TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE YAKINSAKLIK METOTLARI

DOKTORA TEZİ

Ceylan YALÇIN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

TEMMUZ 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 122117003 numaralı Doktora öğrencisi **Ceylan YALÇIN** 'nın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE YAKINSAKLIK METOTLARI"** başlıklı tezi **13.07.2017** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Oktay DUMAN** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Nurhayat İSPİR (Başkan)** Gazi Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Cihan ORHAN Ankara Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Ceylan YALÇIN

ÖZET

Doktora Tezi

ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE YAKINSAKLIK METOTLARI

Ceylan YALÇIN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Tarih: TEMMUZ 2017

Bu çalışmada, uygun zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli Cesàro yakınsaklık, kuvvetli lacunary Cesàro yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bunlarla ilgili çeşitli karakterizasyon ve içerme teoremleri elde edilmiştir. Üstelik fonksiyonlara ve de tanımlı olduğu zaman skalalarına çeşitli koşullar ekleyerek bazı Tauber tipi sonuçlara ulaşılmıştır. Bu sayede toplanabilme teorisinde klasik sayı dizileri için iyi bilinen Hardy'nin Tauber teoremi geliştirilmiştir. Ayrıca elde edilen teoremlerin bazı uygulamalarına ve özel hallerine değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalaları, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Tauber tipi teoremler

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

CONVERGENCE METHODS ON TİME SCALES

Ceylan YALÇIN

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathmatics

Supervisor: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Date: July 2017

In this study, by using appropriate time scales, we define some new convergence concepts, such as statistical convergence, lacunary statistical convergence, strongly Cesàro convergence, strongly lacunary Cesàro convergence and obtain some characterizations and inclusion theorems between them. Also, under some suitable conditions on functions and their domains on time scales, we prove some Tauberian theorems. Then we improve the Hardy's Tauberian theorem for the classical number sequences which is well-known in the summability theory. Furthermore, we display some applications and special cases of our results.

Keywords: Time scales, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Cesàro summability, Tauberian theorems

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan eşim Adnan'a, oğlum Deniz'e, sevgili anneme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Sıçrama fonksiyonu
f^{Δ}	Bir f fonksiyonunun Δ-türevi (Hilger türevi)
$\Im_1$	$[a,b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$ şeklindeki tüm aralıkların ailesi
μ_{Δ}	$\Im_1$ ailesi üzerinde tanımlanan m_1 küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$st\,(\mathbb{T}) - \lim\limits_{t\to\infty} f\,(t)$	f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki istatistiksel limiti
$st_{\theta}\,(\mathbb{T}) - \lim\limits_{t\to\infty} f\,(t)$	f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel limiti
$S_{\mathbb{T}}$	Zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$S_{\theta-\mathbb{T}}$	Zaman skalası üzerinde lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$N_{\theta-\mathbb{T}}$	Zaman skalası üzerinde kuvvetli Cesáro toplanabilir fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Kesikli ve sürekli durumlar bir çok gerçek yaşam probleminde aynı anda ortaya çıkmaktadır. Zaman skalası kavramı bu iki durumu aynı anda incelemek düşüncesiyle ilk olarak 1988 yılında ortaya çıkmıştır [13]. Zaman skalası analizi kesikli ve sürekli yapıyı birleştirdiği gibi aradaki boşluğu da doldurmaktadır. Bu nedenle matematiğin bir çok alt dalında kullanılmaktadır. Buna rağmen 2012 yılındaki yüksek lisans tezimize kadar zaman skalası analizinin toplanabilme teorisinde herhangi bir karşılığı bulunmamaktaydı. Oysaki diğer teorilerde olduğu gibi toplanabilme teorisinde de kesikli ve sürekli durumlarla sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu teoriyi uygun bir zaman skalası üzerinde birleştirmek ve bu sayede yeni yakınsaklık metotları inşa edebilmek için lisansüstü çalışmalarımızı bu konuda yoğunlaştırdık.

