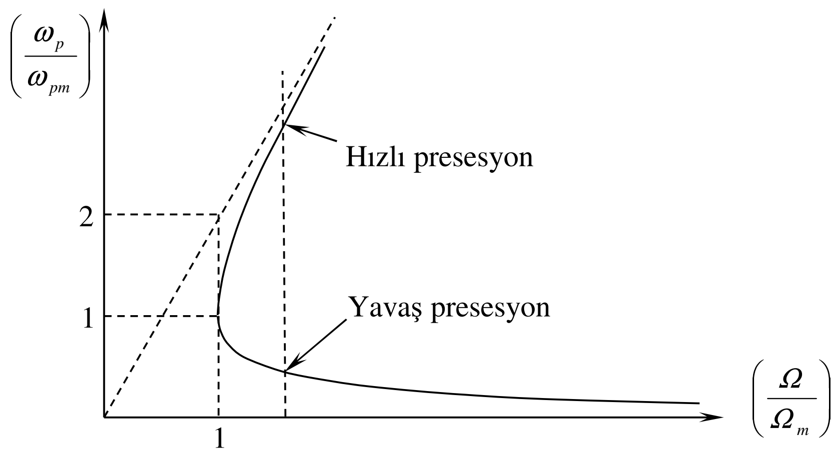
Şimdi ω_{pm} ve Ω_m terimlerini kullanarak denklem (5.117)'yi aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirelim:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{Wh}{I_d\cos\alpha}}\left(\frac{\omega_p}{\omega_{pm}}\right) &= \sqrt{\frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{I_p}{I_d\cos\alpha}\right)\left(\frac{\Omega}{\Omega_m}\right)\\ &\mp\sqrt{\frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2}\frac{1}{4}\left(\frac{I_p^2}{I_d^2\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_m^2}\right)-\frac{Wh}{I_d\cos\alpha}}\end{aligned} \tag{5.122}$$

ya da,

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_{pm}}\right) = \left(\frac{\Omega}{\Omega_m}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_m^2}\right)-1} \tag{5.123}$$

Bu denklemin tanımladığı ω_p/ω_{pm} ve Ω/Ω_m arasındaki ilişki Şekil 5.26'da grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.26

Şekilden görüldüğü gibi verilen bir Ω/Ω_m değeri için iki tane ω_p/ω_{pm} çözümü vardır. Bunlardan yüksek değerde olana hızlı presesyon, alçak değerde olana ise yavaş presesyon denir. Tabiatta görülen hareket yavaş presesyondur.

Ω/Ω_m 'nun çok büyük olması durumu için yavaş ve hızlı presesyon değerlerini bulalım. Eğer $y = \omega_p/\omega_{pm}$ ve $x = \Omega/\Omega_m$ olarak tanımlanırsa denklem (5.123),

$$y = x \mp \sqrt{x^2 - 1} = x \mp x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \tag{5.124}$$

şeklinde yazılabilir. Karekökün altındaki terim seri olarak açılırsa

$$y = x \mp x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x \mp x\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \cdots \textit{yüksek mertebe terimler}\right] \tag{5.125}$$

Eğer x çok büyükse yüksek mertebe terimler ihmal edilebilir; yavaş ve hızlı presesyon değerleri aşağıdaki gibi olur:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{(Yavaş presesyon)} \\ \\ 2x & \text{(Hızlı presesyon)} \end{cases} \tag{5.126}$$

Ω çok büyük ise, yavaş presesyonun hızı daha önce hızlı dönen topaç için bulunan presesyon hızıyla aynı olur:

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_{pm}}\right) = \frac{\Omega_m}{2\Omega} = \frac{1}{2\Omega}\sqrt{\frac{4I_d Wh\cos\alpha}{I_p^2}} = \frac{1}{I_p\Omega}\sqrt{I_d Wh\cos\alpha} \tag{5.127}$$

ya da,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Wh}{I_d\cos\alpha}}\left(\frac{1}{I_p\Omega}\right)\sqrt{I_d Wh\cos\alpha} = \frac{Wh}{I_p\Omega} \cong \frac{Wh}{H} \tag{5.128}$$

5.6.3 Yavaş Dönen Topaç – Genel Hal

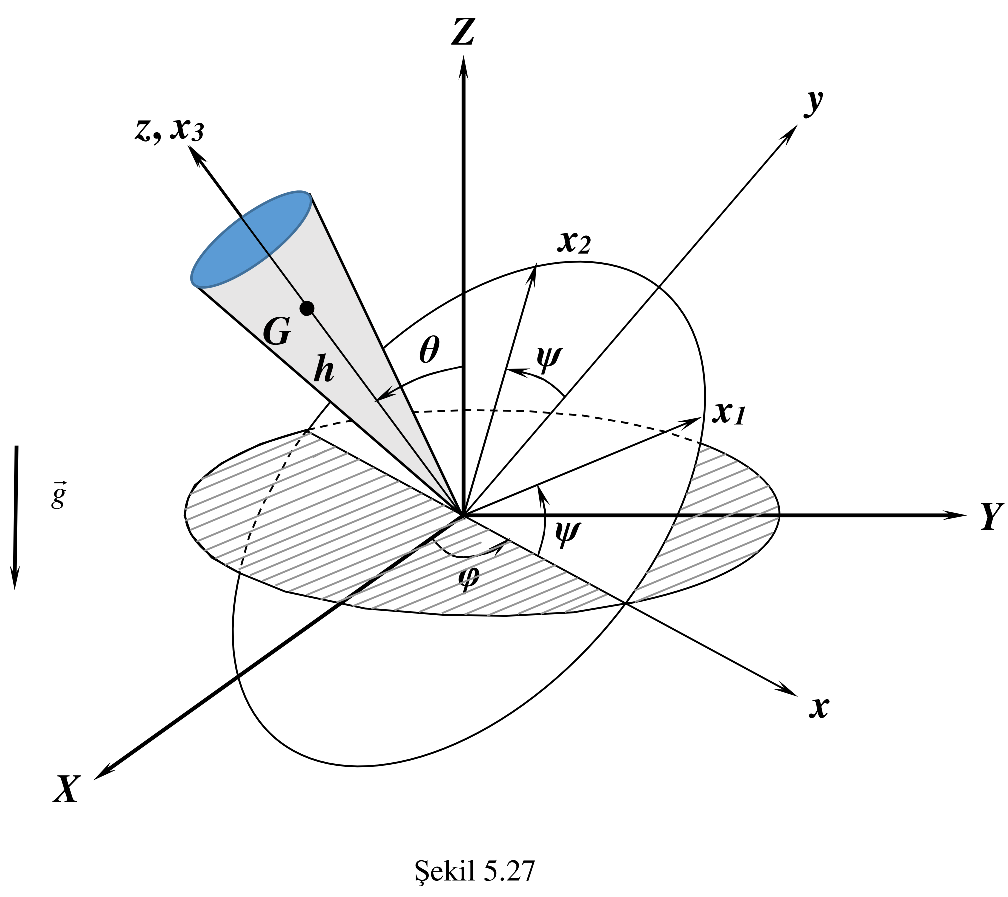
Bölüm 5.6.2'de yavaş dönen topaç için sunulan çözümde θ açısının sabit olduğu kabul edilmişti. Bu bölümde ise θ açısının da değiştiği genel bir çözüm elde edilecektir. (Fiziksel bir durumda hangi çözümün ortaya çıkacağını başlangıç koşulları belirler.) Aşağıda Şekil 5.27'de topacın Euler açıları görülmektedir. x_1, x_2 ve x_3 eksenleri topacın asal eksenleridir. Topaç x_3 eksenine göre simetriktir. Bu yüzden x_1 ve x_2 eksenlerine göre atalet momentleri birbirine eşit ve I_d olarak; x_3 eksenine göre olan atalet momenti ise I_p olarak alınacaktır. Topacın toplam kütlesi *M*, ağırlık merkezi *G*'nin topaç ucundan uzaklığı *h* olsun.

Şekil 5.27'de tanımlanan eksenler ve Euler açıları (θ, φ ve ψ) daha önce Şekil 5.1'de tanımlananlar gibidir. Bu durumdan yaralanarak, asal yönlerdeki açısal hız bileşenleri denklem (5.5)'den aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \tag{5.129}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \tag{5.130}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{5.131}$$



Şekil 5.27

Topacın kinetik ko-enerjisi açısal hız vektörünün asal yönlerdeki bileşenlerini kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T^* = \frac{1}{2} I_d (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_p \omega_3^2 \tag{5.132}$$

$$T^* = \frac{1}{2} I_d (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_p (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 \tag{5.133}$$

Potansiyel enerji terimi ise aşağıdaki gibidir:

$$V = Mgh \cos\theta \tag{5.134}$$

Bunlardan Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_d (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_p (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos\theta \tag{5.135}$$

Topacın yere dokunma noktası sabittir ve bu yüzden bu noktaya varyasyon uygulanamaz. Bu noktada gövdeye uygulanan kuvvetin genelleştirilmiş kuvvet terimlerine katkısı olmayacağından genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki gibidir:

$$Q_\theta = 0 \tag{5.136}$$

$$Q_\varphi = 0 \tag{5.137}$$

$$Q_\psi = 0 \tag{5.138}$$

ψ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \tag{5.139}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_p (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)\right] = I_p \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta) = 0 \tag{5.140}$$

ya da,

$$I_p (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta) = I_p \omega_3 = H_3 = sabit \tag{5.141}$$

Yukarıdaki denklemde H_3 terimi topacın simetri ekseni yönündeki açısal momentum bileşenidir ve hareket sırasında sabit kalmaktadır.

φ için Lagrange denklemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{5.142}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_d\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_p(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta\right]=0 \tag{5.143}$$

ya da,

$$I_d\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_p(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta = H_Z \ \ (sabit) \tag{5.144}$$

ya da,

$$I_d\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_p\omega_3\cos\theta = H_Z \ \ (sabit) \tag{5.145}$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki H_Z sabiti sistemin açısal momentumunun *Z*-ekseni yönündeki bileşeninin büyüklüğüdür. Bunun doğruluğu açısal momentum vektörü bileşenlerini yazarak aşağıdaki gibi kolayca gösterilebilir:

$$\vec{H} = I_d\omega_1\vec{u}_1 + I_d\omega_2\vec{u}_2 + I_p\omega_3\vec{u}_3 = I_d(\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi)\vec{u}_y + I_p\omega_3\vec{u}_3 \tag{5.146}$$

$$H_Z = I_d(\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi)\sin\theta + I_p\omega_3\cos\theta \tag{5.147}$$

Denklemler (5.129), (5.130) ve (5.131)'den ω_1, ω_2 ve ω_3 alınarak bu ifadede yerine koyulursa sonuç denklem (5.144) ile verilenle aynı olur:

$$\begin{aligned} H_Z &= I_d\left[(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi)\sin\psi + (\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi)\cos\psi\right]\sin\theta \\ &+ I_p(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = I_d\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_p(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta \end{aligned} \tag{5.148}$$

θ için Lagrange denklemi: :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \tag{5.149}$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[I_d\dot{\theta}\right] - \left[I_d\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - I_p(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta + Mgh\sin\theta\right] = 0 \tag{5.150}$$

ya da,

$$I_d\ddot{\theta} + (I_p\omega_3 - I_d\dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta - Mgh\sin\theta = 0 \tag{5.151}$$

Topacın dinamik davranışı denklemler (5.141), (5.145) ve (5.151) tarafından tanımlanır. Bu denklemlerin çözümü, yeni değişken tanımlamalarının yapılmasını ve fiziksel olarak mümkün olabilecek çözümlerin ayıklanmasını gerektirdiğinden oldukça karmaşıktır. Tam çözüm kaynak listesindeki kitaplarda yer aldığından burada verilmeyecek, bunun yerine çözümün özellikleri üzerinde durulacaktır. Daha önce Bölüm 5.2.2'de $\theta = \theta_0 = Sabit$ olan bir çözüm incelenmişti. Ancak, θ açısının sabit olmadığı çözümler de mümkündür. Bu çözümlerin hepsinde denklem (5.141) gereği ω_3 sabittir. Ancak θ ve φ açıları periyodik olarak değişir ve *z*-ekseninin uçu, merkezi orijinde olan bir küre üzerinde Şekil 5.28'deki yörüngelerden birini çizer. Bu çözümlerde θ açısının değişiminin sebep olduğu harekete *nütasyon* denir. Ne tür bir çözümün elde edileceği başlangıç koşullarına bağlıdır.

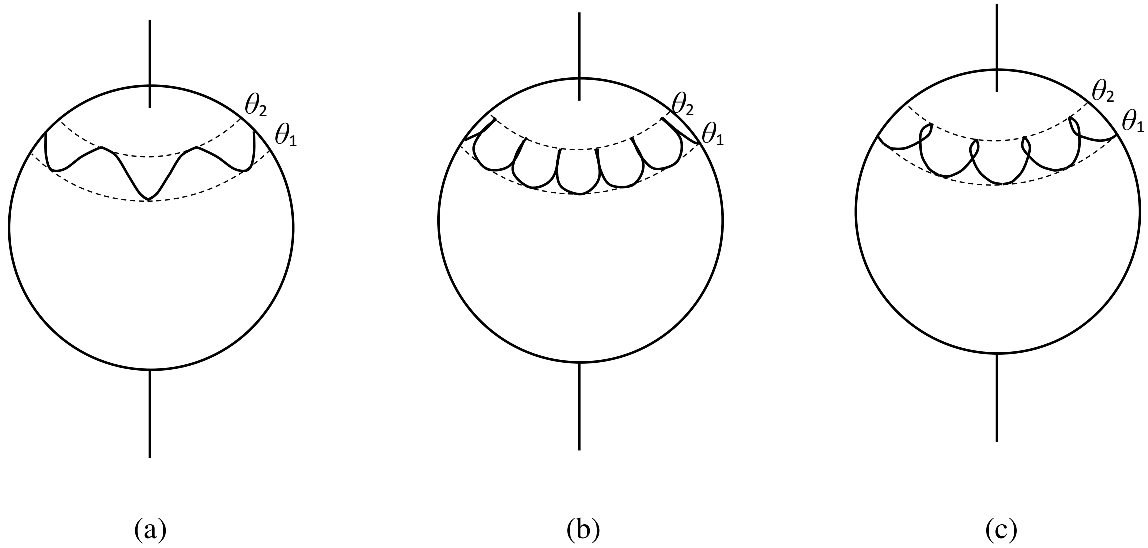


Figure 5.28

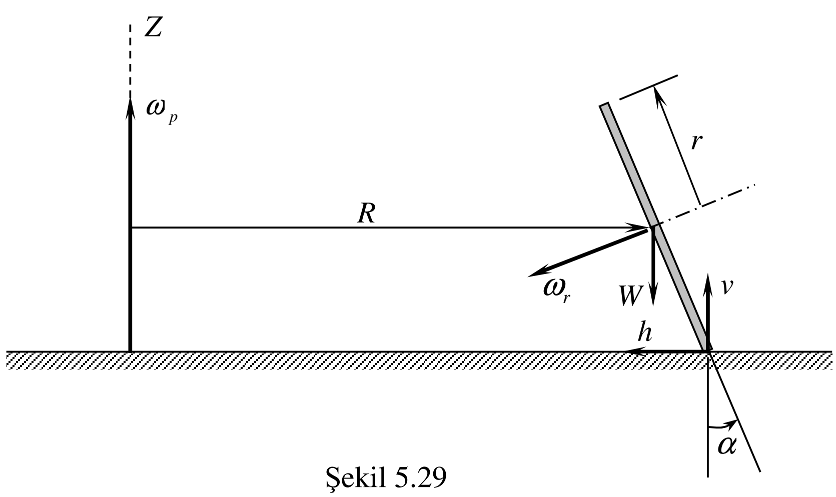
5.6.4 Yuvarlanan Disk

Şekil 5.29'da görülen ince disk sabit bir Z ekseni etrafında R yarıçaplı bir daire üzerinde ve düşeyle α açısı yaparak kaymadan yuvarlanmaktadır. Disk ince olduğundan $I_p = 2I_d$ kabul edilecektir. W diskin ağırlığını, ω_r diskin kendi ekseni etrafındaki açısal hızını, ω_p disk merkezinin Z etrafındaki açısal hızını göstermektedir.

Şekil 5.29'daki v ve h kuvvetleri yer tarafından diske uygulanan kuvvetin düşey ve yatay bileşenleridir. Hareket sırasında α açısı sabit olduğundan diskin ağırlık merkezinin düşey konumu sabit ve düşey yöndeki ivmesi sıfır olduğundan diske bu yönde uygulanan kuvvetlerin toplamı sıfırdır. Yani, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$v = W \tag{5.152}$$

Diskin ağırlık merkezi, Z etrafında ω_p açısal hızıyla R yarıçaplı bir çember üzerinde hareket ettiğinden ve merkeze doğru olan ivmesi $\omega_p^2 R$ olduğundan, h kuvveti aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.29

$$h = \frac{W}{g}\omega_p^2 R \tag{5.153}$$

Disk kaymadan yuvarlandığı için ω_r ve ω_p birbirinden bağımsız değildir. Bu ilişki aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$\omega_r = 0$ olsaydı, ω_p'nin sebep olacağı kayma hızı $= \omega_p (R + r\sin\alpha)$

$\omega_p = 0$ olsaydı, ω_r'nin sebep olacağı kayma hızı $= \omega_r r$

Kayma olmaması için bu iki kayma hızları birbirine eşitlenirse,

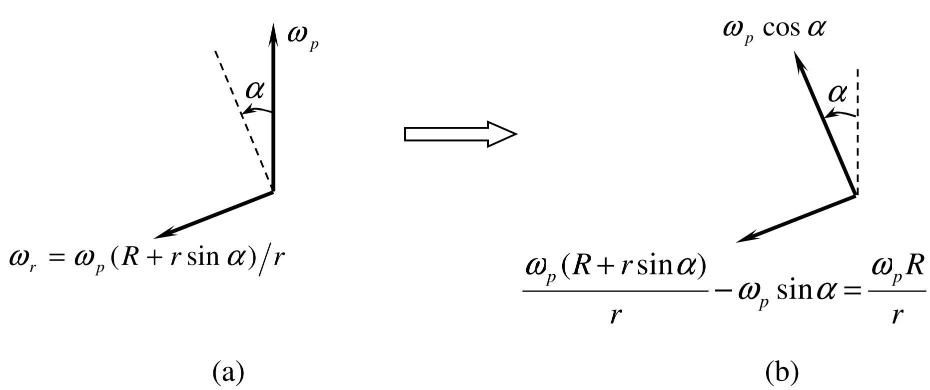
$$\omega_p (R + r\sin\alpha) = \omega_r r \tag{5.154}$$

ya da aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\omega_r = \frac{\omega_p (R + r\sin\alpha)}{r} \tag{5.155}$$

Verilmiş olan hız bileşenlerinin çizildiği vektör diyagramı Şekil 5.30a'da, bu bileşenlerden türetilmiş olan ve asal eksen yönlerindeki hız bileşenlerini gösteren vektör diyagramı ise Şekil 5.30b'de görülmektedir. Bileşenlerin büyüklükleri şekil üzerinde gösterilmiştir.

Şekil 5.30b'deki I_p ekseni yönündeki hız bileşenini I_p ile, I_d ekseni yönündeki hız bileşenini ise I_d ile çarparak açısal momentumun bu yönlerdeki bileşenleri Şekil 5.31a'daki gibi bulunabilir. Sistemin presesyon hareketi düşey eksen etrafında olmaktadır. Bu yüzden $\vec{H}$ vektörünün düşey bileşeni değişmez. Bu hususu dikkate alarak $\vec{H}$ vektörü Şekil 2.31b'de yatay ve düşey bileşenlerine (sırasıyla H_y ve H_d) ayrılmıştır. Bu şekilde görülen $\vec{H}$ vektör diyagramı presesyon hareketi sırasında düşey eksen etrafında ω_p açısal hızıyla döner ve yatay bileşenin ucu kağıt düzleminin dışına doğru çıkarken, düşey bileşenin boyu ve yönü



Şekil 5.30

değişmez. Düşey bileşenin $\vec{H}$'nin türevi $\dot{\vec{H}}$'ne bir katkısı olmadığından hesaplanmasına gerek yoktur. Yatay bileşenin büyüklüğü ise aşağıdaki gibidir:

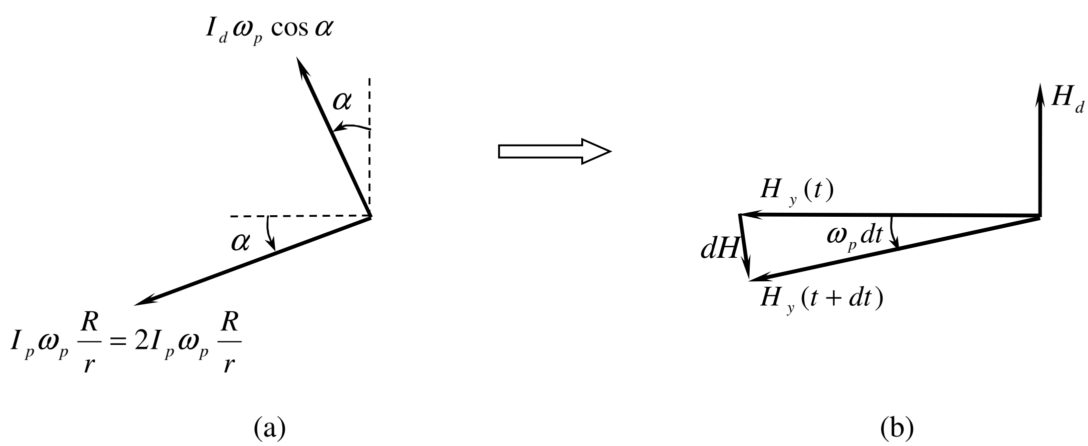
$$H_y = 2I_d\omega_p \frac{R}{r}\cos\alpha + I_d\omega_p \cos\alpha\sin\alpha = I_d\omega_p \cos\alpha\left(\frac{2R}{r} + \sin\alpha\right) \qquad (5.156)$$

dH vektörü ise dışarı yönde olup H_y'yi $\omega_p dt$ ile çarparak bulunur:

$$(dH)_{dışarı} = H_y(\omega_p dt) \qquad (5.157)$$

ya da,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{dışarı} = H_y\omega_p \qquad (5.158)$$



Şekil 5.31

Newton Kanunu gereği açısal momentumun dışarı yöndeki bileşeni gövdeye uygulanan toplam dış momentin aynı yöndeki bileşenine eşit olmak zorundadır. Diske uygulanan dış kuvvetler ağırlık kuvveti *W*, yer tarafından uygulanan kuvvetin yatay bileşeni *h* ile düşey bileşeni *v*'dir. Diskin ağırlık merkezi etrafında moment alınırsa, dışarı olan yön "+" kabul edilirse, moment aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M_{dışarı} = Wr\sin\alpha - hr\cos\alpha \qquad (5.159)$$

ya da,

$$M_{dışarı} = Wr\sin\alpha - \frac{W}{g}\omega_p^2 R\, r\cos\alpha \qquad (5.160)$$

Denklem (5.158) ve denklem (5.160)'nin sağ tarafları eşitlenir ve denklem (5.156)'dan H_y yerine koyulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

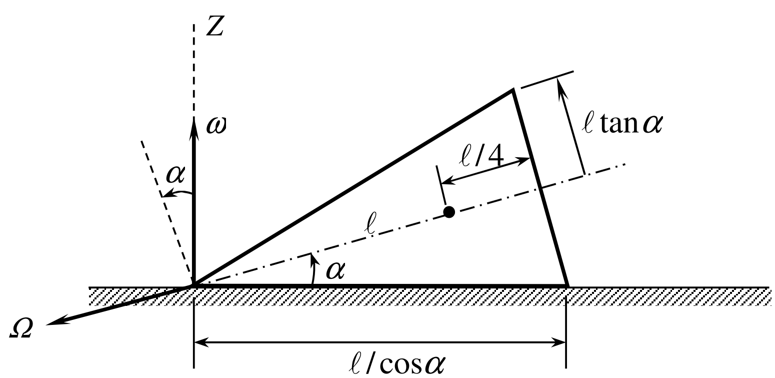
$$I_d \omega_p^2 \cos\alpha \left(\frac{2R}{r} + \sin\alpha \right) = W r \sin\alpha - \frac{W}{g} \omega_p^2 R\, r \cos\alpha \tag{5.161}$$

Bu denklemden ω_p aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{W r \sin\alpha}{I_d \cos\alpha \left(\frac{2R}{r} + \sin\alpha \right) + \frac{W}{g} R\, r \cos\alpha}} \tag{5.162}$$

5.6.5 Yuvarlanan Koni

Şekil 5.32'de görülen koni sabit olan Z ekseni etrafında kaymadan yuvarlanmaktadır. Bu hareket sırasında koninin tepe noktasının sabit kaldığı açıktır. Koninin tepe açısı 2α, yüksekliği ℓ, ağırlık merkezinin tabanından uzaklığı ise $\ell/4$'dür. Koninin kendi ekseni etrafındaki açısal hızı Ω, koni ekseninin Z etrafındaki açısal hızı ise ω'dır. Koninin hangi hızda devrileceği sorulmaktadır.



Şekil 5.32

Koni kaymadan yuvarlandığından ω ve Ω arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$\omega = 0$ olsaydı, Ω'nın sebep olacağı kayma hızı $= \Omega\, \ell \tan\alpha$

$\Omega = 0$ olsaydı, ω'nın sebep olacağı kayma hızı $= \omega \dfrac{\ell}{\cos\alpha}$

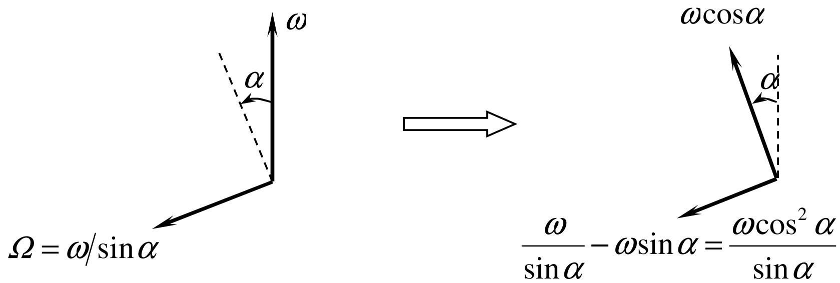
Kayma olmaması için bu iki kayma hızları birbirine eşitlenirse,

$$\omega \frac{\ell}{\cos\alpha} = \Omega\, \ell \tan\alpha \tag{5.163}$$

ya da aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\Omega = \frac{\omega}{\sin\alpha} \tag{5.164}$$

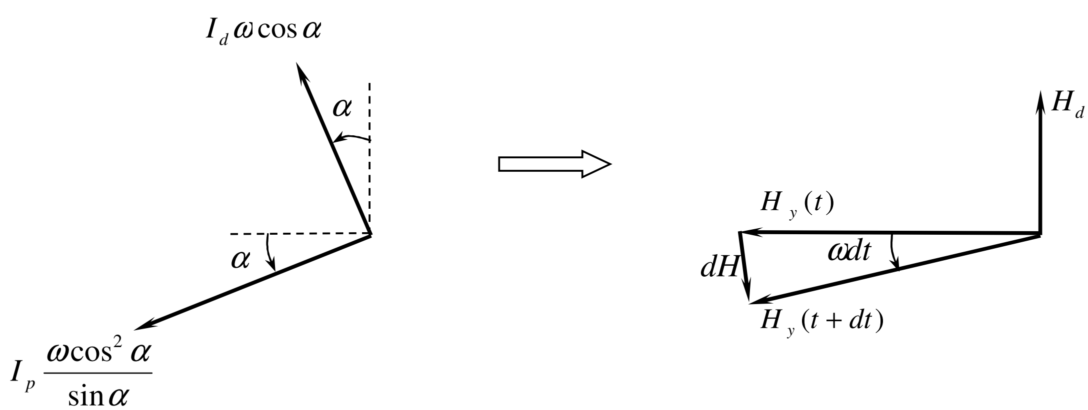
Bu problem için açısal hız diyagramları Şekil 5.33'de verilmiştir.



Şekil 5.33

Açısal momentum diyagramları ise Şekil 5.34'deki gibidir. Düşey etrafında bir moment uygulanmadığından koninin hareketi sırasında açısal momentumun düşey bileşeni H_d'nin yönü ve boyu değişmez. Bu yüzden bu bileşenin hesaplanmasına gerek yoktur. Yatay bileşen H_y'nin büyüklüğü ise aşağıdaki gibidir:

$$H_y = I_p \frac{\omega\cos^3\alpha}{\sin\alpha} + I_d\omega\cos\alpha\sin\alpha \tag{5.165}$$



Şekil 5.34

dH vektörü dışarı yönde olup H_y'yi ωdt ile çarparak bulunur:

$$(dH)_{dışarı} = H_y(\omega dt) \tag{5.166}$$

ya da,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{dışarı} = H_y\omega \tag{5.167}$$

Newton Kanunu gereği açısal momentumun dışarı yöndeki bileşeni gövdeye uygulanan toplam dış momentin aynı yöndeki bileşenine eşit olmak zorundadır:

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{dışarı} = M_{dışarı} \tag{5.168}$$

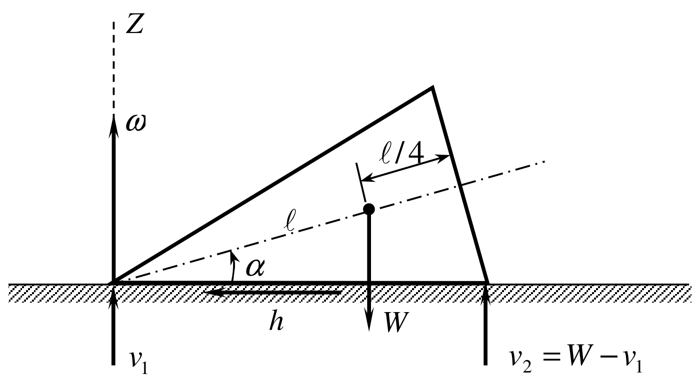
Koniye uygulanan bütün dış kuvvetler kağıt düzlemi içindedir. Şekil 5.35'de gösterilen bu kuvvetler ağırlık kuvveti *W*, yer tarafından uygulanan kuvvetin yatay bileşeni *h*, yer tarafından uygulanan düşey kuvvetler v_1 ve v_2'dir. (Zemin ve koni elastik malzeme kabul edilmiş ve bu yüzden düşey kuvvetler dokunma çizgisinin iki ucunda alınmıştır.)

