

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIMIN
GENELLEŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ
Türkan Yeliz GÖKÇER

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

TEMMUZ 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Türkan Yeliz Gökçer



ÖZET

Doktora Tezi

MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIMIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Türkan Yeliz Gökçer

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay Duman

Tarih: Temmuz 2020

Bu tezde, Bede ve arkadaşları tarafından 2008 yılında tanımlanan maksimum-minimum operatörlerinin yaklaşım özellikleri sistematik olarak çalışılmıştır. Maksimum-minimum operatörleri lineerlikten daha zayıf bir kavram olan zayıf-lineerlik (pseudo-linearity) koşulunu sağladığından dolayı klasik Korovkin yaklaşım teoremi bu operatörler için gerçekleşmemektedir. Bu nedenle öncelikle, maksimum-minimum operatörleri için genel bir yaklaşım teoremi elde edilmiş ve bu yaklaşım için yakınsaklık oranları hesaplanmıştır. Özellikle de Hölder sürekli fonksiyonlar için hata tahmini verilmiştir. Yaklaşım teoreminin özel halleri göz önüne alınarak maksimum-minimum Shepard ve maksimum-minimum Bernstein operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu sayede hem tek değişkenli hem de iki değişkenli sürekli fonksiyonlara maksimum-minimum operatörleriyle klasik yaklaşımın varlığı ispatlanmış ve bu durum grafik gösterimleriyle desteklenmiştir. Ayrıca bu operatörlerle sözde-konkav (pseudo-concave) fonksiyonlara yaklaşılabilmesi de gösterilmiş ve grafik gösterimleriyle doğrulanmıştır. Daha sonra bazı şekil koruma özellikleri de çalışılmıştır. Maksimum-minimum Bernstein operatörlerinin monotonluğu korumasına rağmen, maksimum-minimum Shepard operatörlerinin monotonluğu korumadığına dair örnekler verilmiştir. Uygulamalar için verilen örneklerde yaklaşımın sadece $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar için değil herhangi bir $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığında sürekli olan fonksiyonlar için de gerçekleştiği gösterilmiştir. Bell tarafından 1971 yılında tanımlanan regüler toplanabilme metotları yardımıyla elde edilen klasik yaklaşım teoremleri

geliştirilmiştir. Böylelikle klasik yaklaşımın gerçekleşmediği durumlar için alternatif çözüm yolları sunulmuştur. Özel regüler toplanabilme metotları kullanılarak maksimum-minimum Shepard operatörleri ile hem tek değişkenli hem de iki değişkenli sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapılmıştır. Arimetik ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık gibi klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha zayıf metotlar ile yaklaşımın varlığı ispatlanmıştır. Bu yaklaşımlar için de yakınsaklık oranları toplanabilme metotları yardımıyla hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Maksimum-minimum operatörler, Toplanabilme metodu, Cesàro yakınsaklık, Hemen hemen yakınsaklık, Süreklilik modülü, Yakınsaklık oranı.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

THE GENERALIZATION OF APPROXIMATION BY MAXIMUM-MINIMUM OPERATORS

Türkan Yeliz Gökçer

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Oktay Duman

Date: July 2020

In this thesis, we systematically study the approximation properties of the maximum-minimum operators defined by Bede et.al. in 2008. Since the max-min operators satisfy the pseudo-linearity condition that is a weaker concept than the usual linearity, the classical Korovkin approximation theorem does not hold for these operators. Hence, we first obtain a general approximation theorem for max-min operators and compute the rates of convergence in this approximation. Especially we give an error estimation for Hölder continuous functions. By considering some special cases of our approximation theorem, we investigate the approximation properties of max-min Shepard and max-min Bernstein operators. In this way, we get a classical approximation to univariate and bivariate continuous functions by means of max-min operators and confirm it by graphical illustrations. We also approximate to quasi-concave functions by these operators and verify it by graphs. Then, we also study some shape preserving properties. We show that the max-min Bernstein operators preserve the monotonicity while we give some examples indicating that the max-min Shepard operators do not preserve the monotonicity. With some applications, we also show that the approximation is valid for continuous functions not only on the unit interval $[0, 1]$ but also on any closed and bounded interval $[a, b]$. With the help of regular summability methods, we improve the classical approximation results. Thus, we give some alternative ways where the classical approach fails. By using some special regular methods, we approximate to both univariate and bivariate continuous functions by max-min Shepard operators. We

prove the existence of approximation for summability methods, such as the arithmetic mean convergence and the almost convergence, which are weaker than the convergence in the usual sense. We also compute the rates of convergence for this approximation by summability methods.

Keywords: Max-min operators, Summability methods, Cesàro convergence, Almost convergence, Modulus of continuity, Rate of convergence.



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; desteklerinden ötürü Matematik Bölümü asistanlarına; tez çalışmamdaki yardımlarından dolayı değerli tez izleme kurulu üyeleri Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e ve Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR'a teşekkürlerimi sunarım. Destekleri ile her zaman yanımda olan aileme, arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	x
KISALTMALAR	xi
SEMBOL LİSTESİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Maksimum-Minimum Operatörleri	3
2.2 Toplanabilme Metotları ve Toplam Süreci	6
3. MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM	9
3.1 Maksimum-Minimum Operatörleriyle Düzgün Yaklaşım	9
3.2 Düzgün Yaklaşım için Yakınsaklık Oranı	10
3.3 Yaklaşım Teoreminin Uygulamaları	12
3.3.1 Maksimum-minimum Bernstein operatörleri	12
3.3.2 Tek değişkenli Maksimum-minimum Shepard operatörleri	15
3.3.3 İki değişkenli Maksimum-minimum Shepard operatörleri	19
3.3.4 Düzgün yaklaşıma ilişkin sonuçlar	23
4. MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE TOPLANABİLME	27
4.1 Genel Toplanabilme Yaklaşım Teoremi	27
4.2 Toplanabilme Metoduyla Yakınsaklık Oranı	30
4.3 Toplanabilmeyle Verilen Yaklaşım Teoremlerinin Uygulamaları	32
4.3.1 Modifiye Shepard operatörleriyle toplanabilme	32
4.3.2 İki değişkenli modifiye Shepard operatörleriyle toplanabilme	36
4.3.3 Toplanabilmeye ilişkin sonuçlar	38
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	41
EKLER	47
ÖZGEÇMİŞ	49

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1: $n = 8$ ve $k = 0, 2, 5, 7$ değerleri için (3.7) ile verilen $K_{n,k}$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri	13
Şekil 3.2: $n = 6, 15, 50$ değerleri için (3.10) ile verilen artan f fonksiyonuna $B_n^{(m)}(f)$ maksimum-minimum Bernstein operatörleriyle yaklaşım	14
Şekil 3.3: $n = 6, 25, 64$ değerleri (3.11) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna $B_n^{(m)}(g)$ maksimum-minimum Bernstein operatörleriyle yaklaşım	15
Şekil 3.4: $\lambda = 2$, $n = 3$ ve $k = 0, 1, 2, 3$ değerleri için (2.3) ile verilen $K_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri	16
Şekil 3.5: $\lambda = 3$ ve $n = 5, 10, 25$ değerleri için (3.16) ile verilen periyodik f fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f)$ maksimum-minimum Shepard operatörleriyle yaklaşım	17
Şekil 3.6: $\lambda = 2$ ve $n = 5, 10, 25$ değerleri için (3.17) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f)$ maksimum-minimum Shepard operatörleriyle yaklaşım	18
Şekil 3.7: $\lambda = 1$ için (3.18) ile verilen $K_{n,k,m}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri ((a) $K_{3,3,1}^1$, (b) $K_{3,1,0}^1$, (c) $K_{3,0,2}^1$, (d) $K_{3,2,2}^1$)	20
Şekil 3.8: $\lambda = 5$ ve $n = 4, 7, 10$ değerleri için (3.28) ile verilen $f(x, y)$ fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f; x, y)$ operatörleriyle yaklaşım ((a) $n = 4$, (b) $n = 7$, (c) $n = 10$, (d) $f(x, y)$)	24
Şekil 3.9: $\lambda = 6$ ve $n = 4, 9, 16$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonuna $Sh_n^*(f; x)$ operatörleri ile yaklaşım	25
Şekil 4.1: (4.9) ile verilen $M_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri ((a) $M_{4,1}^2$, (b) $M_{5,1}^2$, (c) $M_{7,1}^2$, (d) $M_{9,1}^2$)	33
Şekil 4.2: $\lambda = 3$ ve $j = 3, 6, 9, 20$ için (4.13) ile verilen f fonksiyonuna (4.11)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(f)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 3$ ve $j = 3$, (b) $\lambda = 3$ ve $j = 6$, (c) $\lambda = 3$ ve $j = 9$, (d) $\lambda = 3$ ve $j = 20$)	34
Şekil 4.3: $\lambda = 2$ ve $j = 5, 10, 16, 23$ değerleri için (3.17) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna (4.11)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(g)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 2$ ve $j = 5$, (b) $\lambda = 2$ ve $j = 10$, (c) $\lambda = 2$ ve $j = 16$, (d) $\lambda = 2$ ve $j = 23$)	35
Şekil 4.4: $\lambda = 3$ ve $j = 5, 9, 12$ değerleri için (4.19) ile verilen h fonksiyonuna (4.18)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(h)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 3$ ve $j = 5$, (b) $\lambda = 3$ ve $j = 9$, (c) $\lambda = 3$ ve $j = 12$, (d) h)	37

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan kısaltmalar aşağıda sunulmuştur.

d.d. : Diğer durumlarda

lim : Limit

sup : Supremum

min : Minimum



SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
\vee	Maksimum
\wedge	Minimum
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
L_n	Maksimum-minimum operatörü
δ_{rk}	Kronecker delta fonksiyonu
Sh_n^λ	Maksimum-minimum Shepard operatörü
\Rightarrow	Düzgün yakınsaklık
$x_{n,k}$	Temsilci noktalar
$\omega(f, \delta)$	Fonksiyonun süreklilik modülü
$\ f\ $	Supremum normu
$B_n^{(m)}$	Maksimum-minimum Bernstein operatörü

1. GİRİŞ

Gerçek hayat problemlerinin ve modellerinin çözümlerinde çoğu zaman çözüm fonksiyonun tam değerlerine ulaşamayız. Bu durumlarda doğal olarak çözümün yaklaşık değerlerine ihtiyaç duyulur. Yaklaşımlar Teorisindeki temel fikir, test noktaları adı verilen fonksiyonun bazı noktalardaki değerleri biliniyor ise fonksiyonun diğer tüm noktalardaki değerlerini belli koşullar altında tahmin etmek mümkün olabilmektedir. Bunun için fonksiyonun bilinen noktalardaki değerleri kullanılarak lineer ya da lineer olmayan yapıda operatör ailelerinin inşasına ihtiyaç duyulmakta ve bu operatörlerle fonksiyonlara yaklaşılmaktadır. Buradaki amaç bir fonksiyona daha basit fonksiyonlarla yaklaşabilmektedir. Bu düşüncenin ilk temelleri 1885 yılında Weierstrass tarafından atılmıştır. Weierstrass'ın yaklaşım teoremine göre kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona polinomlarla yaklaşılabilir [1]. Bu teoremin inşaya dayanan ilk ispatı Bernstein tarafından 1912 yılında tanımlanan ve literatürde de *Bernstein polinomları* olarak bilinen operatörler ile yapılmıştır [2]. Bu polinomlar hem yaklaşımlar teorisinin hem de operatör teorisinin gelişmesine ciddi katkı sunmuştur. Yaklaşımlar teorisi, tarihten günümüze pek çok ünlü matematikçinin odağında bulunmuş, özellikle geçmişte bu alanda Bernstein, Erdős, Fejér, Haar, Hermite, Kolmogorov, Korovkin, Laguerre, Landau, Lebesgue, Lorentz, Riesz, Rivlin, Stirling, Szász, Weierstrass, Zygmund gibi isimler ön plana çıkmıştır ve halen de pek çok bilim insanı tarafından aktif bir şekilde araştırılmaya devam etmektedir.

Pozitif lineer operatörlerle ilgili genel bir yaklaşım teoremi ise 1950'li yıllarda Korovkin tarafından verilmiştir [3]. Literatürde bu alanda yapılan çalışmalar *Korovkin tipi yaklaşım teorisi* olarak bilinmektedir [4]. Korovkin teorisi şüphesiz ki operatörlerin pozitifliğine ve lineerliğine ve de klasik limitin varlığına dayanmaktadır. Bu yönde yapılan zayıflatmalar ile Korovkin teorisi son 50 yılda önemli bir ivme kazanmıştır. Bu doktora tezinde özellikle de operatörlerin lineerliğinin ve yaklaşımda kullanılan klasik yakınsaklığın zayıflatılması üzerine odaklanacağız.

Literatürde lineer olmayan operatörler ile ilgili şimdiye kadar pek çok yaklaşım sonucu elde edilmiştir [5–12]. Bununla birlikte, Bede ve arkadaşları tarafından 2008 yılında alışılmış lineerlik şartı zayıflatılarak zayıf-lineer (pseudo-linear) olarak adlandırılan yeni tipte yaklaşım operatörleri tanımlamıştır [13]. Bu operatörlerin tanımları maksimum-çarpım ve maksimum-minimum işlemlerine dayanmaktadır. Şimdiye kadar bilinen pek çok lineer operatörün maksimum-çarpım işlemleri yardımıyla lineer olmayan versiyonları inşa edilerek yaklaşım özellikleri incelenmiş olmasına rağmen [14–24], maksimum-minimum operatörleri ile ilgili yok denecek kadar az çalışma yapılmıştır [13]. Bu tezdeki çalışmalarımızı esas olarak bu yönde yoğunlaştıracğız.

Tezde ilk olarak maksimum-minimum operatörleriyle ilgili genel bir yaklaşım teoremi elde edeceğiz. Daha sonra da bu yaklaşım teoremini regüler toplanabilme

metotları yardımıyla geliştireceğiz. Böylece yaklaşım operatörlerinin hem lineerliğini hem de yakınsaklığını zayıflatmış olacağız. Hemen belirtmeliyiz ki yakınsaklık metodunun zayıflatılması fikrine yaklaşımlar teorisinde sıklıkla ihtiyaç duyulmaktadır. Buna ilişkin ilk çalışmalar 1900'lü yılların başında Fejér tarafından verilmiştir [25]. Fejér'in ilginç fakat bir o kadar da etkin sonucuna göre sürekli ve periyodik bir fonksiyona, Fourier serisi ile her zaman yaklaşılamazken onun aritmetik ortalamasıyla yaklaşım mümkündür. Aslında buradaki esas düşünce, toplanabilme teorisinde iyi bilinen Cesàro yakınsaklık metoduna dayanmaktadır. Elbette toplanabilme teorisinde buna benzer daha pek çok yakınsaklık metodu bulunmaktadır [26, 27]. Dolayısıyla bunların yaklaşımlar teorisinde kullanılması, klasik yaklaşımın sağlanmadığı durumlarda dahi oldukça kuvvetli sonuçlar vermektedir. Son elli yılda literatürde bu yönde önemli bir gelişme olmuştur [28–42]. Tez çalışmamızda Bell tarafından 1973 yılında tanımlanan genel toplanabilme metodunu kullanacağız [43]. Bu metot regüler matrislerin dizilerinden oluştuğu için klasik yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklık (Cesàro yakınsaklık), hemen hemen yakınsaklık gibi bilinen pek çok yakınsaklık metodunu içermektedir [26–28, 44]. Bu nedenle Bell tipindeki toplanabilme metotları yaklaşımlar teorisinde sıklıkla kullanılmıştır [45–54].