Bu doktora tezi önceki çalışmalarımızın devamı niteliğindedir. Altı bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalalarının temel tanım ve teoremleriyle birlikte zaman skalalarında istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılmıştır. Elde ettiğimiz orjinal souçlar üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sunulmuştur. Üçüncü bölümde, zaman skalalarında istatistiksel yakınsaklık kavramı için bir Tauber koşulu elde edilmiş ve çeşitli uygulamaları üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde, toplanabilme teoerisine ait bir diğer kavram olan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı zaman skalaları üzerinde inşa edilmiş ve bunun istatistiksel yakınsaklık metodu ile olan ilişkisi incelenmiştir. Beşinci bölümde Hardy'nin sayı dizileri için incelemiş olduğu ünlü Tauber koşulu uygun zaman skalalarına genişletilmiş ve pek çok özel hali irdelenmiştir. Tezin son bölümü ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak zaman skalalarının bazı önemli tanım ve teoremlerini hatırlatacağız.

2.1 Zaman Skalası Analizi

Bir zaman skalası, reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi alt kümesidir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir [13]. Bu tanımdan açıkça anlaşılabileceği üzere $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$, Cantor kümesi ve $q > 1$ için $q^{\mathbb{N}}$ gibi kümeler zaman skalasına birer örnektir. Yine benzer düşünce ile $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ve $(0,1)$ kümelerinin birer zaman skalası örneği olmadığı açıktır.

Zaman skalaları üzerinde ileri sıçrama operatörü $\sigma(t)$ ve geri sıçrama operatörü $\rho(t)$ şeklinde gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \tag{2.1}$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{2.2}$$

(bkz. [3]).

Tanımlanan bu operatörler yardımıyla zaman skalasındaki her bir noktanın cinsini belirleyebiliriz. $t < \sigma(t)$ ise t sağa saçılmış bir nokta, $t = \sigma(t)$ ise t sağa yoğun bir nokta, $t < \rho(t)$ ise t sola saçılmış bir nokta, $t = \rho(t)$ ise t sola yoğun bir nokta, $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise t izole nokta, $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise t yoğun bir nokta olarak adlandırılır.

σ ve ρ dışında zaman skalalarında bir diğer önemli fonksiyon ise μ sıçrama fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty), \ \mu(t) = \sigma(t) - t. \tag{2.3}$$

2.2 Zaman Skalasında Δ-Türev

Reelde bildiğimiz klasik türev tanımı ile tam sayılarda verilen ileri fark operatörü bir zaman skalası üzerinde $\Delta-$türev adı verilen bir kavrama karşılık gelmektedir. Şimdi bu türev kavramının tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.2.1. *$f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ ve her $s\in U$ $=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ $(\delta>0)$ için*

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right|\leqslant\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu varsa $f^{\Delta}(t)$ sayısına f in t noktasındaki "delta (Δ) türevi (Hilger türevi)" denir (bkz. [3]).

Tanım 2.2.1'de bahsedilen $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\mathbb{T}^{\kappa}=\begin{cases}\mathbb{T}\diagdown(\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}], & \sup\mathbb{T}<\infty\\ \mathbb{T}, & \sup\mathbb{T}=\infty\end{cases}$$

Örnek 2.2.1. *Δ-türev tanımını göz önüne alarak aşağıdaki özel halleri inceleyelim*

- *$\mathbb{T}=\mathbb{R}$ olsun. Her $t\in\mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır. Δ-türevin özelliklerinden (Bakınız [3]) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{R}$ noktasında Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart*

  $$f^{\Delta}(t)=f^{'}(t)$$

  olmasıdır.

- *$\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ olsun. Her $t\in\mathbb{Z}$ noktası izoledir. Δ-türevin tanımı gereğince $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{Z}$ noktasındaki Δ-türevi*

  $$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

  şeklindedir; burada $\Delta f(t)$ ileri fark operatörüdür.