Koninin ağırlık merkezi düşey yönde herhangi bir ivmeye sahip olmadığından v_1 ve v_2 arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$v_2 = W - v_1 \tag{5.169}$$

Yatay kuvvet *h* ise Newton Kanunu gereği ağırlık merkezini radyal ivmesinin büyüklüğüyle koninin kütlesini çarparak bulunur:

$$h = \frac{W}{g}\left(\omega^2 \frac{3}{4}\ell\cos\alpha\right) \tag{5.170}$$



Şekil 5.35

Devrilme anında $v_1 = 0$ ve $v_2 = W$ olur. Bu durum için denklem (5.168) yazılarak koninin devrileceği hız bulunabilir. Koninin sabit olan uçu etrafında moment alarak denklem (5.168) yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left[I_p \frac{\omega\cos^3\alpha}{\sin\alpha} + I_d\,\omega\cos\alpha\sin\alpha\right]\omega = \frac{W\ell}{\cos\alpha} - W\frac{3}{4}\ell\cos\alpha \tag{5.171}$$

Denklem (5.168) istenirse ağırlık merkezi etrafında da moment alarak da yazılabilir:

$$\left[I_p \frac{\omega\cos^3\alpha}{\sin\alpha} + I_d\,\omega\cos\alpha\sin\alpha\right]\omega = W\left(\frac{\ell}{\cos\alpha} - \frac{3}{4}\ell\cos\alpha\right) - \frac{W}{g}\left(\omega^2\frac{3}{4}\ell\cos\alpha\right)\frac{3}{4}\ell\sin\alpha$$

(5.172)

Koninin devrileceği hız ω_k denklem (5.171) veya denklem (5.172)'den çözülebilir. Denklem (5.171) aşağıdaki sonucu verir:

$$\omega_k^2 = \frac{\dfrac{W\ell}{\cos\alpha} - W\dfrac{3}{4}\ell\cos\alpha}{I_p\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} + I_d\cos\alpha\sin\alpha} \qquad (5.173)$$

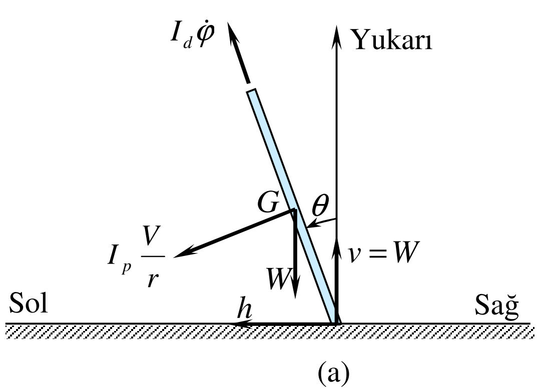
Denklem (5.172)'den ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

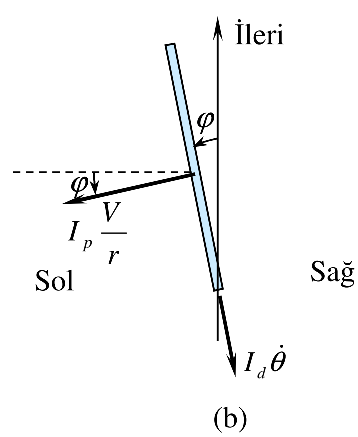
$$\omega_k^2 = \frac{\dfrac{W\ell}{\cos\alpha} - W\dfrac{3}{4}\ell\cos\alpha}{I_p\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\sin\alpha\left[I_d + \dfrac{W}{g}\left(\dfrac{3}{4}\ell\right)^2\right]} \qquad (5.174)$$

Denklem (5.173) ve denklem (5.174) farklı görünümlerine rağmen aynı sonucu verirler. Zira denklem (5.173) ve denklem (5.174)'deki I_p ve I_d'nin tanımları farklıdır. Atalet momentleri denklem (5.173)'de koninin tepe noktasından geçen asal eksenlere göre, denklem (5.174)'de ise ağırlık merkezinden geçen asal eksenlere göre tanımlanmıştır.

5.6.6 Yalpalı Yuvarlanan Teker

Yarıçapı r olan bir teker düz bir zemin üzerinde ileri doğru V hızıyla, yalpalayarak ve kaymadan yuvarlanmaktadır. Tekerin arkadan görünümü Şekil 5.36a'da, üsten görünümü ise Şekil 5.36b'de verilmiştir. Herhangi bir anda tekerin düşeyden ayrılma açısı θ, ileri yönden sapma açısı ise φ kadardır. θ ve φ açıları küçüktür. Tekerin dinamik davranışını tanımlayan denklemlerin yazılması istenmekte ve devrilmemesi için minimum yuvarlanma hızının ne olması gerektiği sorulmaktadır.





Şekil 5.36

Asal yönlerdeki açısal momentum bileşenleri aynı yönlerdeki açısal hız bileşenlerinden yararlanarak bulunmuş ve Şekil 5.36'da gösterilmiştir. Bu bileşenlerden yararlanarak açısal momentum bileşenlerinin *ileri*, *yukarı* ve *sola* doğru yönlerdeki bileşenleri sırasıyla *i*, *y* ve *s* indisleriyle gösterilerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{H} = \left(-I_p \frac{V}{r}\varphi - I_d\dot{\theta}\right)\vec{u}_i + \left(I_d\dot{\varphi} - I_p \frac{V}{r}\theta\right)\vec{u}_y + \left(I_p \frac{V}{r} + I_d\dot{\varphi}\theta - I_d\dot{\theta}\varphi\right)\vec{u}_s \tag{5.175}$$

Bu denklemdeki son iki terim küçük θ ve φ değerleri için ihmal edilebildiğinden, denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\vec{H} = \left(-I_p \frac{V}{r}\varphi - I_d\dot{\theta}\right)\vec{u}_i + \left(I_d\dot{\varphi} - I_p \frac{V}{r}\theta\right)\vec{u}_y + \left(I_p \frac{V}{r}\right)\vec{u}_s \tag{5.176}$$

Bu ifadenin türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{\vec{H}} = \left(-I_p \frac{V}{r}\dot{\varphi} - I_d\ddot{\theta}\right)\vec{u}_i + \left(I_d\ddot{\varphi} - I_p \frac{V}{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_y = \dot{H}_i\vec{u}_i + \dot{H}_y\vec{u}_y \tag{5.177}$$

Newton Kanunu *i* ve *y* yönlerindeki bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-I_p \frac{V}{r}\dot{\varphi} - I_d\ddot{\theta} = M_y = hr - Wr\theta \tag{5.178}$$

$$I_d\ddot{\varphi} - I_p \frac{V}{r}\dot{\theta} = M_y = 0 \tag{5.179}$$

Denklem (5.178)'de geçen *h* kuvveti Newton Kanunu gereği tekerin kütlesi *m* ile ağırlık merkezi *G*'nin sola doğru olan ivmesinin çarpımına eşit olduğundan aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$h = ma_G = m\frac{dv_G}{dt} = m\frac{d}{dt}(r\dot{\theta} + V\varphi) \tag{5.180}$$

$$h = m(r\ddot{\theta} + V\dot{\varphi}) \tag{5.181}$$

Denklem (5.181)'den alınan *h* denklem (5.178)'de yerine koyulursa, dinamik denklemler aşağıdaki hale gelir:

$$I_p \frac{V}{r}\dot{\varphi} + I_d\ddot{\theta} = Wr\theta - m(r\ddot{\theta} + V\dot{\varphi})r \tag{5.182}$$

$$I_d\ddot{\varphi} - I_p \frac{V}{r}\dot{\theta} = 0 \tag{5.183}$$

Denklem (5.182) ve denklem (5.183) arasında θ yok edilir ve elde edilen denklemin terimleri düzenlenirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left[\frac{I_d^2 r}{I_p V} + mr^3\,\frac{I_d}{I_p V}\right]\frac{d^4\varphi}{dt^4} + \left[I_p\,\frac{V}{r} - \frac{Wr^2 I_d}{I_p V} + mrV\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \qquad (5.184)$$

Bu denklemin çözümü,

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t \qquad (5.185)$$

şeklinde ω frekanslı harmonik bir fonksiyondur. θ'nın çözümü de yine aynı frekansta bir harmonik fonksiyondur. Dolayısıyla teker ileri doğru yuvarlanırken hem düşey hem de yatay yönde ω frekansıyla yalpalayarak gider. ω frekansı aşağıdaki ifadeyle belirlenir:

$$\omega = \sqrt{\frac{I_p\,\dfrac{V}{r} - \dfrac{Wr^2 I_d}{I_p V} + mrV}{\dfrac{I_d^2 r}{I_p V} + mr^3\,\dfrac{I_d}{I_p V}}} \qquad (5.186)$$

Yukarıda tanımlanan yalpalı yuvarlanma ancak denklem (5.186) reel bir çözüm verdiği takdirde, yani karekökün altı pozitif ise mümkündür. Yani, tekerin devrilmeden yuvarlanması için şart aşağıdaki gibidir:

$$I_p\,\frac{V}{r} - \frac{Wr^2 I_d}{I_p V} + mrV \geq 0 \qquad (5.187)$$

ya da,

$$V^2 \geq \frac{Wr^2 I_d}{I_p\left(\dfrac{I_p}{r} + mr\right)} \qquad (5.188)$$

ya da,

$$V^2 \geq \frac{\dfrac{W}{m} r I_d}{I_p\left(\dfrac{I_p}{mr^2} + 1\right)} \qquad (5.189)$$

ya da,

$$V^2 \geq \frac{I_d\, gr}{I_p\left(\dfrac{I_p}{mr^2} + 1\right)} \qquad (5.190)$$

Çok ince bir teker için $I_p = 2I_d$ olduğundan devrilmeden yuvarlanma şartı aşağıdaki hale gelir:

$$V^2 \geq \frac{gr}{2\left(\frac{I_p}{mr^2}+1\right)} \tag{5.191}$$

Eğer ince tekerin içi dolu ve kütlesi muntazam dağılmışsa, $I_p = \frac{1}{2}mr^2$ olduğundan, şart aşağıdaki gibidir:

$$V^2 \geq \frac{gr}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{gr}{3} \tag{5.192}$$

Eğer ince teker bir çember şeklindeyse, $I_p = mr^2$ olduğundan, devrilmeden yuvarlanma şartı aşağıdaki hali alır:

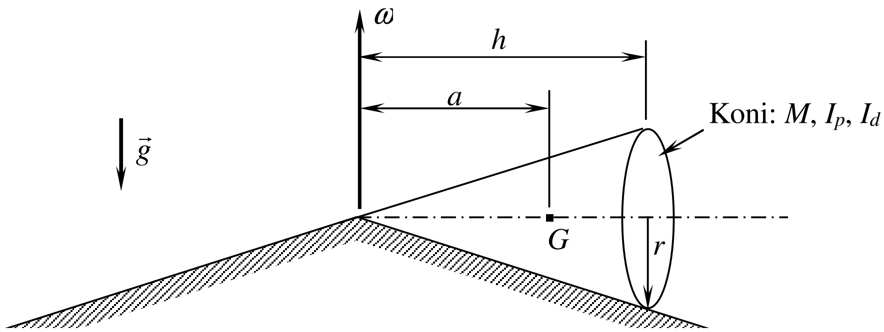
$$V^2 \geq \frac{gr}{2(1+1)} = \frac{gr}{4} \tag{5.193}$$

Denklemler (5.192) ve (5.193)'den görüldüğü gibi, bir çember içi dolu bir tekere göre daha düşük hızlarda devrilmeden yuvarlanabilir.

PROBLEMLER

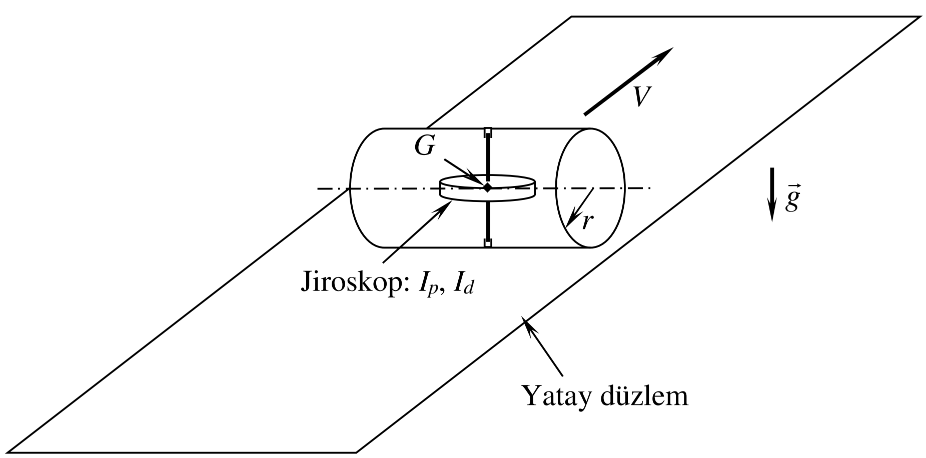
Problem 5.1

Şekildeki koninin simetri ekseni yataydır. Bu koni, sabit bir konik yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanmakta ve bu sırada simetri ekseni düşey etrafında ω açısal hızıyla dönmektedir. Bu hareket ω'nın hangi değerleri için mümkündür. ω'nın değeri kritik değerin üzerine çıkarsa ne olur?



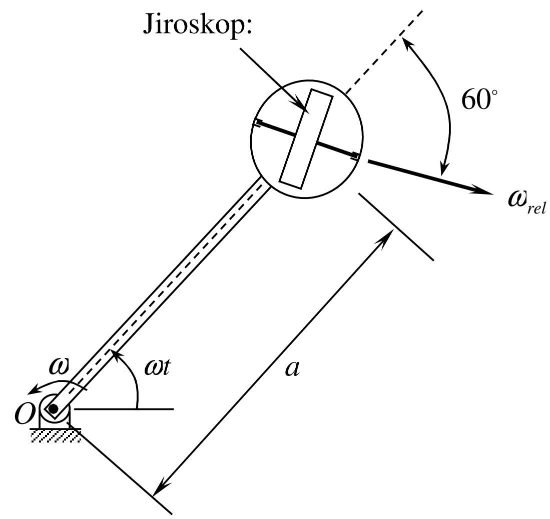
Problem 5.2

Şekilde görülen silindirin içinde çap üzerinde yataklanmış bir jiroskop vardır. Jiroskopun açısal hızı Ω çok büyüktür. Jiroskop ve silindirin toplam ağırlığı M olup, ortak ağırlık merkezi G jiroskopun merkezindedir. Silindir yatay düzlemde V lineer hızı ile yuvarlanırsa, düzlemle arasındaki dokunma kuvvetlerini bulun. Silindir hangi V hızında düzlemden ayrılmaya başlar?



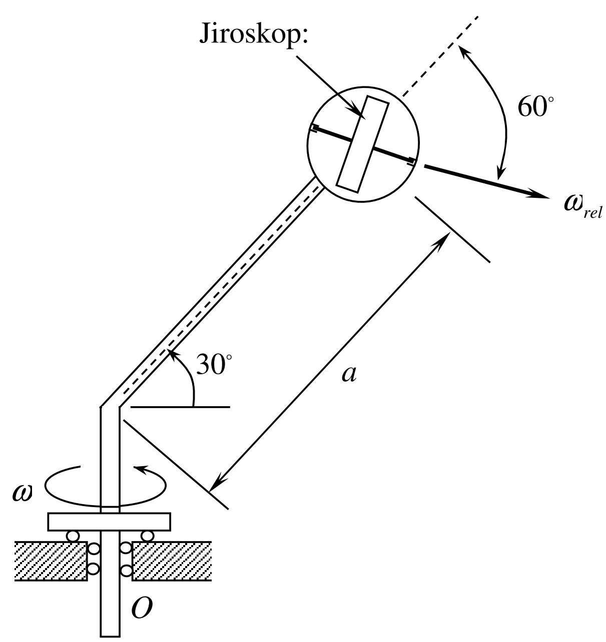
Problem 5.3

Şekildeki sistemde jiroskopun kendi ekseni etrafındaki açısal hızı çok büyüktür. Kol O noktası etrafında ve kağıt düzlemi içinde ω açısal hızıyla döndürülürse, kol tarafından O'daki yataklara uygulanan momentin büyüklüğü ve yönü ne olur?



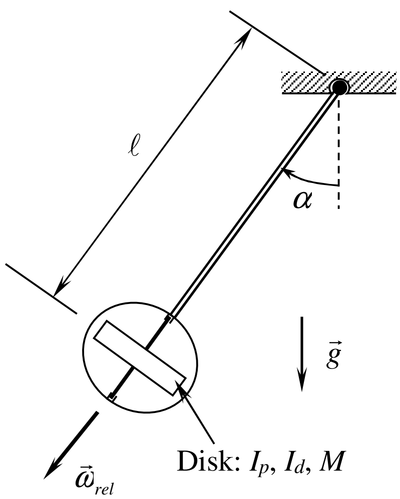
Problem 5.4

Şekildeki sistemde jiroskopun kendi ekseni etrafındaki açısal hızı çok büyüktür. Kol düşey eksen etrafında ω açısal hızıyla döndürülürse, kol tarafından O'daki yataklara uygulanan momentin büyüklüğü ve yönü ne olur?

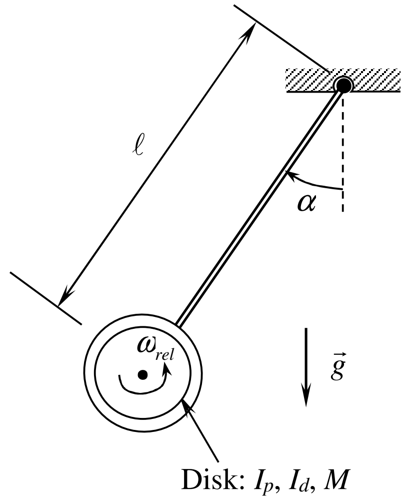


Problem 5.5

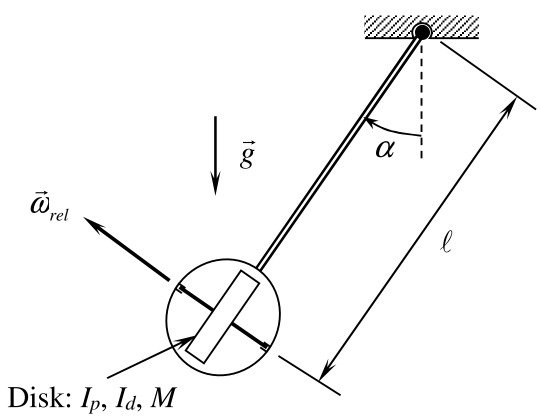
Aşağıdaki sarkaçlarda jiroskop diskleri dışındaki elemanlar kütlesizdir. Kolları yukarı bağlayan yataklar küreseldir. $t=0$'da sarkaçlar düşeyle α açısı yaparken bırakılırsa $t>0$ için nasıl bir hareket yapacaklarını açıklayın. Presesyon hareketi yapacak olanların presesyon açısal hızlarını ve yönlerini bulun.



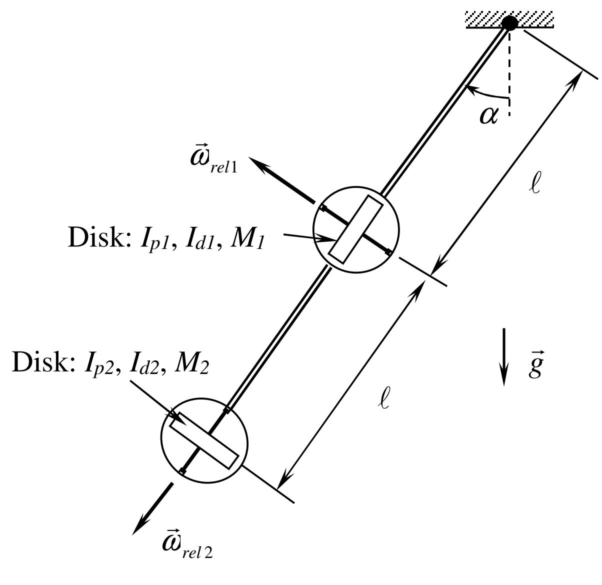
(a)



(b)



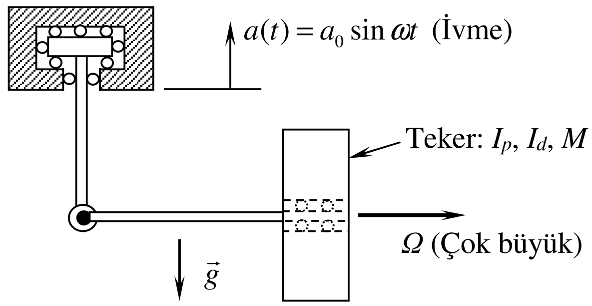
(c)



(d)

Problem 5.6

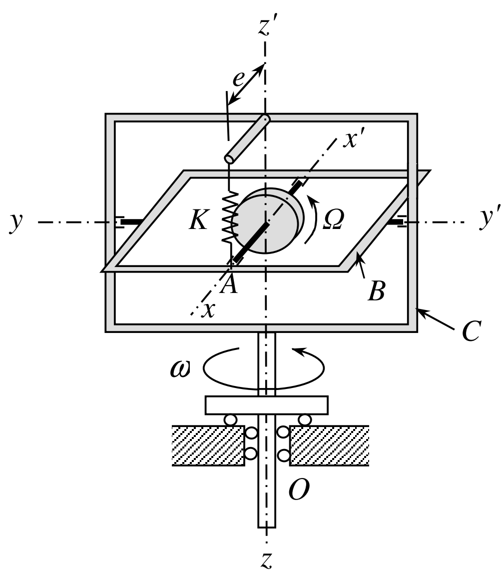
Aşağıdaki sistemin düşey etrafındaki presesyon açısal hızı için bir ifade bulun.



Not: Miller kütlesizdir.

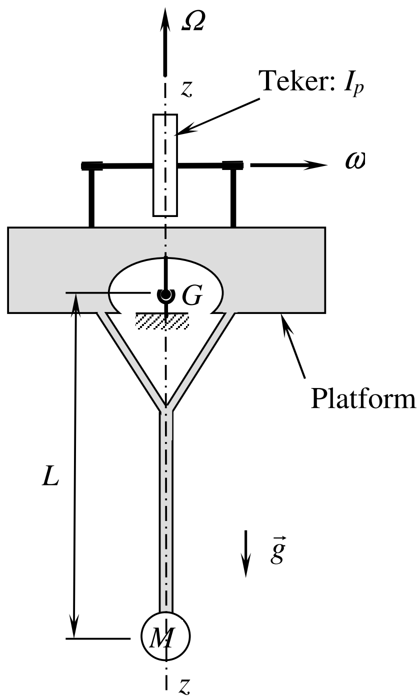
Problem 5.7

Aşağıda atalet navigasyon sistemlerinde kullanılan açısal hız jiroskopunun basit bir modeli verilmiştir. Jiroskop diski *B* çerçevesine yataklanmış olup, xx' ekseni etrafında çok yüksek bir Ω hızıyla dönmektedir. *B* çerçevesi ise yy' ekseni etrafında *C* çerçevesine yataklanmıştır. *C* çerçevesi ise zz' ekseni etrafında yataklanmıştır. *B* ve *C* çerçeveleri arasında zz' ekseni boyunca esneyen bir *K* yayı vardır. Yay serbest boyda iken xx', yy' ve zz' eksenleri birbirine diktir. zz' ekseni etrafında sabit bir ω açısal hız uygulandığında *B* çerçevesinin yy' ekseni ekseni etrafındaki dönme açısı θ ne olur?



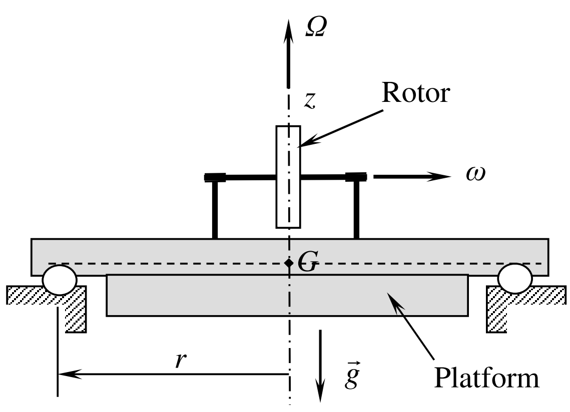
Problem 5.8

Bir platform üzerine bağlanmış olan bir rotor çok yüksek sabit bir ω hızında döndürülmektedir. Platform ve rotor, ortak ağırlık merkezi G'de küresel bir yatakla yataklanmıştır. Platformun altında L uzunlukta bir kolun ucunda M noktasal kütlesi vardır. Platform zz' düşey ekseni etrafında Ω açısal hızıyla dündürülmeye zorlanırsa kolun düşeyden ayrılma açısı ne olur?



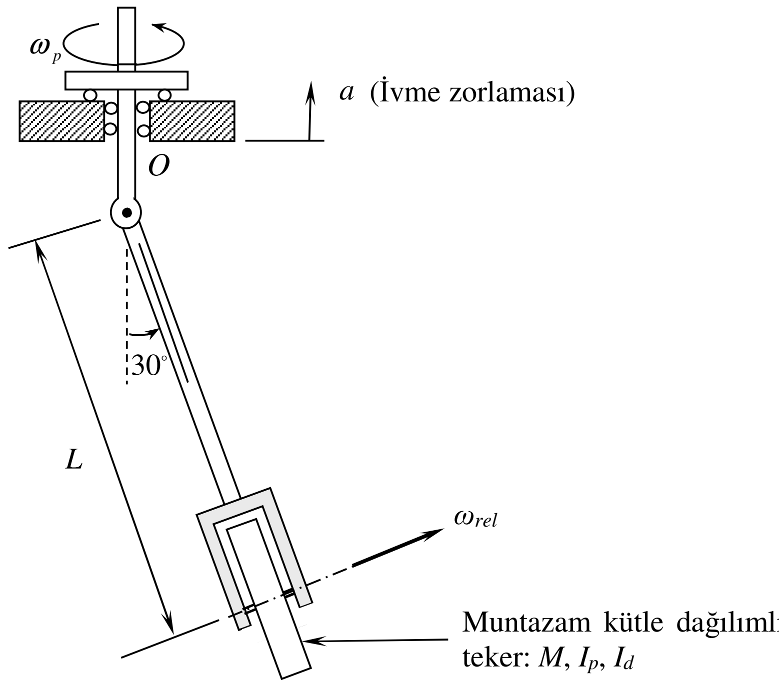
Problem 5.9

Aşağıdaki sistemde platform r yarıçapında bilyalı düzlemsel bir yatak üzerine serbestçe oturtulmuş olup, düşey eksen etrafında Ω açısal hızıyla dönmeye zorlanmaktadır. Platformun üzerinde yatay eksen etrafında bir rotor ω sabit hızıyla döndürülmektedir. Rotorun atalet momentleri I_p ve I_d'dir. Platform ve rotorun toplam kütlesi M olup, ortak ağırlık merkezi G düşey eksen üzerinde ve platformun bilyelere dokunma düzlemindedir. Platformun devrilmeden döndürülebileceği maksimum Ω hızını bulun. (Devrilme anında platformun yatağa tek noktada dokunduğunu varsayın. Platformun atalet momentlerini ihmal edin.)



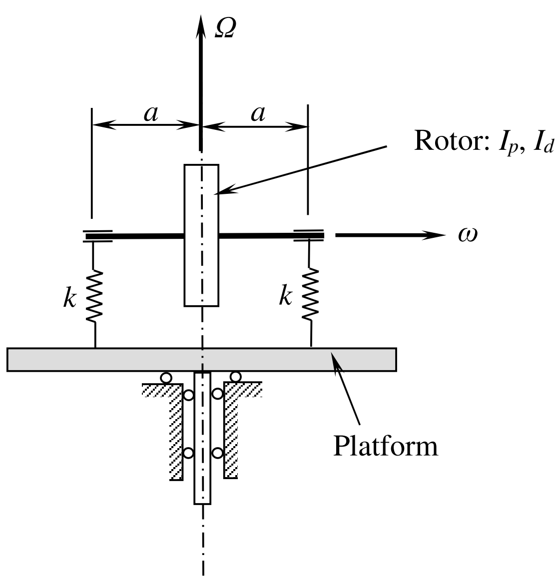
Problem 5.10

Aşağıdaki sistemde jiroskop tekeri dışındaki bütün parçalar kütlesizdir. Teker yavaş bir ω_{rel} açısal hızıyla dönmektedir. Yerçekimi yoktur. Buna karşılık platform a ivmesine sahiptir. Presesyon açısal hızı ω_p 'yi bulun.



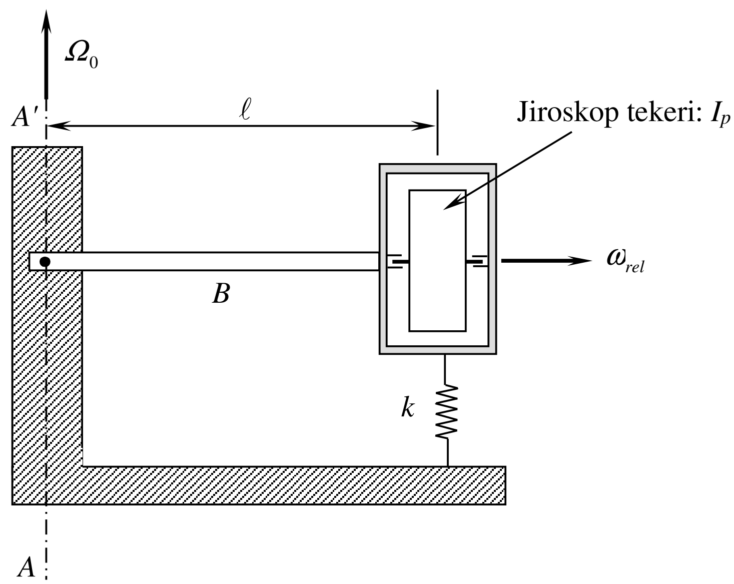
Problem 5.11

Şekildeki rotor yüksek bir ω hızıyla kendi ekseni etrafında döndürülmektedir. Rotor mili k sabitli yaylarla yatay olarak askıya alınmıştır. Rotor milinin yataydan en çok küçük bir α_0 açısı kadar ayrılması istenirse platform düşey eksen etrafında en fazla hangi hızla döndürülebilir?



Problem 5.12

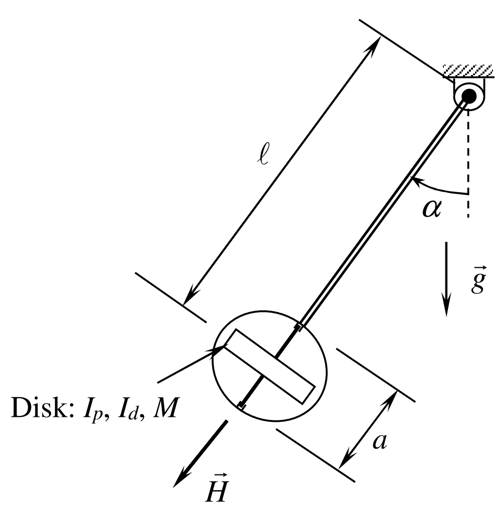
Şekildeki sistem AA' etrafında Ω_0 açısal hızıyla döndürülmekte iken B kolu yataydır ($\omega_{rel} >> \Omega_0$). Dönme sırasında k sabitli yay x_0 kadar esnediğine göre, sistem parametreleri cinsinden Ω_0 nedir? Yerçekimi yoktur. Jiroskop tekeri dışındaki elemanlar kütlesizdir.