Bu doktora tezi beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Tezin ikinci bölümü tez içerisinde verilen teoremler ve ispatlar için gerekli olan temel kavramlar ve lemmaları içermektedir. Üçüncü bölümde, maksimum-minimum operatörleri için genel bir yaklaşım teoremi elde edilecektir. Daha sonra bunun yakınsaklık oranları hesaplanacak ve bazı önemli özel halleri üzerinde durulacaktır. Tezin dördüncü bölümünde ise elde ettiğimiz bu yaklaşım teoremini Bell tipindeki regüler toplanabilme metotları yardımıyla geliştireceğiz. Özel toplanabilme metotları ile yaklaşım sonuçları ve yakınsaklık oranları tartışılacaktır. Üçüncü ve dördüncü bölümdeki yaklaşımlar grafik gösterimleriyle desteklenecektir. Bunun için Mathematica ve Scientific WorkPlace gibi matematiksel yazılım programlarından yararlanılmıştır. Tezin son bölümü ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde öncelikle Bede ve arkadaşları [13] tarafından verilen maksimum-minimum operatörlerinin tanımı ve maksimum-minimum Shepard operatörü için elde edilen sonuçlara değinilecektir. Daha sonra tez boyunca ihtiyaç duyacağımız maksimum ve minimum işlemlerinin temel özelliklerine ilişkin bazı sonuçlara yer verilecektir. Son olarak Bell tarafından verilen \mathcal{A} -toplana bilme kavramı [43] ve onun bazı özel halleri hatırlatılacaktır.

2.1 Maksimum-Minimum Operatörleri

(X, d) kompakt metrik uzay olsun ve

$$C(X, [0, 1]) := \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ sürekli}\}$$

fonksiyon ailesini göz önüne alalım. Maksimum-minimum operatörlerinin genel formu

$$L_n(f; x) = \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) \quad (2.1)$$

şekline tanımlanır [13]. Burada $x, x_{n,k} \in X$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f, K_{n,k} \in C(X, [0, 1])$ ($k = 0, 1, \dots, n$) olarak alınır. (2.1) eşitliğinde \wedge ve \bigvee sembolleri sırasıyla minimum ve maksimum işlemlerini temsil etmektedir. $K_{n,k}$ fonksiyonlarına çekirdek fonksiyonu adı verilir.

Tez boyunca işlemlerde kolaylık olması amacıyla maksimum-minimum operatörünün

$$L_n(e_0; x) = e_0(x) := 1$$

şartını sağladığını kabul edeceğiz.

Dikkat ediniz ki (2.1) formuna sahip maksimum-minimum operatörleri, pozitifdir fakat lineer değildir. Aslında, lineerlik şartından daha zayıf olan zayıf-lineerlik (pseudo-linearity) özelliğini sağlar; yani bir başka ifadeyle her $f, g \in C(X, [0, 1])$ ve her $\alpha, \beta \in [0, 1]$ için

$$L_n((\alpha \wedge f) \bigvee (\beta \wedge g)) = (\alpha \wedge L_n(f, x)) \bigvee (\beta \wedge L_n(g, x))$$

gerçeklenir [13].

$X = [0, 1]$ ve $x_{n,k} = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) seçildiğinde (2.1) formuna sahip en güzel örnek maksimum-minimum Shepard operatörleridir ve şu şekilde tanımlanır:

$$Sh_n^\lambda(f; x) = \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}^\lambda(x) \wedge f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (2.2)$$

Burada çekirdek fonksiyonu her $\lambda \geq 1$ için

$$K_{n,k}^\lambda(x) := \begin{cases} \frac{|x - \frac{k}{n}|^{-\lambda}}{\bigvee_{j=0}^n |x - \frac{j}{n}|^{-\lambda}}, & x \neq \frac{r}{n} \ (r = 0, 1, \dots, n) \text{ ise} \\ \delta_{rk}, & x = \frac{r}{n} \ (r = 0, 1, \dots, n) \text{ ise} \end{cases} \quad (2.3)$$

ile verilir ve alışıldığı gibi δ_{rk} sembolü Kronecker delmayı gösterir. Bede ve arkadaşları [13]'te bu operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir ve her bir $\lambda \geq 1$ ve her $f \in C([0, 1], [0, 1])$ fonksiyonu için $\{Sh_n^\lambda(f)\}$ dizisinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispatlamışlardır; yani

$$[0, 1] \text{ üzerinde } Sh_n^\lambda(f) \rightrightarrows f \quad (2.4)$$

gerçeklenir. (2.2) ve (2.3) ten $r = 0, 1, \dots, n$ için

$$K_{n,k}^\lambda(x) = \left| x - \frac{k}{n} \right|^{-\lambda} \bigwedge_{j=0}^n \left| x - \frac{j}{n} \right|^\lambda, \quad x \neq \frac{r}{n} \text{ ise} \quad (2.5)$$

ve

$$Sh_n^\lambda\left(f; \frac{r}{n}\right) = f\left(\frac{r}{n}\right) \quad (2.6)$$

olduğu görülebilir.

Yaklaşım teoremlerimizi ispatlayabilmek için aşağıdaki sonuçlara da ihtiyacımız olacak.

Lemma 2.1. Herhangi bir $a_k, b_k \geq 0$ ve $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için

$$\left| \bigvee_{k=0}^n a_k - \bigvee_{k=0}^n b_k \right| \leq \bigvee_{k=0}^n |a_k - b_k|$$

ifadesi gerçekleşir [13].

Lemma 2.2. Herhangi bir $x, y, z \in [0, 1]$ olmak üzere

$$|x \wedge y - x \wedge z| \leq x \wedge |y - z|$$

eşitsizliği gerçekleşir [13].

Lemma 2.3. Herhangi bir $a_k \geq 0$ ve $b \geq 0$ olmak üzere

$$\bigwedge_{k=0}^n (a_k^b) = \left(\bigwedge_{k=0}^n (a_k) \right)^b$$

olur.

Yakınsaklık oranları hesaplanırken süreklilik modülü kavramına ve de Hölder sürekli fonksiyonlara ihtiyaç duyacağız. Şimdi bunlara kısaca değinelim.

Tanım 2.1. Bir $M > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$|f(y) - f(x)| \leq Md(x, y)^\alpha$$

eşitsizliğini gerçekleyen f fonksiyonuna $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere (X, d) üzerinde α -yüncü mertebeden Hölder süreklidir denir [4].

Bu şartı sağlayan tüm $f : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonların kümesini $Lip(\alpha)$ ile göstereceğiz. Tanım 2.1 de verilen eşitsizlikte $\alpha = 1$ durumu Lipschitz koşulunu verir.

Tanım 2.2. (X, d) kompakt metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f nin süreklilik modülü $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega(f, \delta) := \sup_{d(x, y) \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanır [55].

Tezde maksimum-minimum Bernstein ve Shepard operatörlerinin sözde-konvıklığı ve monotonluğu koruyup korumadığını göstermek için aşağıda verilen tanım ve lemmalardan yararlanılacaktır. Öncelikle sözde-konkav fonksiyon tanımını verelim.

Tanım 2.3. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [0, 1]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa, f ye sözde-konkav fonksiyon denir [56–58].

Benzer olarak yukarıdaki tanımda \geq işareti yerine \leq yazılarak sözde-konveks fonksiyon tanımlanabilir. Bilinmektedir ki sınırlı bir $[0, a]$ aralığı üzerinde f fonksiyonunun sözde-konveks olması şuna denktir: Bir $c \in [0, a]$ noktası vardır öyle ki f , $[0, c]$ üzerinde artmayan ve $[c, a]$ üzerinde ise azalmayan bir fonksiyondur. Şüphesiz ki bu sonucun simetriği sözde-konkav fonksiyonlar için de geçerlidir. Biz çalışmalarımızda $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli ve sözde-konkav olan fonksiyonlara odaklanacağımızı belirtelim.

Şimdi de Bede ve arkadaşları tarafından [59]'da verilen lemmaları hatırlatalım.

Lemma 2.4. Her $x \in \left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$, $j = 0, 1, \dots, n$, için

$$\bigvee_{k=0}^n p_{n,k}(x) = p_{n,j}(x)$$

ifadesi gerçekleşir; burada

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile verilir [59].

Lemma 2.5. Eğer $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon ise, her $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$ için

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$$

eşitsizliği sağlanır [59].

2.2 Toplanabilme Metotları ve Toplam Süreci

Bu bölümde tezin dördüncü bölümünde kullanılacak olan \mathcal{A} - toplanabilme metodu, aritmetik ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık gibi bilinen bazı toplanabilme metotlarının tanımlarına ve özelliklerine yer verilecektir.

İlk olarak aritmetik ortalama yakınsaklık kavramıyla başlayalım.

Tanım 2.4. (x_n) bir sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_n) dizisi L 'ye “aritmetik ortalama yakınsaktır” (başka bir ifade ile Cesàro yakınsaktır) denir [26, 27].

Aşağıdaki sonuç iyi bilinmektedir.

Teorem 2.1. *Yakınsak her dizi, aynı değere aritmetik ortalama yakınsaktır [26, 27].*

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani aritmetik ortalama yakınsaklık klasik yakınsaklıktan daha zayıf bir kavramdır. Başka bir ifade ile bir dizinin aritmetik ortalama yakınsak olması, onun klasik anlamda yakınsak olmasını gerektirmez. Bunu aşağıdaki örnekte görmek mümkündür.

Örnek 1. (x_n) dizisi

$$x_n := \begin{cases} \frac{3}{8}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{5}{8}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizinin alt dizileri $n \rightarrow \infty$ iken farklı iki noktaya yakınsadığından (x_n) dizisi bilinen anlamda yakınsak değildir. Fakat tanımdan görüleceği üzere

$$\frac{1}{j} \sum_{n=1}^j x_n := \begin{cases} \frac{4j-1}{8j}, & j \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2}, & j \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğundan (x_n) dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına aritmetik ortalama yakınsaktır.

Şimdi de bir toplanabilme metodu olan hemen hemen yakınsaklık kavramına değinilelim.

Tanım 2.5. (x_n) bir sayı dizisi olmak üzere

$$c_j^v := \frac{1}{j} \sum_{n=v}^{j+v-1} x_n \quad (v, j \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_j^v = L \quad (v \text{ ye göre düzgün})$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_n) dizisi L 'ye “hemen hemen yakınsaktır” denir [44].

Örnek 2.

$$x_n := \begin{cases} 3, & n = m^2 \text{ ise} \\ 0, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

dizisini ele alalım. Bu dizinin alt dizileri $n \rightarrow \infty$ iken farklı iki noktaya yakınsadığından (x_n) dizisi yakınsak değildir. Buna rağmen bu dizi için

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} \sum_{n=v}^{j+v-1} x_n &= \frac{1}{j} \sum_{\substack{n=v \\ n=m^2}}^{j+v-1} x_n + \frac{1}{j} \sum_{\substack{n=v \\ n \neq m^2}}^{j+v-1} x_n \\ &\leq \frac{3\sqrt{j}}{j} \end{aligned}$$

olduğundan (x_n) dizisi 0 sayısına hemen hemen yakınsaktır.

Yakınsak her dizinin aynı limit değerine hemen hemen yakınsak olduğunu belirtelim ve bunun tersinin doğru olmadığını da yukarıdaki örnek göstermektedir. Yine yakınsak dizilerde olduğu gibi hemen hemen yakınsak diziler de sınırlı olmak zorundadır. Fakat aritmetik ortalama yakınsak diziler sınırlı olmak zorunda değildir.

Şimdi de Bell tarafından verilen ve çalışmamızda esas olarak kullanacağımız toplam süreci kavramından bahsedeceğiz.

Tanım 2.6. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{[a_{jn}^v]\}$ ($j, n, v \in \mathbb{N}$) sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. O halde $x := (x_n)$ dizisi için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v x_n = L, \quad (v \text{ ye göre düzgün}), \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_n) dizisi L 'ye " \mathcal{A} -toplabilir" denir. Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v x_n$$

serisinin her $n, v \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğu kabul edilmektedir ve bu yakınsama kısaca

$$\mathcal{A} - \lim x = L$$

ile gösterilir [43].

(2.7)'deki yakınsaklığın v ye göre düzgün olması demek,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{v \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v x_n \right) = L$$

ifadesinin gerçekleşmesi demektir.

- A^v matrisleri yerine sabit I birim matrisi alınırsa, \mathcal{A} -toplam süreci klasik anlamda yakınsaklığa indirgenir.

- A^v matrisleri yerine

$$c_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & n = 1, 2, \dots, j \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.8)$$

ile verilen sabit $C_1 = (c_{jn})$ Cesàro matrisi alınır, \mathcal{A} -toplam süreci aritmetik ortalama yakınsaklığa dönüşür.

- A^v matrisleri yerine

$$a_{jn}^v = \begin{cases} \frac{1}{j}, & n = v, v+1, \dots, v+j-1 \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.9)$$

ile tanımlanan $(F^v) = (a_{jn}^v)$ matris dizisi alınır, \mathcal{A} -toplam süreci hemen hemen yakınsaklık kavramına indirgenir.

Tanım 2.7. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{[a_{jn}^v]\}$ toplanabilme metodu verilsin. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ iken $\mathcal{A} - \lim x = L$ oluyorsa, \mathcal{A} metoduna “regülerdir” denir [43].

Bilindiği üzere Silverman-Toeplitz Teoremi, regüler matrisleri karakterize etmektedir. Buna benzer olarak, bir \mathcal{A} -toplam sürecinin regülerliğini karakterize eden teorem Bell tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.2. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{[a_{jn}^v]\}$ metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul

(a) $\forall n = 1, 2, \dots$ için $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{jn}^v = 0$ (v ye göre düzgün)

(b) $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v = 1$ (v ye göre düzgün)

(c) $\forall j, v \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^v| < \infty$ ve $\forall n \geq N$ ve $\forall v \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}^v| \leq M$ olacak şekilde N, M pozitif tam sayıları vardır

koşullarının gerçekleşmesidir [43].

Biz yaklaşım teoremlerimizde negatif olmayan regüler toplanabilme metotlarını göz önüne alacağız. Burada bir metodun negatif olmaması ile, matrisin tüm terimlerinin negatif olmamasını kastediyoruz. Yukarıda bahsedilen tüm özel hallerin negatif olmayan regüler birer metot oldukları, bu teoremi uygulayarak kolayca görülebilir.

3. MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

Tezin bu bölümünde, sözde-linear ve pozitif olan maksimum-minimum operatörleri için genel bir yaklaşım teoremi elde edilecektir. Bu yaklaşımın maksimum-minimum Shepard operatörleriyle [13]'te yapılan ve (2.4) ile verilen düzgün yaklaşımı da içerdiği gösterilecektir. Daha sonra verilen düzgün yaklaşım için yakınsaklık oranı hesaplanacaktır. Son olarak elde edilen teoremler için uygulamalar verilecek ve bunlar grafiklerle desteklenecektir.

3.1 Maksimum-Minimum Operatörleriyle Düzgün Yaklaşım

Bu kısımda, maksimum-minimum operatörleri ile sürekli bir fonksiyona yaklaşım teoremi verilecektir.

Tez boyunca, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ olmak üzere

$$B_{\delta,n}(x) := \{k = 0, 1, \dots, n : d(x_{n,k}, x) \geq \delta\} \quad (3.1)$$

kümesini göz önüne alacağız.

Şimdi yaklaşım teoremimizi verebiliriz.

Teorem 3.1. *Herhangi bir $\delta > 0$ sabiti ve verilen negatif olmayan bir i tamsayısı için X üzerinde (2.1) ile verilen L_n operatörü*

$$\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} (d(x_{n,k}, x))^i K_{n,k}(x) \rightrightarrows 0, \quad (3.2)$$

koşulunu gerçeklesin. Bu durumda, her $f \in C(X, [0, 1])$ için X üzerinde

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad (3.3)$$

elde edilir.