- *$q>1$ olmak üzere $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$ olsun. Yine her $t\in q^{\mathbb{N}}$ noktasının izole noktadır. O* *halde $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in q^{\mathbb{N}}$ noktasındaki Δ-türevi*

$$f^{\Delta}\left(q^{n}\right)=\frac{f\left(\sigma\left(q^{n}\right)\right)-f\left(q^{n}\right)}{\sigma\left(q^{n}\right)-q^{n}}=\frac{f\left(q^{n+1}\right)-f\left(q^{n}\right)}{q^{n+1}-q^{n}}=\frac{f\left(q^{n+1}\right)-f\left(q^{n}\right)}{q^{n}\left(q-1\right)}$$

şeklinde elde edilir.

2.3 Zaman Skalalarında μ_{Δ} Ölçüsü

Bu bölümde, zaman skalaları üzerinde Guseinov [11] tarafından tanımlanan μ_{Δ} Lebesgue-Δ ölçüsü kavramına ihtiyaç duyacağız ve onun tanımından ve özelliklerinden bahsedeceğiz. $\mathbb{T}$ bir keyfi bir zaman skalası olmak üzere daha öncede gösterildiği gibi σ ileri sıçrama operatörü ve ρ geri sıçrama operatörü olsun.

$$[a,b)_{\mathbb{T}}=\{t\in\mathbb{T}:a\leq t<b\}$$

şeklinde tanımlanan tüm aralıkların ailesini $\Im_1$ ile gösterelim. Burada belirtelim ki $[a,a)_{\mathbb{T}}$ aralığı boş kümeyi ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}m_1 \quad &: \quad \Im_1\to[0,+\infty]\\ &\qquad [a,b)_{\mathbb{T}}\to m_1\left([a,b)_{\mathbb{T}}\right)=b-a\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan m_1 küme fonksiyonu $\Im_1$ ailesi üzerinde sayılabilir toplamsal bir ölçüdür. m_1 küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi μ_{Δ} ile gösterilir ve $\mathbb{T}$ üzerinde Lebesgue-Δ ölçüsü olarak adlandırılır [11].

Şimdi m_1 in μ_{Δ} Carathéodary genişlemesinin nasıl elde edildiğini kısaca ifade edelim. İlk olarak $(\Im_1,m_1)$ ikilisi yardımıyla $\mathbb{T}$ nin tüm alt kümeleri için bir m_1^* dış ölçüsü tanımlanır. Burada m_1^* dış ölçüsü, reel analizde bilinen λ^* Lebesgue dış ölçüsüne benzer bir süreç ile aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt kümesi E olsun. $j=1,2,...$ için V_j'ler $\Im_1$'in elemanı olan aralıklar olmak üzere, bu aralıkların sonlu veya sayılabilir birleşimleri yardımıyla

$$E\subset\bigcup_j V_j$$

olacak şekilde E kümesi örtülür. $P(\mathbb{T})$ kümesi $\mathbb{T}$ nin kuvvet kümesini göstermek üzere

$$\begin{array}{rcl} m_1^* : P(\mathbb{T}) & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ E & \to & m_1^*(E) = \inf\left\{ \sum\limits_j m_1(V_j) : E \subset \bigcup\limits_j V_j \right\} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer E yi örten V_j aralıkları yoksa bu durumda $m_1^*(E) = \infty$ olarak kabul edilir.

$\mathbb{T}$ nin herhangi bir A alt kümesinin m_1^*-ölçülebilir olması için,

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap A^c)$$

eşitliğinin her $E \subset \mathbb{T}$ için sağlanması gerekir. Burada A^c kümesi A kümesinin tümleyenidir. Daha sonra $\mathbb{T}$ nin m_1^*-ölçülebilir tüm alt kümeleri $M(m_1^*)$ ile gösterilir. $M(m_1^*)$ ailesi bir σ-cebir olur. Son olarak m_1^* dış ölçüsünün $M(m_1^*)$ kümesi üzerine kısıtlamasına Lebesgue Δ-ölçüsü denir ve bu ölçü μ_Δ ile gösterilir. Böylece m_1 küme fonksiyonunun Carathéodary genişlemesi elde edilmiş olur ([11], [2]).