Problem 5.13

Aşağıdaki sistemde disk dışındaki elemanlar kütlesizdir. Disk yüksek bir hızla döndüğünden açısal momentum vektörü dönme ekseni üzerinde kabul edilebilir. Diskin monte edildiği yataklar arasındaki uzaklık a kadardır.

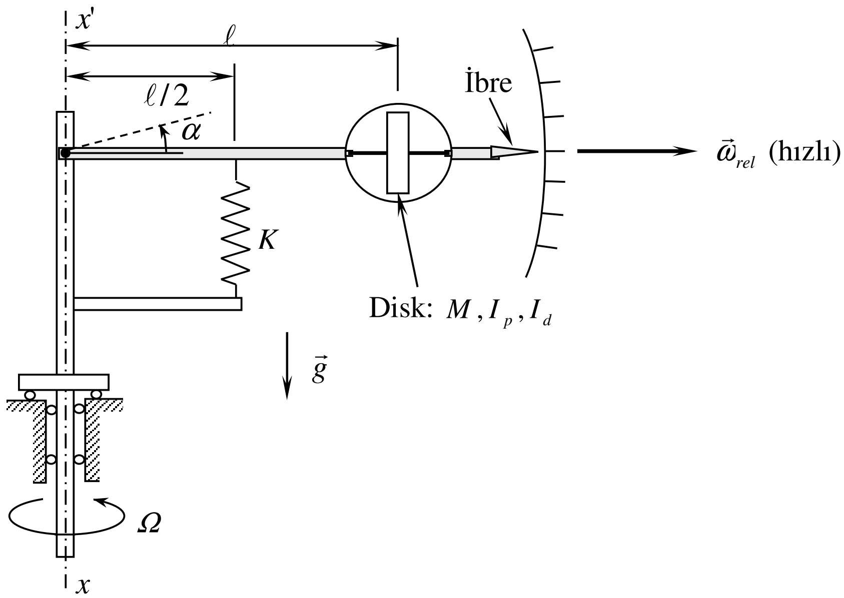
a) Sarkacın küçük genlikli salınımlar için salınım frekansını bulun.
b) Salınım sırasında disk yataklarında oluşan kuvvetin büyüklük ve yönünü bulun. Sarkaç en alt noktadan geçerken kuvvetin büyüklüğü ve yönü nedir?



Problem 5.14

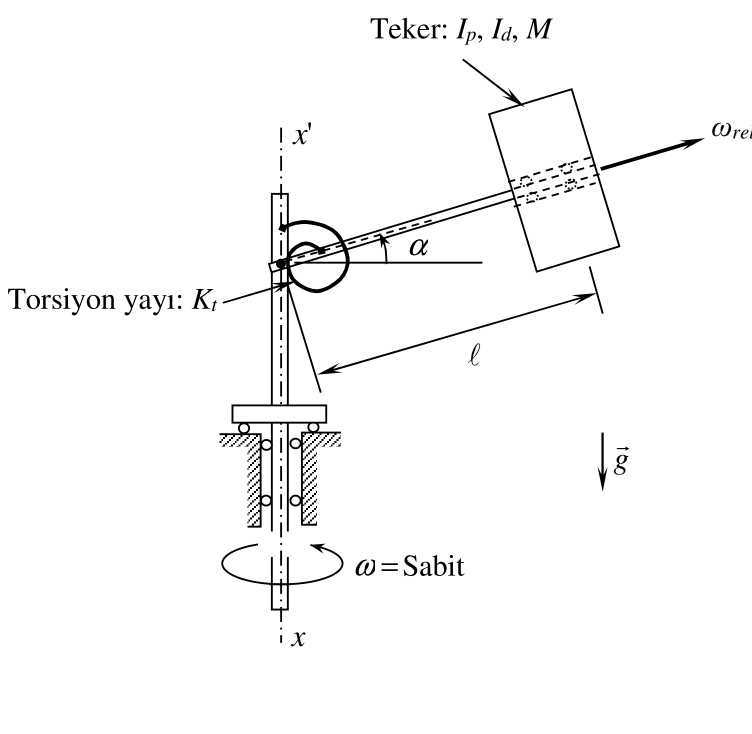
Aşağıdaki sistemin *xx’* ekseni etrafındaki açısal hızını ölçmek için bir düzenek görülmektedir. $\Omega = 0$ iken ibre yatay konumda ve sıfırı göstermektedir.

a) Sistemin çalışma prensibini açıklayın. $\Omega = \Omega_0$ ($\Omega_0 > 0$) gibi sabit bir değer ise ibre hangi yöne sapar?
b) Küçük Ω hızları için Ω ve kolun yataydan ayrılma açısı α arasında uygun sistem parametrelerini içeren bir ifade bulun.



Problem 5.15

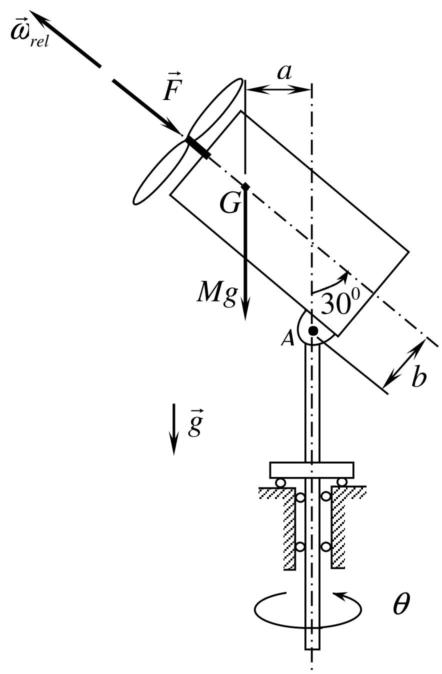
Şekildeki sistemde $\omega = 0$ iken kol yataydır. $\omega \neq 0$ olduğunda, verilen parametreler ve hızlar cinsinden α (α büyük) açısını veren bir ifade bulun.



Problem 5.16

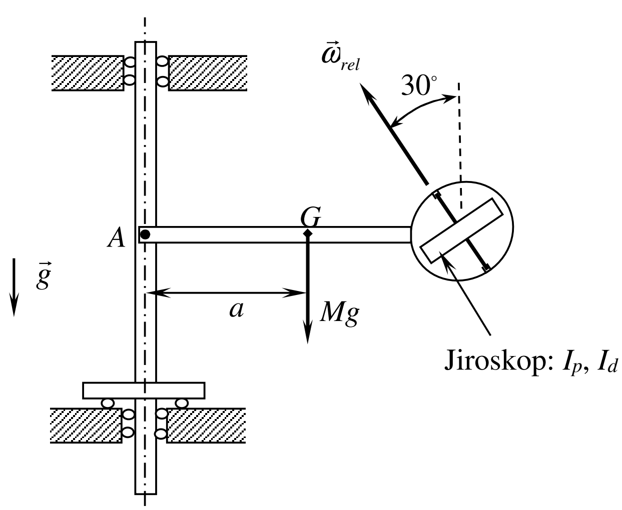
Şekildeki vantilatörde F üflenen havanın reaksiyon kuvvetidir. Motor rotorunun ağırlık merkezi G'ye göre atalet momentleri I_p, I_d'dir. (Diğer parçalar kütlesizdir.)

a) A'daki yatak gevşek bırakılır ise vantilatörün düşey etrafındaki açısal hızını bulun.
b) A'daki yatak sıkıştırılarak kilitlenmiş ise ve düşey milin açısı $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ şeklinde değiştirilirse, mil tarafından vantilatör gövdesine A noktasında uygulanan momentin büyüklüğü ve yönü ne olur?



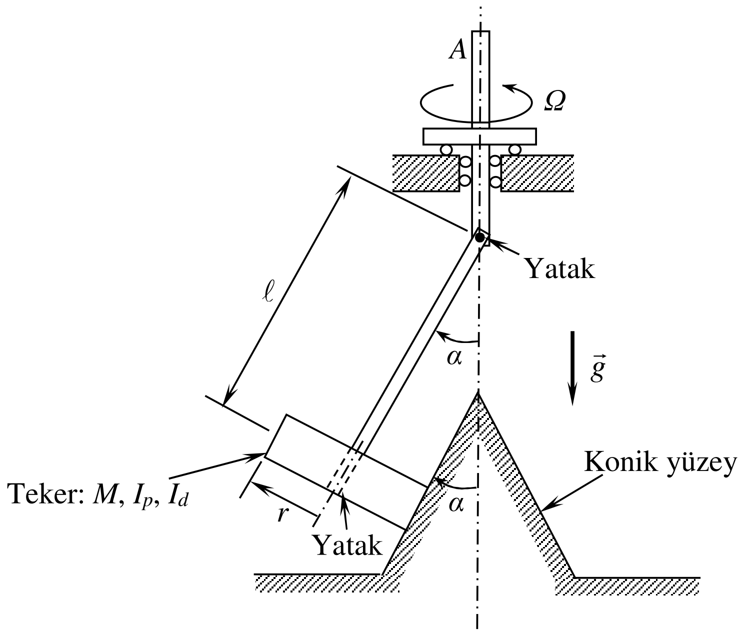
Problem 5.17

Şekildeki sistemde kola yavaş dönen bir jiroskop monte edilmiştir. Kol düşey eksen etrafında dönebilen bir mile A ucundan eklemle bağlıdır. Kol yatayken jiroskop ekseni düşeyle 30° açı yapmaktadır. Kol ve jiroskopun toplam kütlesi M olup, ortak ağırlık merkezi G noktasındadır. Kol yatay durumdaykan presesyon açısal hızı için bir ifade bulun. Bu presesyon hareketinin mümkün olması için ω_{rel} hızının büyüklüğü en az ne olmalıdır?



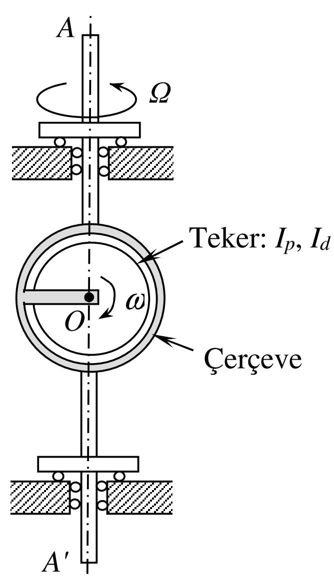
Problem 5.18

Aşağıdaki sistemde A mili sabit bir Ω açısal hızıyla döndürülmektedir. Bu mile yataklanmış ℓ uzunluğundaki kol da aynı hızla düşey eksen etrafında dönmekte ve dönerken üzerine yataklanmış olan teker konik yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Tekerin konik yüzeye uyguladığı normal yöndeki kuvveti bulun.



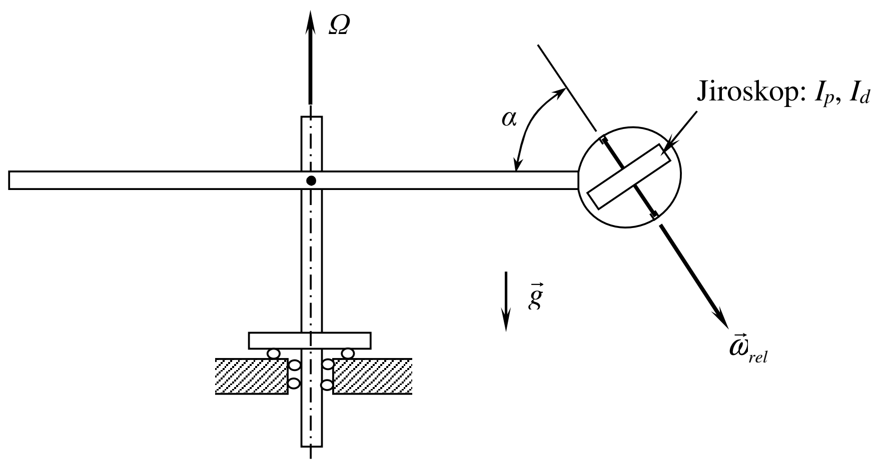
Problem 5.19

Şekildeki teker O'dan geçen yatay eksen etrafında çerçeveye yataklanmış olarak ω hızıyla dönmektedir. Çerçeve ise düşey eksen AA' etrafında Ω hızıyla döndürülmektedir. ω ve Ω hızları birbirine göre ihmal edilemediğine göre sistemin AA' üzerindeki yataklara uyguladığı momentin büyüklüğünü ve yönünü bulun.



Problem 5.20

Şekildeki sistemde jiroskop tekeri yavaş bir ω_{rel} hızıyla dönmektedir. Sisteme düşey etrafında bir açısal hız uygulanmadığında kol yatay durumda ve denge halindedir. Sisteme düşey etrafında Ω gibi bir açısal hız uygulanırsa bilinen bir M kütlesini kol üzerinde nereye yerleştirirseniz kol yatay durumda kalmaya devam eder? (Kolun atalet momentleri ihmal edilebilir.)



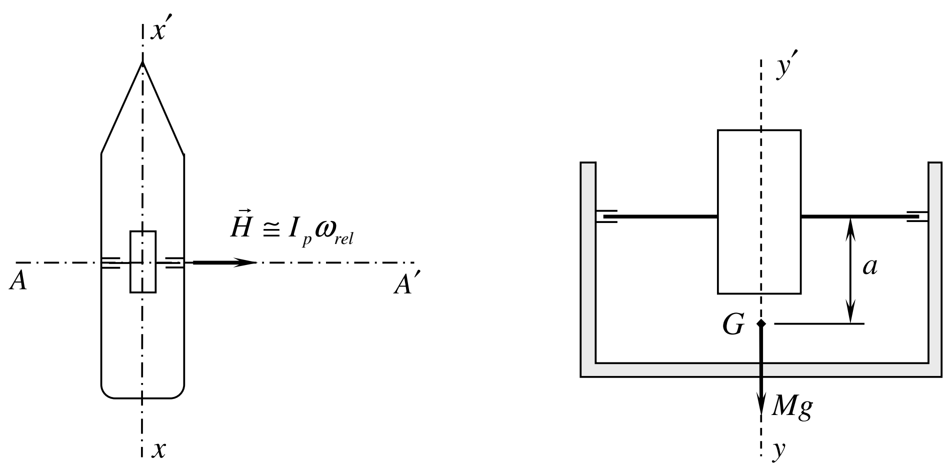
Problem 5.21

Yavaş dönen bir topacın düşme anındaki kinetik ko-enerjisi için bir ifade bulun.

Problem 5.22

Bir geminin yuvarlanma hareketini stabilize etmek için şekildeki gibi bir jiroskop monte edilmesi önerilmektedir. Jiroskopun çok yüksek bir ω_{rel} hızıyla döndüğünü kabul edin.

a) Gemiye yuvarlanma hareketi yaratacak (xx' ekseni etrafında) bir moment uygulanırsa nasıl bir davranış ortaya çıkar?
b) Geminin yönü değiştirilmeye çalışılırsa, yani yy' ekseni etrafında T_y gibi bir dış moment uygulanırsa, geminin yuvarlanma açısı ne olur? Ağırlık merkezi G şekildeki gibi ise nasıl bir davranış görülür?

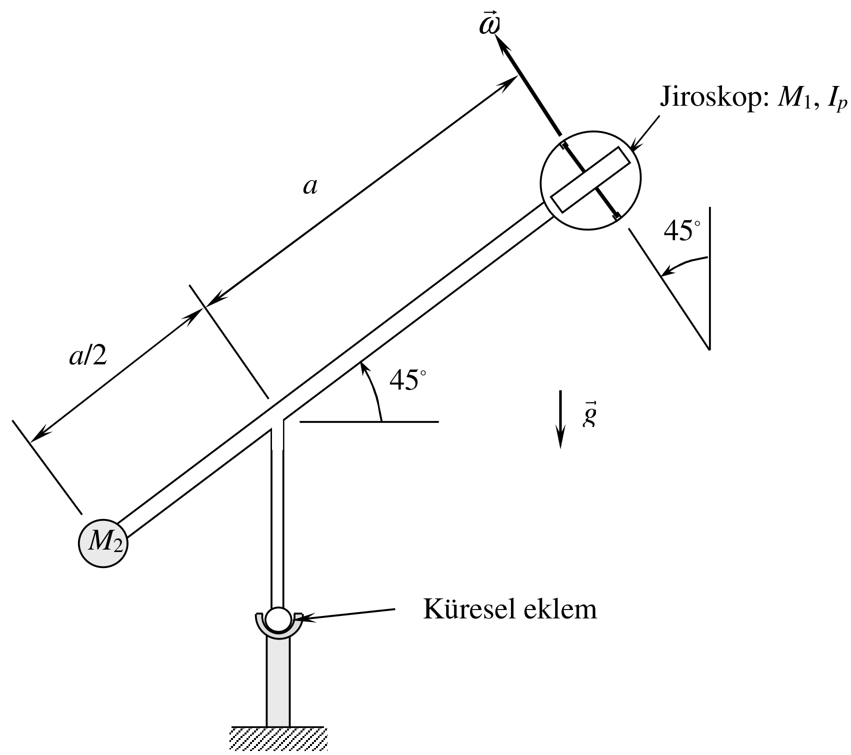


Üsten görünüş

AA' kesiti

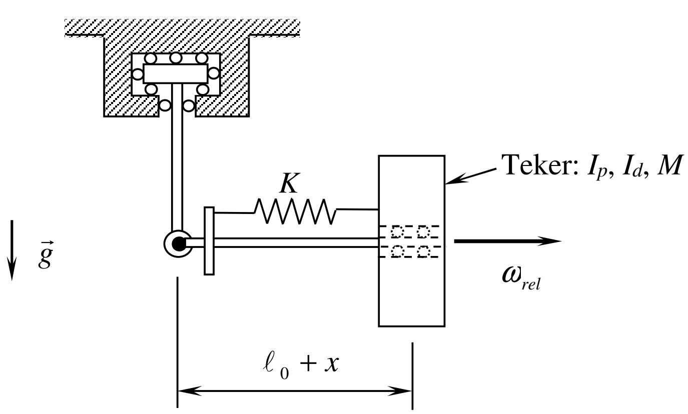
Problem 5.23

Aşağıdaki sistemde jiroskop kendi ekseni etrafında çok büyük bir ω hızıyla dönmektedir. Bu sistemin presesyon açısal hızı için bir ifade bulun. Sistem $t = 0$ anında şekilde gösterildiği durumdaysa, tekerin olduğu ucun kağıt düzleminden dışarı doğru çıkması için gereken şartları bulun. (Not: Teker ve M_2 dışındaki elemanlar kütlesizdir. M_2'nin düşey eksen etrafındaki atalet momentini ihmal edin.)



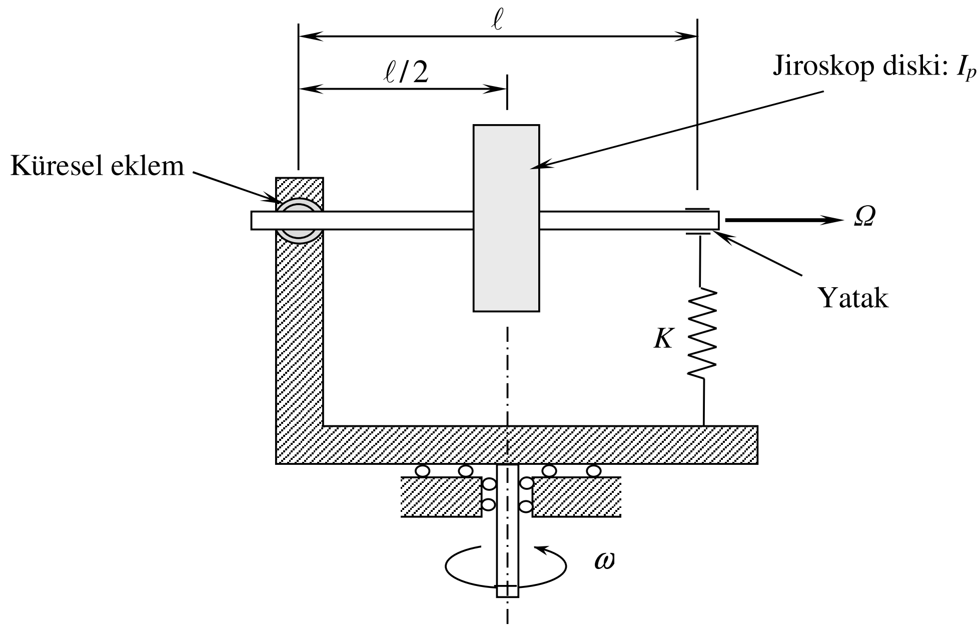
Problem 5.24

Aşağıdaki sistemde miller kütlesizdir. Teker kendi ekseni etrafında çok büyük bir ω_{rel} hızıyla dönmekte ve aynı zamanda K sabitli bir yatayın ucuna bağlı olarak mil boyunca kayabilmektedir. Yay serbest boydayken tekerin düşey eksene uzaklığı ℓ_0 kadardır. Presesyon hareketi sırasında yayın boyu x kadar uzamaktadır. Presesyon açısal hızını ve yayın uzama miktarını bulun.



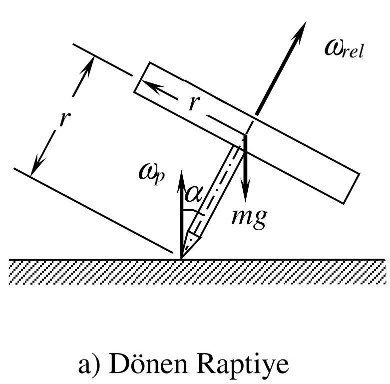
Problem 5.25

Şekildeki sistemde K yayı sadece düşey yönde esnemektedir. $\omega = 0$ iken jiroskop diskinin ekseni yatay durumdadır. Disk kendi ekseni etrafında Ω açısal hızıyla, diskin monte edildiği platform ise düşey eksen etrafında ω açısal hızıyla döndürülmektedir. Ω hızının çok yüksek olmadığını kabul ederek disk ekseninin yataydan ayrılma açısı α için bir ifade bulun. Eksen yataydan α açısı kadar ayrıldıktan sonra platformu ω hızıyla döndürmek için uygulanması gereken moment nedir?

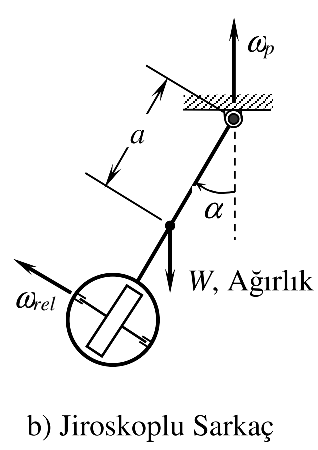


Problem 5.26

Aşağıdaki sistemler için $\dot{\vec{H}} = \vec{M}$ ifadesini yazın. Denklemlerinizi I_p, I_d ve gerekli diğer parametreler cinsinden yazabilirsiniz.



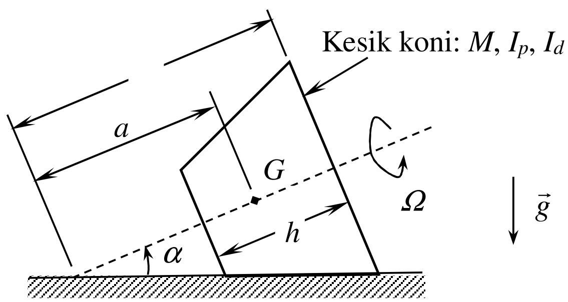
a) Dönen Raptiye



b) Jiroskoplu Sarkaç

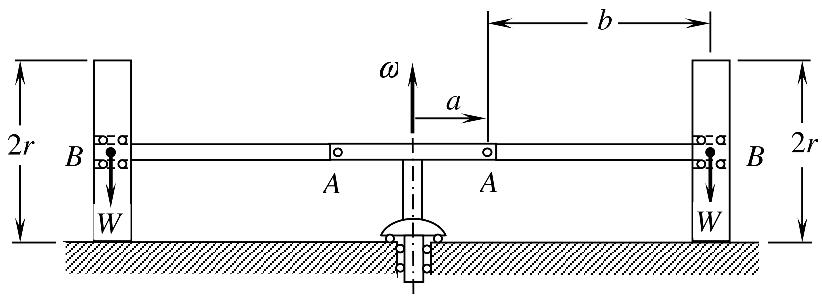
Problem 5.27

Aşağıda görülen kesik koni düz bir yüzeyde kaymadan yuvarlanmaktadır. Koninin devrileceği kritik açısal hız $\Omega = \Omega_{kr}$'i bulun. Not: Ω, koninin kendi simetri eksenine göre olan açısal hızıdır.



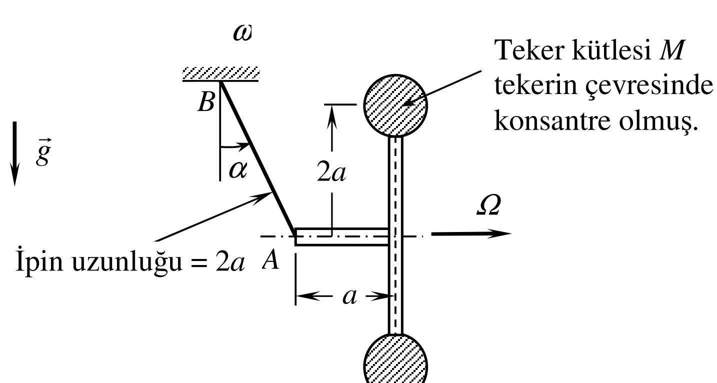
Problem 5.28

W ağırlığında ve birbirinin aynı iki teker aşağıdaki gibi kaymadan yuvarlanmaktadır. Millerin kütlesi yoktur. Her bir tekerden yere uygulanan kuvveti ω hızının fonksiyonu olarak bulun.



Problem 5.29

Bisiklet tekeriyle yapılan aşağıdaki deneyde eğer teker çok hızlı dönerse (tekerin kendi ekseni etrafındaki açısal hızı Ω) presesyon hızı ω düşük olacak ve teker merkezinin radyal ivmesi küçük olacağından ip hemen hemen düşey kalacaktır. Bu tekerin daha yavaş döndüğünü kabul edin. Bu durumda presesyon hızı daha yüksek olduğundan AB ipi düşeyden α gibi bir açı kadar ayrılacaktır. Hareket sırasında teker ekseninin yatay olduğunu kabul edin. Verilen bir Ω için α'yı bulmak amacıyla α, Ω ve diğer parametreler cinsinden bir ifade bulun. Bu ifadede ω olmasın.

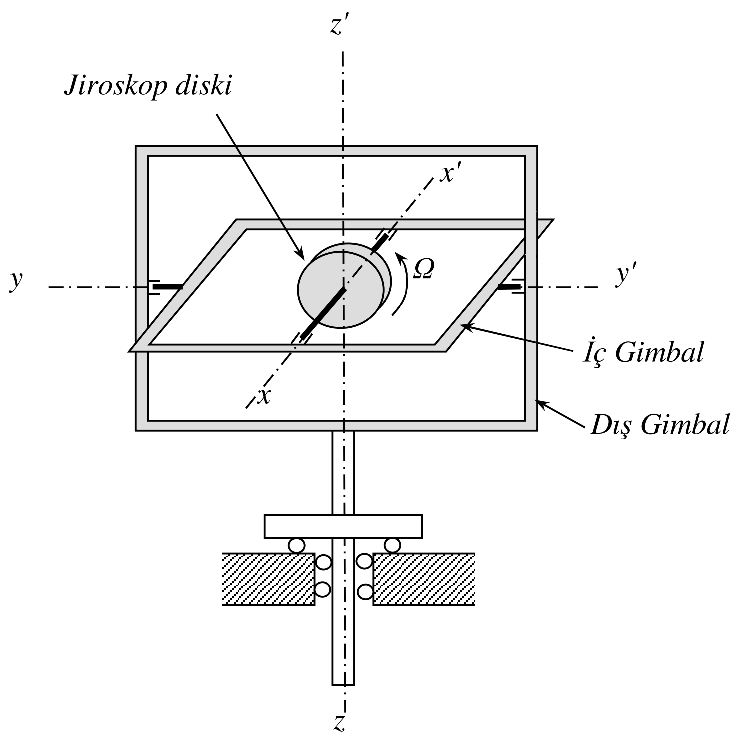


6

JİROSKOP VE UYGULAMALARI

Jiroskop simetri ekseni etrafında hızla dönen; dönme ekseninin kendisine ve birbirine dik iki eksenden biri veya her ikisi etrafında dönme serbestliği olan bir gövdeden (jiroskop diski) oluşur. Simetri ekseninin serbestliğini sağlamak için gimbal adı verilen bir yataklama düzeneği kullanılır. Şekil 6.1'de yapısı verilen bu düzenekte yüksek bir Ω hızıyla dönen jiroskop diskinin simetri ekseni xx' iç gimbal denilen bir çerçeve yapıya yataklanır. İç gimbal de diskin simetri eksenine dik bir yy' ekseniyle dış gimbal denilen ikinci bir çerçeve yapıya yataklıdır. Dış gimbal ise iç gimbal eksenine dik bir zz' ekseni etrafında referans sisteme yataklıdır. Bu özel düzenek sayesinde jiroskop diskine dışarıdan moment uygulanması mümkün değildir. Bu yüzden simetri ekseni belli bir açısal yönelimdeyken döndürülen bir jiroskop diskinin referans sisteme göre yönelimi sabit kalır.

Jiroskopların en önemli uygulama alanları navigasyon sistemleridir. Aşağıdaki kısımlarda jiroskopun bu alandaki çeşitli uygulamaları verilmektedir.



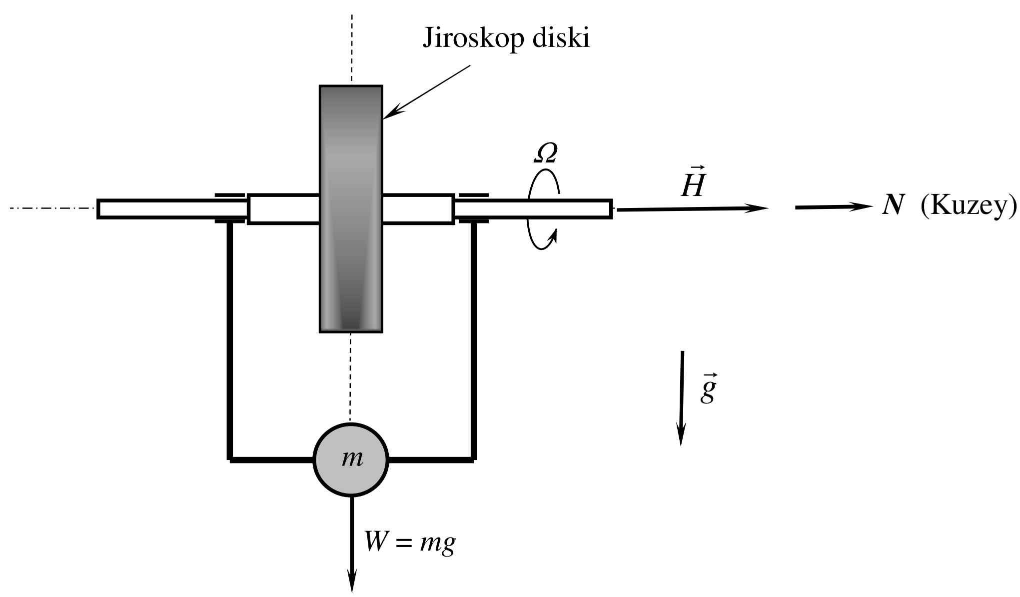
Şekil 6.1

6.1 Jiroskoplu Gemi Pusulası

Manyetik gemi pusulaları gerçek coğrafi kuzeyi göstermez. Bu pusulalardan alınan yön bilgileri geminin konumuna bağlı olarak manyetik kuzeyle coğrafi kuzey arasındaki açı kadar düzeltilmek zorundadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için 20. yüzyılın başlarında coğrafi kuzeyi gösteren jiroskoplu gemi pusulası geliştirilmiştir. Bu pusulanın özelliği yerçekiminin yönünü ve dünyanın dönüşünü hissederek başlangıçta hatalı bir yönde olsa bile bu hatayı düzelterek kendini coğrafi kuzeye doğru yöneltmesidir. Jiroskoplu pusula bulunduğu gemi denizde yuvarlanma ve yunuslama hareketleri yaparken bile dünyanın dönüşünü hissedebilir ve hatalarını düzelterek coğrafi kuzeyi gösterir.