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X, [0, 1])$ verilsin. f fonksiyonunun X kompakt kümesi üzerindeki düzgün sürekliliğinden, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $d(x_{n,k}, x) < \delta_0$ iken $|f(x_{n,k}) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. Operatörün tanımından ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) \right. \\ &\quad \left. + \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) \right| \\ &\quad + \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) - f(x) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Burada Lemma 2.1 ve operatörün tanımı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \bigvee_{k=0}^n |K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - K_{n,k}(x) \wedge f(x)| \\ &\quad + \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) \wedge 1 - f(x) \wedge 1 \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 2.2 göz önüne alınıp tekrar düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)| \\ &\quad + f(x) \wedge \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge e_0(x) - e_0(x) \right| \end{aligned}$$

olur. $0 \leq f(x) \leq 1$ ve $L_n(e_0) = e_0$ özellikleri kullanıldığında ve (3.1) ile verilen $B_{\delta_0, n}(x)$ kümesinde $\delta = \delta_0$ olarak alındığında, verilen negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \left(\bigvee_{k \notin B_{\delta_0, n}(x)} K_{n,k}(x) \wedge \varepsilon \right) \vee \left(\bigvee_{k \in B_{\delta_0, n}(x)} K_{n,k}(x) \right) \\ &\leq \varepsilon \vee \left(\frac{1}{\delta_0^i} \bigvee_{k \in B_{\delta_0, n}(x)} (d(x_{n,k}, x))^i K_{n,k}(x) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada son olarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve ayrıca (3.2) hipotezi kullanılırsa, (3.3) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Düzgün Yaklaşım için Yakınsaklık Oranı

Bu bölümde Teorem 3.1 ile verilen düzgün yaklaşım için yakınsaklık oranını çalışacağız ve sonrasında X üzerinde Tanım 2.1 ile verilen Hölder sürekli

fonksiyonları için hata tahmini hesabını yapacağız.

Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alacağız:

- X üzerinde sınırlı bir f fonksiyonun bilinen supremum normu $\|f\|$ ile gösterilsin.
- $\xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için
 - a) $t = 0$ da sürekli,
 - b) $\xi(0) = 0$,
 - c) $\forall t > 0$ için $\xi(t) > 0$,

koşulları gerçeklensin. Bu şekildeki tüm ξ fonksiyonlarının kümesi Ψ ile gösterilsin [10, 51, 52].

- $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ pozitif reel sayılar dizisi olmak üzere $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ve $C > 0$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $x_n \leq Cy_n$ koşulu gerçeklensin. Biz bu durumu bundan sonra

$$x_n = O(y_n) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için})$$

ile göstereceğiz.

Şimdi yakınsaklık oranı için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2. $\{L_n\}$, (2.1) de verilen maksimum-minimum operatörlerinin dizisi olsun. Kabul edelim ki verilen bir $\xi \in \Psi$ ve negatif olmayan i tamsayısı için $\{\delta_n\}$ ve $\{a_n\}$ pozitif reel sayıların sıfıra yakınsayan dizileri olmak üzere

$$\left\| \bigvee_{k \in B_{\delta_n, n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right\| = O(\xi(a_n)) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için}) \quad (3.4)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda, her $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$\|L_n(f) - f\| = O\left(\omega(f, \delta_n) \vee \frac{\xi(a_n)}{\delta_n^i}\right) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için}) \quad (3.5)$$

gerçeklenir.

İspat. $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(X, [0, 1])$ verilsin. Teorem 3.1'in ispatında olduğu gibi,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada Tanım 2.2 ile verilen süreklilik modülü tanımı kullanılarak

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n,k}, x))$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (3.4) deki $\{\delta_n\}$ ve $\{a_n\}$ sıfır dizileri kullanılır ve (3.1) de tanımlanan $B_{\delta_n, n}(x)$ kümesi göz önüne alınırsa, verilen negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \left(\bigvee_{k \notin B_{\delta_n, n}(x)} K_{n, k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n, k}, x)) \right) \\ &\quad \vee \left(\bigvee_{k \in B_{\delta_n, n}(x)} K_{n, k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n, k}, x)) \right) \\ &\leq (\omega(f, \delta_n)) \vee \left(\frac{1}{\delta_n^i} \bigvee_{k \in B_{\delta_n, n}(x)} (d(x_{n, k}, x))^i K_{n, k}(x) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafında $x \in X$ üzerinden supremum alırsak ve ayrıca (3.4) hipotezini kullanırsak (3.5) sonucuna ulaşırız.

Aşağıdaki özel durum Teorem 3.2'nin doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 3.1. $\alpha \in (0, 1]$ için $f \in Lip(\alpha)$ ise

$$\|L_n(f) - f\| = O\left(a_n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için}) \quad (3.6)$$

gerçeklenir.

İspat. (3.4) ifadesinde $\xi(t) := t$ ve $\delta_n := a_n^{\frac{1}{\alpha+1}}$ alınır, Hölder sürekliliğin tanımından ve Teorem 3.2'den (3.6) elde edilir.

3.3 Yaklaşım Teoreminin Uygulamaları

Bu bölümde, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'nin uygulamasını vereceğiz. Daha sonra maksimum-minimum Bernstein ve maksimum-minimum Shepard operatörleri ile sözde-konkav fonksiyonlara yaklaşım yapılabildiği gösterilecektir. Ayrıca bu iki operatörden sadece maksimum-minimum Bernstein operatörlerinin fonksiyonun monotonluk özelliğini koruduğu gösterilecektir.

3.3.1 Maksimum-minimum Bernstein operatörleri

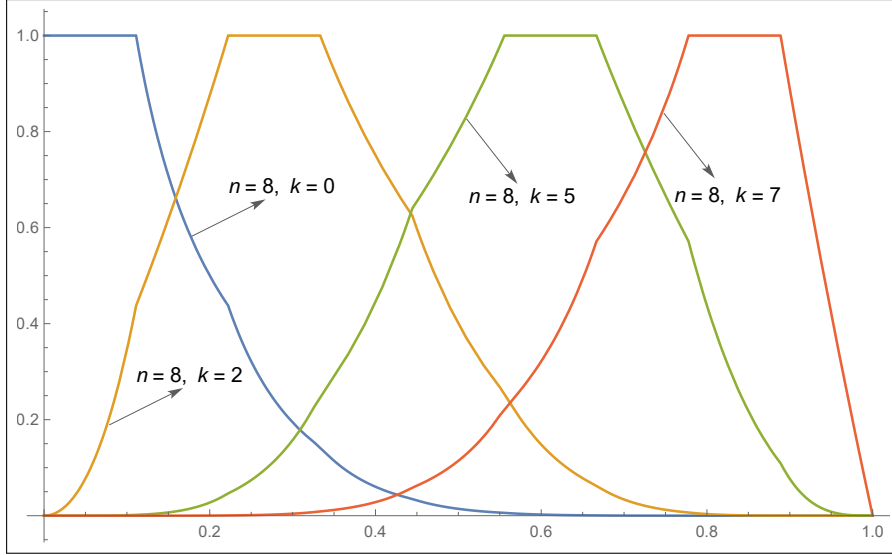
$X = [0, 1]$ olarak alalım. Temsilci noktaları $x_{n, k} = \frac{k}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \dots, n$) şeklinde seçelim ve $K_{n, k}$ çekirdek fonksiyonu

$$K_{n, k}(x) := \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}{\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}} \quad (3.7)$$

eşitliği ile tanımlansın. Çekirdek fonksiyonu farklı k değerleri ve $n = 8$ için Şekil 3.1'de gösterilmektedir.

Buna göre $f \in C([0, 1], [0, 1])$ için maksimum-minimum Bernstein operatörleri

$$B_n^{(m)}(f; x) := \bigvee_{k=0}^n K_{n, k}(x) \wedge f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.8)$$



Şekil 3.1: $n = 8$ ve $k = 0, 2, 5, 7$ değerleri için (3.7) ile verilen $K_{n,k}$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse bu operatörler (2.1) formuna sahiptir. Burada

$$B_n^{(m)}(e_0; x) = e_0(x) = 1$$

olduğu da kolayca görülür. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, 1]$ için

$$\bigvee_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| x - \frac{k}{n} \right|}{\bigvee_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}} \leq \frac{6}{\sqrt{n+1}}$$

eşitsizliği gerçekleşir [56, 59]. Şimdi sabit bir $\delta > 0$ için

$$\bigvee_{k \in B_{\delta, n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n,k}(x) \leq \frac{6}{\sqrt{n+1}} \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir. Böylece $i = 1$ için Teorem 3.1'in (3.2) hipotezi sağlanır. Dolayısıyla, her $f \in C([0, 1], [0, 1])$ için

$$B_n^{(m)}(f) \rightrightarrows f$$

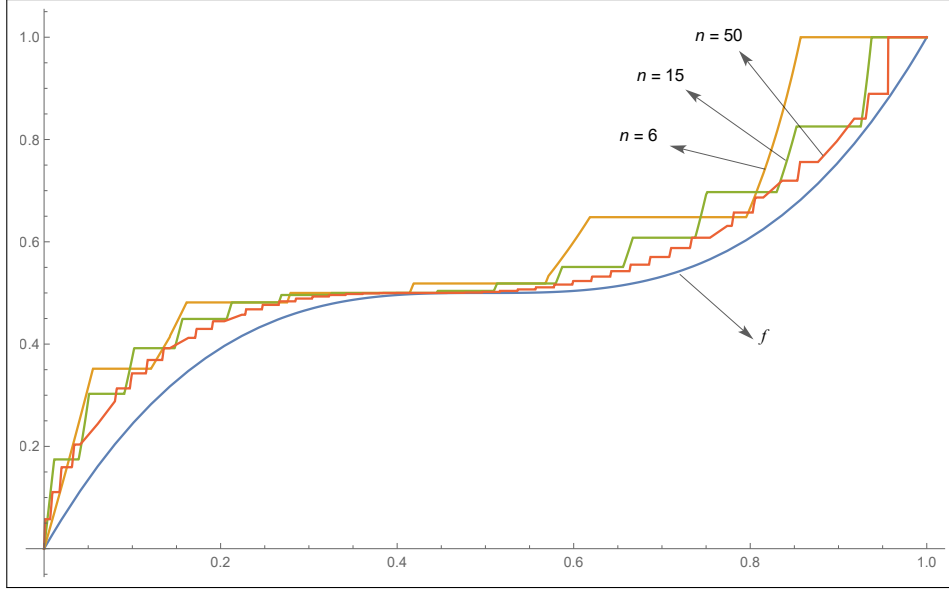
elde edilir. Bu düzgün yaklaşım

$$f(x) = \frac{1}{2} + 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \quad (3.10)$$

fonksiyonu seçilerek $n = 6, 15, 50$ değerleri için Şekil 3.2'de gösterilmektedir.

Diğer yandan yaklaşımın yakınsaklık oranı için Teorem 3.2'nin (3.4) şartı, $i = 1$, $\xi(t) = t$ ve $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ alınarak (3.9) eşitsizliğinden elde edilir. Ayrıca (3.9)'da $\delta = \delta_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^{\alpha+1}$ alınırsa, $f \in Lip(\alpha)$ olmak üzere

$$\|B_n^{(m)}(f) - f\| = O \left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}} \right) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için})$$



Şekil 3.2: $n = 6, 15, 50$ değerleri için (3.10) ile verilen artan f fonksiyonuna $B_n^{(m)}(f)$ maksimum-minimum Bernstein operatörleriyle yaklaşım

bulunur.

[14]'deki gibi bulanık mantık teorisinde önemli bir yeri olan sözde-konkav fonksiyonlara da maksimum-minimum Bernstein operatörleriyle yaklaşım mümkündür. Bunun için $[0, 1]$ aralığı üzerinde

$$g(x) = \begin{cases} 8x^3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.11)$$

ile tanımlanan sözde-konkav g fonksiyonunu göz önüne alalım, bu düzgün yaklaşım $n = 6, 25, 64$ değerleri için Şekil 3.3'te gösterilmektedir.

Şimdi [59]'da olduğu gibi her bir $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$ için

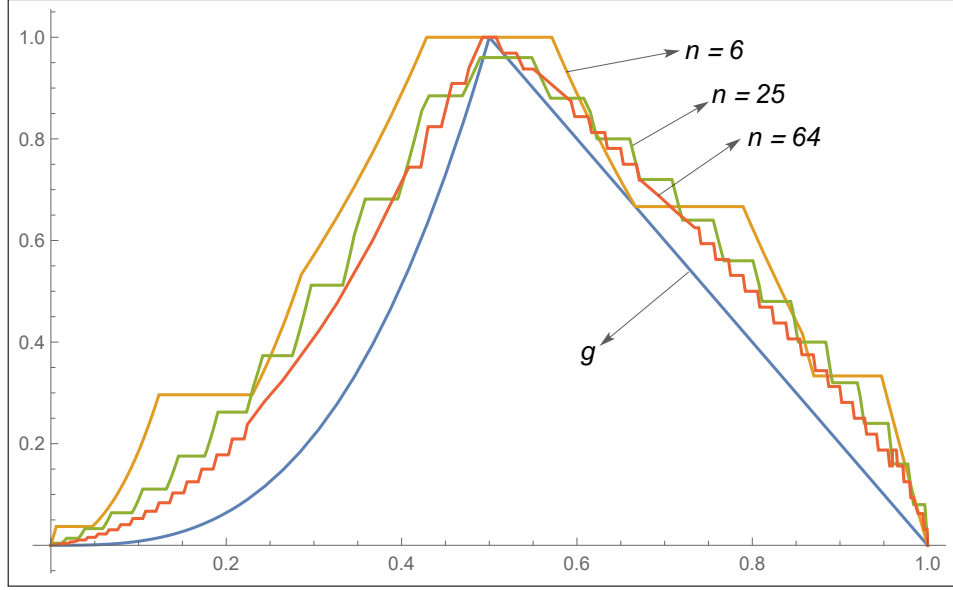
$$m_{k,n,j}(x) := \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}{\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}} \quad (3.12)$$

ve

$$f_{k,n,j}(x) := m_{k,n,j}(x) \wedge f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-j} \wedge f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.13)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada (3.13) ile verilen $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonunun [59]'daki çalışmadan tek farkı, çarpım yerine minimum işleminin kullanılmış olmasıdır. Buna göre, her $x \in \left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$ ($j = 0, 1, \dots, n$) için (3.12) ve (3.13) ifadelerini kullanır ve Lemma 2.4'ten yararlanırsak

$$B_n^{(m)}(f; x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$



Şekil 3.3: $n = 6, 25, 64$ değerleri (3.11) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna $B_n^{(m)}(g)$ maksimum-minimum Bernstein operatörleriyle yaklaşım

elde ederiz. Üstelik Lemma 2.5 uyarınca eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonksiyon ise herhangi $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$ için

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$$

bulunur. Böylece

$$B_n^{(m)}(f; x) = \bigvee_{k=j}^n f_{k,n,j}(x) \quad (3.14)$$

eşitliği yazılabilir. Dikkat edilirse, her bir $k \geq j$ için, $f_{k,n,j}$ fonksiyonu azalmayıdır ve buradan her bir $\left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right]$ ($j = 0, 1, \dots, n$) alt aralığında $B_n^{(m)}(f)$ in azalmayan olduğu gözlemlenir. Ayrıca $B_n^{(m)}(f)$, $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) eğer f , $[0, 1]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon ise $B_n^{(m)}(f)$ de azalmayıdır;
- (ii) eğer f , $[0, 1]$ üzerinde artmayan bir fonksiyon ise $B_n^{(m)}(f)$ de artmayıdır.

Buradan (i) ile (ii) ifadelerini birleştirerek maksimum-minimum Bernstein operatörleri için aşağıdaki şekil koruma özelliğini elde ederiz.

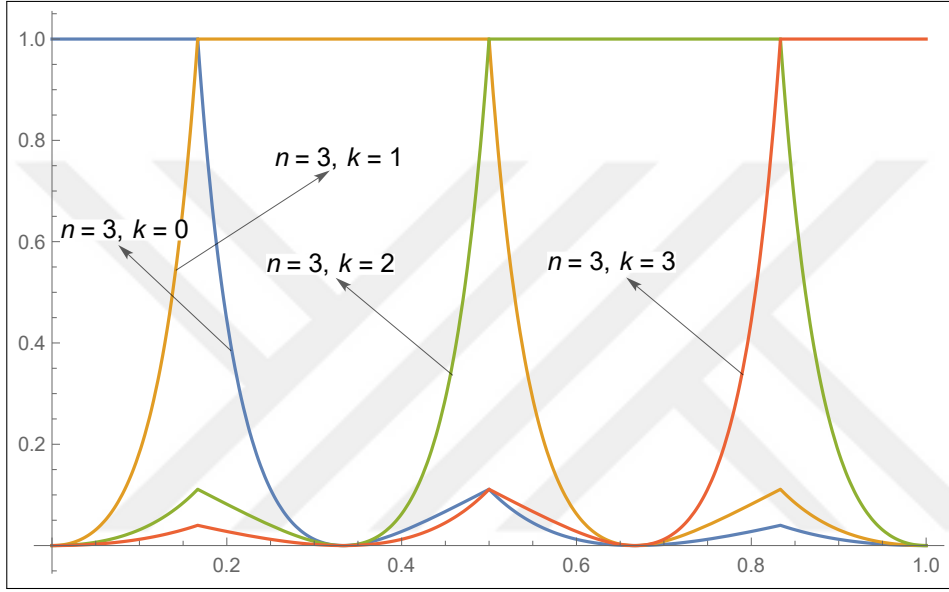
Sonuç 3.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n^{(m)}(f)$ operatörü $[0, 1]$ aralığında f fonksiyonun monotonluğunu korur.