μ_Δ ölçüsü aralıkların uç noktalarına göre değişen değerler almaktadır. Aşağıdaki teorem bize μ_Δ'nın değişen değerlerini göstermektedir.

Teorem 2.3.1. *$a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \le b$ olsun.*

i) $\mu_\Delta([a,b)_\mathbb{T}) = b - a,$

ii) $\mu_\Delta((a,b)_\mathbb{T}) = b - \sigma(a),$

olur. (Burada $a, b \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ ve $a \le b$ olduğu göz önüne alınmaktadır.)

iii) $\mu_\Delta((a,b]_\mathbb{T}) = \sigma(b) - \sigma(a),$

iv) $\mu_\Delta([a,b]_\mathbb{T}) = \sigma(b) - a$

olur [11].

Tanım 2.3.1. *$f : \mathbb{T} \to [-\infty, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\}$$

kümesi Δ-ölçülebilir ise "f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde Δ-ölçülebilirdir" denir [5].

2.4 Lebesgue Δ-İntegrali

Bu bölümde Δ-ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue Δ-integraline değineceğiz. Önce basit fonksiyonların, sonra pozitif fonksiyonların daha sonra da bunlardan yararlanarak herhangi bir Δ-ölçülebilir bir fonksiyonunun Lebesgue Δ-integrali için tanımlar verilecektir.

Tanım 2.4.1. *$S:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j=1,2,..,n$ için α_j ler birbirinden farklı olmak üzere $A_j=\{t\in\mathbb{T}:S(t)=\alpha_j\}$ kümeleri tanımlansın. $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{A_j}$ olacak şekilde yazılabiliyorsa S fonksiyonuna “basit fonksiyon” denir. Burada χ_{A_j} fonksiyonu A_j kümelerinin karakteristik fonksiyonudur, yani*

$$\chi_{A_j}(t)=\begin{cases}1\ ,\ t\in A_j\\ 0\ ,\ t\notin A_j\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.4.2. *E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $S:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Yani S fonksiyonu Tanım 2.4.1'de ifade edilen A_j kümeleri ve α_j sayıları ile aşağıdaki biçimde yazılsın:*

$$S=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{A_j}$$

Bu durumda S fonksiyonunun E üzerinden Lebesgue Δ-integrali

$$\int_E S(t)\,\Delta t=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_\Delta\left(A_j\cap E\right)$$

olarak tanımlanır [5].

Sonuç 2.4.1. *$f(s)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ olacak şekilde f sabit fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir Ω kümesi üzerinden integrali*

$$\int_\Omega f(s)\,\Delta s=\int_\Omega \alpha\Delta s=\alpha\mu_\Delta(\Omega)$$

dir.

Tanım 2.4.3. *E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $f:\mathbb{T}\to[0,+\infty]$, Δ-ölçülebilir bir* *fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ-integrali*

$$\int\limits_E f(s)\,\Delta s = \sup\left\{ \int\limits_E S(s)\,\Delta s : 0 \leq S \leq f \text{ ve } S \text{ basit fonksiyon} \right\} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.4.4. *E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun pozitif parçası $f^+ := \max\{f, 0\}$ ve negatif parçası $f^- := \max\{-f, 0\}$ şeklinde tanımlansın.*

$$\int\limits_E f^+(s)\,\Delta s \text{ veya } \int\limits_E f^-(s)\,\Delta s$$

integrallerinden en az bir tanesi sonlu olmak şartıyla f fonksiyonunun E kümesi üzerinden Lebesgue Δ-integrali

$$\int\limits_E f(s)\,\Delta s = \int\limits_E f^+(s)\,\Delta s - \int\limits_E f^-(s)\,\Delta s$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.5 Zaman Skalalarında İstatistiksel Yakınsaklık

Yüksek lisans tez çalışmamızda bir zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamış ve onun çeşitli özelliklerini incelemiştik. Öncelikle o kavramı hatırlayalım. Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\mathbb{T}$ zaman skalasını $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $\inf \mathbb{T} = t_0 > 0$ koşullarını gerçekleyen keyfi bir zaman skalası olarak ele alacağız.