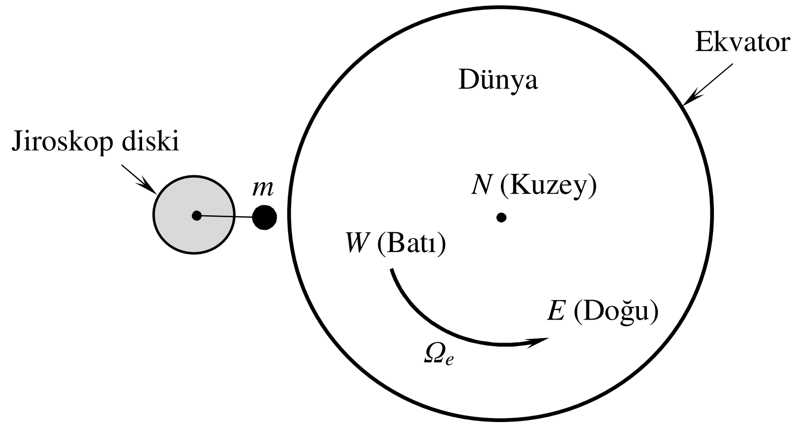
6.1.1 Basit Bir Pusula Denemesi

Jiroskoplu pusulayı incelemeden önce Şekil 6.2'deki basit sistemin bir pusula olarak kullanılıp kullanılamayacağını ve hatalarını düzeltip düzeltemeyeceğini inceleyelim. Bu sistemde jiroskop diskinin gimballerle askıya alındığını ve simetri eksenine şekildeki gibi yataklarla asılan bir kütle olduğunu düşünün. Sistemin davranışını daha kolayca anlamak için bu sistem Şekil 6.3'deki gibi dünyanın ekvator çizgisi üzerine yerleştirilmiş olsun. Başlangıçta jiroskopun simetri ekseni yatay ve coğrafi kuzeye doğru ise, gimballer dolayısıyla jiroskopa dışarıdan moment uygulanamadığından ve asılı kütlenin ağırlık kuvveti de simetri eksenine bir moment uygulamayacağından, jiroskopun dönme ekseninin yönü sabit kalır ve pusula coğrafi kuzeyi göstermeye devam eder.



Şekil 6.2

Şekil 6.3 incelendiğinde eğer başlangıçta pusulanın ucu (simetri ekseni) yataydan yukarı doğru ise (yukarı yönde hata) m kütlesinin ağırlığının yaratacağı moment dolayısıyla pusulanın ucu batı yönüne doğru kayar, yani batı yönünde bir hata oluşmaya başlar. Eğer başlangıçta aşağı yönde bir hata varsa m kütlesinin ağırlığının yaratacağı moment doğu yönünde bir kaymaya ve bu yönde hata oluşmasına sebep olur. Eğer pusulanın doğu yönünde bir hatası varsa, dünya döndükçe bu hata yukarı yönde kaymaya ve bu yönde hataya; batı



Şekil 6.3

yönünde bir hata varsa bu hata aşağı yönde kaymaya ve hataya dönüşür. Hataların sebep olduğu kaymalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

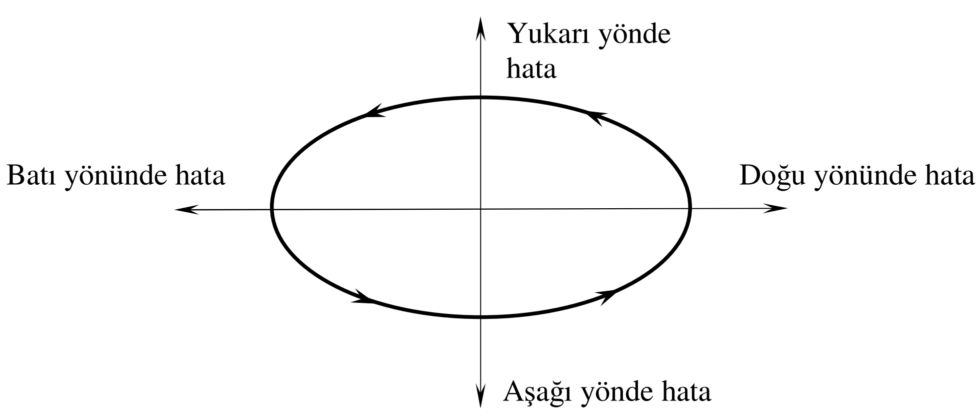
Yukarı yönde hata $\longrightarrow$ Batı yönünde kayma ve hata

Batı yönünde hata $\longrightarrow$ Aşağı yönde kayma ve hata

Aşağı yönde hata $\longrightarrow$ Doğu yönünde kayma ve hata

Doğu yönünde hata $\longrightarrow$ Yukarı yönde kayma ve hata

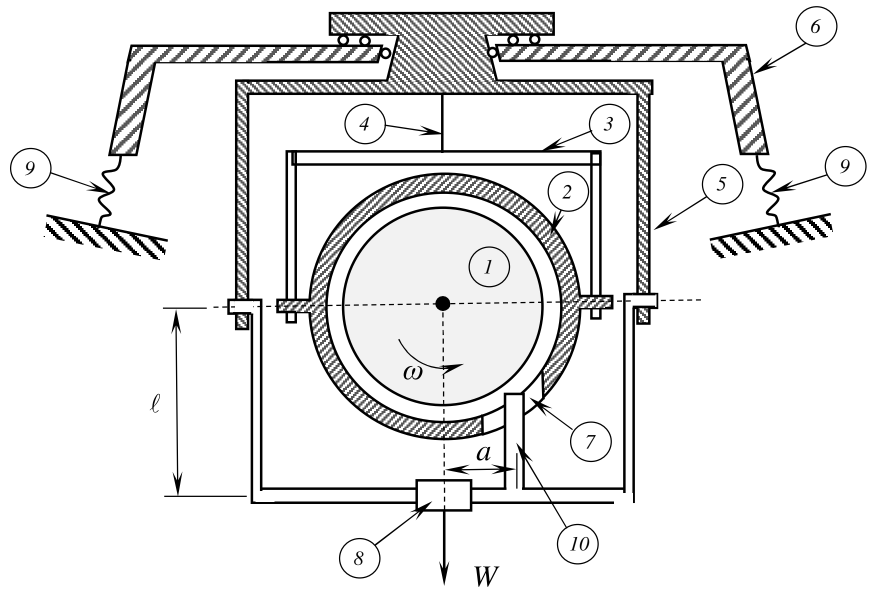
Şekil 6.2'deki gibi bir pusulada başlangıçta bir hata varsa bu hata dünya döndükçe Şekil 6.4'deki gibi değişir. Zaman ilerledikçe bu hata sıfırlanmadığından böyle bir pusula gemilerde kullanılamaz.



Şekil 6.4

6.1.2 Hatalarını Düzelten Jiroskoplu Gemi Pusulası

Şekil 6.5'de jiroskoplu bir gemi pusulasının yapısı şematik olarak verilmiştir. Şeklin ortasındaki jiroskop diski (1) çok yüksek bir hızda dönmektedir. Diskin dönme ekseni pusulanın ibresi olup şekilde kağıdın içine doğru olan yön kuzeyi göstermektedir. Jiroskop diski şekilde (2) ve (3) numarayla gösterilen bir gimbal takımıyla desteklenmiştir. Dış gimbal bir telle (4) fantoma (5) asılıdır. Eğer telde bir burulma varsa bir servomotor fantomu dış gövdeye (6) göre döndürerek bu burulmayı yaklaşık ¼ derecenin altında tutmaktadır. Dış gövde ile gemi platformu arasında şekilde görülmeyen ikinci bir gimbal takımı (9) daha vardır. Fantoma asılı olan sarkaç kolunda bir ağırlık (8) bulunmaktadır. Sarkaç üzerindeki çubuk (10) iç gimbal üzerindeki bir yarığın (7) içinden geçmektedir. Bu yarık düzlemsel

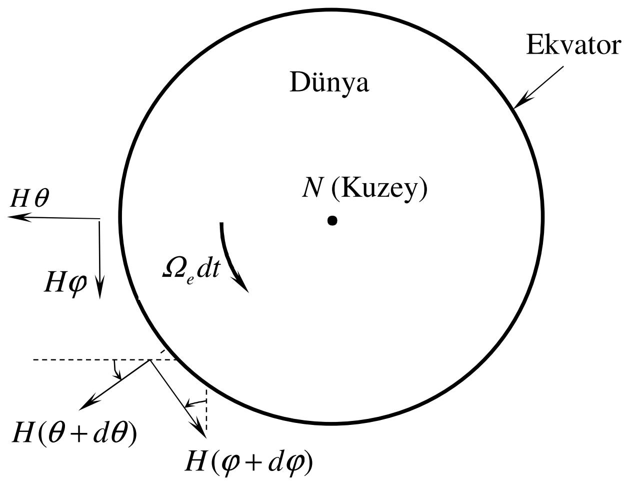


1. Jiroskop diski
2. İç gimbal
3. Dış gimbal
4. İnce burulma-askı teli
5. Fantom
6. Dış gövde
7. Düzlemsel yarık
8. Sarkaç ağırlığı
9. Gimbal takımı
10. Çubuk

Şekil 6.5 Jiroskoplu Gemi Pusulası

olduğundan iç gimbal ve jiroskop tekerinin oluşturduğu grup kağıt düzlemi içinde sağa ve sola rahatça hareket edebilmekte, buna karşılık kağıt düzlemi içine ve dışına olan hareketleri sınırlamaktadır. Bu yüzden pusula ibresi yukarı veya aşağı doğru saptığında sarkaç kolu kağıt düzleminden içeri ve dışarı doğru hareket etmekte ve ağırlığın (8) etkisiyle çubuk tarafından iç gimbale bu hareketi düzeltici yönde bir kuvvet uygulanmaktadır.

Basitlik amacıyla pusulanın Şekil 6.6'daki gibi ekvator üzerinde olduğu, θ açısı kadar yukarı yönde, φ açısı kadar doğu yönünde hatası olduğu kabul edilsin. Bu hatalar dolayısıyla yukarı ve doğu yönlerindeki açısal momentum bileşenleri Şekil 6.6'da gösterildiği gibi sırasıyla $H\theta$ ve $H\varphi$ olur. Dünya Ω_e hızıyla dönerken dt zaman sonra bu vektörler yine



Şekil 6.6

şekildeki gibi $H(\theta + d\theta)$ ve $H(\varphi + d\varphi)$ olur. Şekildeki açılar ve $\Omega_e dt$ açısının çok küçük olduğu dikkate alınırsa yukarı ve doğu yönündeki dH ve dH/dt bileşenleri için aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$\begin{aligned}(dH)_{yukarı} &= H(\theta + d\theta)\cos\Omega_e dt - H(\varphi + d\varphi)\sin\Omega_e dt - H\theta \\ &= Hd\theta - H\varphi\Omega_e dt\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{yukarı} = H\dot{\theta} - H\Omega_e\varphi \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}(dH)_{dogu} &= H(\theta + d\theta)\sin\Omega_e dt + H(\varphi + d\varphi)\cos\Omega_e dt - H\varphi \\ &= H\theta\Omega_e dt + H\varphi\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{dogu} = H\dot{\varphi} + H\Omega_e\theta \tag{6.4}$$

Yukarı yöndeki θ hatası dolayısıyla sarkaç kolu da kağıt düzleminin içine doğru θ açısı kadar salınacağından jiroskop diskine aşağıdaki gibi momentler uygulanır.

$$M_{batı} = W\ell\theta \tag{6.5}$$

$$M_{asagı} = Wa\theta \tag{6.6}$$

Denklemler (6.2) ve (6.4) ile verilen $\dot{\vec{H}}$ bileşenlerini denklemler (6.5) ve (6.6)'dan elde edilen aynı yöneki momentlere eşitleyerek Newton Kanunu uygulanırsa aşağıdaki denklemler bulunur:

$$H\dot{\theta} - H\Omega_e \varphi = -Wa\theta \tag{6.7}$$

$$H\dot{\varphi} + H\Omega_e \theta = -W\ell\theta \tag{6.8}$$

Yukarıdaki iki denklem arasında φ yok edilirse ve terimler düzenlenirse θ cinsinden aşağıdaki diferansiyel denklem bulunur. (Eğer φ yerine θ yok edilirse φ cinsinden de aynı diferansiyel denklem bulunur.)

$$\ddot{\theta} + \frac{Wa}{H}\dot{\theta} + \left[\Omega_e^2 + \frac{W\ell\Omega_e}{H}\right]\theta = 0 \tag{6.9}$$

Bu denklem ikinci mertebe sönümlü bir sistemi tanımlamaktadır. Yani zaman geçtikçe hata sönümlenerek ortadan kalkmaktadır.

Pusulanın Doğal Frekansı

Pusulanın sönümsüz sistem doğal frekansı ω_c aşağıdaki gibidir:

$$\omega_c^2 = \Omega_e^2 + \frac{W\ell\Omega_e}{H} \tag{6.10}$$

Jiroskoplu pusulaların periyodu ileride anlatılacak olan sebeplerden dolayı 84 dakikaya ayarlanır. Dünyanın ve pusulanın periyotları,

$$\Omega_e = \frac{2\pi}{24\times 60} \quad \text{rad/dak} \tag{6.11}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{84} \quad \text{rad/dak} \tag{6.12}$$

olduğundan,

$$\frac{\omega_c}{\Omega_e} = 17.1 \tag{6.13}$$

ya da,

$$\left(\frac{\omega_c}{\Omega_e}\right)^2 = 294 \tag{6.14}$$

olur. Bu yüzden denklem (6.10)'daki Ω_e^2 terimi ihmal edilebilir ve pusulanın doğal frekansı için aşağıdaki yaklaşık ifade kullanılabilir:

$$\omega_c^2 = \frac{W\ell\Omega_e}{H} \tag{6.15}$$

Sönüm Oranı

Denklem (6.9)'dan görüldüğü gibi sönüm katsayısı a uzaklığıyla orantılı olarak artar. Eğer a uzaklığı sıfır olsaydı denklemler (6.7) ve (6.8) aşağıdaki hali alırdı.

$$H\dot{\theta} - H\Omega_e\varphi = 0 \tag{6.16}$$

$$H\dot{\varphi} + (H\Omega_e + W\ell)\theta = 0 \tag{6.17}$$

Böyle bir sistemin $t = 0$ anında $\theta(0) = \theta_0$ gibi bir başlangıç hatasına sahip olduğunu ve $\dot{\theta}(0) = 0$ olduğunu düşünelim. Denklemler (6.16) ve (6.17)'den φ ve $\dot{\varphi}$'nün başlangıç değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varphi(0) = 0 \tag{6.18}$$

$$\dot{\varphi}(0) = -\left(\frac{W\ell}{H} + \Omega_e\right)\theta_0 = -\left(\frac{W\ell\Omega_e}{H} + \Omega_e^2\right)\frac{1}{\Omega_e}\theta_0 \tag{6.19}$$

Denklem (6.10) dikkate alınırsa denklem (6.19) aşağıdaki hali alır:

$$\dot{\varphi}(0) = -\frac{\omega_c^2}{\Omega_e} \tag{6.20}$$

Denklemler (6.16) ve (6.17)'nin genel çözümü integrasyon sabitleri cinsinden,

$$\theta = C_1 \sin\omega_c t + C_2 \cos\omega_c t \tag{6.21}$$

$$\varphi = C_3 \sin\omega_c t + C_4 \cos\omega_c t \tag{6.22}$$

şeklindedir. Yukarıdaki başlangıç koşulları uygulanarak integrasyon sabitleri bulunursa, çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

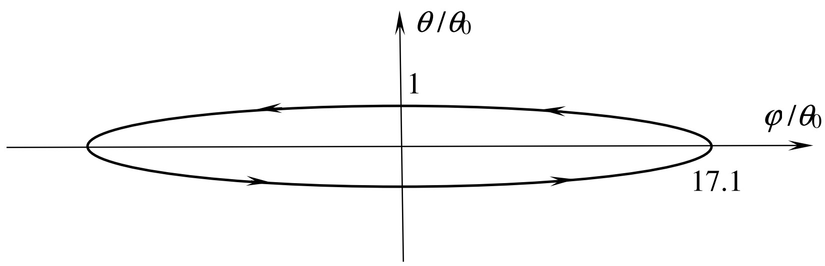
$$\theta = \theta_0 \cos\omega_c t \tag{6.23}$$

$$\varphi = \frac{\omega_c}{\Omega_e}\theta_0 \sin\omega_c t \tag{6.24}$$

Denklemler (6.23) ve (6.24) aşağıdaki elips denklemini sağlar:

$$\frac{(\theta/\theta_0)^2}{1^2} + \frac{(\varphi/\theta_0)^2}{\left(\dfrac{\omega_c}{\Omega_e}\right)^2} = 1 \tag{6.25}$$

Denklem (6.13)'den $\omega_c / \Omega_e = 17.1$ olduğu dikkate alınırsa, bu elipsin oldukça yassı olduğu ve pusulanın θ ve φ hatalarının Şekil 6.7'deki gibi değiştiği, ama hiç bir zaman sıfırlanmadığı görülür.



Şekil 6.7

a uzaklığının sıfır olmadığı durumda ise denklem (6.9)'da

$$b = \frac{Wa}{H} \tag{6.26}$$

gibi bir sönüm sabiti olur. Sistemi kritik sönümlü yapacak sönüm sabiti ise denklemin katsayılarından aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$b_{kr} = 2\sqrt{\frac{W\ell\Omega_e}{H}} \tag{6.27}$$

Denklemler (6.26) ve (6.27)'den sistemin sönüm oranı aşağıdaki gibidir:

$$\zeta = \frac{b}{b_{kr}} = \frac{Wa/H}{2\sqrt{\frac{W\ell\Omega_e}{H}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{W}{H\ell\Omega_e}} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{W\ell\Omega_e}{H}\right)\left(\frac{1}{\ell^2\Omega_e^2}\right)} \tag{6.28}$$

Denklemler (6.15) ve (6.13) dikkate alınırsa, sönüm oranı aşağıdaki hale gelir:

$$\zeta = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\ell^2\Omega_e^2}} = 8.55\frac{a}{\ell} \tag{6.29}$$

Kritik sönüm durumunda $\zeta = 1$ olduğuna göre, sistemi kritik sönümlü yapacak *a* değeri aşağıdaki gibidir:

$$a = \frac{\ell}{8.55} \tag{6.30}$$

6.1.3 Schuler Ayarı

İlk gemi pusulaları 1920'li yıllarda hizmete girdiğinde, bunların hatalı gösterebildiği, özellikle gemi kuzeydoğu-güneybatı yönünde yuvarlanma hareketi yaparak giderken pusulanın tamamen kullanılamaz hale geldiği görüldü. Bu hataların geminin yuvarlanma hareketi sırasında pusulaya uygulanan yanal ivmelerden kaynaklandığı anlaşıldı. Maximilian Schuler[1] pusulanın periyodu 84 dakikaya ayarlanırsa, pusulaya uygulanan yanal ivmelerden kaynaklanan hataların ortadan kalkacağını gösterdi. Ondan sonra pusulaların periyodu 84 dakikaya ayarlandı. Bu ayarlama işlemine Schuler ayarlaması adı verildi.

Bu ayarın nedenini anlamak için kuzeyi gösteren bir pusulaya kuzey yönünde $\ddot{x}_o$ gibi bir ivme uygulandığını düşünün. Bu durumda iç gimbal tarafından sarkaç kütlesine (Şekil 6.5) $m\ddot{x}_o$ kadar bir kuvvet uygulanır. Bu nedenle jiroskop diskine uygulanan momentler ise aşağıdaki gibidir:

$$M_{batı} = m\ddot{x}_o \ell = \frac{W}{g}\ddot{x}_o \ell \tag{6.31}$$

$$M_{asagı} = m\ddot{x}_o a = \frac{W}{g}\ddot{x}_o a \tag{6.32}$$

Daha önce denklem (6.9) elde edilirken kullanılan ve denklemler (6.5) ve (6.6) ile verilen momentlere bu momentler de eklenerek Newton Kanunu yazılırsa, denklemler (6.7) ve (6.8) bu yeni durum için aşağıdaki hale gelir:

$$H\dot{\theta} - H\Omega_e \varphi = -Wa\theta - \frac{W}{g}\ddot{x}_o a \tag{6.33}$$

$$H\dot{\varphi} + H\Omega_e \theta = -W\ell\theta - \frac{W}{g}\ddot{x}_o \ell \tag{6.34}$$

Yukarıdaki iki denklem arasında φ yok edilirse ve terimler düzenlenirse θ cinsinden aşağıdaki diferansiyel denklem bulunur.

$$\ddot{\theta} + \frac{Wa}{H}\dot{\theta} + \left[\Omega_e^2 + \frac{W\ell\Omega_e}{H}\right]\theta = -\frac{W\Omega_e \ell}{gH}\ddot{x}_o - \frac{Wa}{gH}\dddot{x}_o \tag{6.35}$$

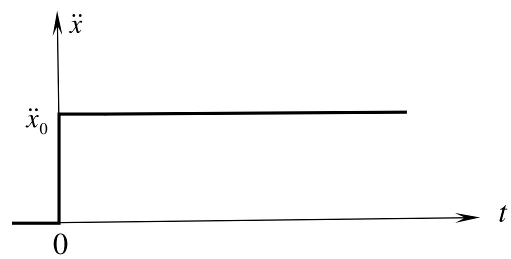
Şimdi bu sisteme Şekil 6.8'deki gibi basamak biçimimde bir ivme uygulandığını düşünün. Başlangıçta da $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ olsun. Denklem (6.35)'deki $\dddot{x}_0$ terimi Şekil 6.8'de sıçrama anı dışında sıfır olduğundan, katkısı ihmal edilebilir. Ω_e^2 terimi de denklem (6.14) dolayısıyla ihmal edilebilir. Bu varsayımlar altında $\ddot{\theta}$'nün başlangıç anındaki değeri denklem (6.35)'den aşağıdaki gibi bulunur:

$$\ddot{\theta}(0) = -\frac{W\Omega_e \ell}{gH}\ddot{x}_o = -\omega_c^2 \frac{\ddot{x}_o}{g} \tag{6.36}$$

---
[1]Maximilian Schuler (1892-1972)

Bu denklemden görüldüğü gibi $\ddot{\theta}$'nün başlangıç anındaki değeri negatiftir; yani pusulada aşağı doğru bir hata yaratacak yöndedir.

Pusulanın yeryüzünde x kadar yol aldığı kabul edilsin (Şekil 6.9). Pusula sarkaçının yeni x konumunda hala düşey durumda olması için geri doğru salınması, yani sarkaç yeni düşey üzerinde olacak biçimde pusula ibresinin aşağı doğru ψ açısı kadar dönmesi gerekir.



Şekil 6.8

Dünyanın yarıçapı R ise, Şekil 6.9'un geometrisinden aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$x = R\psi \tag{6.37}$$

ya da,

$$\ddot{x} = R\ddot{\psi} \tag{6.38}$$

İvme uygulandığında pusula sarkacının daima düşey durumda kalması için ise $\ddot{\psi} = \ddot{\theta}$ olması gerektiğinden, denklemler (6.36) ve (6.38)'den aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$\frac{\ddot{x}_o}{R} = \omega_c^2 \frac{\ddot{x}_o}{g} \tag{6.39}$$

ya da,

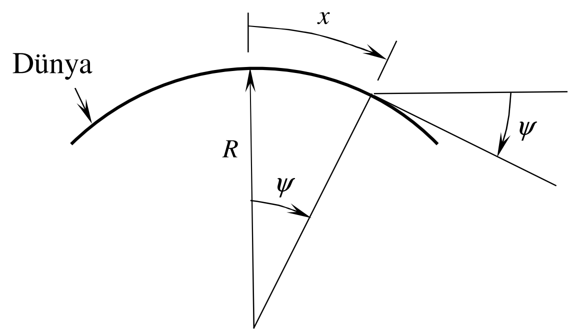
$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{6.40}$$

ya da,

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}} \tag{6.41}$$

Dünyanın yarıçapı 6371 km olduğuna göre, pusulanın yanal ivmelerden etkilenmemesi için periyodunun aşağıdaki gibi 84 dakika olması gerekir:

$$T_c = \frac{2\times 3.14159}{60\sqrt{\frac{9.81}{6.371\times 10^6}}} = 84.4 \text{ dakika} \tag{6.42}$$

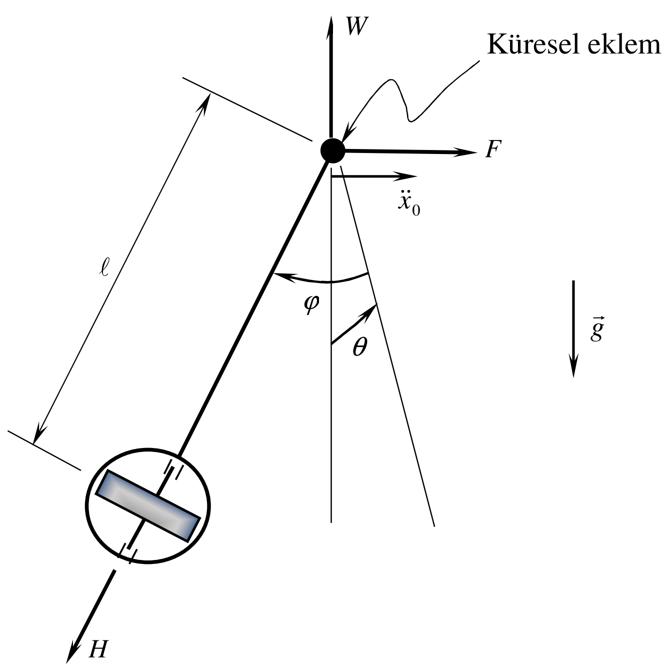


Şekil 6.9

Denklem (6.40) aynı zamanda uzunluğu dünyanın yarıçapı kadar olan bir basit sarkaçın frekansıdır. Böyle bir sarkacın ortası daima dünyanın merkezinde olacağından eklem noktasına ne kadar yanal ivme uygulanırsa uygulansın daima düşey kalır. Basit bir sarkaçta böyle bir durumun fiziksel olarak sağlanmasına imkan olmamasına karşın, yukarıdaki analizden görüldüğü gibi jiroskoplu bir sistemde bu sağlanabilir.

6.2 Jiroskoplu Sarkaç

Şekil 6.10'da bir jiroskoplu sarkaç görülmektedir. Sarkaç yerçekimi alanı içinde küresel bir eklemle asılıdır. Basitlik için sarkaç kolunun kütlesiz olduğu kabul edilecektir. Sarkaç kolunun kağıt düzlemi içine doğru yaptığı açı θ ile, kağıt düzlemine parallel düzlem içinde sola doğru yaptığı açı ise φ ile gösterilmiştir. Analizde her iki açının da küçük olduğu kabul edilecektir. Jiroskop sabit ve yüksek bir hızla döndüğünden *H* vektörünün uzunluğu sabittir. Jiroskop diskinin kütlesi *m*, ağırlığı *W*, kol uzunluğu ℓ'dir.



Şekil 6.10

Eklem noktasına sağa doğru $\ddot{x}_o$ ivmesi uygulanmaktadır. Bu ivmeyi sağlamak için ekleme uygulanması gereken yatay kuvvet F_y olarak gösterilmiştir. Bu bölümde jiroskoplu sarkacın eklem noktasına yanal ivme uygulandığında düşeyden ayrılmaması için gereken şartların ne olduğu ve bu şartların fiziksel olarak sağlanıp sağlanamayacağı incelenecektir.