3.3.2 Tek değişkenli Maksimum-minimum Shepard operatörleri

Bu bölümde Bede ve arkadaşları [13] tarafından tanımlanan maksimum-minimum Shepard operatörlerini kullanarak, elde ettiğimiz teoremlerin bir diğer uygulamasını vereceğiz. Bunun için, aşağıda verilen özel durumlar dikkate alınacaktır:

- $X = [0, 1]$ alalım ve $x_{n,k} = \frac{k}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \dots, n$) temsilci noktalarını seçelim.
- $\lambda \geq 1$ için (2.3) ile tanımlanan $K_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonunu göz önüne alalım.
- $\lambda \geq 1$ için (2.2) ile tanımlanan Sh_n^λ maksimum-minimum Shepard operatörleri verilsin.

Şekil 3.4'te $K_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonun $\lambda = 2$, $n = 3$, ve $k = 0, 1, 2, 3$ değerleri için grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.4: $\lambda = 2$, $n = 3$ ve $k = 0, 1, 2, 3$ değerleri için (2.3) ile verilen $K_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri

Kolayca görülebilir ki

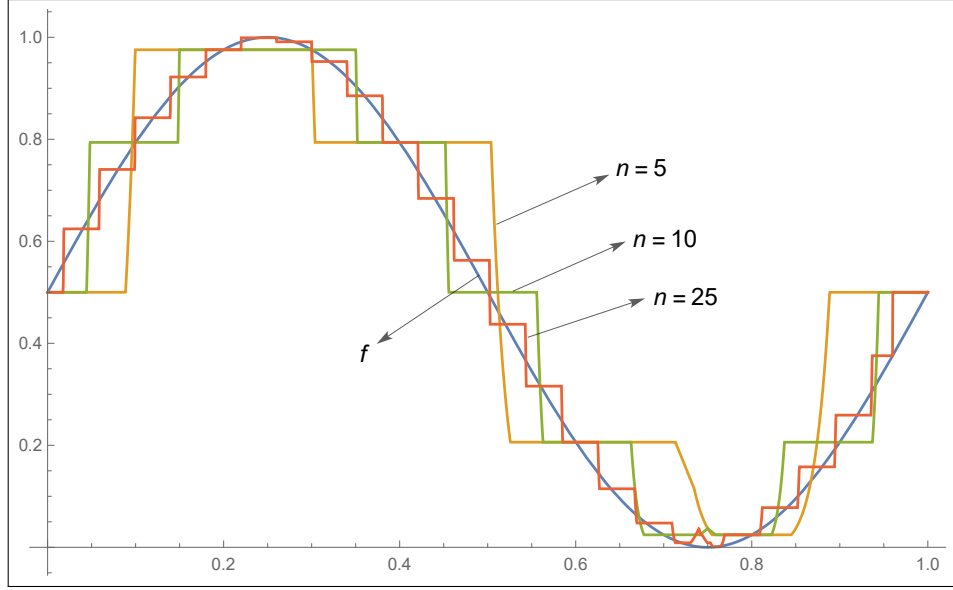
$$Sh_n^\lambda(e_0; x) = e_0(x) = 1$$

eşitliği gerçekleşir. (2.3) ve (2.5) ifadelerinden herhangi bir sabit $\delta > 0$ için,

$$\bigvee_{k \in B_{\delta, n}(\frac{r}{n})} \left| \frac{r}{n} - \frac{k}{n} \right| K_{n,k}^\lambda \left(\frac{r}{n} \right) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

ve $x \neq \frac{r}{n}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) için

$$\begin{aligned} \bigvee_{k \in B_{\delta, n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n,k}^\lambda(x) &\leq \frac{\bigvee_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^{1-\lambda}}{\bigvee_{j=0}^n \left| x - \frac{j}{n} \right|^{-\lambda}} \\ &= \frac{\bigwedge_{j=0}^n \left| x - \frac{j}{n} \right|^\lambda}{\bigwedge_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^{\lambda-1}} \end{aligned}$$



Şekil 3.5: $\lambda = 3$ ve $n = 5, 10, 25$ değerleri için (3.16) ile verilen periyodik f fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f)$ maksimum-minimum Shepard operatörleriyle yaklaşım

bulunur. $\lambda \geq 1$ olduğundan Lemma 2.3 uyarınca her $x \neq \frac{r}{n}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) için

$$\bigvee_{k \in B_{\delta, n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n, k}^\lambda(x) \leq \bigwedge_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|$$

eşitizliği elde edilir. Ayrıca

$$\bigwedge_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \text{ ise} \\ \left| x - \frac{p}{n} \right|, & \frac{2p-1}{2n} < x \leq \frac{2p+1}{2n} (p = 1, 2, \dots, n-1) \text{ ise} \\ 1-x, & \frac{2n-1}{2n} < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu görmek zor değildir. Şimdi yukarıdaki sonuçları birleştirirsek herhangi bir sabit $\delta > 0$ ve $\lambda \geq 1$ için

$$\bigvee_{k \in B_{\delta, n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n, k}^\lambda(x) \leq \frac{1}{2n} \quad (3.15)$$

eşitsizliği, $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için gerçekleşir. Bu ise $i = 1$ için (3.2) hipotezini verir. Böylece, Teorem 3.1 uyarınca her bir $\lambda \geq 1$ için $f \in C([0, 1], [0, 1])$ olduğunda

$$Sh_n^\lambda(f) \rightrightarrows f$$

düzgün yaklaşımı elde edilir. Bu durum, $\lambda = 3$, $n = 5, 10, 25$ değerleri ve

$$f(x) = \frac{1 + \sin(2\pi x)}{2} \quad (3.16)$$

fonksiyonu için Şekil 3.5'te gösterilmektedir.

Diğer yandan, Teorem 3.2'de verilen yakınsaklık oranı için, eğer (3.15) ifadesinde $i = 1$, $\xi(t) = t$ ve $a_n = \frac{1}{n}$ alınırsa (3.4) şartını elde ederiz. Burada ayrıca $\delta = \delta_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\alpha+1)}$ olarak aldığımızda, $f \in Lip(\alpha)$ olduğunda $\lambda \geq 1$ için

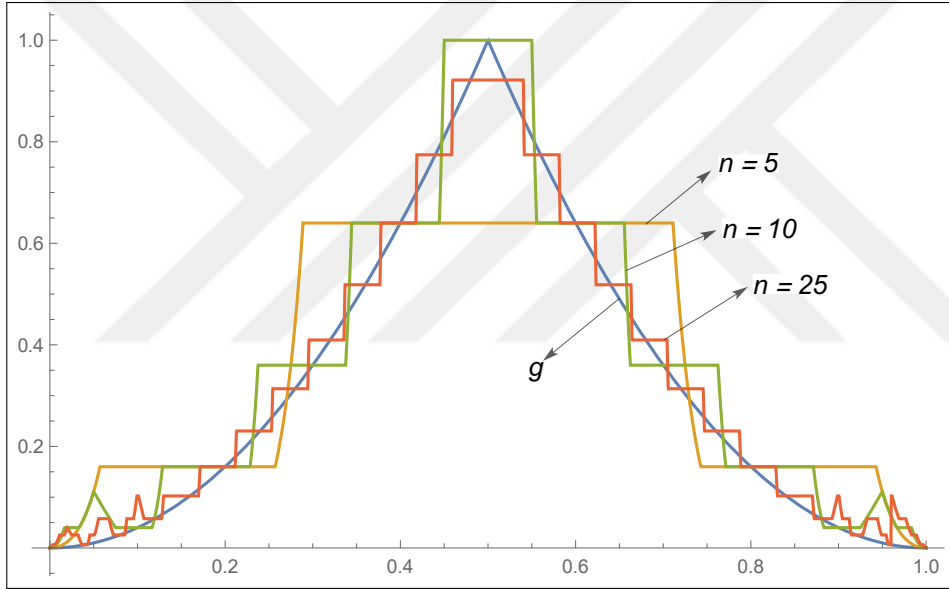
$$\|Sh_n^\lambda(f) - f\| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha/(\alpha+1)}}\right) \quad (n \rightarrow \infty \text{ için})$$

elde edilir.

Maksimum-minimum Shepard operatörleriyle, sözde-konkav fonksiyonlara yaklaşabilmek te mümkündür. Bunun için

$$g(x) = \begin{cases} 4x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 4(1-x)^2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.17)$$

fonksiyonunu göz önüne alarak, $\lambda = 2$ ve $n = 5, 10, 25$ değerlerine karşılık gelen yaklaşım grafikleri Şekil 3.6'da gösterilmektedir.



Şekil 3.6: $\lambda = 2$ ve $n = 5, 10, 25$ değerleri için (3.17) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f)$ maksimum-minimum Shepard operatörleriyle yaklaşım

Son olarak, maksimum-minimum Bernstein operatörlerinin aksine maksimum-minimum Shepard operatörlerinin verilen bir fonksiyonun monotonluğunu her zaman korumadığını görebiliriz. Bunun için $[0, 1]$ üzerinde azalan $f(x) = (x-1)^2$ fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ noktalarını seçersek ve $\lambda = 1$, $n = 2$ alırsak, (2.2) ve (2.5)'ten

$$Sh_2^1\left(f; \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ve

$$Sh_2^1\left(f; \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3},$$

değerleri bulunur ve bu da bize gösterir ki $[0, 1]$ üzerinde f azalan bir fonksiyon olmasına rağmen $Sh_2^1(f)$ azalan değildir.

3.3.3 İki değişkenli Maksimum-minimum Shepard operatörleri

Bu kısımda iki değişkenli sürekli bir fonksiyona maksimum-minimum Shepard operatörleri ile yaklaşım yapılacaktır. Öncelikle iki değişkenli maksimum-minimum Shepard operatörlerini tanımlayabilmek için aşağıda verilen koşullara ihtiyaç duyulmaktadır.

- $X = [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere kartezyen düzlemdeki Öklid metriğini göz önüne alalım.
- $(x_{n,k}, y_{n,m}) = (\frac{k}{n}, \frac{m}{n})$ ($n \in \mathbb{N}, k, m = 0, 1, \dots, n$) temsilci noktalarını seçelim.
- Verilen bir $\lambda \geq 1$ sayısı için $[0, 1]^2$ üzerinde $p, q = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere iki değişkenli $K_{n,k,m}^\lambda(x, y)$ çekirdek fonksiyonunu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|x - \frac{k}{n}|^{-\lambda} |y - \frac{m}{n}|^{-\lambda}}{\left(\prod_{j=0}^n |x - \frac{j}{n}|^{-\lambda} \right) \left(\prod_{l=0}^n |y - \frac{l}{n}|^{-\lambda} \right)}, \quad x \neq \frac{p}{n} \text{ ve } y \neq \frac{q}{n} \text{ ise} \\ \frac{|x - \frac{k}{n}|^{-\lambda} \cdot \delta_{mq}}{\prod_{j=0}^n |x - \frac{j}{n}|^{-\lambda}}, \quad x \neq \frac{p}{n} \text{ ve } y = \frac{q}{n} \text{ ise} \\ \frac{|y - \frac{m}{n}|^{-\lambda} \cdot \delta_{kp}}{\prod_{l=0}^n |y - \frac{l}{n}|^{-\lambda}}, \quad x = \frac{p}{n} \text{ ve } y \neq \frac{q}{n} \text{ ise} \\ \delta_{kp} \cdot \delta_{mq} = \begin{cases} 1, & k = p \text{ ve } m = q \text{ ise} \\ 0, & k \neq p \text{ veya } m \neq q \text{ ise} \end{cases}, \quad x = \frac{p}{n} \text{ ve } y = \frac{q}{n} \text{ ise} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

olacak şekilde dört durumda tanımlayalım.

Buna göre her $\lambda \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k, m = 0, 1, \dots, n$ için $K_{n,k,m}^\lambda \in C(X, [0, 1])$ olduğu görülür. $n = 3$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere farklı k, m değerlerine karşılık gelen çekirdek fonksiyonun grafikleri Şekil 3.7’de verilmektedir.

Şimdi bu çekirdek fonksiyonu yardımıyla iki değişkenli maksimum-minimum Shepard operatörleri

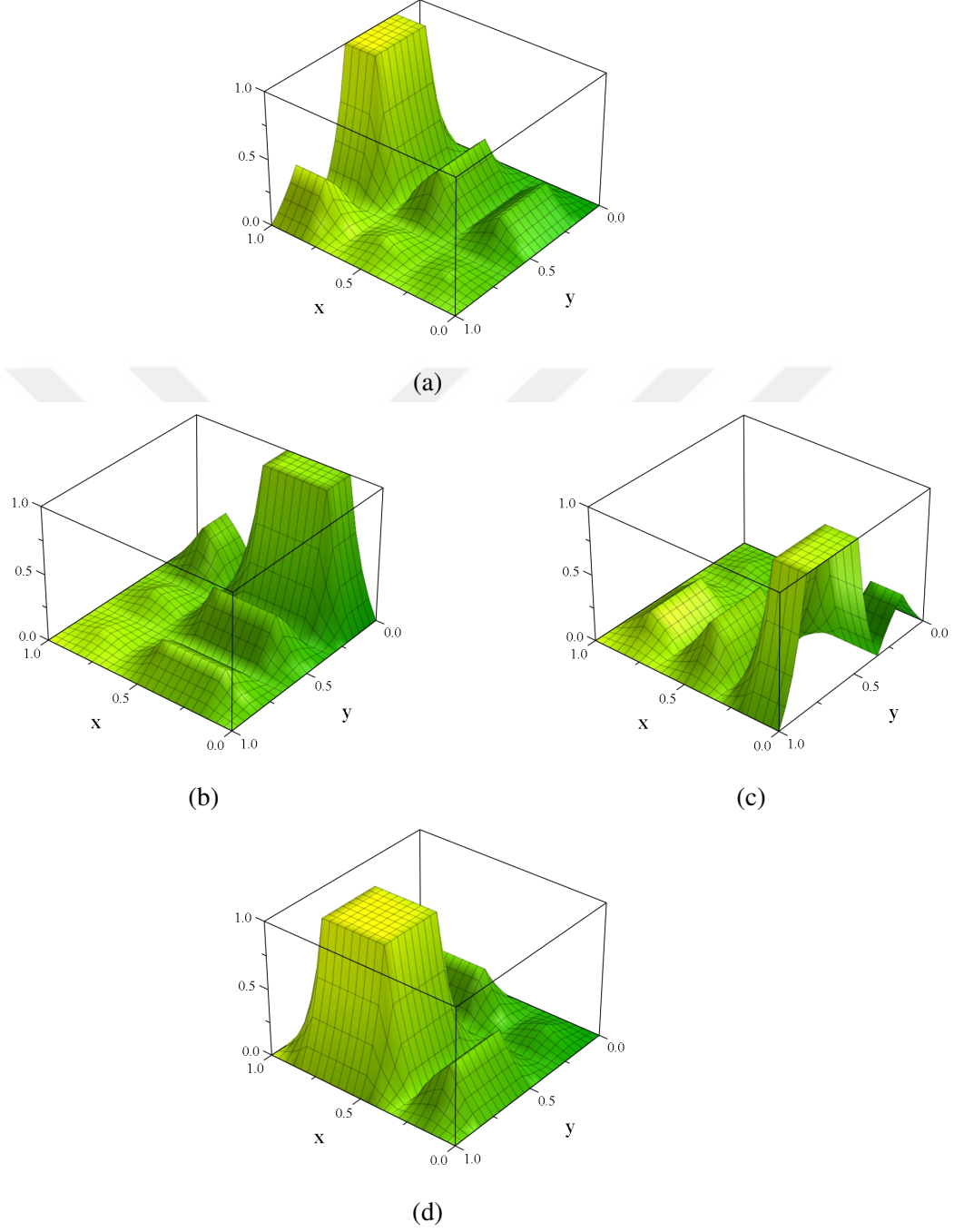
$$Sh_n^\lambda(f; x, y) = \bigvee_{k,m=0}^n K_{n,k,m}^\lambda(x, y) \wedge f\left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$Sh_n^\lambda(e_0; x, y) = e_0(x, y) = 1 \quad (3.20)$$