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı, reel değerli ve Δ-ölçülebilir bir f fonksiyonu için istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1. *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\mu_\Delta\left(\{s \in [t_0, t]_\mathbb{T} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_\mathbb{T}\right)} = 0$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu *durum*

$$st\left(\mathbb{T}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$$

şeklinde gösterilir [18].

Tanım 2.5.1'te $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ alırsak Fast tarafından verilen diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramına [6], $\mathbb{T}=[a,\infty)$ $(a>0)$ alırsak Móricz tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramına [16], son olarak $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$ $(q>1)$ alırsak ise Aktuğlu ve Bekar tarafından tanımlanan q-istatistiksel yakınsaklık tanımına ulaşırız [1]. Elbette zaman skalasını değiştirerek farklı yakınsaklık kavramları elde etmek de mümkündür.

Teorem 2.5.1. *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $st\left(\mathbb{T}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir Ω alt kümesi vardır öyle ki $\delta_{\mathbb{T}}\left(\Omega\right)=1$ ve $\lim_{t\to\infty\ (t\in\Omega)} f(t)=L$ dir [18].*

Tanım 2.5.2. *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $0<p<\infty$ olsun.*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}}\left|f\left(s\right)-L\right|^{p}\Delta s=0$$

olacak şekilde bir $L\in\mathbb{R}$ varsa, bu durumda f fonksiyonu "$\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde kuvvetli p-Cesáro toplanabilirdir" denir [18].

Şüphesiz ki Tanım 2.5.2 deki Δ-integralin anlamlı olduğu kabul edilmektedir.

Burada belirtelim ki $p=1$ için Tanım 2.5.2 bize $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde kuvvetli Cesáro toplanabilme tanımını vermektedir. Şimdi sıradaki teorem bir zaman skalası üzerinde tanımlı, reel değerli, Δ-ölçülebilir, sınırlu fonksiyonlar için istatistiksel yakınsaklık ile Cesáro toplanabilme ifadelerinin denk olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.5.2. *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $L\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,*

(i) *Eğer f fonksiyonu L sayısına kuvvetli p-Cesáro toplanabilir ise, $st\left(\mathbb{T}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ dir.*

(ii) *Eğer $st\left(\mathbb{T}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(t\right)=L$ ve f sınırlı bir fonksiyon ise, bu durumda f fonksiyonu L sayısına kuvvetli p-Cesáro toplanabilirdir [18].*

3. ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK İÇİN TAUBER KOŞULU

3.1 Tauber Teoremi

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık için bir Tauber koşulu elde edeceğiz. İspatlayacağımız bu sonuç klasikteki teoriyi geliştirecektir.

Teorem 3.1.1. *$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $\mu(t)$, $\mathbb{T}$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ üzerinde $\Delta-$ölçüebilir ve $\Delta-$türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki*

$$st(\mathbb{T})-\lim_{t\to\infty} f(t)=L \tag{3.1}$$

eşitliği sağlansın. Eğer, her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})\left|f^\Delta(t)\right|\le B \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan $B>0$ reel sayısı mevcutsa bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=L$$

olur.

İspat. $st(\mathbb{T})-\lim_{t\to\infty} f(t)=L$ olduğunda Teorem 2.5.1'den $\delta_\mathbb{T}(\Omega)=1$ ve $\lim_{t\to\infty} f(t)\mid_{\Omega(t)}=L$ olacak şekilde Δ-ölçülebilir bir $\Omega\subset\mathbb{T}$ kümesi vardır. Bir Δ-ölçülebilir $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(t)\mid_{\Omega(t)}=g(t)\mid_{\Omega(t)} \tag{3.3}$$

olsun. Bu durumda $\{t\in\mathbb{T}: f(t)\neq g(t)\}\subset\mathbb{T}\backslash\Omega$ olur. $\delta_\mathbb{T}(\mathbb{T}\backslash\Omega)=0$ olduğundan $\delta_\mathbb{T}(\{t\in\mathbb{T}: f(t)\neq g(t)\})=0$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_\Delta(\{s\in[t_0,t]_\mathbb{T}: f(s)\neq g(s)\})}{\mu_\Delta([t_0,t]_\mathbb{T})}=0 \tag{3.4}$$

olur. Ayrıca açıkça görülebilir ki

$$\lim_{t\to\infty} g(t)\mid_{\Omega(t)}=L \tag{3.5}$$

dir.