θ ve φ açıları küçük olduğundan açısal momentum vektörünün düşey, sola doğru ve kağıt düzlemine dik içeri yöndeki bileşenlerinin (H_d, H_s, H_i) büyüklükleri aşağıdaki gibidir:

$$H_d = H \tag{6.43}$$

$$H_s = H\varphi \tag{6.44}$$

$$H_i = H\theta \tag{6.45}$$

Açısal momentumun türevinin sola ve kağıt düzleminin içine doğru olan bileşenlerini büyüklükleri denklemler (6.44) ve (6.45)'in türevini alarak bulunur:

$$\dot{H}_s = H\dot{\varphi} \tag{6.46}$$

$$\dot{H}_i = H\dot{\theta} \tag{6.47}$$

θ ve φ açıları küçük olduğundan eklemdeki düşey kuvvet sistemin ağırlığı W kadardır. Sağa doğru olan F_y yatay kuvveti ise bu yönde Newton Kanununu uygulayarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$F_y = m(\ddot{x}_o - \ell\ddot{\varphi}) \tag{6.48}$$

Sisteme eklemde uygulanan kuvvetlerin sol ve içeri yönlerde yarattığı moment bileşenleri,

$$M_s = W\ell\theta \tag{6.49}$$

$$M_i = F_y\ell - W\ell\varphi = m(\ddot{x}_o - \ell\ddot{\varphi})\ell - W\ell\varphi \tag{6.50}$$

olur. Denklemler (6.46) ve (6.47)'de verilen H'nin türev bileşenleri Newton Kanunu gereği denklemler (6.49) ve (6.50)'de verilen aynı yönlerdeki moment bileşenlerine eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$H\dot{\varphi} = W\ell\theta \tag{6.51}$$

$$H\dot{\theta} = m(\ddot{x}_o - \ell\ddot{\varphi})\ell - W\ell\varphi \tag{6.52}$$

Yukarıdaki iki denklem arasında θ yok edilirse,

$$\left(\frac{H^2}{W\ell} + m\ell^2\right)\ddot{\varphi} + W\ell\varphi = m\ell\ddot{x}_o \tag{6.53}$$

bulunur. Jiroskop diski çok büyük bir hızla döndüğü için H çok büyüktür. Bu yüzden yukarıdaki denklemde $\ddot{\varphi}$ terimin katsayısındaki $m\ell^2$ terimi ihmal edilebilir ve denklem gerekli düzenlemelerle,

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 \varphi = \left(\frac{mW\ell^2}{H^2}\right)\ddot{x}_o \tag{6.54}$$

halini alır. Bu denklemde φ'nin katsayısı sistemin doğal frekansının karesine eşit olup, doğal frekans aşağıdaki gibidir:

$$\omega_n = \frac{W\ell}{H} \tag{6.55}$$

Başlangıç anında $\varphi = 0$ iken ekleme $\ddot{x}_o$ ivmesi uygulanırsa, $\ddot{\varphi}$'nün başlangıçtaki ivmesi denklem (6.54)'den bulunabilir:

$$\ddot{\varphi}(0) = \left(\frac{mW\ell^2}{H^2}\right)\ddot{x}_o = \frac{m}{W}\left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 \ddot{x}_o \tag{6.56}$$

ya da denklem (6.55) dikkate alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{\omega_n^2}{g}\ddot{x}_o \tag{6.57}$$

Ekleme ivme uygulandığında sarkacın düşeyden ayrılmaması için sağlanması gereken şart Şekil 6.9'dan,

$$\ddot{\varphi}(0) = \ddot{\psi} = \frac{\ddot{x}_o}{R} \tag{6.58}$$

gibidir. Denklem (6.57) ve (6.58)'in sağ tarafları eşitlenirse,

$$\omega_n^2 = \frac{g}{R} \tag{6.59}$$

olur. Bu frekansa karşılık gelen periyot 84 dakikadır. Denklem (6.55) ve (6.59) kullanılırsa, sarkacın düşeyden ayrılmaması için sağlanması gereken şart aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 = \frac{g}{R} \tag{6.60}$$

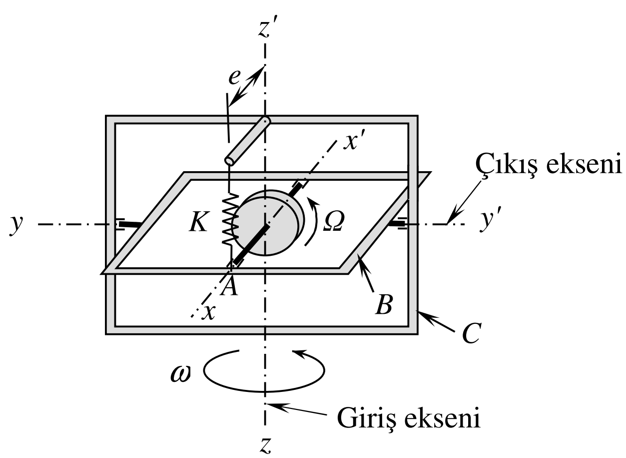
R çok büyük olduğundan bu denklemin sağ tarafı çok küçük bir sayıdır. Buna rağmen denklemin sol tarafında yer alan H terimi dönme hızını artırarak çok büyük değerler alabileceğinden, W, ℓ ve H parametreleri uygun seçilerek fiziksel ortamda denklem (6.60) ile tanımlanan şartın sağlanması mümkündür.

6.3 Hız Jiroskopu

Roket ve denizaltı gibi araçlarda kullanılan atalet navigasyon sistemleri üç ana bileşenden oluşur: *i)* atalet referans sistemine göre yönelimi sabit tutulan bir platform (denizaltılarda yatay platform), *ii)* sabit platform (denizaltıda yatay platform) üzerine monte edilmiş yüksek çözürlüklü ve doğruluklu ivmeölçerler, *iii)* ivmeölçer çıktılarının integralini alarak aracın hız ve konumunu veren bir bilgisayar.

Atalet navigasyon sistemlerindeki sabit platformu (ya da yatay platform) devam ettirebilmek için yapısı basitçe Şekil 6.11'de verilmiş olan hız jiroskopundan yararlanılır. Hız jiroskopu bir serbestlik derecesine sahip bir sistemdir. Jiroskop diski *B* çerçevesine yataklanmış olup, xx' ekseni etrafında çok yüksek bir Ω hızıyla dönmektedir. *B* çerçevesi ise yy' ekseni etrafında *C* çerçevesine yataklanmıştır. *C* çerçevesi ise zz' ekseni etrafında yataklanmıştır. *B* ve *C* çerçeveleri arasında zz' ekseni boyunca esneyen bir *K* yayı vardır. Yay serbest boyda iken xx', yy' ve zz' eksenleri birbirine diktir. Hız jiroskopunun girişi zz' ekseni etrafında uygulanan ω gibi bir açısal hızdır. Çıkış ise yy' ekseninin açısal konum değişikliğidir. (zz' ekseni etrafında ω gibi sabit bir açısal hız uygulandığında *B* çerçevesinin yy' ekseni ekseni etrafındaki dönme açısı θ'nın durağan değeri ne olur?) yy' ekseninin açısal konum değişikliği yüksek çözünürlüklü ve doğruluklu bir transdüserle ölçülür. Hız jiroskopunun monte edildiği platform transdüser çıkışı sıfır olacak şekilde bir servo sistemiyle döndürülür.

Atalet navigasyonunun uzay araçlarına uygulamasında platform üzerinde birbirine dik yönlerde üç tane hız jiroskopu bulunur. Platformun yıldızlara göre yönelimini sabit tutmak için bütün eksenlerin transdüser çıkışları sıfır olcak şekilde platform döndürülür. Denizaltılarda ise yatay bir platform bulunur ve bu platformun yataylığını devam ettirmek için iki hız jiroskopundan yararlanılır.

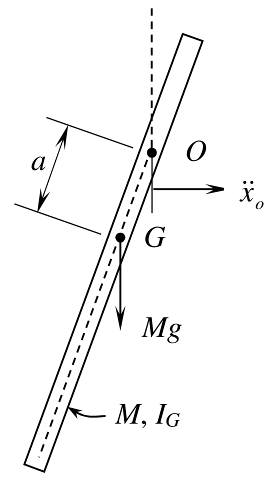


Şekil 6.11 Hız Jiroskopu

PROBLEMLER

Problem 6.1

Aşağıda görülen sarkacın kütlesi kol boyunca düzgün olarak dağılmıştır. Sarkacın eklem noktası O ile ağırlık merkezi G arasındaki uzaklık a kadardır. Sarkaç başlangıçta düşey konumdayken eklem noktasına yatay yönde $\ddot{x}_o$ gibi bir ivme uygulandığında sarkacın düşey konumda kalması için periyodunun 84 dakika olması gerektiğini gösterin. Fiziksel bir sistemde a uzaklığını küçülterek bu periyodun ayarlanabilmesi mümkün müdür?



Problem 6.2

Şekil 6.11'de görülen hız jiroskopunun zz' eksenine ω gibi sabit bir açısal hız uygulandığında B çerçevesinin yy' ekseni ekseni etrafındaki dönme açısı θ'nın durağan değeri ne olur?

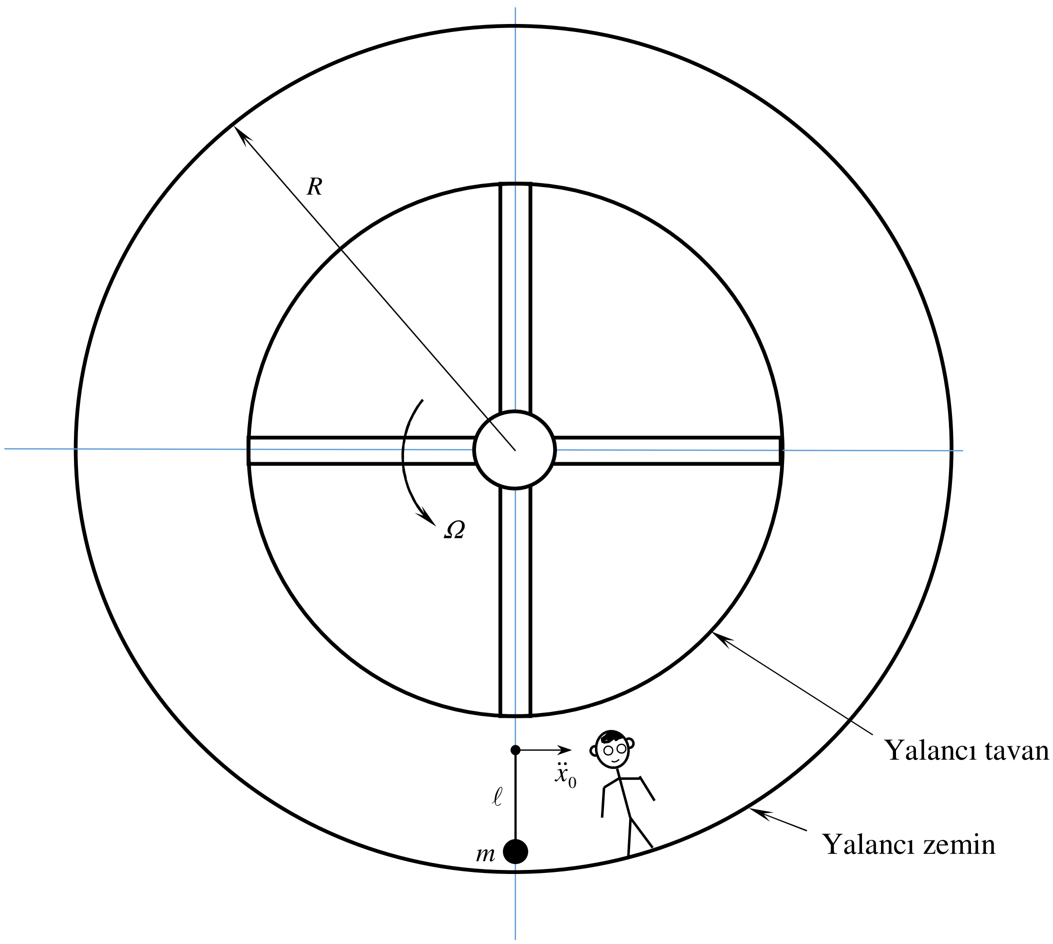
Problem 6.3

Bir denizaltı limanda demir atmış durumdadır. Bu denizaltının atalet navigasyon sistemindeki yatay platform tam olarak yatay değildir ve $t = 0$'da yataylıktan φ_o açısı kadar farklıdır. Bu hatanın ivmeölçer tarafından nasıl algılanacağını, platfomu yatay tutmaya çalışan servo sisteminin nasıl davranacağını dikkate alarak, navigasyon sisteminin çıktı olarak vereceği gemi konumunun nasıl değişeceğini gösterin.

Problem 6.4

Simit şeklinde bir uzay istasyonu yalancı bir yerçekimi yaratmak için simetri ekseni etrafında Ω sabit açısal hızıyla döndürülmektedir. Bu istasyonda yalancı düşey etrafında salınan, şekildeki gibi basit bir sarkaç olduğunu düşünün. Bu sarkacın kol uzunluğu ℓ, kütlesi m olsun. Bu sarkaç düşey konumdayken eklem noktasına teğetsel yönde (yalancı yatay yönünde) $\ddot{x}_o$ gibi bir ivme uygulandığında, düşeyden ayrılmaması için uygun bir

Schuler frekansı var mıdır? Tahminde bulunmayın; cevabınızı şekillerle ve matematiksel olarak açıklayın.



7

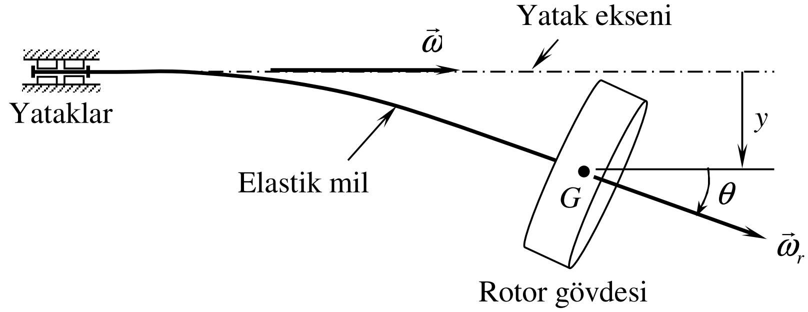
JİROSKOPİK ETKİLER ALTINDAKİ ROTORLARIN DİNAMİĞİ

Atalet momenti büyük olan rotorlar esnek miller üzerine monte edilerek döndürüldüğünde görülen davranış, noktasal kütle taşıyan millerin döndürülmesi durumundan çok farklıdır. Benzer davranış biçimleri esnek yataklarda dönen rijit millere monte edilmiş atalet momenti büyük olan rotorlarda da görülür. Bu rotorların davranış biçimlerinin önceden bilinmesi jenaratör, türbin, büyük elektrik motorları v.b. makinelerin tasarımı ve işletimi sırasında karşılaşılan titreşim problemlerinin çözümü için önemlidir.

7.1 Temel Rotor Problemi

Başlangıçta incelenecek olan temel problem Şekil 7.1'de görülmektedir. Yerçekimi yoktur. Elastik bir mil bir ucundan sürtünmesiz olarak yataklanmıştır. Yataklar yere rijit olarak bağlıdır. Milin diğer ucunda eksenel simetriye sahip bir rotor gövdesi vardır. Rotor gövdesinin ağırlık merkezi G ile gösterilmiştir. Rotorun atalet momentleri ağırlık merkezinden geçen asal eksenlere göre tanımlı olup, simetri eksenine göre atalet momenti I_p, çapa göre atalet momenti ise I_d'dir. Rotorun kendi simetri ekseni etrafındaki açısal hızı $\vec{\omega}_r$'dir. Bu sistemin hareketi sırasında simetri ekseni de yatak ekseni etrafında dönebilir. Simetri ekseninin yatak ekseni etrafında yaptığı bu dönme hareketine *dolanım* denir. Simetri ekseninin yatak ekseni etrafındaki açısal hızı, yani dolanım açısal hızı $\vec{\omega}$ ile gösterilmiştir. Sistemin dinamik hareketi sırasında herhangi bir anda gövdenin ağırlık merkezinin yatak ekseninden uzaklığı y, milin uç noktasında gövdenin simetri ekseninin yatak ekseniyle yaptığı açı ise θ ile gösterilmiştir. Yapılacak olan analizin amacı ω ve ω_r büyüklükleri arasındaki ilişkiyi bulmak; sistemin aşırı titreşimine yol açabilecek şartları belirlemektir.

Yukarıda tanımlanan temel problemin çözümü sırasında geliştirilecek olan yöntemler daha sonra farklı biçimde yataklanmış esnek milli rotorlar, esnek yataklara monte edilmiş rijit milli rotorlar, asimetrik esnek millere monte edilmiş simetrik rotorlar ve esnek simetrik millere monte edilmiş asimetrik rotorlar için çözümler elde edilmesinde de kullanılabilecektir.



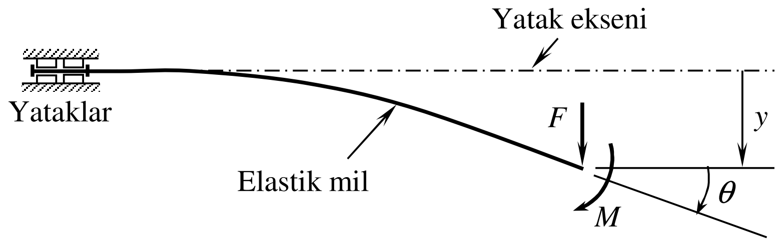
Şekil 7.1

7.1.1 Elastik Mil Denklemleri

Burada milin esnemelerinin küçük olduğu ve bu yüzden lineer elastisite teorisinin geçerli olduğu kabul edilecektir. Yani superpozisyon prensibi geçerli olup, mile uygulanan moment veya kuvvet zorlamalarının bireysel olarak sebep oldukları radyal esnemeler (y) ve açısal esnemeler (θ) toplanarak, bu zorlamalar birlikte uygulandığında ortaya çıkacak esnemeler bulunabilir. Örneğin Şekil 6.2'deki milin ucuna bir M momenti ve F kuvveti uygulandığında toplam radyal ve açısal esnemeler aşağıdaki denklemlerden bulunabilir:

$$y = \alpha_{11} F + \alpha_{12} M \qquad (7.1)$$

$$\theta = \alpha_{21} F + \alpha_{22} M \qquad (7.2)$$

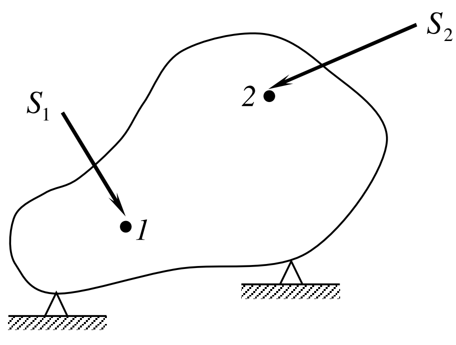


Şekil 7.2

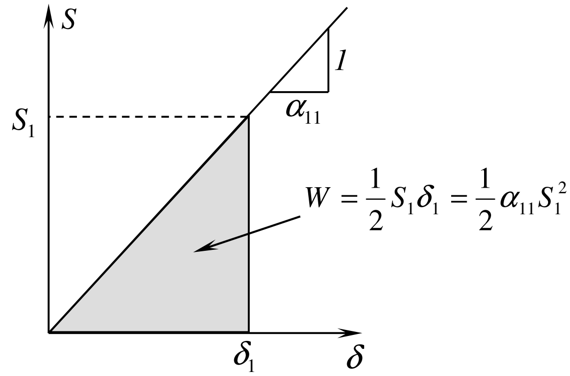
Denklemler (7.1) ve (7.2)'de geçen α_{mn} biçimindeki terimlere *etki katsayıları* ya da *Maxwell katsayıları* denir. α_{mn}, n noktasına uygulanan bir birim zorlamanın (kuvvet veya moment) m noktasında sebep olduğu esneme miktarıdır. Burada esnemeden kasıt, sadece iş yapılmasına sebep olan esnemedir. *Maxwell'in Karşıtlık Teoremi*'ne göre aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\alpha_{mn} = \alpha_{nm} \qquad (7.3)$$

Maxwell'in Karşıtlık Teoremi Şekil 7.3'de görülen yeterince desteklenmiş elastik gövdenin *1* ve *2* olarak gösterilen iki noktasına S_1 ve S_2 kuvvet zorlamalarını uygulayarak kanıtlanabilir. Bunun için önce S_1 kuvveti gövdeye uygulansın. Bunun sonucunda *1* noktasındaki esneme δ_1, *2* noktasındaki esneme δ_2 olsun. Bu sırada *2* noktasında herhangi



Şekil 7.3



Şekil 7.4

bir kuvvet olmadığından bu noktada bir iş yapılmaz. Cisim elastik olduğundan *1* noktasındaki esneme Şekil 7.4'deki gibi lineer olarak artar. Bu sırada yapılan iş aşağıdaki gibidir ve Şekil 7.4'de δ ekseniyle eğri arasındaki alana eşittir.

$$W = \int_0^{\delta_1} S d\delta = \int_0^{S_1} S \alpha_{11} dS = \frac{1}{2} \alpha_{11} S_1^2 \tag{7.4}$$

Şimdi de gövdeye S_1 kuvveti uygulanıyorken S_2 kuvveti de uygulansın. S_2 kuvveti uygulandığında *2* noktasındaki esnemenin grafiği Şekil 7.4'ü andırır. Ancak α_{11}'in yerini α_{22} alır ve değişkenlerin indisleri *2* olur. Dolayısıyla S_2 kuvveti uygulanırken *2* noktasında yapılan iş aşağıdaki gibidir:

$$W = \frac{1}{2} S_2 (\alpha_{22} S_2) = \frac{1}{2} \alpha_{22} S_2^2 \tag{7.5}$$

S_2 kuvveti uygulanırken *1* noktasında S_1 kuvveti de uygulanmakta olduğundan, bu kuvvet tarafından *1* noktasında yapılan iş ise aşağıdaki gibidir:

$$W = \int_0^{S_2} S_1 (\alpha_{12} dS) = \alpha_{12} S_1 S_2 \tag{7.6}$$

Elastik gövdeye yapılan işler gövde tarafından potansiyel enerji olarak depolanır. Her iki kuvvet de uygulandıktan sonra gövde tarafından depolanan toplam potansiyel enerji denklemler (7.4), (7.5) ve (7.6)'da verilen işlerin toplamı kadardır:

$$E_{p1} = \frac{1}{2} \alpha_{11} S_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} S_2^2 + \alpha_{12} S_1 S_2 \tag{7.7}$$

Şimdi de gövdeye kuvvet uygulama işlemini önce S_2'yi, daha sonra S_2 varken S_1'i uygulayarak tekrar edelim. Bu işlem sırasında S_2 kuvvetinin *2* noktasında yaptığı iş,

$$W = \frac{1}{2} S_2 (\alpha_{22} S_2) = \frac{1}{2} \alpha_{22} S_2^2 \tag{7.8}$$

S_1 kuvvetinin *1* noktasında yaptığı iş,

$$W = \int_0^{\delta_1} S d\delta = \int_0^{S_1} S\alpha_{11} dS = \frac{1}{2}\alpha_{11} S_1^2 \qquad (7.9)$$

S_1 kuvveti uygulanırken S_2 'nin *2* noktasında yaptığı iş ise aşağıdaki gibidir:

$$W = \int_0^{S_1} S_2 (\alpha_{21} dS) = \alpha_{21} S_1 S_2 \qquad (7.10)$$

Bu işlem sonunda elastik gövde tarafından depolanan toplam potansiyel enerji, denklemler (7.8), (7.9) ve (7.10)'daki iş terimlerinin toplamıdır:

$$E_{p2} = \frac{1}{2}\alpha_{11} S_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{22} S_2^2 + \alpha_{21} S_1 S_2 \qquad (7.11)$$

Sonuç olarak kuvvetlerin uygulama sıraları farklı olmakla birlikte, her iki işlemde ulaşılan son durumlar aynıdır. Elastik gövde korunumlu bir eleman olduğundan depoladığı potansiyel enerji işlemin yapıldığı sıradan bağımsızdır ve sadece son duruma bağlıdır. Bu yüzden denklem (7.7) ile verilen E_{p1} ve denklem (7.11) ile verilen E_{p2} potansiyel enerjileri birbirine eşittir. Bu terimler eşitlenirse aşağıdaki sonuca varılır:

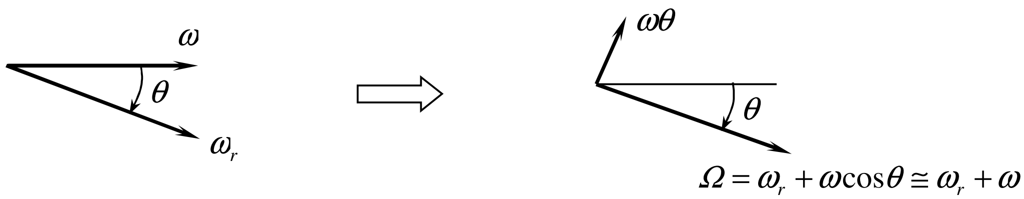
$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \qquad (7.12)$$

Şekil 7.2'deki sistemde *1* ve *2* noktaları aynı yerde yani milin (kirişin) uç noktasındadır. F kuvveti *1* noktasındaki zorlama, *M* momenti *2* noktasındaki zorlama, *F*'nin iş yapmasına sebep olan *y* esnemesi *1* noktasındaki esneme, *M*'nin iş yapmasına sebep olan θ esnemesi ise *2* noktasındaki esnemedir.

Etki katsayıları çeşitli kirişler, geometriler ve bağlantı durumları için elastisite ve mukavemet konusundaki kitaplarda bulunabilir. Şekil 7.2'deki gibi bir ankastre mil (kiriş) için esneme denklemleri ve etki katsayıları Çizelge 7.1'de özetlenmiştir.

7.1.2 Esnek Mile Oturtulmuş Rotorların Dinamiği

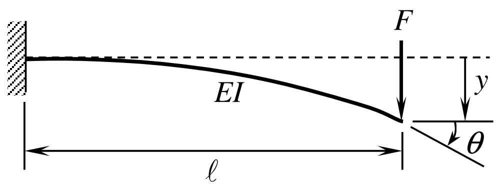
Şimdi Şekil 7.1'deki temel probleme geri dönelim. Problemin açısal hız vektörleri Şekil 7.5a'da verilmiştir. Şekildeki θ açısı küçük olduğundan $\sin\theta = \theta$ ve $\cos\theta = 1$ alınabilir. Şekil 7.5a'daki bileşenlerden I_p ve I_d eksenleri yönlerindeki hız bileşenleri elde edilmiş ve Şekil 7.5b'de verilmiştir. Rotorun açısal hızı Ω, milin yatak ekseni etrafındaki dolanım açısal hızı ise ω'dır.

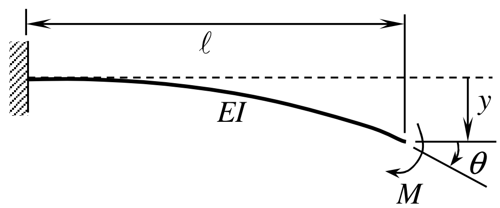


(a) (b)

Şekil 7.5

Çizelge 7.1

<table>
<tr><td>
</td><td>$y = \dfrac{F\ell^3}{3E_Y I}$ (A.1) $\theta = \dfrac{F\ell^2}{2E_Y I}$ (A.2)

$\alpha_{11} = \dfrac{\ell^3}{3E_Y I}$ $\alpha_{21} = \dfrac{\ell^2}{2E_Y I}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$y = \dfrac{M\ell^2}{2E_Y I}$ (A.3) $\theta = \dfrac{M\ell}{E_Y I}$ (A.4)

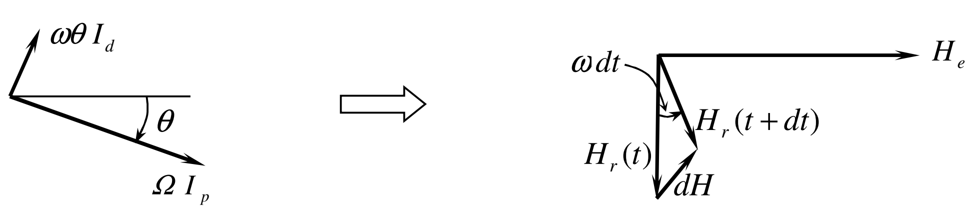
$\alpha_{12} = \dfrac{\ell^2}{2E_Y I}$ $\alpha_{22} = \dfrac{\ell}{E_Y I}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">F ve M birlikte uygulandığında:

$y = \alpha_{11}F + \alpha_{12}M$ E_Y : Young modülü.

$\theta = \alpha_{21}F + \alpha_{22}M$ I : Kirişin kesit atalet momenti.</td></tr>
</table>

Şekil 7.5b'de görülen asal yönlerdeki hız bileşenleri bu yönlere ait atalet momentleriyle çarpılırsa $\vec{H}$ vektörünün asal yönlerdeki bileşenleri Şekil 7.6a'daki gibi bulunur. Bunlardan da yatak eksenine paralel ve dik (radyal) yönlerdeki açısal momentum bileşenleri (sırasıyla H_e ve H_r) Şekil 7.6b'deki gibi elde edilir. Dolanım hareketi sırasında Şekil 7.6b'deki vektör diyagramı yatak ekseni etrafında ω açısal hızı ile döner. Bu dönme hareketi sırasında H_e bileşeninin yönü ve boyu değişmediğinden $\dot{\vec{H}}$'ne bir katkısı yoktur. H_r'nin ise yönü değişir ve ucu kağıt düzlemi içine doğru girer. H_r'nin büyüklüğü aşağıdaki gibidir:

$$H_r = \Omega I_p \theta - \omega \theta I_d \tag{7.13}$$



(a) (b)

Şekil 7.6

dt süresi içinde H_r'nin dönme açısı ωdt kadardır. dH ise kağıdın içine doğru ve $dH = H_r \omega dt$ büyüklüğündedir. Dolayısıyla, aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{içeri} = \omega H_r = \omega\theta(\Omega I_p - \omega I_d) \tag{7.14}$$

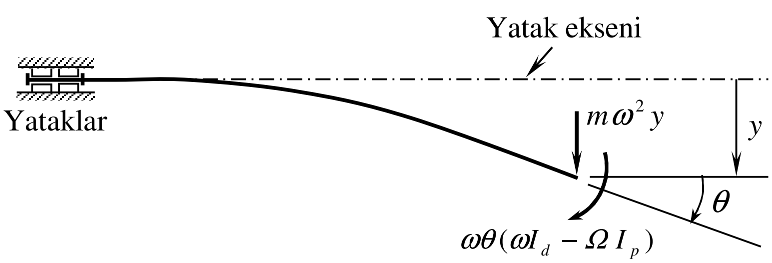
Newton Kanunu gereği denklem (7.14)'ün rotora uygulanan *içeri* yöndeki moment bileşenine eşit olması gereklidir. Bu moment rotora mil tarafından uygulanır. Bu momente eşit ve ters yönde bir moment ise rotor tarafından mile uygulandığından, *rotorun mile uyguladığı moment* için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$M_{içeri} = \omega\theta(\omega I_d - \Omega I_p) \tag{7.15}$$

Dolanım hareketi sırasında rotorun ağırlık merkezinin radyal yönde yatak eksenine doğru ivmesi $\omega^2 y$ kadardır. Rotorun toplam kütlesi *m* ise, mil tarafından rotora aynı yönde $m\omega^2 y$ kadar bir kuvvet uygulanır. Bu kuvvete eşit fakat ters yönde,

$$F = m\omega^2 y \tag{7.16}$$

gibi bir kuvvet ise rotor tarafından mile uygulanır. Rotor tarafından mile uygulanan moment ve kuvvet Şekil 7.7'de görülmektedir.