olduğu açıktır. Teorem 3.1’in (3.2) koşulunu doğrulamak için öncelikle

$$\tau_n := \{(k, m) : k, m = 0, 1, \dots, n\} \quad (3.21)$$



Şekil 3.7: $\lambda = 1$ için (3.18) ile verilen $K_{n,k,m}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri
 ((a) $K_{3,3,1}^1$, (b) $K_{3,1,0}^1$, (c) $K_{3,0,2}^1$, (d) $K_{3,2,2}^1$)

kümesini göz önüne alacağız. Şimdi de verilen $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $(x, y) \in [0, 1]^2$ için τ_n nin altkümelerini

$$B_{\delta,n}(x, y) := \left\{ (k, m) \in \tau_n : \sqrt{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{n}\right)^2} \geq \delta \right\}, \quad (3.22)$$

$$C_{\delta,n}(x, y) := \left\{ (k, m) \in \tau_n : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \frac{\delta}{2} \right\},$$

$$D_{\delta,n}(x, y) := \left\{ (k, m) \in \tau_n : \left|y - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{\delta}{2} \right\}$$

ile tanımlayalım. Buna göre $u, v \geq 0$ olmak üzere $\sqrt{u^2 + v^2} \leq u + v$ eşitsizliği kullanılarak

$$B_{\delta,n}(x, y) \subset C_{\delta,n}(x, y) \cup D_{\delta,n}(x, y) \quad (3.23)$$

gerçeklenir.

Aşağıda verilen lemma, Teorem 3.1'deki (3.2) koşulunun $i = 0$ için sağlandığı gösterir.

Lemma 3.1. *Sabit herhangi bir $\delta > 0$ ve $\lambda \geq 1$ için $[0, 1]^2$ üzerinde*

$$\bigvee_{(k,m) \in B_{\delta}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda}(x, y) \Rightarrow 0 \quad (3.24)$$

koşulu gerçekleşir.

İspat. Çekirdek fonksiyonunun tanımından sadece

$$(I) \quad x \neq \frac{p}{n} \text{ ve } y \neq \frac{q}{n} \quad (p, q = 0, 1, \dots, n),$$

$$(II) \quad x \neq \frac{p}{n} \text{ ve } y = \frac{q}{n} \quad (p, q = 0, 1, \dots, n),$$

$$(III) \quad x = \frac{p}{n} \text{ ve } y \neq \frac{q}{n} \quad (p, q = 0, 1, \dots, n)$$

durumlarını incelemek yeterlidir. Öncelikle (I) durumunu göz önüne alalım. (3.23)'ten aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\bigvee_{(k,m) \in B_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda}(x, y) \leq \left\{ \bigvee_{(k,m) \in C_{\delta,n}(x,y)} \frac{|x - \frac{k}{n}|^{-\lambda} |y - \frac{m}{n}|^{-\lambda}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x - \frac{j}{n}|^{-\lambda}\right) \left(\bigvee_{l=0}^n |y - \frac{l}{n}|^{-\lambda}\right)} \right\} \\ \vee \left\{ \bigvee_{(k,m) \in D_{\delta,n}(x,y)} \frac{|x - \frac{k}{n}|^{-\lambda} |y - \frac{m}{n}|^{-\lambda}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x - \frac{j}{n}|^{-\lambda}\right) \left(\bigvee_{l=0}^n |y - \frac{l}{n}|^{-\lambda}\right)} \right\}.$$

Son ifade düzenlendiğinde

$$\bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda}(x,y) \leq \left\{ \bigvee_{m=0}^n \bigvee_{k: |x-\frac{k}{n}| \geq \frac{\delta}{2}} \frac{|x-\frac{k}{n}|^{-\lambda} |y-\frac{m}{n}|^{-\lambda}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{-\lambda} \right) \left(\bigvee_{l=0}^n |y-\frac{l}{n}|^{-\lambda} \right)} \right\} \\ \vee \left\{ \bigvee_{k=0}^n \bigvee_{m: |y-\frac{m}{n}| \geq \frac{\delta}{2}} \frac{|x-\frac{k}{n}|^{-\lambda} |y-\frac{m}{n}|^{-\lambda}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{-\lambda} \right) \left(\bigvee_{l=0}^n |y-\frac{l}{n}|^{-\lambda} \right)} \right\}$$

elde edilir. Daha sonra ikinci uygulamada olduğu gibi

$$\bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda}(x,y) \leq \frac{2}{\delta} \left\{ \bigvee_{k: |x-\frac{k}{n}| \geq \frac{\delta}{2}} \frac{|x-\frac{k}{n}|^{1-\lambda}}{\bigvee_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{-\lambda}} \right\} \\ \vee \frac{2}{\delta} \left\{ \bigvee_{m: |y-\frac{m}{n}| \geq \frac{\delta}{2}} \frac{|y-\frac{m}{n}|^{1-\lambda}}{\bigvee_{l=0}^n |y-\frac{l}{n}|^{-\lambda}} \right\} \\ \leq \frac{2}{\delta} \left\{ \frac{\bigwedge_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{\lambda}}{\bigwedge_{k=0}^n |x-\frac{k}{n}|^{\lambda-1}} \right\} \vee \frac{2}{\delta} \left\{ \frac{\bigwedge_{l=0}^n |y-\frac{l}{n}|^{\lambda}}{\bigwedge_{m=0}^n |y-\frac{m}{n}|^{\lambda-1}} \right\} \\ = \frac{2}{\delta} \left(\left\{ \bigwedge_{k=0}^n |x-\frac{k}{n}| \right\} \vee \left\{ \bigwedge_{m=0}^n |y-\frac{m}{n}| \right\} \right)$$

ifadesi bulunur. Böylece

$$\bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda}(x,y) \leq \frac{1}{\delta n} \quad (3.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (II) durumunu inceleyelim. Bunun için çekirdek fonksiyonun tanımı kullanılarak

$$\bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda} \left(x, \frac{q}{n} \right) = \bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} \frac{|x-\frac{k}{n}|^{-\lambda} \cdot \delta_{mq}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{-\lambda} \right)} \\ \leq \bigvee_{k: |x-\frac{k}{n}| \geq \delta} \frac{|x-\frac{k}{n}|^{-\lambda}}{\left(\bigvee_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{-\lambda} \right)} \\ \leq \frac{1}{\delta} \frac{\bigwedge_{j=0}^n |x-\frac{j}{n}|^{\lambda}}{\bigwedge_{k=0}^n |x-\frac{k}{n}|^{\lambda-1}}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\bigvee_{(k,m) \in \mathcal{B}_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda} \left(x, \frac{q}{n} \right) \leq \frac{1}{2\delta n} \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilir. Simetriden dolayı (III) durumu için de

$$\bigvee_{(k,m) \in B_{\delta,n}(x,y)} K_{n,k,m}^{\lambda} \left(\frac{p}{n}, y \right) \leq \frac{1}{2\delta n} \quad (3.27)$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.25), (3.26) ve (3.27) ifadeleri birleştirildiğinde (3.24) sonucuna ulaşılar ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1 ve Teorem 3.1'den her $f \in C([0,1]^2, [0,1])$ fonksiyonu için

$$Sh_n^{\lambda}(f; x, y) \rightrightarrows f(x, y) \quad ((x, y) \in [0, 1]^2 \text{ için})$$

yaklaşımı elde edilir. Bu düzgün yaklaşım $\lambda = 5$ ve $n = 4, 7, 10$ değerleri ve

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \quad (3.28)$$

fonksiyonu için Şekil 3.8'de gösterilmektedir.

3.3.4 Düzgün yaklaşıma ilişkin sonuçlar

Şimdiye kadar incelediğimiz özel hallerde $X = [0, 1]$ kümesini ve $x_{n,k} = \frac{k}{n} \in [0, 1]$ ($k = 0, 1, \dots, n$) temsilci noktalarını seçmiştik. Böylece $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonuna maksimum-minimum Bernstein ve Shepard operatörleri ile yaklaşım yaptık. Burada belirtmeliyiz ki yaklaşım yapılan f fonksiyonun tanım kümesi $a < b$ olacak şekilde herhangi bir $[a, b]$ kompakt aralığına genişletilebilir. Gerçekten, $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu verildiğinde temsilci noktaları

$$x_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{n} \in [a, b] \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

şeklinde seçerek $\lambda \geq 1$ olmak üzere maksimum-minimum Shepard operatörlerini aşağıdaki gibi modifiye edebiliriz:

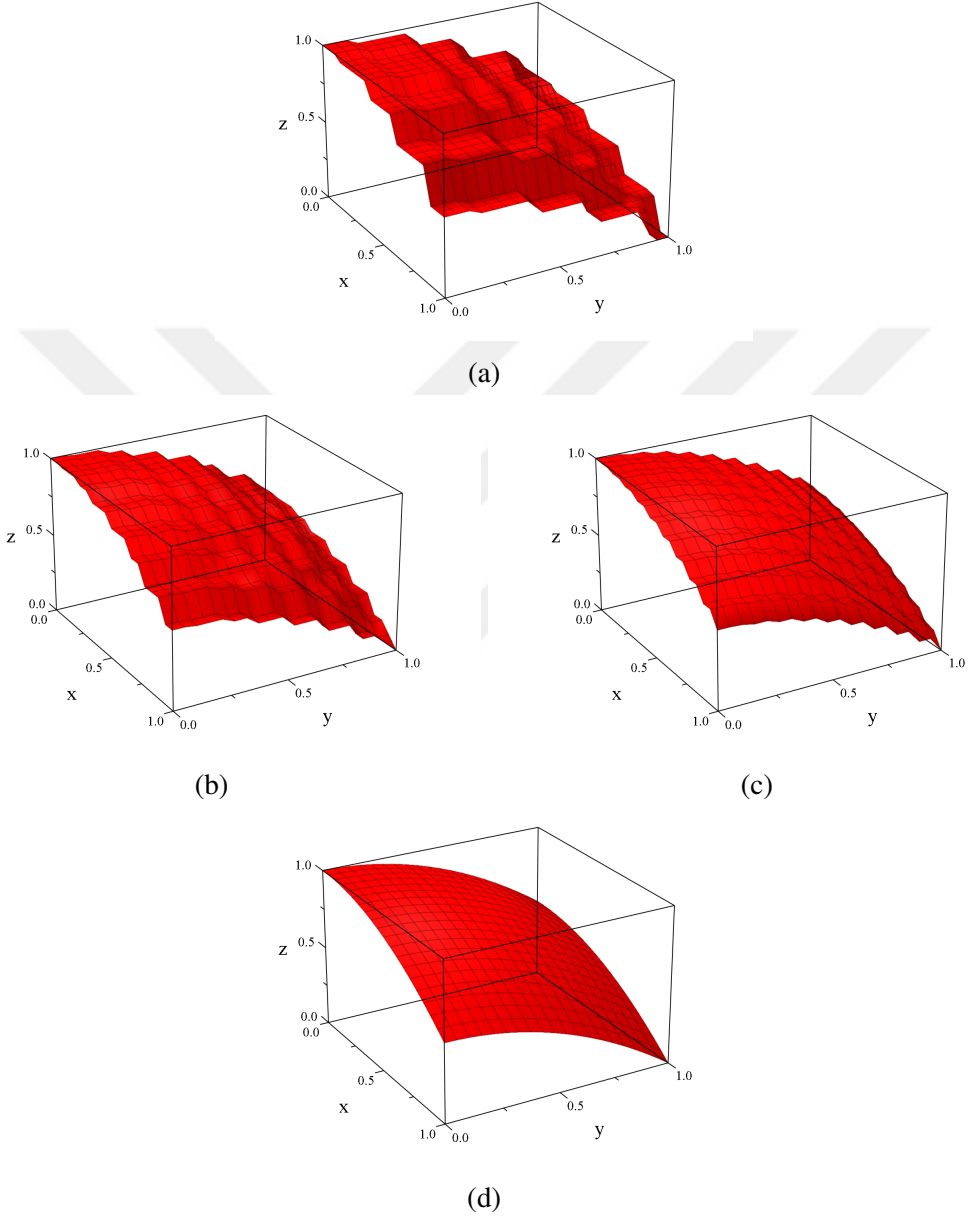
$$Sh_n^{[a,b],\lambda}(f; x) = \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x) \wedge f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right). \quad (3.29)$$

Burada $K_{n,k}^{[a,b],\lambda}$ çekirdek fonksiyonu

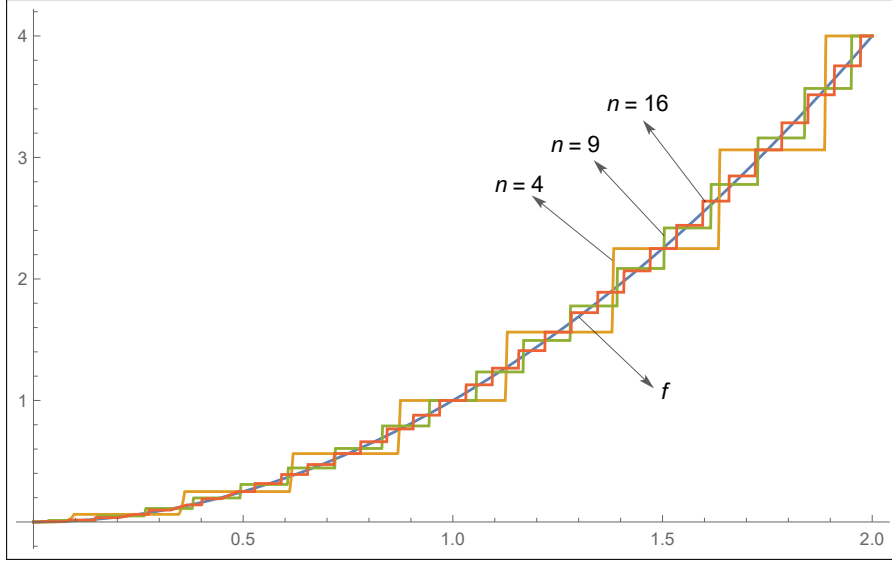
$$K_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\left| x - a - \frac{k(b-a)}{n} \right|^{-\lambda}}{\bigvee_{j=0}^n \left| x - a - \frac{j(b-a)}{n} \right|^{-\lambda}}, & x \neq a + \frac{i(b-a)}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \text{ ise} \\ \delta_{ik}, & x = a + \frac{i(b-a)}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \text{ ise} \end{cases} \quad (3.30)$$

olarak verilmektedir. Bu durumda daha önce yaptığımız gibi ilerleyerek

$$[a, b] \text{ üzerinde } Sh_n^{[a,b],\lambda}(f) \rightrightarrows f \quad (3.31)$$



Şekil 3.8: $\lambda = 5$ ve $n = 4, 7, 10$ değerleri için (3.28) ile verilen $f(x, y)$ fonksiyonuna $Sh_n^\lambda(f; x, y)$ operatörleriyle yaklaşım ((a) $n = 4$, (b) $n = 7$, (c) $n = 10$, (d) $f(x, y)$)



Şekil 3.9: $\lambda = 6$ ve $n = 4, 9, 16$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonuna $Sh_n^*(f; x)$ operatörleri ile yaklaşım

olduğunu gözlemleyebiliriz.