Şekil 7.7

Şekil 7.7'deki mil için denklemler (7.1) ve (7.2) yazılırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$y = \alpha_{11}\left(m\omega^2 y\right) + \alpha_{12}\left[\omega\theta(\omega I_d - \Omega I_p)\right] \tag{7.17}$$

$$\theta = \alpha_{21}\left(m\omega^2 y\right) + \alpha_{22}\left[\omega\theta(\omega I_d - \Omega I_p)\right] \tag{7.18}$$

ya da,

$$\left[\alpha_{11} m\omega^2 - 1\right] y + \left[\alpha_{12}\omega(\omega I_d - \Omega I_p)\right]\theta = 0 \tag{7.19}$$

$$\left[\alpha_{21} m\omega^2\right] y + \left[\alpha_{22}\omega(\omega I_d - \Omega I_p) - 1\right]\theta = 0 \tag{7.20}$$

Yukarıdaki iki denklem homojendir. Bu yüzden bu denklemlerden sıfırdan farklı bir y ve θ çözümünün bulunabilmesi için katsayılarının determinantının sıfır olması gereklidir. Denklemlerin katsayılarının determinantının sıfıra eşitlenmesi aşağıdaki denklemi verir:

$$\left[\alpha_{11} m\omega^2 - 1\right]\left[\alpha_{22}\omega(\omega I_d - \Omega I_p) - 1\right] - \alpha_{12}^2 m\omega^3(\omega I_d - \Omega I_p) = 0 \qquad (7.21)$$

ya da,

$$\left[mI_d(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)\right]\omega^4 - \left[mI_p(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)\right]\Omega\omega^3 - \left[\alpha_{11}m + \alpha_{22}I_d\right]\omega^2 + \left[I_p\alpha_{22}\right]\Omega\omega + 1 = 0 \qquad (7.22)$$

Verilen bir Ω rotor hızına karşılık gelen ω dolanım hızı denklem (7.22)'den aşağıdaki parametreler cinsinden çözülebilir:

$$\omega = f(\Omega, m, I_p, I_d, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}) \qquad (7.23)$$

Denklem (7.22)'yi daha basit bir hale getirmek için aşağıdaki boyutsuz terimleri tanımlayalım:

Boyutsuz dolanım frekansı: $$F = \omega\sqrt{m\alpha_{11}} \qquad (7.24)$$

Boyutsuz rotor hızı: $$S = \Omega\sqrt{m\alpha_{11}} \qquad (7.25)$$

Disk etkisi: $$D = \frac{I_d\alpha_{22}}{m\alpha_{11}} \qquad (7.26)$$

Elastisite katsayısı: $$E = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} \qquad (7.27)$$

Atalet momentleri oranı: $$I = \frac{I_p}{I_d} \qquad (7.28)$$

Yukarıdaki boyutsuz terimler denklem (7.22)'de kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$F^4 - ISF^3 - \frac{D+1}{DE}F^2 + \frac{IS}{E}F + \frac{1}{DE} = 0 \qquad (7.29)$$

Bu denklemden S aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$S = \frac{F^4 - \frac{D+1}{DE}F^2 + \frac{1}{DE}}{IF^3 - \frac{I}{E}F} \qquad (7.30)$$

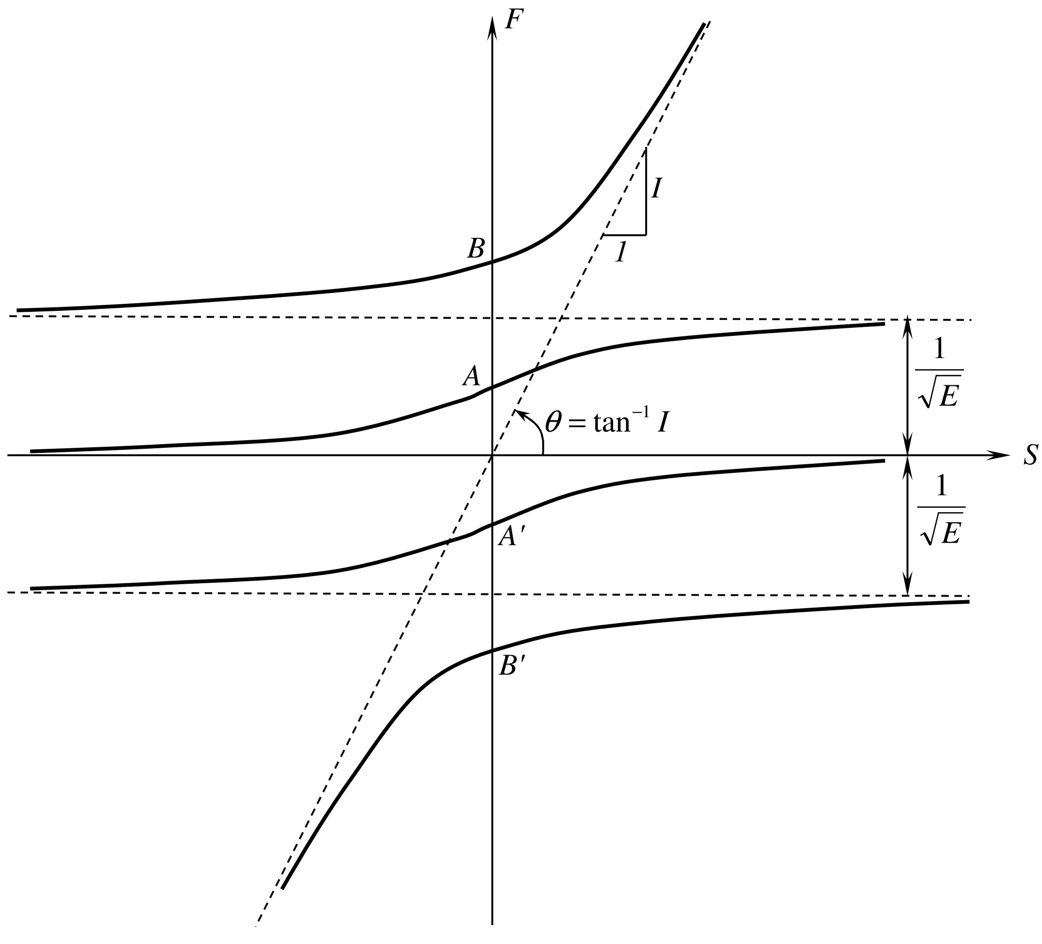
Denklem (7.30) kullanılarak F'ye karşı S eğrisi çizilirse Şekil 7.8'dekine benzer bir grafik elde edilir. Denklem (7.30)'da F'nin işareti değiştiğinde S'nin işareti de değişeceğinden bu grafikteki eğriler orijine göre simetriktir. Yatay asemptotlar denklem (7.30)'da $S \to \infty$ yapılarak, yani paydayı sıfıra eşitleyerek bulunur:

$$IF^3 - \frac{I}{E} F = 0 \tag{7.31}$$

ya da,

$$F_1 = 0 \qquad\qquad F_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{E}} \tag{7.32}$$

Grafikteki eğrilerin düşey ekseni kestiği *A*, *B*, *A′* ve *B′* noktaları denklem (7.30)'dan $S = 0$ yapılarak bulunabilir. Bu değerler milin dönmediği durumdaki doğal frekenslarıdır.



Şekil 7.8

Grafikteki eğik asemptotun eğimi aşağıdaki denklemden bulunabilir:

$$\lim_{F\to\infty}\left(\frac{S}{F}\right)=\lim_{F\to\infty}\frac{F^4-\dfrac{D+1}{DE}F^2+\dfrac{1}{DE}}{IF^4-\dfrac{I}{E}F^2}=\frac{1}{I} \tag{7.33}$$

Yani asemptot denklemi aşağıdaki gibidir:

$$F = I\,S \tag{7.34}$$

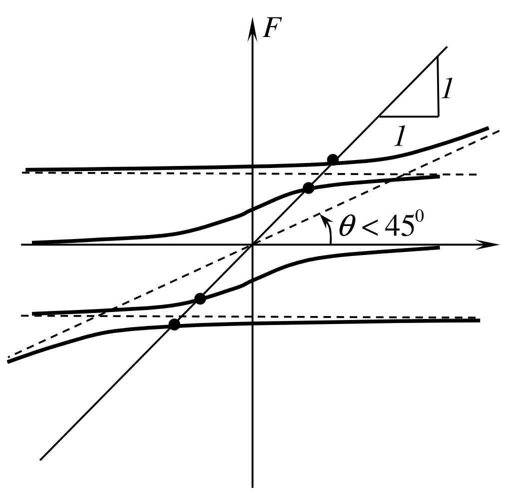
$I=1$ ise $\theta=45^0$, $I<1$ ise $\theta<45^0$, $I>1$ ise $\theta>45^0$ olur.

Not: Gövdelerin şekillerine göre *I*'nin değeri aşağıdaki gibi değişir:

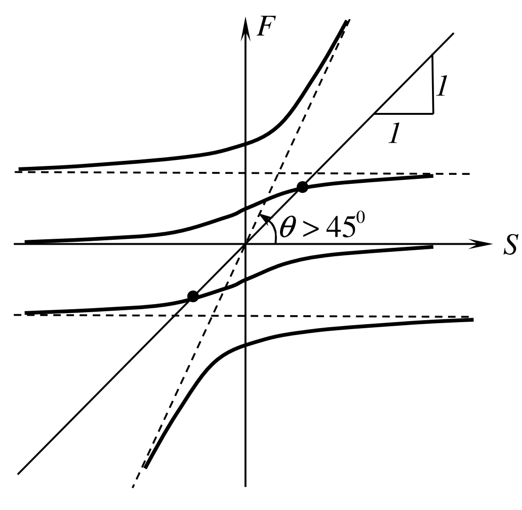
$I<1$	:	Çubuğu andıran gövde.
$I=1$	:	Küre, $h=0.866D$ olan silindir.
$I>1$	:	Diski andıran gövde.
$I=2$	:	İnce disk
$I>2$	:	Mümkün değil.

Kritik Hızlar

Rotorun dönme hızı dolanım hızına eşit olduğunda sistem rezonansa girer ve kritik durum ortaya çıkar. Yani kritik hız durumunda $S=F$ olur. Kritik hızları Şekil 7.8'e çizilen 45^0 eğimli doğrunun eğrileri kestiği noktalar belirler. Eğik asemptotun eğimi 45^0'den küçükse bu doğru eğrinin iki kolunu keseceğinden iki kritik hız; eğik asemptotun eğimi 45^0'den büyükse, doğru eğrinin bir kolunu keseceğinden bir kritik hız vardır. Yani çubuğu andıran rotora sahip millerin iki kritik hızı (Şekil 7.9a), diski andıran rotora sahip millerin ise bir kritik hızı vardır (Şekil 7.9b). Koordinat düzleminin üçüncü çeyreğindeki kritik hızlar, orijine göre birinci çeyreğindeki hızların simetriği olup, rotorun ters yöne döndüğü duruma aittir.



(a)



(b)

Şekil 7.9

Kritik hızların değerlerini bulmak için denklem (7.29)'da $F = S$ yerine koyulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$S^4 - IS^4 - \frac{D+1}{DE} S^2 + \frac{I}{E} S^2 + \frac{1}{DE} = 0 \tag{7.35}$$

ya da,

$$(1-I)S^4 - \left(\frac{D+1}{DE} - \frac{I}{E} \right) S^2 + \frac{1}{DE} = 0 \tag{7.36}$$

ya da,

$$S^4 - \left[\frac{D+1}{DE(1-I)} - \frac{ID}{DE(1-I)} \right] S^2 + \frac{1}{DE(1-I)} = 0 \tag{7.37}$$

ya da,

$$S^4 - \left[\frac{D(1-I)+1}{DE(1-I)} \right] S^2 + \frac{1}{DE(1-I)} = 0 \tag{7.38}$$

Denklem (7.38) iki parametre cinsinden yazılabilir. Bunlardan birisi E diğeri ise $D(1-I)$'dir. Eğer,

$$X = D(1-I) = \frac{\alpha_{22} I_d}{m\alpha_{11}} \left(1 - \frac{I_p}{I_d} \right) = \frac{\alpha_{22}(I_d - I_p)}{m\alpha_{11}} \tag{7.39}$$

olarak tanımlanırsa denklem aşağıdaki hali alır:

$$S^4 - \left[\frac{X+1}{XE} \right] S^2 + \frac{1}{XE} = 0 \tag{7.40}$$

S^2'ye karşı X eğrisini çizmek için denklem (7.40)'dan S^2 çözülürse,

$$S^2 = \frac{X+1}{2XE} \pm \sqrt{\left(\frac{X+1}{2XE} \right)^2 - \frac{1}{XE}} \tag{7.41}$$

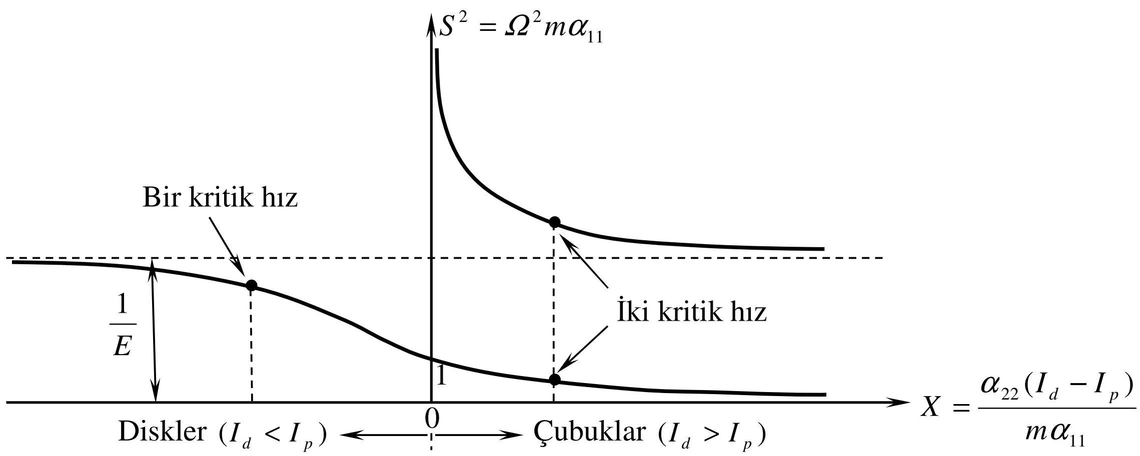
elde edilir. Yukarıdaki denklemde $X = 0$ iken $S^2 = \infty$ olduğundan S^2 ekseni grafiğin asemptotlarından biridir.

Denklem (7.40)'nın iki tarafı XE ile çarpılıp X çözülürse,

$$X = \frac{S^2 - 1}{S^2(ES^2 - 1)} \tag{7.42}$$

elde edilir. Bu denklemde $S^2 = 0$ ya da $S^2 = 1/E$ iken $X = \infty$ olduğundan, hem X ekseni hem de bu eksene paralel ve eksenden $1/E$ uzaklıkdaki doğru eğrinin asemptotlarıdır. Ayrıca $X = 0$ iken $S^2 = 1$ olur.

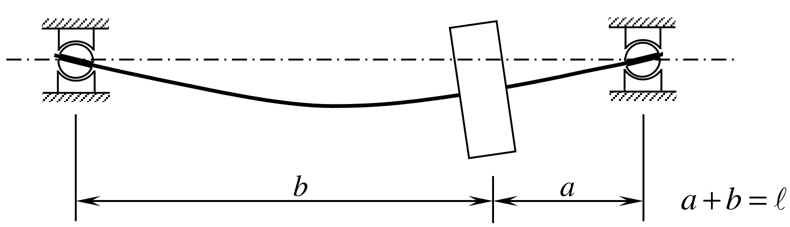
S^2'ye karşı X eğrisinin genel görünümü Şekil 7.10'daki gibidir. S^2 ekseninin sağ tarafında $X > 0$ ya da $I_d > I_p$ olup, grafiğin bu kısmı çubuğu andıran rotorlar içindir. S^2 ekseninin sol tarafında ise $X < 0$ ya da $I_d < I_p$ olup, grafiğin bu tarafı diski andıran rotorlar içindir. Verilen bir X değeri için bu grafikten, çubuğu andıran rotorlar için iki kritik hız, diski andıran rotorlar için ise bir kritik hız bulunur.



Şekil 7.10

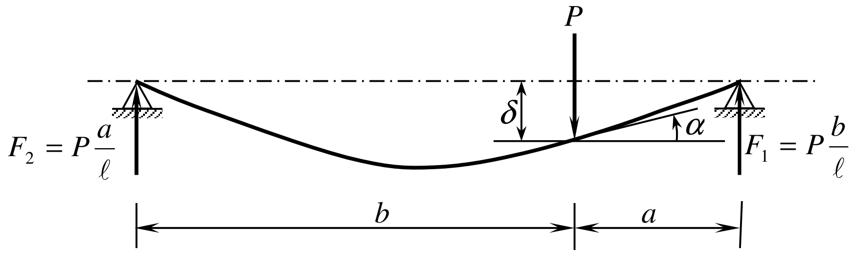
7.1.3 Esnek Mile Oturtulmuş Rotorların Dinamiği – Farklı Mil Montaj Biçimlerine Genelleştirme

Bölüm 7.1.2'de verilen analizin sonuçları, montaj biçimi Şekil 7.1'dekinden farklı olan mil-rotor problemlerine de uygulanabilir. Temel fark incelenen montaj biçimine karşılık gelen etki katsayılarını ($\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$) belirlemek ve denklemlerde bu katsayıları kullanmaktır. Bu bölümde örnek olarak Şekil 7.11'deki gibi genel bir sistem için etki katsayıları ve E parametresi (elastisite katsayısı) belirlenecektir.



Şekil 7.11

Bu problemde rotor tarafından mile uygulanan kuvvet ve moment aynen bir önceki bölümde Şekiller 7.5, 7.6 ve denklemler (7.13)-(7.16)'daki gibi bulunabilir. Rotor tarafından mile uygulananan kuvvete kısaca *P*, momente ise *M* diyelim. Sadece *P* kuvvetinin mile uygulandığı durum Şekil 7.12'de şematik olarak gösterilmiştir. Mil üzerinde rotorun



Şekil 7.12

bulunduğu noktanın yatak ekseninden esneme miktarı δ, aynı noktada milin yatak ekseniyle yaptığı açı α'dır. α_{11} ve α_{12} etki katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

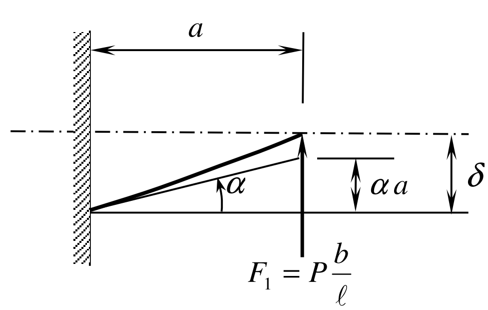
$$\alpha_{11} = \frac{\delta}{P} \qquad\qquad \alpha_{12} = \frac{\alpha}{P} \tag{7.43}$$

Milin iki ucunda yataklar tarafından mile uygulanan kuvvetler düşey yönde kuvvet dengesi ve moment dengesi denklemlerini yazarak kolayca çözülebilir. Bunlar aşağıdaki gibidir:

$$F_1 = P\frac{b}{\ell} \qquad\qquad F_2 = P\frac{a}{\ell} \tag{7.44}$$

Bir an için *P* kuvvetinin mile uygulandığı noktanın sağındaki kısmı Şekil 7.13'deki gibi ayrı olarak ele alalım. *P* kuvvetinin olduğu yerde sanki duvardan α açısıyla *a* uzunluğunda bir kiriş çıkmakta ve $P\frac{b}{\ell}$ büyüklüğünde bir kuvvet bu kirişin ucunu $\delta - \alpha a$ kadar esnetmektedir. Uygulanan bu kuvvet ve esneme Çizelge 7.1'deki (A.1) dekleminde yerine koyulursa, aşağıdaki ifade bulunur:

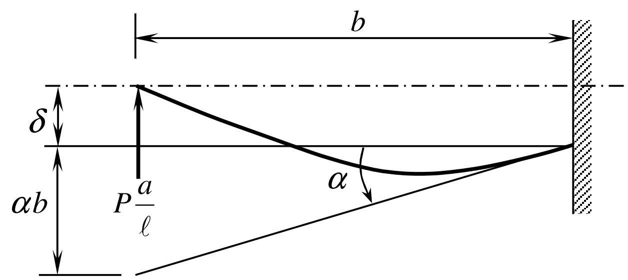
$$\delta - \alpha a = \frac{\left(P\frac{b}{\ell}\right)a^3}{3E_Y I} \tag{7.45}$$



Şekil 7.13

Şekil 7.14'de kirişin sol tarafı benzer biçimde modellenmiştir. Bu durumda kirişin ucu $P\frac{a}{\ell}$ kuvveti tarafından $\delta+\alpha b$ kadar esnetilmektedir. Bu kuvvet ve esneme Çizelge 7.1'deki (A.1) denkleminde yerine koyulursa, aşağıdaki ifade bulunur:

$$\delta+\alpha b=\frac{\left(P\frac{a}{\ell}\right)b^3}{3E_Y I} \tag{7.46}$$



Şekil 7.14

Denklemler (7.45) ve (7.46)'da bilinmeyenler δ ve α 'dır. Bu iki denklemden δ ve α aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta=\frac{Pa^2 b^2}{3E_Y I\ell} \qquad \alpha=\frac{Pab(b-a)}{3E_Y I\ell} \tag{7.47}$$

Denklemler (7.43) ve (7.47)'den α_{11} ve α_{12} etki katsayıları bulunur:

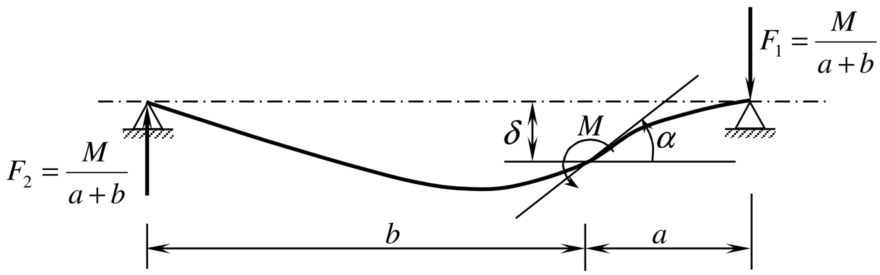
$$\alpha_{11}=\frac{a^2 b^2}{3E_Y I\ell} \qquad \alpha_{12}=\frac{ab(b-a)}{3E_Y I\ell} \tag{7.48}$$

Şimdi yukarıdaki yöntemi, mile P kuvveti yerine bir M momenti uygulayarak tekrar edelim (Şekil 7.15). Mil üzerinde rotorun bulunduğu noktanın yatak ekseninden esneme miktarı δ, aynı noktada milin yatak ekseniyle yaptığı açı α'dır. α_{22} etki katsayısının tanımı aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_{22}=\frac{\alpha}{M} \tag{7.49}$$

Bu durum için düşey yönde kuvvet dengesi ve moment dengesi denklemleri yazılırsa, milin iki ucundaki yataklar tarafından mile uygulanan kuvvetler aşağıdaki gibi elde edilir:

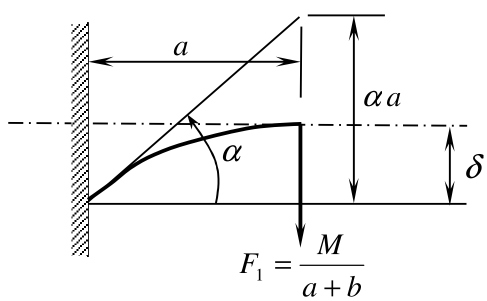
$$F_1=\frac{M}{a+b} \qquad F_2=\frac{M}{a+b} \tag{7.50}$$



Şekil 7.15

Şekil 7.16'da kirişin (milin) sağ tarafı görülmektedir. Duvardan α açısıyla çıkan bir kirişin ucuna $M/(a+b)$ kuvveti uygulanmakta ve bunun etkisiyle kirişin ucu aşağı doğru $\alpha a-\delta$ kadar esnemektedir. Bu kuvvet ve esneme Çizelge 7.1'deki (A.1) dekleminde yerine koyularak aşağıdaki ifade bulunur:

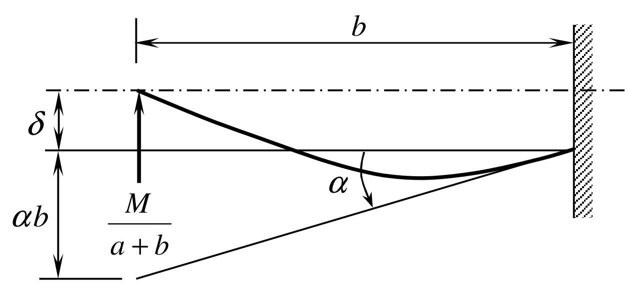
$$\alpha a-\delta=\frac{\left(\dfrac{M}{a+b}\right)a^3}{3E_Y I} \tag{7.51}$$



Şekil 7.16

Şekil 7.17'de ise moment uygulanan kirişin sol tarafı görülmektedir. Bu durumda ise duvardan α açısıyla çıkan bir kirişin ucuna $M/(a+b)$ kuvveti uygulanmakta ve bunun etkisiyle kirişin ucu yukarı doğru $\alpha b+\delta$ kadar esnemektedir. Bu değerler Çizelge 7.1'deki (A.1) dekleminde yerine koyulduğunda aşağıdaki ifade bulunur:

$$\alpha b+\delta=\frac{\left(\dfrac{M}{a+b}\right)b^3}{3E_Y I} \tag{7.52}$$



Şekil 7.16

Denklemler (7.51) ve (7.52)'den α çözülürse,

$$\alpha = \frac{M(a^3 + b^3)}{3E_Y I \ell^2} \tag{7.53}$$

bulunur. Denklemler (7.49) ve (7.53)'den α_{22} aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha_{22} = \frac{a^3 + b^3}{3E_Y I \ell^2} \tag{7.54}$$

Denklemler (7.48) ve (7.54) ile tanımlanan etki katsayıları denklem (7.27)'de yerine koyulursa elastisite katsayısı *E* aşağıdaki hale gelir:

$$E = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = 1 - \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = 1 - \frac{a^2 b^2 (b-a)^2 (3E_Y I\ell)(3E_Y I\ell^2)}{(3E_Y I\ell)^2 a^2 b^2 (a^3 + b^3)} \tag{7.55}$$

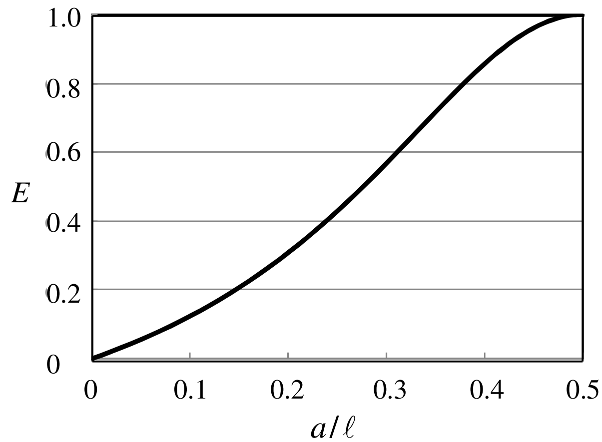
ya da,

$$E = 1 - \frac{(b-a)^2 \ell}{a^3 + b^3} = 1 - \frac{(\ell - 2a)^2 \ell}{a^3 + (\ell - a)^3} = 1 - \frac{\left(1 - 2\dfrac{a}{\ell}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^3 + \left(1 - \dfrac{a}{\ell}\right)^3} \tag{7.56}$$

Denklem (7.56)'dan görüldüğü gibi, *E* sadece (a/ℓ) parametresinin bir fonksiyonudur. Şekil 7.17'de *E*'nin (a/ℓ)'ye göre değişimi görülmektedir. Simetri dolayısıyla grafikte (a/ℓ)'nin sadece 0.5'e kadar olan değerleri verilmiştir. Görüldüğü gibi *E*'nin değeri daima sıfır ile 1 arasındadır.

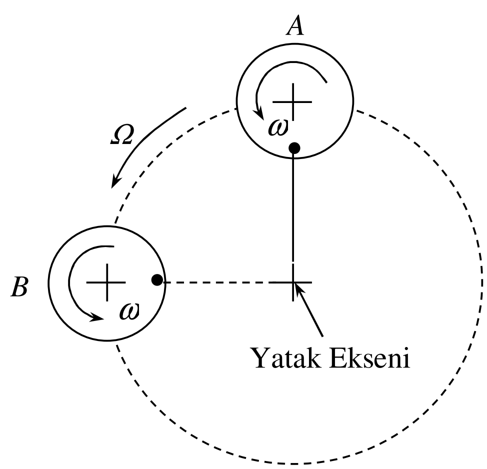
7.2 Esnek Mile Oturtulmuş Simetrik Olmayan Rotorların Dinamiği

Bölüm 7.1.2'de rotorun simetrik olduğu kabul edilmişti. Gövdenin mil ekseni etrafındaki atalet momentine I_p denilmişti. Şekil 7.5 ve 7.6'daki vektör diyagramlarından açıkça görüleceği gibi I_d atalet momentine sahip eksen ise, *mil eksenine dik fakat mil ve yatak ekseninin oluşturduğu düzlem üzerinde* alınmıştır. Rotor gövdesi eksenel simetriye sahip



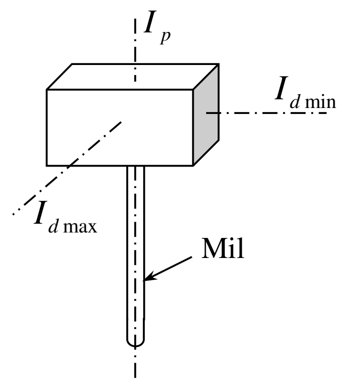
Şekil 7.17

olduğundan gövdenin açısal konumu bu düzleme göre nasıl olursa olsun bu atalet momenti değişmemekteydi. Kritik hızda $S = F$ ya da $\omega = \Omega$ olup, $\omega_r = 0$'dır. Kritik hızda dönen bir rotora Şekil 7.18'deki gibi uç tarafından bakılırsa, rotorun yatak eksenine hep aynı tarafının baktığı anlaşılır. Örneğin, rotor *A* konumundayken yatak eksenine bakan tarafında şekilde görüldüğü gibi siyah bir nokta işaretlenmiş olsun. Rotor *A* konumundan *B* konumuna geldiğinde bu siyah nokta hala yatak ekseni tarafında olur.



Şekil 7.18

Şimdi rotorun Şekil 7.19'daki gibi asimetrik olduğunu kabul edelim. Bu gövde asal eksenlerinden biri üzerinde mile oturtulmuş olsun. Gövdenin mil ekseni etrafıdaki atalet momenti polar atalet momenti yani I_p'dir. Şekil 7.19'daki gövdenin diğer iki asal ekseni etrafındaki atalet momentleri ise birbirinden farklıdır. Bunlardan küçük olanına $I_{d\,\min}$, büyük olanına $I_{d\,\max}$ diyelim.

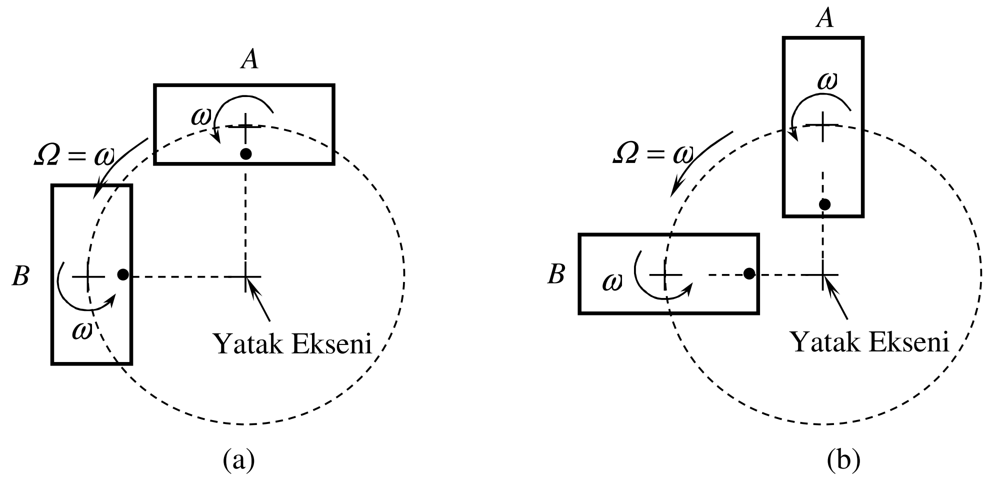


Şekil 7.19

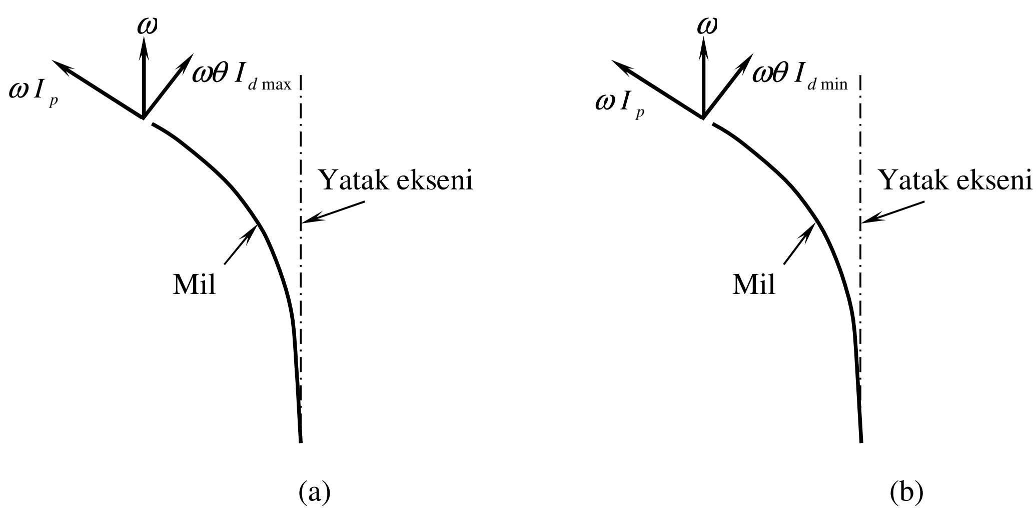
Şimdi bu asimetrik gövdeye, kritik hızda dönerken Şekil 7.18'dekine benzer biçimde rotorun olduğu uçtan bakalım. Şekil 7.20'de rotorun açısal konumuna göre iki farklı özel durum görülmektedir. Şekil 7.20a'da atalet momenti $I_{d\max}$ olan asal eksen radyal yönde, Şekil 7.20b'de ise atalet momenti $I_{d\min}$ olan asal eksen radyal yöndedir. Şekil 7.21'de ise bu durumlara karşılık gelen açısal momentum vektör diyagramları görülmektedir. Bu diyagramlar daha önce simetrik gövde için çizilen Şekil 7.6'daki diyagramlarla karşılaştırıldığında (burada kritik hız durumu incelendiğinden Şekil 7.6'da $\omega = \Omega$ alınız.) aralarındaki tek farkın Şekil 7.6'daki I_d'nin yerine Şekil 7.20a'da $I_{d\max}$, Şekil 7.20b'de ise $I_{d\min}$'in kullanılmış olmasıdır. Dolayısıyla, daha önce kritik hızla ilgili olarak elde edilen bütün denklemler ve Şekil 7.10 bu yeni durumlar için de geçerlidir. Sadece I_d yerine incelenen duruma göre $I_{d\max}$ ya da $I_{d\min}$'in kullanılması yeterlidir.

Şimdi de Şekil 7.22'deki genel hali ele alalım. Bu durumda $I_{d\max}$ ya da $I_{d\min}$ değerine sahip asal eksenlerden hiç biri radyal yönde değildir. $I_{d\max}$ değerine sahip asal eksen radyal yönle bir α açısı yapmaktadır. Sistem kritik hıza sahip olduğundan $\omega = \Omega$ ve $\omega_r = 0$ olup, rotor ve mil birlikte ω hızıyla dönmektedir. İlk olarak ω vektörünün asal yönlerdeki bileşenlerini bulalım. Önce ω vektörünü Şekil 7.23a'daki gibi mil ekseni yönünde (polar yön) $\omega/\cos\theta \cong \omega$ ve yatak eksenine dik düzlem içinde radyal yönde $\omega\tan\theta \cong \omega\theta$ olarak iki bileşene ayıralım. Daha sonra da radyal yöndeki $\omega\theta$ bileşenini Şekil 7.23b'deki gibi $I_{d\max}$ ve $I_{d\min}$ değerlerine sahip asal eksen yönlerinde bileşenlere ayıralım. Asal yönlerdeki açısal hız bileşenleri bu yönler etrafındaki atalet momentleriyle çarpılırsa, açısal momentum vektörünün asal yönlerdeki bileşenleri elde edilir. Şekil 7.23a ve Şekil 7.23b'de bu şekilde bulunan açısal momentum bileşenleri parantezler içinde verilmiştir. $\vec{H}$ vektörünün yatak ekseni yönünde olan bileşenine sadece polar yöndeki bileşen katkıda bulunur. Dolanım hareketi sırasında yatak ekseni yönündeki bileşenin yönü ve boyu değişmediğinden, bunun $\dot{\vec{H}}$'ne bir katkısı yoktur. $\vec{H}$ vektörünün yatak eksenine dik olan düzlemdeki bileşenleri ise Şekil 7.23c'deki gibidir.

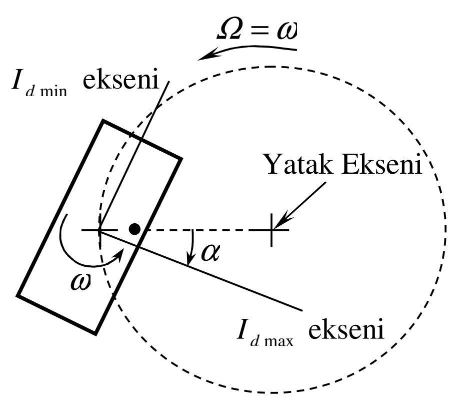
Dolanım hareketi sırasında Şekil 7.23c'deki vektör diyagramı yatak eksenine dik olan düzlem üzerinde ω hızıyla döner. Diyagramdaki vektör bileşenlerinin boyu değişmez. Fakat dönme sırasında yönleri değiştiğinden Şekil 7.24a'da görülen $\dot{\vec{H}}$ bileşenlerine sebep olurlar. Bu bileşenleri Şekil 7.24b'deki gibi iki yöne toplayalım. Bu bileşenlerden radyal yöne dik



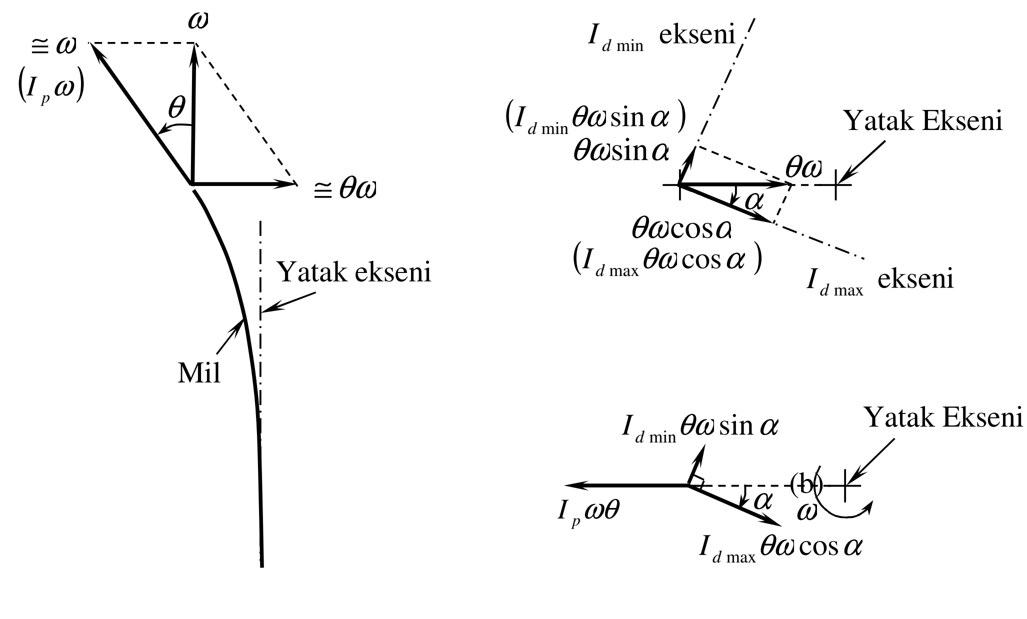
Şekil 7.20



Şekil 7.21

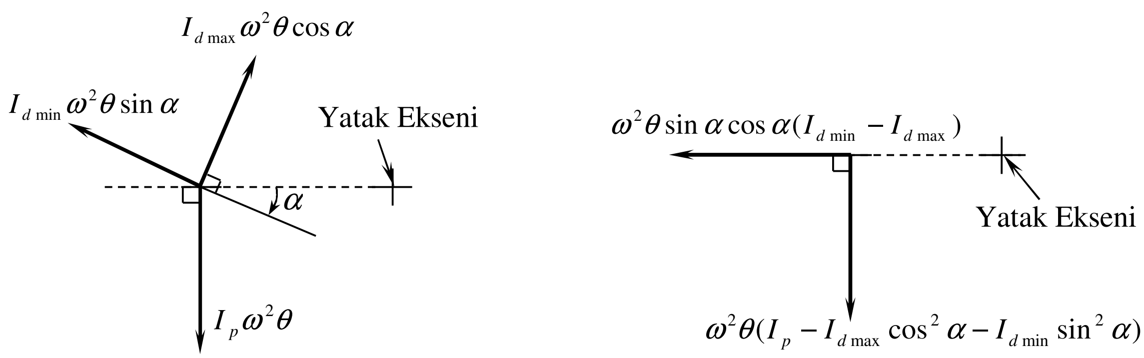


Şekil 7.22



(a) (c)

Şekil 7.23



(a) (b)

Şekil 7.24

olanı (aşağı doğru olan) Newton Kanunu gereği mil tarafından rotora bu yönde uygulanan momente eşittir:

$$M = \omega^2\theta(I_p - I_{d\,\max}\cos^2\alpha - I_{d\,\min}\sin^2\alpha) \tag{7.57}$$

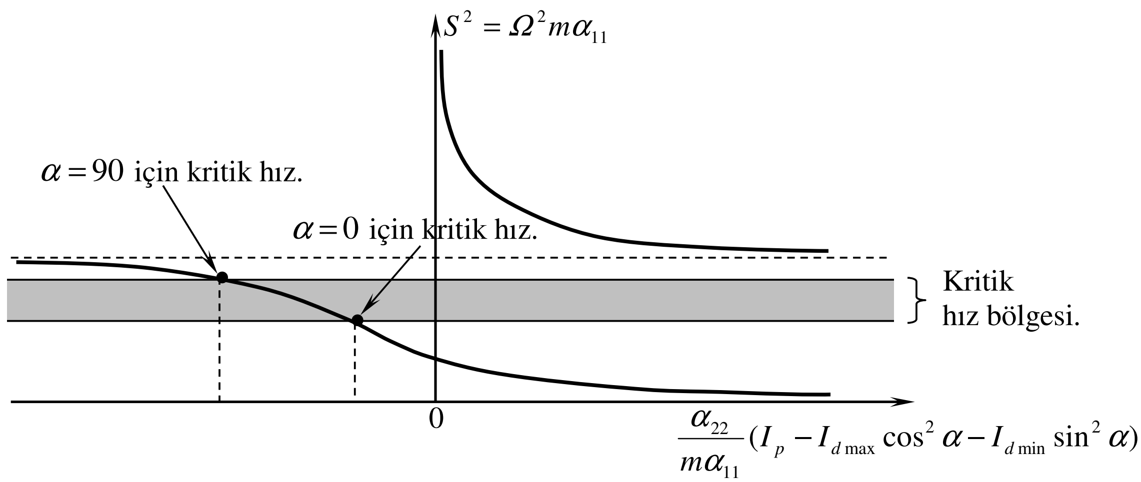
Yukarıdaki denklem daha önce simetrik rotor için elde edilmiş olan denklem (7.15)'in karşıtıdır. Ancak burada kritik hızdaki durum incelendiğinden, iki denklem arasındaki karşılaştırma denklem (7.15)'de $\omega = \Omega$ alarak, yani $M_{içeri} = \omega^2\theta(I_d - I_p)$ denklemiyle yapılmalıdır. Bu ifade ile denklem (7.57) karşılaştırıldığında, daha önceki $(I_d - I_p)$ teriminin yerini denklem (7.57)'de $(I_p - I_{d\,\max}\cos^2\alpha - I_{d\,\min}\sin^2\alpha)$ teriminin almış olduğu görülür. Yani simetrik rotorun kritik hızını veren denklemlerde $(I_d - I_p)$ teriminin yerine

$(I_p - I_{d\max}\cos^2\alpha - I_{d\min}\sin^2\alpha)$ koyarak asimetrik gövdenin kritik hızını veren denklemler yazılabilir. Daha önce Şekil 7.10'da verilen grafik, yatay ekseninindeki $(I_d - I_p)$ terimini $(I_p - I_{d\max}\cos^2\alpha - I_{d\min}\sin^2\alpha)$ ile değiştirerek asimetrik rotor için de kullanılabilir (Şekil 7.25). Örneğin, yatay eksenin değeri ve buna karşılık gelen kritik hızlar $\alpha = 0$ ve $\alpha = 90$ için Şekil 7.25'de verildiği gibi olsun. Rotor dönerken α açısı 0 ve 90 dereceler arasında herhangi bir değerde olabileceğinden bu iki hız arasındaki bütün hızlar da kritik hızdır. Dolayısıyla, asimetrik rotorlarda belli kritik hız değerleri yerine kritik hız bölgeleri görülür.

Asimetrik rotorun mile monte edildiği asal eksene bağlı olarak aşağıdaki üç farklı durumla karşılaşılması mümkündür:

i. Diski andıran rotor $(I_p > I_{d\max} > I_{d\min})$:

Bu durumda rotor yayvan, diski andıran bir şekle sahiptir. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 90$ için kritik hızların ikisi de Şekil 7.25'de olduğu gibi düşey eksenin sol tarafındadır. Bunun sonucu bir tane kararsız hız bölgesi vardır.



Şekil 7.25 Diski andıran asimetrik rotor $(I_p > I_{d\max} > I_{d\min})$.

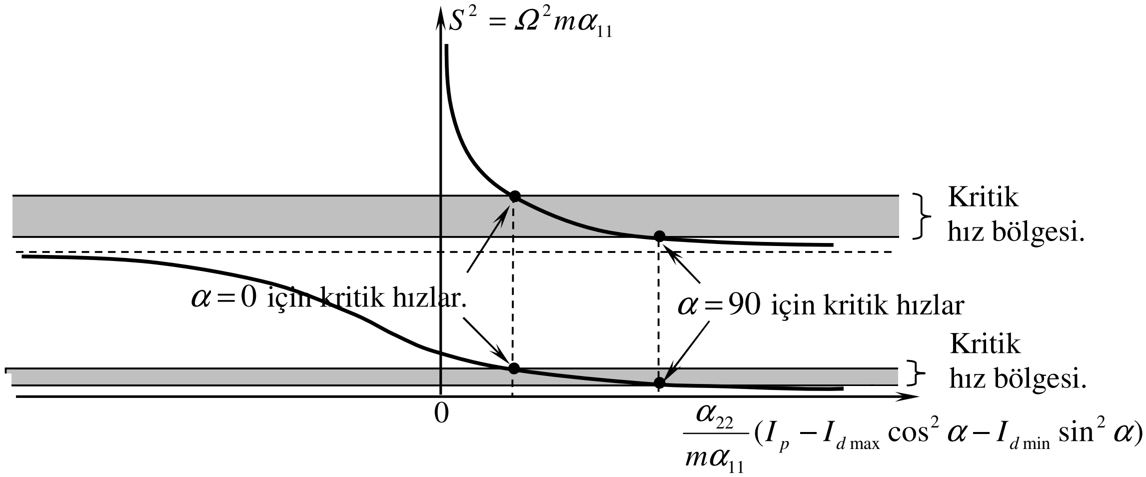
ii. Çubuğu andıran rotor $(I_{d\max} > I_{d\min} > I_p)$:

Bu durumda rotor ince, çubuğu andıran bir şekle sahiptir. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 90$ için kritik hızların ikisi de Şekil 7.26'da olduğu gibi düşey eksenin sağ tarafındadır. Bunun sonucu iki tane kararsız hız bölgesi vardır.

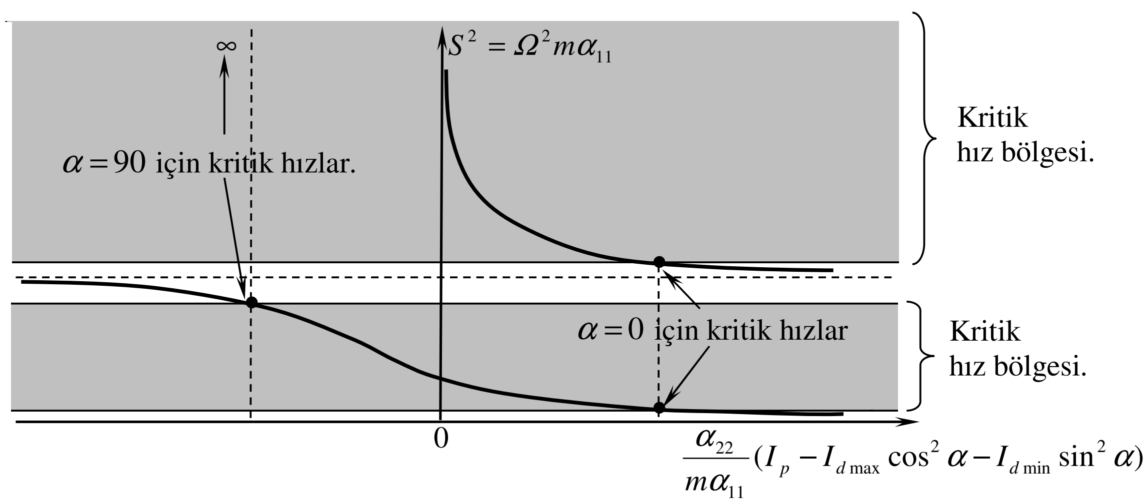
iii. Hibrid rotor $(I_{d\max} > I_p > I_{d\min})$

Bu durumda rotor, orta atalet momenti değerine sahip asal ekseni etrafında döndürülmektedir. $\alpha = 0$ için kritik hız düşey eksenin sağ tarafında, $\alpha = 90$ için kritik hız ise düşey eksenin solundadır. Şekil 7.27'de olduğu gibi neredeyse bütün hızları içine alan iki tane çok geniş kritik hız bölgesi vardır. Yukarıdaki bölge sonsuz hıza kadar olan hızları içine alır.

Bölüm 5.5.2'de, serbest bir gövde için orta atalet momentine sahip eksenin kararsız dönme ekseni olduğu görülmüştü. Bu bölümün sonuçları ise, gövdelerin orta atalet momentine sahip eksenleri etrafında bir mile monte edilerek de döndürülmemesi gerektiğini göstermektedir.



Şekil 7.26 Diski andıran asimetrik rotor $(I_{d\max} > I_{d\min} > I_p)$



Şekil 7.27 Hibrid asimetrik rotor $(I_{d\max} > I_p > I_{d\min})$

NOT:

Eğer simetrik bir rotor simetrik olmayan bir mile monte edilerek döndürülürse etki katsayılarının değerleri değişik yönlerdeki esnemeler için farklı olacağından yukarıdakine benzer kararsız bölgeler görülür. Bu tür sistemler için de benzer bir analiz kullanılır.

PROBLEMLER

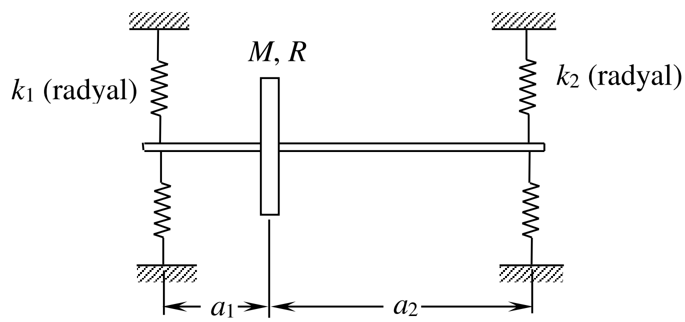
Problem 7.1

M kütlesinde ve R yarıçapında muntazam kütle dağılımlı ince bir disk ağırlıksız ve rijit bir mile oturtulmuştur. Mil diske a_1 ve a_2 uzaklıklarında bulunan k_1 ve k_2 radyal yaylarıyla askıya alınmıştır. Diske yakın olan yay daha sert olup yay sabitleri arasında,

$$k_1 a_1 = k_2 a_2$$

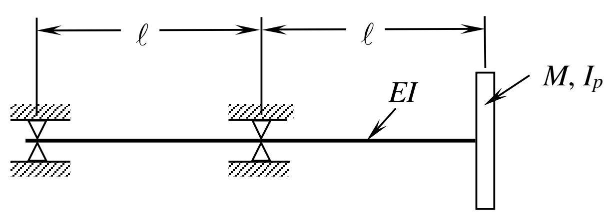
gibi bir ilişki vardır. Mil Ω hızıyla dönmektedir. Bu sistem için ω/ω_a 'ya karşı Ω/ω_a grafiğini elde edin. Bu iki terim arasında ω_a/ω_b parametresi cinsinden bir fonksiyon bulun. Kritik hızlar nelerdir?

Not: $\omega_a^2 = (k_1 + k_2)/M \qquad \omega_b^2 = \dfrac{(k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2)}{MR^2/4}$



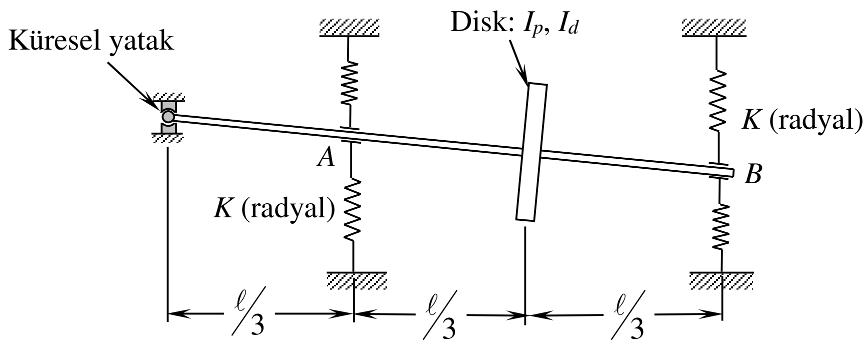
Problem 7.2

2ℓ uzunluğunda ve EI değeri belli bir mil şekildeki gibi iki yerden yataklanmıştır. Yataklar milin açısını değiştirmesine mani olmamaktadır; yataklanan noktalar ise herhangi bir yönde yerini değiştirmemektedir. Milin ucuna I_p değeri bilinen ince bir disk monte edilmiştir. Diskin kütlesi m'dir. Boyutsuz kritik hız K'yı ($K = \omega_{kr}\sqrt{\dfrac{ml^3}{EI}}$) disk etkisi D'nin ($D = \dfrac{I_d}{ml^2}$) fonksiyonu olarak bulun.



Problem 7.3

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. A ve B'deki yataklar radyal yönde K sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Sistemin kritik hız/hızlarını bulun.



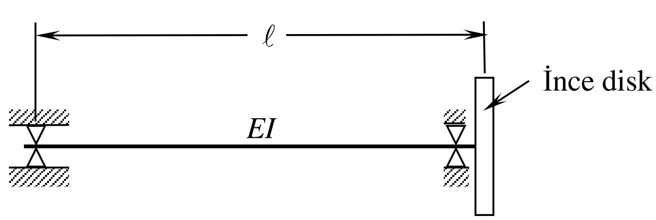
Problem 7.4

EI sabitli ve ℓ uzunluğunda bir mil iki ucundan yataklanmıştır. Milin ucuna kütlesi M ve diametrik atalet momenti I_d olan ince bir disk monte edilmiştir. Diskin bulunduğu yer yatak noktasına çok yakın olup yatak hizasında olduğunu kabul edilebilir; dolayısıyla diskin ağırlık merkezinin yerinin değişmediğini, ama diskin yatak eksenine göre açısının değişebileceğini kabul edin.

a) Diskin açısal hızı Ω ile dolanım hızı ω arasında bir ifade elde edin. Bu ifadeyi aşağıda tanımları verilen K ve R terimleri cinsinden yazın.

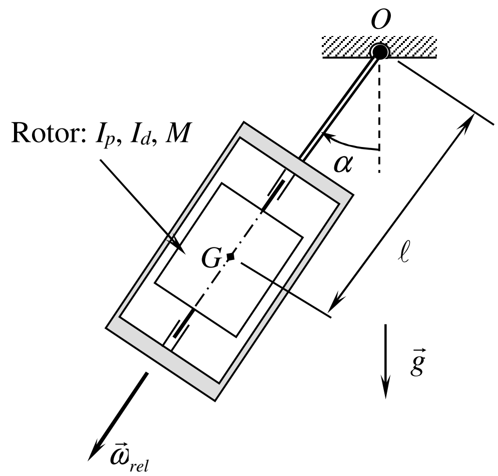
$$K = \frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{EI}{I_d \ell}}} \qquad\qquad R = \frac{\Omega}{\sqrt{\dfrac{EI}{I_d \ell}}}$$

b) Milin kritik hızını/hızlarını bulun.



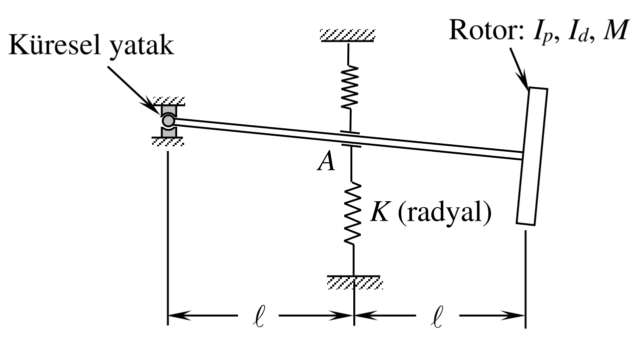
Problem 7.5

Bir elektrik motoru yerçekimi alanı içinde şekildeki gibi bir O noktasından küresel yataklarla askıya alınmıştır. Rotor $\vec{\omega}_{rel}$ açısal hızıyla dönmektedir. Sistemde rotor dışındaki elemanlar kütlesizdir. Ağırlık merkezi G'dir. Rotor ekseni düşeyden küçük açılarla ayrılmaktadır. Rotor ekseninin düşey etrafındaki dolanım açısal hızı için bir ifade bulun. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun.



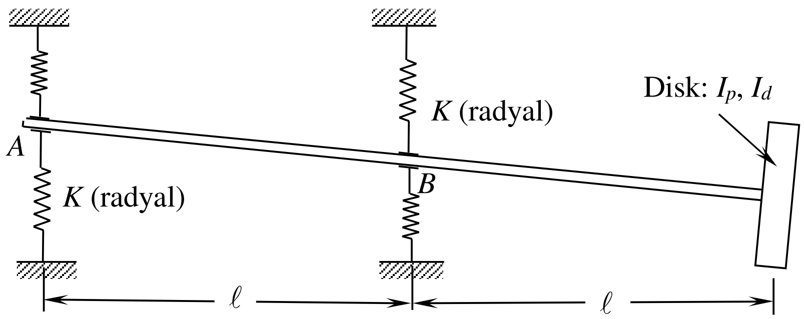
Problem 7.6

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. A'daki yataklar radyal yönde K sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Dolanım hızıyla mil hızı arasındaki ilişkiyi bulun. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun. Çubuk ve disk için kritik hız sayıları nasıldır?



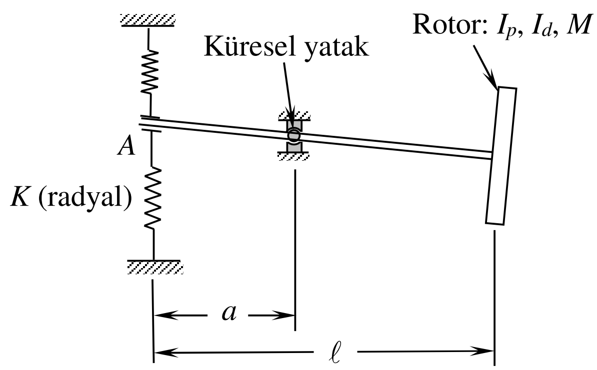
Problem 7.7

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. *A* ve *B*'deki yataklar radyal yönde *K* sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun.



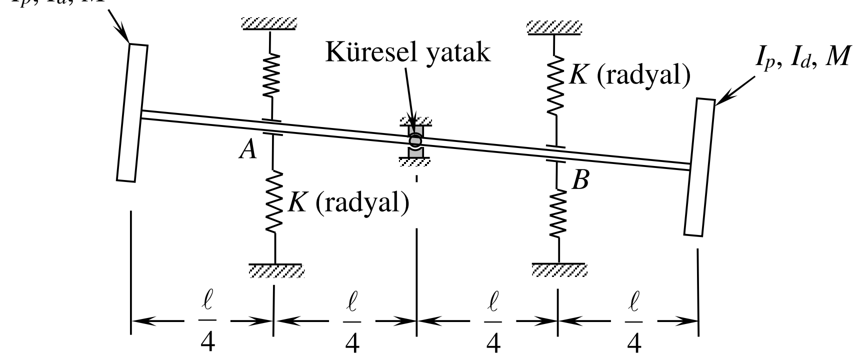
Problem 7.8

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. *A*'daki yataklar radyal yönde *K* sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Dolanım hızıyla mil hızı arasındaki ilişkiyi bulun. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun. a uzunluğu $\ell/2$ ve ℓ arasında değiştirilirse kritik hız/hızlar nasıl değişir?



Problem 7.9

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. *A* ve *B*'deki yataklar radyal yönde *K* sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Dolanım hızıyla mil hızı arasındaki ilişkiyi bulun. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun.

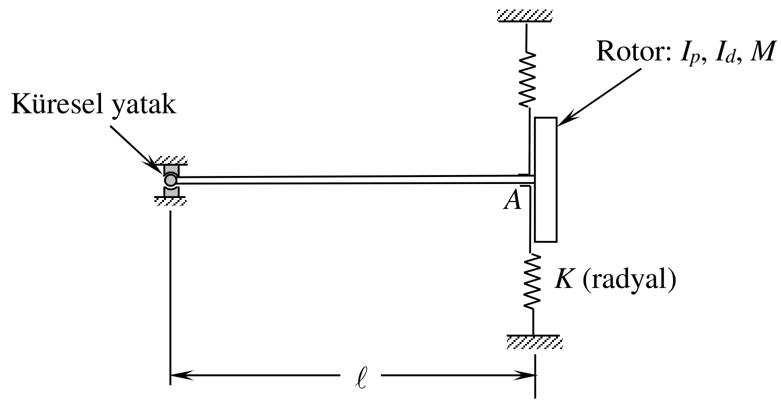


Problem 7.10

Esnek bir mile oturtulmuş çubuk şeklindeki rotorların neden *iki* kritik hıza, disk şeklindeki rotorların ise neden *bir* kritik hıza sahip olduğunu denklemlerden yararlanmadan olayın fiziğinden hareketle açıklayın.