Ayrıca, eğer g fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli fakat $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq 1$ koşulunu gerçekleştiriyor ise, (3.31)'de $f = \frac{1}{g}$ alırsak,

$$[a, b] \text{ üzerinde } Sh_n^{[a,b],\lambda} \left(\frac{1}{g} \right) \Rightarrow \frac{1}{g}$$

elde ederiz.

Örnek olarak, tanım kümesi $[0, 2]$ olan $f(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Verilen f sürekli fonksiyonuna yaklaşım yapabilmek için

$$Sh_n^*(f; x) = \begin{cases} Sh_n^{[0,1],\lambda}(f; x), & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ \left(Sh_n^{[1,2],\lambda} \left(\frac{1}{f}; x \right) \right)^{-1}, & x \in [1, 2] \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde maksimum-minimum Shepard operatörleri modifiye edelim. Dikkat edilirse, $\lambda \geq 1$ için $x \in [1, 2]$ olduğunda $1 \leq f(x) \leq 4$ olmasına rağmen

$$[a, b] \text{ üzerinde } Sh_n^*(f) \Rightarrow f$$

yaklaşımı elde edilir. Burada yapılan düzgün yaklaşım Şekil 3.9'da $\lambda = 6$ ve $n = 4, 9, 16$ değerleri için verilmiştir.

Son olarak, eğer $[a, b]$ aralığı üzerinde $f \leq 0$ ise (3.31) de f fonksiyonu yerine $-f$ yazılarak

$$-Sh_n^{[a,b],\lambda}(-f) \Rightarrow f$$

$[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yaklaşımı elde edilir.

Burada dikkat edilirse, f fonksiyonun değer kümesine bağlı olarak maksimum-minimum Shepard operatörlerini modifiye etmek mümkündür. Bu tür modifikasyonlar [11, 14, 16, 18, 56, 59] çalışmalarında incelenen ve yine sözde-lineer şartını sağlayan maksimum-çarpım operatörleri için de geçerlidir.



4. MAKSİMUM-MİNİMUM OPERATÖRLERİYLE TOPLANABİLME

Bu bölümde, negatif olmayan regüler toplanabilme metodu kullanarak sürekli fonksiyonlara (2.1) ile verilen maksimum-minimum operatörleri yardımıyla yaklaşım yapılacaktır. Bu sayede üçüncü bölümde elde ettiğimiz Teorem 3.1 geliştirilerek, klasik yaklaşımın gerçekleşmediği durumlar için alternatif bir yöntem önerilmiş olacaktır. Daha sonra elde edilen yaklaşımın yakınsaklık oranı hesaplanacak ve bazı önemli özel halleri üzerinde durulacaktır.

4.1 Genel Toplanabilme Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde $\mathcal{A} = \{[a_{jn}^v]\}$ negatif olmayan regüler toplam sürecinin

$$\sup_{j,v \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v x_n \right) =: \beta < \infty \quad (4.1)$$

koşulunu gerçeklediğini kabul edeceğiz. Bu durumda (2.1) ile verilen maksimum-minimum L_n operatörünü \mathcal{A} metodu yardımıyla

$$\mathcal{T}_{j,v}(f;x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v L_n(f;x) \quad (4.2)$$

olacak şekilde genelleştirebiliriz. Burada (4.1) koşulu uyarınca her $j, v \in \mathbb{N}, x \in X$ ve $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$0 \leq \mathcal{T}_{j,v}(f;x) \leq \beta$$

gerçeklenir; yani (4.2) ile verilen $\mathcal{T}_{j,v}(f)$ operatörü iyi tanımlıdır.

Buna göre aşağıdaki yaklaşım teoremini elde ederiz.

Teorem 4.1. $\mathcal{A} = \{A^v\} = (a_{jn}^v)$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu (4.1) şartını sağlasın. Herhangi bir sabit $\delta > 0$ ve negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.3)$$

koşulunun gerçekleştiğini kabul edelim; burada $B_{\delta,n}(x)$ kümesi (3.1)'de tanımlandığı gibidir. Bu durumda her $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{T}_{j,v}(f) - f \right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.4)$$

elde edilir; yani (2.1) ile verilen $\{L_n(f)\}$ dizisi X üzerinde f fonksiyonuna (düzgün olarak) \mathcal{A} -toplanabilirdir.

İspat. $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(X, [0, 1])$ verilsin. $L_n(e_0; x) = 1$ olduğundan

$$\bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) = f(x) \quad (4.5)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. O halde (2.1), (4.2) ve (4.5) ifadelerinden

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{j,v}(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v L_n(f; x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \left(\bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) - f(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \left| \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge f(x) \right| \\ &\quad + |f(x)| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 2.1 ve Lemma 2.2 uyarınca

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{j,v}(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k=0}^n |K_{n,k}(x) \wedge f(x_{n,k}) - K_{n,k}(x) \wedge f(x)| \\ &\quad + |f(x)| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)| \\ &\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

bulunur. f fonksiyonun X üzerinde düzgün sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $d(x_{n,k}, x) < \delta$ iken $|f(x_{n,k}) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. Böylece, negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{j,v}(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)| \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \notin B_{\delta,n}(x)} K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)| \\ &\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta^i} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} (d(x_{n,k}, x))^i K_{n,k}(x) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi de son eşitsizliğin her iki tarafında $x \in X$ üzerinden supremum alırsak ve (4.1) koşulunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{j,v}(f) - f\| &\leq \frac{1}{\delta^i} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right\| \\ &\quad + \beta \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) hipotezinden ve \mathcal{A} regüler olduğundan (4.4) sonucuna ulaşıılır.

Şimdi genel yaklaşım teoreminin bazı özel halleri üzerinde duracağız.

İlk olarak, Teorem 4.1'de $\mathcal{A} = \{I\}$ alınırsa doğrudan Teorem 3.1 elde edilir.

Eğer (2.8) ile verilen C_1 Cesàro metodu göz önüne alınır ve Teorem 4.1'de özel olarak $\mathcal{A} = \{C_1\} = \{[c_{jn}]\}$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1. Herhangi bir sabit $\delta > 0$ ve negatif olmayan i tamsayısı için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left\| \sum_{n=1}^j \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right\| = 0$$

gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{L_1(f) + L_2(f) + \cdots + L_j(f)}{j} - f \right\| = 0$$

olur. Diğer bir ifadeyle (2.1) ile tanımlanan $\{L_n(f)\}$ dizisi, X üzerinde f fonksiyonuna (düzgün olarak) Cesàro toplanabilir.

Teorem 4.1'in bir diğer önemli özel hali ise (2.9) ile verilen $\{\mathcal{F}^v\}$ hemen hemen yakınsaklık metodunun göz önüne alınmasıdır. Buna göre Teorem 4.1'de $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}^v\} = \{[a_{jn}^v]\}$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2. Herhangi bir sabit $\delta > 0$ ve negatif olmayan i tamsayısı için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left\| \sum_{n=v}^{v+j-1} \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün})$$

gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{L_v(f) + L_{v+1}(f) + \cdots + L_{v+j-1}(f)}{j} - f \right\| = 0 \quad (v \text{ ye göre düzgün})$$

olur. Diğer bir ifadeyle (2.1) ile tanımlanan $\{L_n(f)\}$ dizisi, X üzerinde f fonksiyonuna (düzgün olarak) hemen hemen yakınsaktır.

4.2 Toplanabilme Metoduyla Yakınsaklık Oranı

Bu bölümde, Teorem 4.1'deki yakınsaklık oranını hesaplayacağız. Sonrasında özel olarak Hölder sürekliliği fonksiyonlar için de hata tahmini verilecektir.

Bunun için öncelikle üçüncü bölümde değinilen Ψ fonksiyon ailesini göz önüne alacağız.

$\{x_{j,v}\}$ ve $\{y_j\}$ pozitif reel sayıların birer dizisi olmak üzere eğer her $j \geq j_0$ ve $v \in \mathbb{N}$ için $x_{j,v} \leq Cy_j$ olacak şekilde $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ var ise, bunu

$$x_{j,v} = O(y_j) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün})$$

ile göstereceğiz.

O halde, toplam süreci ile verilen yaklaşımın yakınsaklık oranı aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2. $\mathcal{A} = \{A^v\} = \{(a_{jn}^v)\}$ negatif olmayan regüler toplanabilme metodu (4.1) şartını sağlasın. $\{\delta_j\}$, $\{s_j\}$ ve $\{t_j\}$ pozitif reel sayıların sıfıra yakınsayan dizileri olmak üzere verilen $\xi \in \Psi$ fonksiyonu ve negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \left(\bigvee_{k \in B_{\delta_j, n}(\cdot)} (d(x_{n,k}, \cdot))^i K_{n,k}(\cdot) \right) \right\| = O(\xi(s_j)) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.6)$$

ve

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| = O(t_j) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.7)$$

koşulları gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C(X, [0, 1])$ için

$$\| \mathcal{T}_{j,v}(f) - f \| = O \left(\omega(f, \delta_j) + \frac{\xi(s_j)}{\delta_j^i} + t_j \right) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.8)$$

elde edilir.

İspat. $x \in X$, $j, v \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(X, [0, 1])$ verilsin. Teorem 4.1'in ispatında olduğu gibi,

$$\left| \mathcal{T}_{j,v}(f; x) - f(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge |f(x_{n,k}) - f(x)| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, süreklilik modülününü tanımları göz önüne alınarak

$$\left| \mathcal{T}_{j,v}(f; x) - f(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k=0}^n K_{n,k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n,k}, x)) + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right|$$

bulunur. Şimdi de, $\delta > 0$ için (3.1) ile verilen $B_{\delta,n}(x)$ kümesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{j,v}(f;x) - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} K_{n,k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n,k}, x)) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \notin B_{\delta,n}(x)} K_{n,k}(x) \wedge \omega(f, d(x_{n,k}, x)) \\ &+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. (4.1) koşulu göz önüne alınarak, verilen negatif olmayan bir i tamsayısı için

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{j,v}(f;x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\delta^i} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} (d(x_{n,k}, x))^i K_{n,k}(x) \\ &+ \omega(f, \delta) \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta^i} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v \bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} (d(x_{n,k}, x))^i K_{n,k}(x) \\ &+ \beta \omega(f, \delta) + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^v - 1 \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede $\delta = \{\delta_j\}$ alınır ve ayrıca (4.6) ve (4.7) hipotezleri kullanılırsa, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ ve $C_1, C_2 > 0$ vardır öyle ki

$$\|\mathcal{T}_{j,v}(f) - f\| \leq C_1 \frac{\xi(s_j)}{\delta_j^i} + \beta \omega(f, \delta_j) + C_2 t_j$$

eşitsizliği her $j \geq j_0$ ve $v \in \mathbb{N}$ için gerçekleşir. Bu son eşitsizlik (4.8) sonucu verir ve böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 4.2'nin bazı özel hallerini inceleyeceğiz.

Bunun için ilk olarak aşağıdakileri göz önüne alalım:

- $\mathcal{A} = \{C_1\}$ olsun.
- $\xi(t) = t$ fonksiyonunu seçelim.
- (4.6)'daki $\{\delta_j\}$ dizisi, negatif olmayan bir i tamsayısı için $\delta_j = s_j^{\frac{1}{\alpha+i}}$ şeklinde tanımlansın.

O halde, elde edilen sonuç v den bağımsız olup aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 4.3. Eğer $\mathcal{A} = \{C_1\}$ ve $\delta_j = s_j^{\frac{1}{\alpha+i}}$ için (4.6) şartı sağlanıyorsa, her $f \in Lip(\alpha)$ için

$$\left\| \frac{L_1(f) + L_2(f) + \cdots + L_j(f)}{j} - f \right\| = O\left(s_j^{\frac{\alpha}{\alpha+i}}\right) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için})$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (2.9) da verilen $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}^v\}$ metodu alınırse yakınsaklık oranı, aşağıdaki sonuçta verildiği gibi elde edilir.

Sonuç 4.4. Eğer $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}^v\}$ ve $\delta_j = s_j^{\frac{1}{\alpha+i}}$ için (4.6) koşulu sağlanıyorsa, her $f \in Lip(\alpha)$ için

$$\left\| \frac{L_v(f) + L_{v+1}(f) + \cdots + L_{v+j-1}(f)}{j} - f \right\| = O\left(s_j^{\frac{\alpha}{\alpha+i}}\right) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün})$$

bulunur.

4.3 Toplanabilmeye Verilen Yaklaşım Teoremlerinin Uygulamaları

Bu bölümde Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin uygulamaları olarak maksimum-minimum Shepard operatörleri yardımıyla, hem tek değişkenli hem de iki değişkenli fonksiyonlara toplanabilme metotları kullanılarak yaklaşım yapılacak ve yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

4.3.1 Modifiye Shepard operatörleriyle toplanabilme

Bu başlık altında, modifiye edilmiş maksimum-minimum Shepard operatörleri yardımıyla yaklaşım verilecektir. Bunun için daha önce olduğu gibi $X = [0, 1]$ alınacak ve $x_{n,k} = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) temsilci noktaları seçilecektir.

İlk olarak, $\lambda \geq 1$ için (2.3) de verilen $K_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonu kullanarak

$$M_{n,k}^\lambda(x) = \begin{cases} K_{n,k}^\lambda(x^2), & n = m^2 \text{ ise} \\ K_{n,k}^\lambda(x), & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.9)$$

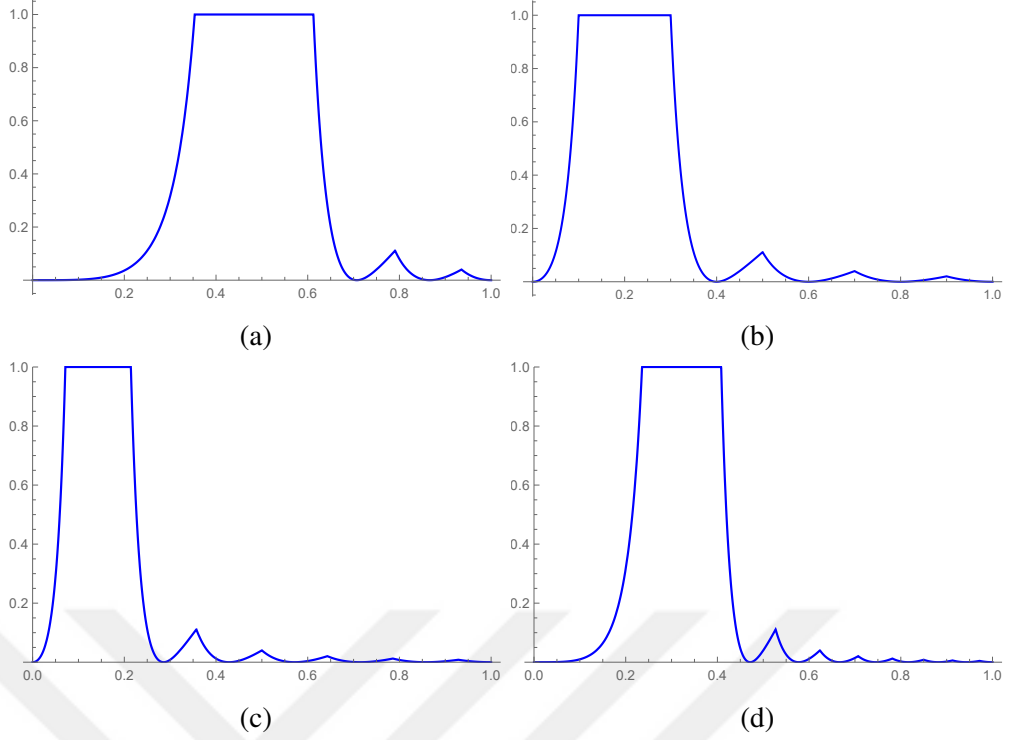
olacak şekilde yeni çekirdek fonksiyonunu tanımlayalım. Farklı n ve k değerleri ve $\lambda = 2$ için bu çekirdek fonksiyonu Şekil 4.1'de gösterilmektedir.

Bu yeni çekirdek fonksiyonları yardımıyla (2.1) formuna sahip aşağıdaki maksimum-minimum operatörlerini göz önüne alalım:

$$L_n^\lambda(f; x) = \bigvee_{k=0}^n M_{n,k}^\lambda(x) \wedge f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (4.10)$$

Burada her $\lambda \geq 1$, $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $L_n^\lambda(e_0; x) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca $\mathcal{A} = \{C_1\}$ Cesàro metodu alındığında

$$\mathcal{F}_j^\lambda(f; x) = \frac{L_1^\lambda(f; x) + L_2^\lambda(f; x) + \cdots + L_j^\lambda(f; x)}{j} \quad (4.11)$$



Şekil 4.1: (4.9) ile verilen $M_{n,k}^\lambda$ çekirdek fonksiyonlarının grafikleri ((a) $M_{4,1}^2$, (b) $M_{5,1}^2$, (c) $M_{7,1}^2$, (d) $M_{9,1}^2$)

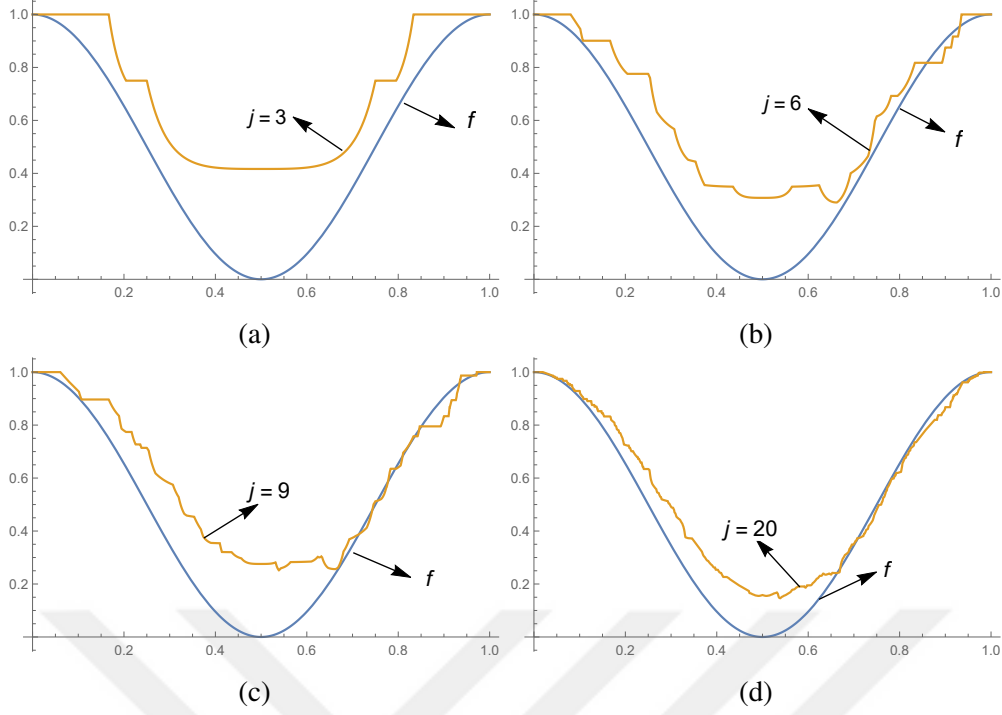
operatörünü tanımlayalım.

Burada $\lambda \geq 1$ için $\{\mathcal{T}_j^\lambda(f)\}$ dizisi ile $f \in C([0,1], [0,1])$ fonksiyonuna yaklaşım yapabilmesi için Teorem 4.1'in (4.3) koşulunun gerçekleştiğinin gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için öncelikle her $x \in [0,1]$, $\lambda \geq 1$, $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için gerçekleşen (3.15) eşitsizliği dikkate alırsak, (4.9), (4.10), (4.11) ifadelerini kullanarak, verilen herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j \left(\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| M_{n,k}^\lambda(x) \right) \\
&= \frac{1}{j} \sum_{n \in \{1, \dots, j\} : n=m^2} \left(\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n,k}^\lambda(x^2) \right) \\
&+ \frac{1}{j} \sum_{n \in \{1, \dots, j\} : n \neq m^2} \left(\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| K_{n,k}^\lambda(x) \right) \\
&\leq \frac{\sqrt{j}}{j} + \frac{1}{2j} \sum_{n=1}^j \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Son eşitsizlik yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{1}{j} \sum_{n=1}^j \left(\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| M_{n,k}^\lambda(x) \right) \leq \frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1 + \ln j}{2j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty \text{ için}) \quad (4.12)$$



Şekil 4.2: $\lambda = 3$ ve $j = 3, 6, 9, 20$ için (4.13) ile verilen f fonksiyonuna (4.11)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(f)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 3$ ve $j = 3$, (b) $\lambda = 3$ ve $j = 6$, (c) $\lambda = 3$ ve $j = 9$, (d) $\lambda = 3$ ve $j = 20$)

bulunur ve bu da bize (4.3) koşulunu verir. Dolayısıyla Teorem 4.1'den her $f \in C([0, 1], [0, 1])$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{T}_j^\lambda(f) - f \right\| = 0$$

olur. Başka bir ifadeyle (4.10) ile verilen $\{L_n^\lambda(f)\}$ dizisi $[0, 1]$ üzerinde f ye (düzgün olarak) Cesàro toplanabilir. Bu Cesàro yaklaşımı, $\lambda = 3$ ve $j = 3, 6, 9, 20$ değerleri ve

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} \quad (4.13)$$

fonksiyonu için Şekil 4.2'de gösterilmektedir.

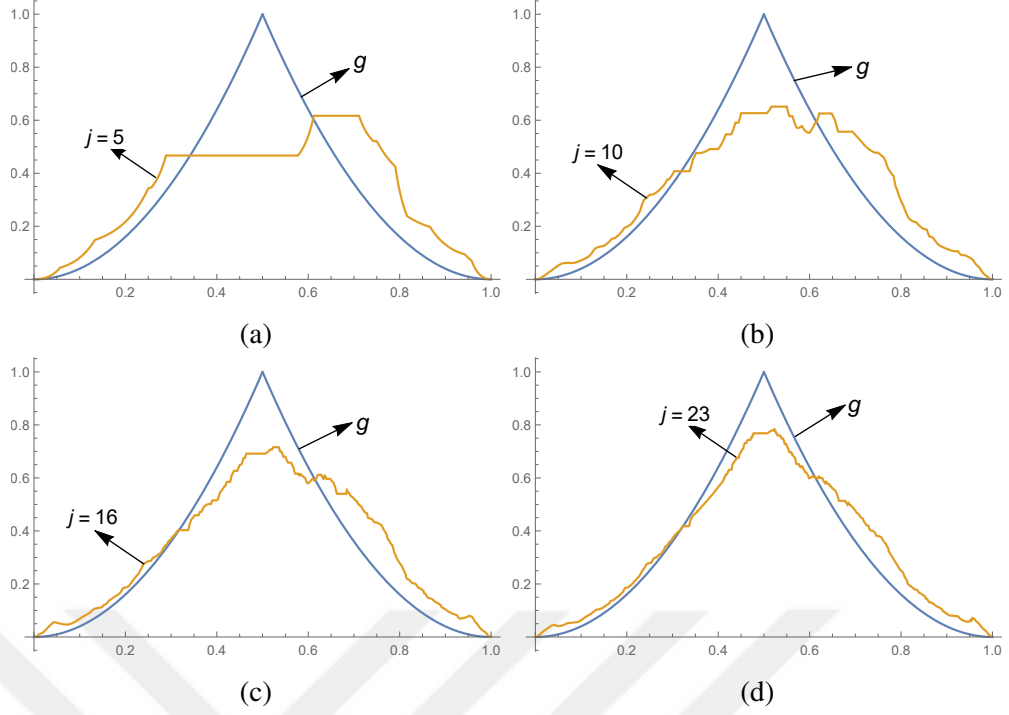
Buna rağmen (2.2), (4.9) ve (4.10) ifadeleri dikkate alındığında, her $x \in (0, 1)$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_{m^2}^\lambda(f; x) = f(x^2) \neq f(x)$$

olup $\{L_n^\lambda(f)\}$ dizisi ile f fonksiyonuna klasik anlamda yaklaşım yapılamaz.

Ayrıca (4.11)'deki operatörlerle sözde-konkav fonksiyonlara yaklaşım da mümkündür. Bunun için (3.17)'de verilen sözde-konkav g fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $[0, 1]$ üzerinde her $\lambda \geq 1$ için $Sh_n^\lambda(g) \Rightarrow g$ olduğu bir önceki bölümde gösterilmişti. Burada $\{L_n^\lambda(g)\}$ dizisinin tanımından her $x \in (0, 1)$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_{m^2}^\lambda(g; x) = \lim_{m \rightarrow \infty} Sh_{m^2}^\lambda(g; x^2) = g(x^2) \neq g(x)$$



Şekil 4.3: $\lambda = 2$ ve $j = 5, 10, 16, 23$ değerleri için (3.17) ile verilen sözde-konkav g fonksiyonuna (4.11)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(g)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 2$ ve $j = 5$, (b) $\lambda = 2$ ve $j = 10$, (c) $\lambda = 2$ ve $j = 16$, (d) $\lambda = 2$ ve $j = 23$)

olduğundan g fonksiyonuna klasik yaklaşım yapılamaz. Fakat Cesàro toplanabilme metodu sayesinde Teorem 4.1'den

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{T}_j^\lambda(g) - g \right\| = 0$$

elde edilir. Bu Cesàro yaklaşım Şekil 4.3'te $\lambda = 2$ ve $j = 5, 10, 16, 23$ değerleri için verilmektedir.

Bu uygulamada elde edilen tüm sonuçlar Cesàro metodu yerine $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}^v\}$ alındığında da geçerli olur. Bu durumda (4.11) operatörü

$$\mathcal{T}_{j,v}^\lambda(f;x) = \frac{L_v^\lambda(f;x) + L_{v+1}^\lambda(f;x) + \dots + L_{v+j-1}^\lambda(f;x)}{j} \quad (4.14)$$

eşitliği ile verilen operatöre dönüşür.

Son olarak, $\delta > 0$ için, (3.1) ile verilen $B_{\delta,n}(x)$ kümesi dikkate alınarak (4.12)'de olduğu gibi

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} \sum_{n=v}^{v+j-1} \left(\bigvee_{k \in B_{\delta,n}(x)} \left| x - \frac{k}{n} \right| M_{n,k}^\lambda(x) \right) &\leq \frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{\frac{1}{v} + \ln \left(\frac{v+j-1}{v} \right)}{2j} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1 + \ln j}{2j} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $i = 1$ ve $s_j = \frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1+\ln j}{2j}$ alınırsa, (4.14) ile tanımlanan $\mathcal{T}_{j,v}^\lambda$ operatörleri için Sonuç 4.4'deki tüm şartlar sağlanır. Böylece her $f \in Lip(\alpha)$ için

$$\left\| \frac{L_v^\lambda(f) + L_{v+1}^\lambda(f) + \cdots + L_{v+j-1}^\lambda(f)}{j} - f \right\| = O\left(s_j^{\frac{\alpha}{\alpha+i}}\right) \quad (j \rightarrow \infty \text{ için, } v \text{ ye göre düzgün})$$

gerçeklenir.

4.3.2 İki değişkenli modifiye Shepard operatörleriyle toplanabilme

Bu kısımda iki değişkenli fonksiyonlara, toplanabilme metodu kullanarak uygun operatörlerle yaklaşım yapılacaktır. Bunun için öncelikle aşağıdaki durumları dikkate alacağız.

- $X = [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere kartezyen düzlemdeki Öklid metriğini alalım.
- Temsilci noktaları, her $n \in \mathbb{N}$ ve $k, m = 0, 1, \dots, n$ için $(x_{n,k}, y_{n,m}) = \left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right)$ olarak seçelim.
- Verilen $\lambda \geq 1$ için $[0, 1]^2$ üzerinde (3.18) ile tanımlanan $K_{n,k,m}^\lambda(x, y)$ çekirdek fonksiyonunu kullanalım.
- (3.19) ile tanımlanan iki değişkenli maksimum-minimum Shepard operatörünü göz önüne alalım.

Şimdi $M_{n,k,m}^\lambda(x, y)$ çekirdek fonksiyonunu

$$M_{n,k,m}^\lambda(x, y) = \begin{cases} K_{n,k,m}^\lambda(x, y), & n \text{ tek ise} \\ 1, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.15)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (2.1) formuna sahip aşağıdaki operatörleri elde ederiz:

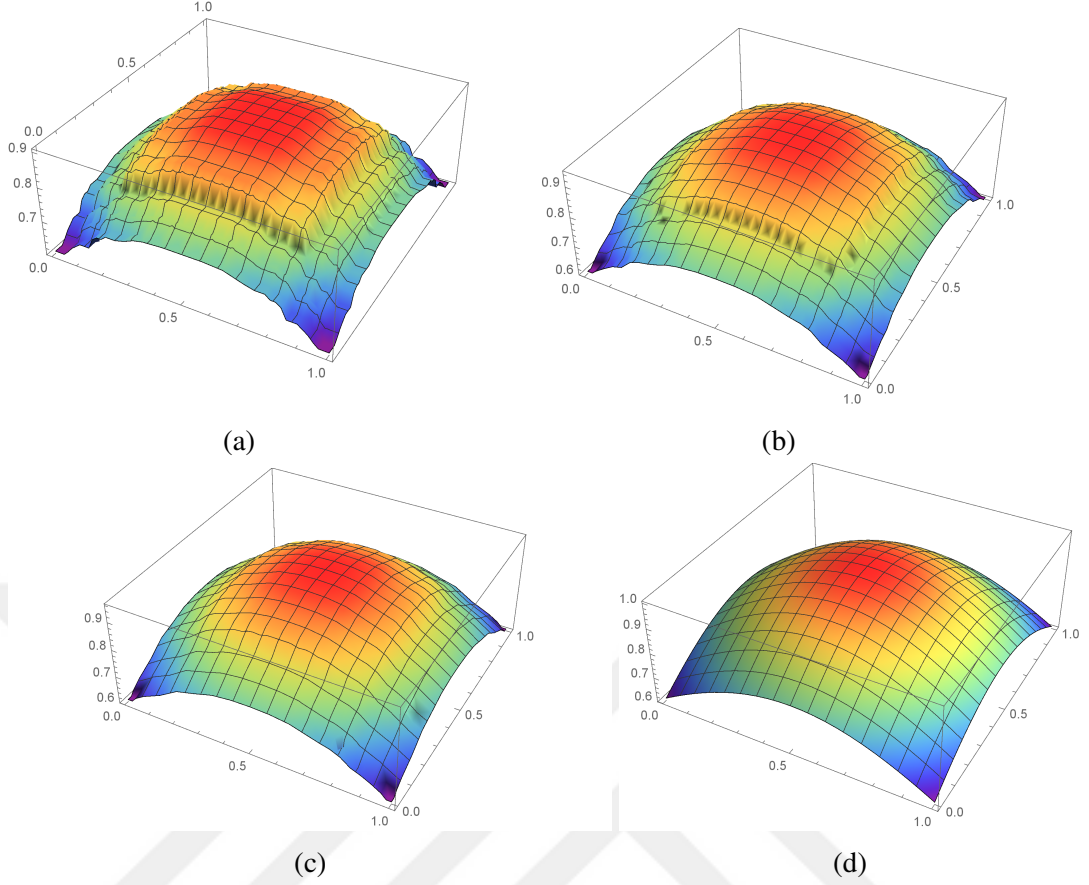
$$\begin{aligned} L_n^\lambda(f; x, y) &= \bigvee_{k,m=0}^n M_{n,k,m}^\lambda(x, y) \wedge f\left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) \\ &= \begin{cases} Sh_n^\lambda(f; x, y), & n \text{ tek ise} \\ \bigvee_{k,m=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) & n \text{ çift ise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ayrıca

$$a_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & n = 1, 3, \dots, 2j-1 \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (4.17)$$

ile tanımlanan $\mathcal{A} = \{a_{jn}\}$ Cesàro tipindeki toplanabilme metodunu göz önüne alalım ve bunun yardımıyla (4.16) operatörünü

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j^\lambda(f; x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} L_n^\lambda(f; x, y) \\ &= \frac{L_1^\lambda(f; x, y) + L_3^\lambda(f; x, y) + \cdots + L_{2j-1}^\lambda(f; x, y)}{j} \end{aligned} \quad (4.18)$$



Şekil 4.4: $\lambda = 3$ ve $j = 5, 9, 12$ değerleri için (4.19) ile verilen h fonksiyonuna (4.18)'de tanımlanan $\mathcal{T}_j^\lambda(h)$ operatörleri ile yaklaşım ((a) $\lambda = 3$ ve $j = 5$, (b) $\lambda = 3$ ve $j = 9$, (c) $\lambda = 3$ ve $j = 12$, (d) h)

şeklinde modifiye edelim.