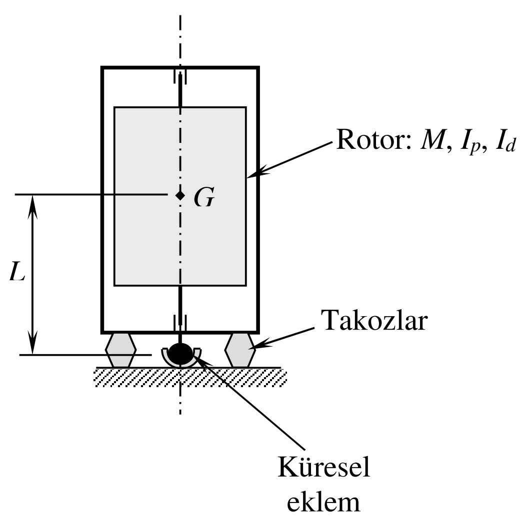
Problem 7.11

Aşağıdaki sistemde mil rijit ve kütlesizdir. *A*'daki yataklar radyal yönde *K* sabitli yaylarla askıya alınmıştır. Rotorun da *A* noktasında olduğunu kabul edin. Dolanım hızıyla mil hızı arasındaki ilişkiyi bulun. Sistemin kritik hızını/hızlarını bulun.



Problem 7.12

Büyük bir elektrik motoru şekildeki gibi dönme ekseni düşey olacak biçimde monte edilmiştir. Motor zeminden esnek takozlarla izole edilmiştir. Takozlar sadece düşey yönde esneyebilmektedir. Yapılan bir deneyde motor ekseni düşeyden θ_0 açısı kadar uzaklaştırılmış ve bunun için T_0 kadar bir moment uygulanması gerekmiştir. Takozların esnekliği lineer kabul edilebilir. Jiroskopik etkileri dikkate alarak motorun kritik hızı/hızları için bir ifade bulun. (Not: Yerçekimini ihmal edin. Rotor dışındaki elemanların kütlesi ihmal edilebilir.)



8

YAY SABİTİ PERİYODİK DEĞİŞEN SİSTEMLER

Lineer sistemlerin en önemli özelliği, bu sistemlerde süperpozisyon özelliğinin geçerli olmasıdır. Lineer bir sistemin $x_1(t)$ gibi bir girişe cevabı $y_1(t)$, $x_2(t)$ gibi bir girişe cevabı $y_2(t)$ olsun. Bu sisteme $ex_1(t)+fx_2(t)$ gibi bir giriş uygulanırsa (e ve f sabitler), süperpozisyon prensibi gereği sistemin cevabı $ey_1(t)+fy_2(t)$ olur. Süperpozisyon prensibi katsayıları zamana göre değişen lineer diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemler için de geçerlidir. Örneğin, diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi olan sistemlere superpozisyon prensibi uygulanabilir.

$$m(t)\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{8.1}$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+k(t)x=0 \tag{8.2}$$

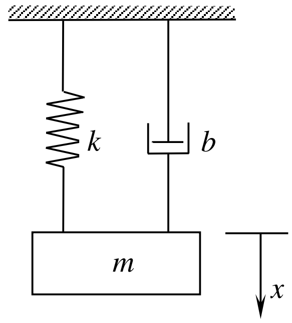
Süperpozisyon prensibi nonlineer sistemler için ise geçerli değildir. Örneğin, bir sistemin diferansiyel denklemi,

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=0 \tag{8.3}$$

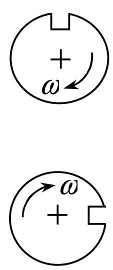
olarak verilmişse ve burada $f(x)$, x'in nonlineer bir fonksiyonu ise, süperpozisyon prensibi geçerli değildir.

Dinamik sistemlerin bir davranış sergilemeleri için ya başlangıç anında kendilerini durağan denge durumundan farklı bir durumda bulmaları ya da dışarıdan bir zorlama uygulanması yeterlidir. Dinamik bir sistemin harekete geçirilmesi için bir başka yöntem ise parametrelerinin zaman içinde değişmesidir. Şekil 8.1'deki gibi kütle, yay ve sönümleyiciden oluşan bir sistem olsun. Bu sistem başlangıçta statik denge durumunda olsun ve herhangi bir dış kuvvet uygulanmasın. Bu sistemin yay sabitinin periyodik olarak azalıp arttığını düşünün. Yay sabiti azaldığında kütle ağırlığının etkisi altında yay daha fazla esneyecek ve kütle aşağı doğru inecektir. Yay sabiti arttığında ise yayın esnemesi daha az olacağından kütle yukarı doğru çıkacaktır. Yay sabiti periyodik olarak değiştirildiğinde ise kütle düşey yönde periyodik olarak salınacaktır. Bu sistemde yay sabiti yerine kütle değişseydi, değişen ağırlık dolayısıyla yine düşey yönde bir hareket meydana gelirdi. O halde değişen parametreler de dinamik bir sistemi zorlama özelliğine sahiptir.

Bu bölümde yay sabiti periyodik olarak değişen sistemlerin davranışları incelenecektir. Yay sabiti periyodik olarak değişen sistemlerin bazı örnekleri Şekil 8.2'de verilmiştir.

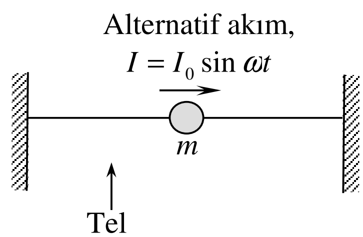


Şekil 8.1



$k_{düsey} = k + \Delta k \sin 2\omega t$

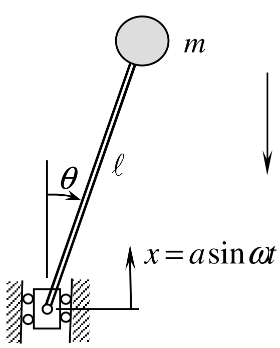
a) Kesit alanı muntazam olmayan mil.



$T_{gerilme} = T + \Delta T \sin 2\omega t$

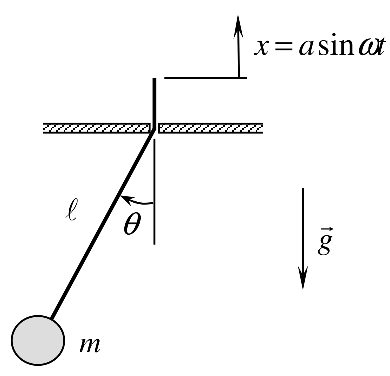
$k_{düsey} = k + \Delta k \sin 2\omega t$

b) Havai elektrik hattı.



$g_{etken} = g + a\omega^2 \sin \omega t$

c) Evrik sarkaç.



$\ddot{\theta} + (g/\ell)\theta = 0$ ve $\ell = \ell_0 + a \sin \omega t$

d) Değişken boylu sarkaç.

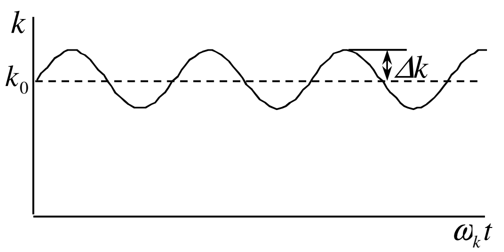
Şekil 8.2

8.1 Yay Sabiti Periyodik Olarak Değişen Sistemlerin Titreşimi

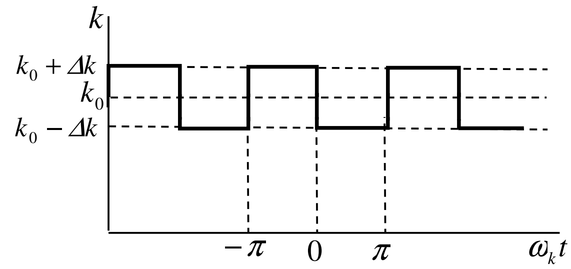
Şekil 8.2'deki sistemlerin diferansiyel denklemleri aşağıdaki genel formdadır:

$$m\ddot{x} + (k_0 + \Delta k \sin \omega_k t)x = 0 \tag{8.4}$$

Bu denklem *Matthieu Denklemi*'dir. Matthieu denkleminde yay sabiti Şekil 8.3a'da olduğu gibi ortalama bir k değeri etrafında sinusoidal olarak değişir. Ancak denklemin bu haliyle çözümü çok zor olduğundan burada bu değişimin Şekil 8.3b'deki gibi bir kare dalga şeklinde olduğu kabul edilecektir.



(a)



(b)

Şekil 8.3

Yay sabitinin Şekil 8.3b'deki gibi değiştiği kabul edilirse aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$m\ddot{x} + (k_0 + \Delta k)x = 0 \qquad (-\pi < \omega_k t < 0 \quad \text{için}) \tag{8.5}$$

$$m\ddot{x} + (k_0 - \Delta k)x = 0 \qquad (0 < \omega_k t < \pi \quad \text{için}) \tag{8.6}$$

Eğer,

$$\omega_n^2 = \frac{k_0}{m} \tag{8.7}$$

olarak tanımlanırsa, denklemler (8.5) ve (8.6) aşağıdaki hale gelir:

$$\ddot{x} + \left(\omega_n^2 + \frac{\Delta k}{m}\right)x = 0 \qquad (-\pi < \omega_k t < 0 \quad \text{için}) \tag{8.8}$$

$$\ddot{x} + \left(\omega_n^2 - \frac{\Delta k}{m}\right)x = 0 \qquad (0 < \omega_k t < \pi \quad \text{için}) \tag{8.9}$$

Yazımda kolaylık olması için aşağıdaki tanımlamalar yapılsın:

$$p_1^2 = \omega_n^2 + \frac{\Delta k}{m} \tag{8.10}$$

$$p_2^2 = \omega_n^2 - \frac{\Delta k}{m} \tag{8.11}$$

Bu tanımlamalar kullanılırsa denklemler (8.8) ve (8.9) aşağıdaki hale gelir:

$$\ddot{x} + p_1^2 x = 0 \qquad (-\pi < \omega_k t < 0 \quad \text{için}) \tag{8.12}$$

$$\ddot{x} + p_2^2 x = 0 \qquad (0 < \omega_k t < \pi \quad \text{için}) \tag{8.13}$$

Yukarıdaki denklemlerin periyodik bir çözümü olduğunu varsayalım. Ayrıca her periyodun sonundaki genlik bir periyot önceki genliğin s katı kadar olsun, yani t anında çözümün bir genlik (tepe) noktası varsa bir periyot sonraki genlik bunu s ile çarparak bulunabilsin. Ya da çözümün herhangi bir t anındaki değeri s ile çarpıldığında çözümün bir periyot sonraki değeri aşağıdaki gibi elde edilsin:

$$(x)_{t+\frac{2\pi}{\omega_k}} = s(x)_t \tag{8.14}$$

Bu varsayımla hareket edildiğinde, $s > 1$ ise genlikler zamanla artacağından sistem kararsız, $s < 1$ ise genlikler zamanla azalacağından sistem kararlı olur.

Denklem (8.12)'nin çözümü x_1, denklem (8.13)'ün çözümü x_2 olsun. x_1 ve x_2'nin genel çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$x_1 = C_1 \sin p_1 t + C_2 \cos p_1 t \qquad (-\pi < \omega_k t < 0 \quad \text{için}) \tag{8.15}$$

$$x_2 = C_3 \sin p_2 t + C_4 \cos p_2 t \qquad (0 < \omega_k t < \pi \quad \text{için}) \tag{8.16}$$

Denklem (8.15)'den $-\pi < \omega_k t < 0$ bölgesi için elde edilen çözümün kaldığı yerden denklem (8.16)'nın çözümü devam edecektir. Ayrıca denklem (8.14) geçerlidir. Bu hususlar dikkate alındığında, yukarıdaki genel çözüme uygulanması gereken sınır şartları aşağıdaki gibi olur:

$\omega_k t = 0$ iken,

$$(x_1)_{\omega_k t=0} = (x_2)_{\omega_k t=0} \tag{8.17}$$

$$(\dot{x}_1)_{\omega_k t=0} = (\dot{x}_2)_{\omega_k t=0} \tag{8.18}$$

$\omega_k t = \pi$ iken,

$$(x_2)_{\omega_k t=\pi} = (x_1)_{\omega_k t=\pi} = s(x_1)_{\omega_k t=-\pi} \tag{8.19}$$

$$(\dot{x}_2)_{\omega_k t=\pi} = (\dot{x}_1)_{\omega_k t=\pi} = s(\dot{x}_1)_{\omega_k t=-\pi} \tag{8.20}$$

Denklemler (8.17) ve (8.18)'de verilen şartlar denklemler (8.15) ve (8.16)'ya uygulanırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$C_2 = C_4 \tag{8.21}$$

$$C_1 p_1 = C_3 p_2 \tag{8.22}$$

Denklemler (8.19) ve (8.20)'de verilen şartlar denklemler (8.15) ve (8.16)'ya uygulanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$C_3 \sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) + C_4 \cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) = -sC_1 \sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right) + sC_2 \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right) \tag{8.23}$$

$$p_2 C_3 \cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - p_2 C_4 \sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) = sp_1 C_1 \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right) + sp_1 C_2 \sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right) \tag{8.24}$$

Denklemler (8.21) ve (8.22)'den C_3 ve C_4 alınarak denklemler (8.23) ve (8.24)'de yerine koyulursa aşağıdaki denklemler bulunur:

$$C_1 \left[p_1 \sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) + sp_2 \sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\right] + C_2 \left[p_2 \cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - sp_2 \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\right] = 0 \tag{8.25}$$

$$C_1 \left[p_1 \cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - sp_1 \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\right] + C_2 \left[- p_2 \sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - sp_1 \sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\right] = 0 \tag{8.26}$$

Yukarıdaki denklemler homojendir. Bu denklemlerden C_1 ve C_2'nin sıfırdan farklı bir çözümünün elde edilebilmesi için katsayılarının determinantının sıfır olması gereklidir. Bu şart aşağıdaki ifadeyi verir:

$$s^2 - 2s\left[\cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2 p_1 p_2}\sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right)\right] + 1 = 0 \tag{8.27}$$

Yukarı denklemde köşeli parantez içindeki terimi A olarak tanımlayalım:

$$A = \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2 p_1 p_2}\sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) \tag{8.28}$$

ya da,

$$A = \cos\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\cos\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) - \frac{\dfrac{p_1^2}{\omega_k^2} + \dfrac{p_2^2}{\omega_k^2}}{2\dfrac{p_1}{\omega_k}\dfrac{p_2}{\omega_k}}\sin\left(\frac{\pi\, p_1}{\omega_k}\right)\sin\left(\frac{\pi\, p_2}{\omega_k}\right) \tag{8.29}$$

Denklem (8.29)'dan görüldüğü gibi, A ve dolayısıyla s iki parametreye bağlıdır. Bunlar (p_1/ω_k) ve (p_2/ω_k) parametreleridir. Bu parametreler de ikinci bir aşamada denklemler (8.10), (8.11) ve (8.7)'yi kullanarak aşağıdaki gibi iki yeni parametre cinsinden ifade edilebilir:

$$\frac{p_1^2}{\omega_k^2}=\frac{\omega_n^2}{\omega_k^2}+\frac{\Delta k}{\omega_k^2 m}=\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2+\frac{\Delta k}{k_0}\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2 \tag{8.30}$$

$$\frac{p_2^2}{\omega_k^2}=\frac{\omega_n^2}{\omega_k^2}-\frac{\Delta k}{\omega_k^2 m}=\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2-\frac{\Delta k}{k_0}\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2 \tag{8.31}$$

Sonuç olarak, A terimi, $\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ ve $\frac{\Delta k}{k_0}\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ olmak üzere iki parametreye bağlıdır.

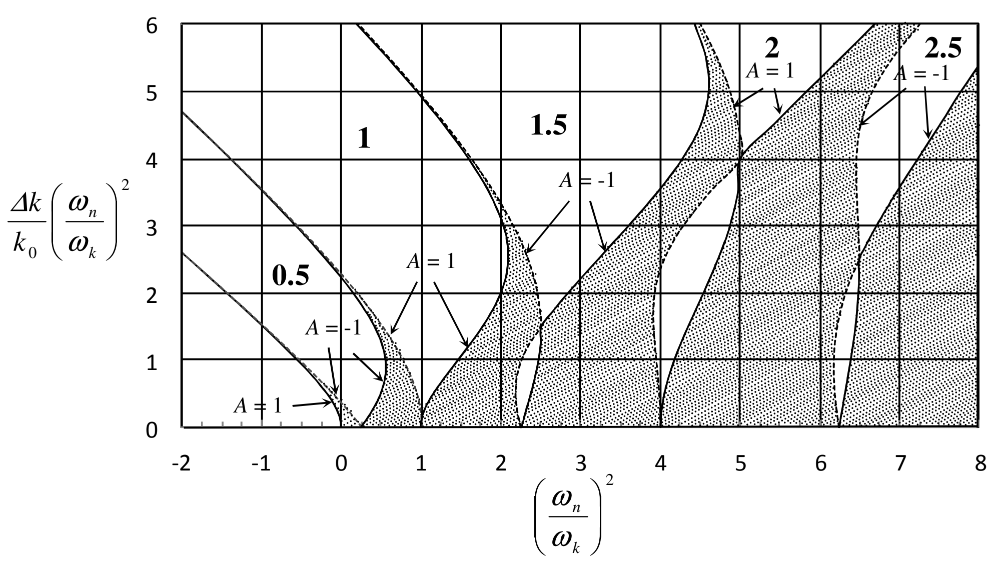
Denklem (8.27) A cinsinden yazılırsa,

$$s^2-2sA+1=0 \tag{8.32}$$

olur. Bu denklemden s çözülürse aşağıdaki ifade bulunur:

$$s=A\pm\sqrt{A^2-1} \tag{8.33}$$

Denklem (8.33)'de A'nın büyüklüğü birden büyükse s'nin köklerinden biri birden büyük olacağından sistem kararsız olur. $-1<A<1$ olursa s'nin büyüklüğü birden küçük olacağından sistem kararlı olur. Şekil 8.4'de sistemin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler $\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ 'ye karşı $\frac{\Delta k}{k_0}\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ düzleminde görülmektedir.



Şekil 8.4

Şekil 8.4'deki taralı bölgelerde sistem kararlı, beyaz bölgelerde ise kararsızdır. Kararsız bölgelerde koyu renkle gösterilen rakamlar ω_n/ω_k 'nın yaklaşık değerleridir. Yani kritik frekanslar ω_n/ω_k 'nin 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ... gibi yarım katlarındadır.

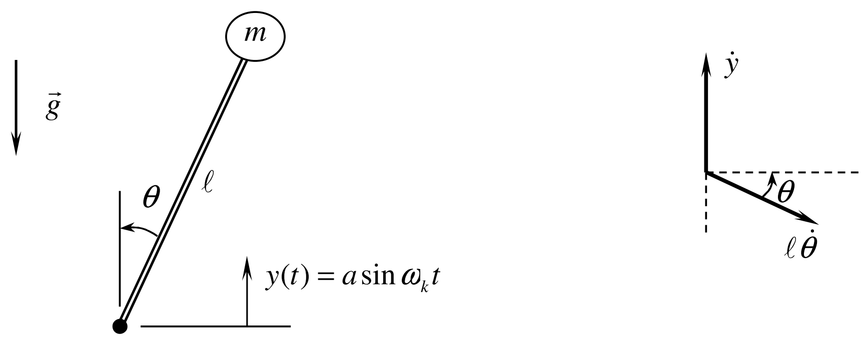
Fiziki yaya sahip sistemlerde $\left(\dfrac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ terimi pozitiftir. $\left(\dfrac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ teriminin negatif olması, ω_n'nin sanal olduğu anlamına gelir. $\omega_n^2 = \dfrac{k_0}{m}$ olduğuna göre, sistemin yay sabiti negatiftir. Etken yay sabiti negatif olan bir sistem bir sonraki kısımda incelenecektir.

8.2 Yay Sabiti Negatif Olan Bir Sistem - Evrik Sarkaç

Şekil 8.5'de düzlemsel bir evrik sarkaç görülmektedir. Eğer eklemin bağlı olduğu *O* noktası sabit ise, sarkaca uygulanan yerçekimi kuvveti sarkacı tepe noktasından uzaklaştırmaya çalışacağından sarkacın tepe konumu kararsız bir denge noktasıdır. Şimdi eklem noktasının düşey yönde $y(t) = a\sin\omega_k t$ şeklinde periyodik olarak hareket ettirildiği kabul edilsin. Sarkaç kolunun düşeyden ayrılma açısı θ ile gösterilsin ve θ açısının küçük olduğu kabul edilsin.

Şekil 8.5'de *m* kütlesinin hız bileşenleri de çizilmiştir. Bu bileşenlerden düşey ve yatay bileşenler elde edilir ve bunların kareleri toplanırsa hızın büyüklüğünün karesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$v^2 = (\dot{y} - \ell\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 = \dot{y}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \qquad (8.34)$$



Şekil 8.5

Sistemin kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$T^* = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta) \qquad (8.35)$$

Potansiyel enerjisi terimi ise,

$$V = mg(y + \ell\cos\theta) \qquad (8.36)$$

olduğundan, Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}=T^{*}-V=\frac{1}{2}m(\dot{y}^{2}+\ell^{2}\dot{\theta}^{2}-2\ell\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta)-mg(y+\ell\cos\theta) \qquad (8.37)$$

Genelleştirilmiş kuvvetin sıfır olduğu dikkate alınarak Lagrange denklemi yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=Q_{\theta} \qquad (8.38)$$

ya da,

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^{2}\dot{\theta}-m\ell\dot{y}\sin\theta\right]-\left[-m\ell\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+mg\ell\sin\theta\right]=0 \qquad (8.39)$$

ya da,

$$m\ell^{2}\ddot{\theta}-m\ell\ddot{y}\sin\theta-mg\ell\sin\theta=0 \qquad (8.40)$$

elde edilir. θ açısının küçük olduğu kabul edilir, $\ddot{y}=-a\omega_k^2\sin\omega_k t$ yerine koyulur ve terimler yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklem bulunur:

$$\ddot{\theta}+\left(-\frac{g}{\ell}+\frac{a}{\ell}\omega_k^2\sin\omega_k t\right)\theta=0 \qquad (8.41)$$

Denklem (8.41) ile denklem (8.4) aynı formdadır. Dolayısıyla daha önce bölüm 8.1'de elde edilen sonuçlar, parametreleri aşağıdaki gibi değiştirerek kullanılabilir:

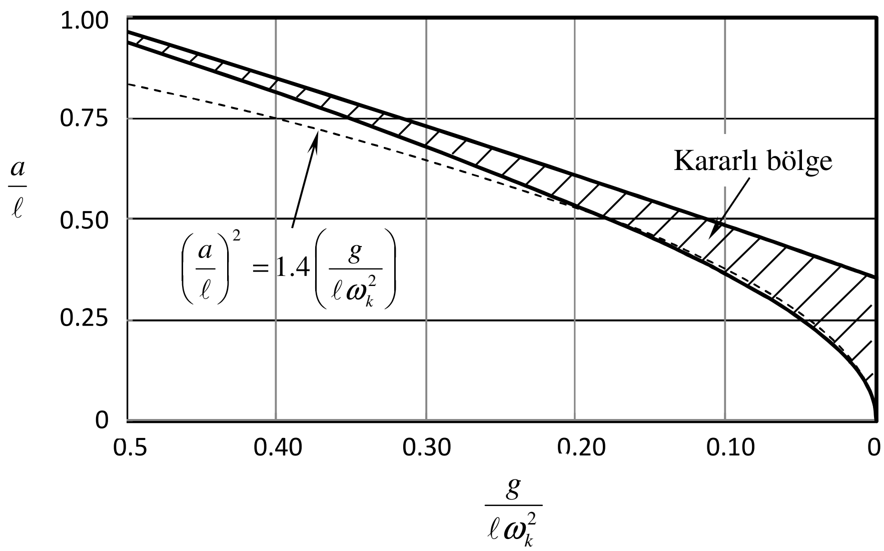
$$\omega_n^2 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{g}{\ell} \qquad (8.42)$$

$$\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{g}{\ell\omega_k^2} \qquad (8.43)$$

Şekil 8.4'deki grafiğin düşey ekseni de aşağıdaki gibi değişir:

$$\frac{\Delta k}{k_0}\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\left(-\frac{g}{\ell}\right)}\left(\frac{a}{\ell}\omega_k^2\right)\left(-\frac{g}{\ell\omega_k^2}\right)=\frac{a}{\ell} \qquad (8.44)$$

O halde Şekil 8.4'deki grafik yatay eksenini $-\frac{g}{\ell\omega_k^2}$ olarak, düşey eksenini de $\frac{a}{\ell}$ olarak değiştirmek suretiyle evrik sarkacın kararlılığını belirlemek için kullanılabilir. Evrik sarkaç için Şekil 8.4'de $\left(\frac{\omega_n}{\omega_k}\right)^2$ teriminin negatif olduğu kısım geçerlidir. Grafiğin bu kısmı Şekil 8.6'da büyülterek yeni eksen isimleriyle verilmiştir. Denklem (8.43)'deki eksi işareti kaldırılmış, bunun yerine yatay eksenin yönü değiştirilmiştir.



Şekil 8.6

Şekil 8.6'da ω_k'nın değeri arttıkça yatay eksende sağ tarafa doğru yaklaşılır. Kararlı bölgenin üst sınırını belirleyen eğri düşey ekseni yaklaşık 0.35 değerinde geçer. Bu yüzden a/ℓ'nin değeri 0.35'den küçükse, ω_k'nın değeri arttıldığında sistem kararlı bölgeye girdikten sonra ω_k'nın değeri ne olursa olsun sistem kararlı olur. Bu durumda sarkaç tepe konumu etrafında kararlı olarak salınır. Kararlı bölgenin alt sınırı yaklaşık olarak aşağıdaki parabol denklemiyle tanımlanabilir.

$$\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 = 1.4\left(\frac{g}{\ell\omega_k^2}\right) \tag{8.45}$$

Örnek:

0.1 m boyunda bir evrik sarkacın eklem noktası düşey yönde 0.01 m genlikle sinusoidal biçimde hareket ettirilmektedir. Sarkacın kararlı olduğu frekans bölgesi nedir?

Denklem (8.46)'dan

$$\left(\frac{0.01}{0.1}\right)^2 = 1.4\left(\frac{9.81}{0.1\,\omega_k^2}\right) \tag{8.46}$$

ya da,

$$\omega_k = 117.2 \quad \text{rad/s} \qquad f_k = 18.65 \quad \text{Hz} \tag{8.47}$$

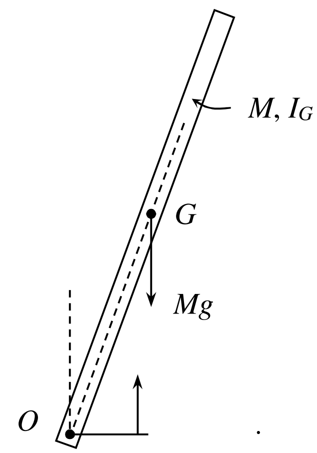
a/ℓ'nin değeri 0.35'den küçük olduğundan sarkaç 18.65 Hz üzerindeki frekanslarda kararlıdır.

PROBLEMLER

Problem 8.1

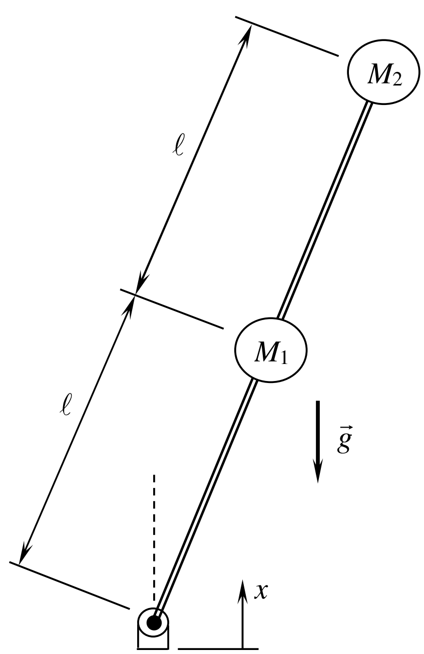
Aşağıda görülen sarkacın uzunluğu 12 cm olup, kütlesi kol boyunca düzgün olarak dağılmıştır. Sarkacın eklem noktası *O* düşey yönde sinüzoidal olarak, uçtan-uca 2 cm genlikle hareket ettirilmektedir. Sarkacın kararlılığı için zorlama frekansı ne olmalıdır?

Not: $I_G = \dfrac{M\ell^2}{12}$, $I_o = \dfrac{M\ell^2}{3}$



Problem 8.2

Şekildeki evrik sarkacın dinamik davranışını veren denklemi bulun. $\ell = 0.05$ m, $M_1 = M_2$ olursa ve eklem noktası *x* düşey yöne 0.01 m genlikle harmonik olarak hareket ettirilirse, sarkaç hangi frekanslarda kararlı olur?



KAYNAKÇA

Bu kitap hazırlanırken MIT'de Prof. Dr. J. P. Den Hartog (1901-1989) ve Prof. Dr. Stephen H. Crandall'dan (1920-2013) aldığı dersler sırasında yazar tarafından tutulan notlar ve aşağıdaki kaynaklardan yararlanılmıştır.

1. Ardema, M. D., *Analytical Dynamics Theory and Applications*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2005.

2. Crandall, S. H. (ed.), *A Unified Approach to Dynamics via Hamilton's Principle*, MIT, Cambridge, 1962.

3. Crandall, S. H., Karnopp, D.C., Kurtz, E.F., Pridmore-Brown, D.C., *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, Krieger Publishing, Malabar, 1982.

4. Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, Dover Publications, New York, 1985.

5. Ginsberg, J., *Engineering Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

6. Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, San Francisco, 2000.

7. Greenwood, D. T., *Advanced Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

8. Harrison, H. R., Nettleton, T., *Advanced Engineering Dynamics*, Arnold, London, 1997.

9. Jazar, R. N., *Advanced Dynamics*, John Wiley, Hoboken, 2011.

10. Kane, T. R., Levinson, D. A., *Dynamics Theory and Applications*, Internet-First University Press, Ithaca, 2005.

11. Magnus, K., *Titreşimler*, İTÜ Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Yayın No.127, İstanbul, 1978.

12. Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, Mc-Graw Hill, New York, 1970.

13. Ying, S. J., *Advanced Dynamics*, AIAA, Reston, 1997.

DİZİN

İleri Dinamik
1. Basım

ISBN 978-605-030-981-2

9786050309812