Burada, eğer $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $(x, y) \in [0, 1]^2$ için (3.21) ve (3.22) kümeleri kullanılır ve \mathcal{A} metodunun regülerliğini de dikkate alırsak, Lemma 3.1'den $[0, 1]^2$ üzerinde

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \left(\bigvee_{(k,m) \in B_\delta(x,y)} M_{n,k,m}^\lambda(x,y) \right) \\ &= \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j \left(\bigvee_{(k,m) \in B_\delta(x,y)} K_{2n-1,k,m}^\lambda(x,y) \right) \Rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Teorem 4.1'in (4.3) koşulu $i = 0$ için sağlanır. Dolayısıyla, her $f \in C([0, 1]^2, [0, 1])$ için $[0, 1]^2$ üzerinde

$$\mathcal{T}_j^\lambda(f; x, y) \Rightarrow f(x, y)$$

yaklaşımı gerçekleşir. Başka bir ifadeyle (4.16)'da verilen $\{L_n^\lambda(f; x, y)\}$ dizisi $f(x, y)$ fonksiyonuna (4.17) anlamında düzgün \mathcal{A} -toplantıdır. Bu toplam süreci Şekil 4.4'te

$$h(x, y) = e^{-((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)} \quad (4.19)$$

fonksiyonu ve $\lambda = 3$ ve $j = 5, 9, 12$ değerleri için gösterilmektedir.

4.3.3 Toplanabilmeye ilişkin sonuçlar

Bölüm 3'te $Sh_n^\lambda(f; x)$ maksimum-minimum Shepard operatörlerinin tanımındaki f fonksiyonun tanım kümesi herhangi bir $[a, b]$ kompakt aralığına genişletildiğinde temsilci noktaların $x_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{n} \in [a, b]$ ($k = 0, 1, \dots, n$) şekilde alındığını göstermiştik. Ayrıca buna karşılık gelen (3.30)'daki $K_{n,k}^{[a,b],\lambda}$ çekirdek fonksiyonu kullanılarak (3.29) ile verilen maksimum-minimum Shepard operatörü tanımlanmıştı. Şimdi aynı çekirdek fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde modifiye edelim:

$$M_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x) := \begin{cases} K_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x^2), & n = m^2 \text{ ise} \\ K_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x), & n \neq m^2 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda yeni operatörlerimiz

$$L_n^{[a,b],\lambda}(f; x) = \bigvee_{k=0}^n M_{n,k}^{[a,b],\lambda}(x) \wedge f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

olup bunların özel matris metotlarına göre karşılıkları da sırasıyla

$$\mathcal{F}_j^{[a,b],\lambda}(f; x) = \frac{L_1^{[a,b],\lambda}(f; x) + L_2^{[a,b],\lambda}(f; x) + \dots + L_j^{[a,b],\lambda}(f; x)}{j}$$

ve

$$\mathcal{F}_{j,v}^{[a,b],\lambda}(f; x) = \frac{L_v^{[a,b],\lambda}(f; x) + L_{v+1}^{[a,b],\lambda}(f; x) + \dots + L_{v+j-1}^{[a,b],\lambda}(f; x)}{j}$$

ile verilir. Yani yukarıda elde edilen tüm yaklaşım sonuçları bu yeni operatörler için de geçerlidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, (X, d) kompakt metrik uzay olmak üzere, herhangi $f : X \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonuna genel bir forma sahip olan maksimum-minimum operatörleriyle yaklaşım sonuçları elde edilmiştir. Daha sonrasında verilen çeşitli uygulamalar ile elde edilen sonuçlar desteklenmiştir. Klasik yaklaşımın gerçekleşmediği durumlara cevaplar bulunması amacıyla negatif olmayan regüler toplanabilme metotları göz önüne alınmıştır. Böylece klasik yaklaşımdan daha genel ve güçlü sonuçlara ulaşılmıştır. Aritmetik ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık gibi önemli sonuçlar üzerinde durulmuştur. Yapılan bu çalışma ile yaklaşımlar teorisinde az çalışılmış olan lineer olmayan maksimum-minimum operatörleriyle sürekli bir fonksiyona yaklaşım, hem klasik yakınsaklık hem de toplam süreci yardımıyla çalışılmıştır.

İstatiksel yakınsaklık gibi daha farklı yakınsaklık metotları yardımıyla burada yapılan çalışmalar ele alınabilir. Başka bir araştırma problemi olarak da lineer olmayan operatörler ile sürekli olmayan fonksiyonlara yaklaşımın incelenmesi önerilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Weierstrass, K.** (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2, 633-639.
- [2] **Bernstein, S.** (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée. *Comm. Kharkov Math. Soc.*, 13, 1-2.
- [3] **Korovkin, P. P.** (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- [4] **Altomare, F., Campiti, M.** (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- [5] **Mantellini, I., Vinti, G.** (1996). Modular estimates for nonlinear integral operators and applications in fractional calculus. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 17(1-2), 143-165.
- [6] **Bardaro, C., Vinti, G.** (1998). Uniform convergence and rate of approximation for a nonlinear version of the generalized sampling operator. *Results Math.* 34(3-4), 224-240.
- [7] **Vinti, G.** (2001). A general approximation result for nonlinear integral operators and applications to signal processing. *Appl. Anal.* 79(1-2), 217-238.
- [8] **Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G.** (2000). On nonlinear integro-differential operators in generalized Orlicz-Sobolev spaces. *J. Approx. Theory* 105(2), 238-251.
- [9] **Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G.** (2008). *Nonlinear Integral Operators and Applications*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 9, Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- [10] **Angeloni, L., Vinti, G.** (2006). Convergence in variation and rate of approximation for nonlinear integral operators of convolution type. *Results Math.* 49(1-2), 1-23.
- [11] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2013). Approximation by nonlinear multivariate sampling Kantorovich type operators and applications to image processing. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 34(8), 819-844.

- [12] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2013). Order of approximation for nonlinear sampling Kantorovich operators in Orlicz spaces. *Comment. Math.* 53(2), 271-292.
- [13] **Bede, B., Nobuhara, H., Dankova, M., Di Nola, A.** (2008). Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy Sets Syst.*, 159(7), 804-820.
- [14] **Coroianu, L., Gal, S. G., Bede, B.** (2014). Approximation of fuzzy numbers by max-product Bernstein operators. *Fuzzy Sets Syst.* 257, 41-66.
- [15] **Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G.** (2016). *Approximation by Max-Product type Operators*. Heidelberg: Springer.
- [16] **Coroianu, L., Costarelli, D., Gal, S. G., Vinti, G.** (2019). The max-product generalized sampling operators: convergence and quantitative estimates. *Appl. Math. Comput.* 355, 173-183.
- [17] **Coroianu, L., Gal, S. G.** (2014). Saturation and inverse results for the Bernstein max-product operator. *Period. Math. Hungar.* 69(2), 126-133.
- [18] **Costarelli, D., Sambucini, A. R.** (2018). Approximation results in Orlicz spaces for sequences of Kantorovich max-product neural network operators. *Results Math.* 73(1), 15 pp.
- [19] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2016). Max-product neural network and quasi-interpolation operators activated by sigmoidal functions. *J. Approx. Theory*, 209, 1-22.
- [20] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2018). Estimates for the neural network operators of the max-product type with continuous and p -integrable functions. *Results Math.* 73(1), 12.
- [21] **Holhoş, A.** (2018). Weighted approximation of functions by Favard operators of max-product type. *Period. Math. Hungar.* 77(2), 340-346.
- [22] **Holhoş, A.** (2018). Weighted Approximation of Functions by Meyer-König and Zeller Operators of Max-Product Type. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 39(6), 689-703.
- [23] **Duman, O.** (2010). Statistical convergence of max-product approximating operators. *Turkish J. Math.*, 34(4), 501-514.
- [24] **Shen, R. H., Wei, L. Y.** (2019). Convexity of functions produced by Bernstein operators of max-product kind. *Results Math.*, 74(3), 92.
- [25] **Fejér, L.** (1900). Sur les fonctions intégrables et bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 984-987.
- [26] **Hardy, G. H.** (1949). *Divergent Series*. Oxford University Press, London.
- [27] **Boos, J.** (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, Oxford.

- [28] **Zygmund, A.** (1959). *Trigonometric Series. Vol. I, II.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge.
- [29] **Leviatan, D.** (1972). A representation theorem and approximation operators arising from inequalities involving differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 168, 85-99.
- [30] **Pethe, S. P., Jain, G. C.** (1972). Approximation of functions by a Bernstein-type operator. *Canad. Math. Bull.* 15, 551-557.
- [31] **Junggeburth, J., Nessel, R. J.** (1975). Approximation by families of multipliers for (C, α) -bounded Fourier expansions in locally convex spaces. I. Order-preserving operators. *J. Approx. Theory* 13, 167-177.
- [32] **Mohapatra, R. N.** (1977). Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators. *J. Approx. Theory* 20(3), 239-250.
- [33] **Swetits, J. J.** (1979). On summability and positive linear operators. *J. Approx. Theory*, 25(2), 186-188.
- [34] **Kuttner, B.** (1984). On nonuniqueness of the order of saturation. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 96 (1), 115-117.
- [35] **Nishishiraho, T.** (1995). Approximation processes with respect to positive multiplication operators. Concrete analysis. *Comput. Math. Appl.* 30(3-6), 389-408.
- [36] **Nishishiraho, T.** (2008). Approximation processes of convolution type operators in Banach spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 9(2), 215-238.
- [37] **Weisz, F.** (1997). Cesàro summability of two-parameter Walsh-Fourier series. *J. Approx. Theory* 88(2), 168-192.
- [38] **Weisz, F.** (2014). Pointwise convergence in Pringsheim's sense of the summability of Fourier transforms on Wiener amalgam spaces. *Monatsh. Math.* 175(1), 143-160.
- [39] **Xu, Y.** (1998). Summability of Fourier orthogonal series for Jacobi weight functions on the simplex in R^d . *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(10), 3027-3036.
- [40] **Brown, G. Dai, F., Móricz, F.** (2004). Strong approximation by Fourier-Laplace series on the unit sphere S_{n-1} . *Acta Math. Hungar.* 102(1-2), 91-115.
- [41] **Simon, P.** (2004). (C, α) summability of Walsh-Kaczmarz-Fourier series. *J. Approx. Theory* 127(1), 39-60.
- [42] **Anastassiou, G. A., Duman, O.** (2011). *Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory* (Vol. 14). Berlin: Springer.

- [43] **Bell, H. T.** (1973). Order summability and almost convergence. *Proc. Amer. Math. Soc.* 38(3), 548-552.
- [44] **Lorentz, G. G.** (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, 80, 167-190.
- [45] **Atlihan, Ö. G., Orhan, C.** (2007). Matrix summability and positive linear operators. *Positivity*, 11(3), 387-398.
- [46] **Atlihan, Ö. G., Orhan, C.** (2008). Summation process of positive linear operators. *Comput. Math. Appl.* 56(5), 1188-1195.
- [47] **Atlihan, Ö. G., Gul Ince, H., Orhan, C.** (2009). Some variations of the Bohman-Korovkin theorem. *Math. Comput. Modelling*, 50(7-8), 1205-1210.
- [48] **Sakaoğlu, I., Orhan, C.** (2013). Strong summation process in L_p spaces. *Nonlinear Anal.* 86, 89-94.
- [49] **Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P.** (2016). \mathcal{A} -Summability of sequences of linear conservative operators. In *Mathematical Analysis, Approximation Theory and Their Applications* (pp. 463-482). Springer, Cham.
- [50] **Gökçer, T. Y., Duman, O.** (2016). *Summation Process by Max-Product Operators*. In *Computational Analysis* (pp. 59-67). Springer, Cham.
- [51] **Aslan, İ., Duman, O.** (2016). A summability process on Baskakov-type approximation. *Period. Math. Hungar.* 72(2), 186-199.
- [52] **Aslan, İ., Duman, O.** (2019). Summability on Mellin-type nonlinear integral operators. *Integral Transforms Spec. Funct.* 30(6), 492-511.
- [53] **Aslan, İ., Duman, O.** (2020). Approximation by nonlinear integral operators via summability process. *Math. Nachr.*, 293(3), 430-448.
- [54] **Turkun, C., Duman, O.** (2020). Modified neural network operators and their convergence properties with summability methods. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 114(3), paper no. 132, 18 pp.
- [55] **Anastassiou, G. A., Gal, S. G.** (2000). *Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*. Springer Science and Business Media.
- [56] **Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G.** (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Favard-Szasz-Mirakjan operator of max-product kind. *Filomat*, 24(3), 55-72.
- [57] **Popoviciu, T.** (1938). Deux remarques sur les fonctions convexes. *Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine*, 220, 45-49.
- [58] **Gal, S. G.** (2008). *Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials*. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

- [59] **Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G.** (2009). Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind. *Internat. J. Math. Math. Sci.*. Article ID 590589, 26 pp.





EKLER

EK 1: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim	İngilizce Terim
Aritmetik Ortalama Yakınsaklık	Arithmetic Mean Convergence
Çekirdek Fonksiyonu	Kernel Function
Düzenli Yakınsaklık	Uniform Convergence
Hemen Hemen Yakınsaklık	Almost Convergence
Klasik Yakınsaklık	Classical Convergence
Kompakt Küme	Compact Set
Maksimum-Minimum Operatörü	Max-Min Operator
Metrik Uzay	Metric Space
Regüler Toplanabilme Metodu	Regular Summability Method
Sözde-Konkav Fonksiyon	Quasi-Concave Function
Temsilci Noktalar	Sample Points
Yaklaşımlar Teorisi	Approximation Theory
Yakınsaklık Oranı	Rate of Convergence
Zayıf-Lineer Operatör	Pseudo-Linear Operator



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Türkan Yeliz Gökçer
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.01.1991, Samsun
E-posta : ylzgkr@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2016, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
- **Doktora** : 2020, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2014-2016	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2016-2020	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Doktora Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., On the approximation by max-min and max-product operators, "International Conference on Mathematics and Mathematics Education-ICMME 2017", Harran University, Şanlıurfa, Turkey, May 11-13, 2017.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., Some convergence methods on pseudo linear operators, "The International Society for Analysis, its Applications and Computation-ISAAC 2017", Linnaeus University, Vaxjo, Sweden, August 14-18, 2017.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., Some convergence methods on max-min operators, "The 7th International Conference on Pure and Applied Mathematics-ICPAM 2018", Eötvös Lorand University, Budapest, Hungary, July 10-13, 2018.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., General approach for approximation by max-min operators, "The 8th International Conference on Pure and Applied Mathematics-ICPAM 2019", Brussels, Belgium, July 22-25, 2019.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., Approximation by max-min operators: A general theory and its applications. Fuzzy Sets and Systems, 394, 146-161, 2020.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., Summation process by max-product operators, "3rd International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory-AMAT 2015", Ankara, Turkey, May 28-31, 2015.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O., Summation Process in Approximation by Nonlinear Operators, "Emerging Trends in Applied Mathematics and Mechanics ETAMM 2016", Perpignan, France, May 30-June 03, 2016.
- **Gökçer, T. Y.,** Duman, O. Summation Process by Max-Product Operators. In Computational Analysis (pp. 59-67). Springer, Cham. 2016.