Şimdi yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ için

$$u(t) := \max\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : f(s) = g(s)\} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $u(t) \in \Omega$ dir. $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega) = 1$ olacağından yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ için $\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : f(s) = g(s)\}$ kümesi boştan farklıdır. Şimdi iddia ediyoruz ki

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_\Delta((u(t), t]_{\mathbb{T}})}{\mu_\Delta([t_0, u(t)]_{\mathbb{T}})} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t) - \sigma(u(t))}{\sigma(u(t)) - t_0} = 0. \tag{3.7}$$

Eğer bir an için yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon_0 > 0$ için $\dfrac{\mu_\Delta((u(t), t]_{\mathbb{T}})}{\mu_\Delta((t_0, u(t)]_{\mathbb{T}})} > \varepsilon_0$ gerçeklenmiş olsaydı

$$\begin{aligned} \frac{\mu_\Delta(\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : f(s) \neq g(s)\})}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} &\geq \frac{\mu_\Delta((u(t), t]_{\mathbb{T}})}{\mu_\Delta([t_0, u(t)]_{\mathbb{T}}) + \mu_\Delta((u(t), t]_{\mathbb{T}})} \\ &> \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olmalıydı. Bu durumda (3.8) eşitsizliği (3.4) ifadesi ile çelişirdi. Buradan (3.7)'nin sağlandığını görebiliriz. (3.2) hipotezinden ve Zaman Skalaları Üzerinde Analizin Temel Teoreminden yararlanarak (bkz. [3])

$$\begin{aligned} |f(t) - g(u(t))| &= |f(t) - f(u(t))| \\ &= \left| \int_{u(t)}^{t} f^\Delta(s)\,\Delta s \right| \\ &\leq \int_{u(t)}^{t} \left| f^\Delta(s) \right| \Delta s \\ &= \int_{[u(t), t)_{\mathbb{T}}} \left| f^\Delta(s) \right| \Delta s \\ &\leq \frac{B\mu_\Delta([u(t), t)_{\mathbb{T}})}{\mu_\Delta([t_0, u(t)]_{\mathbb{T}})}. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan yeterince büyük $t \in \mathbb{T}$ ler için

$$|f(t)-g(u(t))| \leq B\frac{t-u(t)}{\sigma(u(t))-t_0} \tag{3.9}$$

bulunur. $\mu(t)$, $\mathbb{T}$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{t-u(t)}{\sigma(u(t))-t_0} \leq \frac{\sigma(t)-\sigma(u(t))}{\sigma(u(t))-t_0} \tag{3.10}$$

(3.10) gerçeklenir. Ve (3.7)'den

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-u(t)}{\sigma(u(t))-t_0}=0$$

elde ederiz. (3.9) eşitsizliğinin sağ tarafı $t\to\infty$ iken 0 a gittiğiden, sol tarafı da 0 a gider. Bu durumda $\lim\limits_{t\to\infty} g(u(t))=L$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=L$$

sonucuna ulaşırız.

3.2 Özel Haller

Şimdi Teorem 3.1.1'in bazı özel durumlarını inceleyelim.

Durum 1: Teorem 3.1.1'de $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ alalım. Bu durumda $t_0=1$, $\mu(n)=1$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyondur ve $x_n=f(n)$ alırsak $\Delta(x_n)=f^{\Delta}(n)$ klasik ileri fark operatörüne dönüştüğünü Örnek 2.2.1'de göstermiştik. Bu durumda

$$\mu_{\Delta}([1,n]_{\mathbb{N}})=n$$

olacağından (3.2) ifadesi

$$|\Delta(x_n)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

koşuluna dönüşür. Bu ise dizilerin istatistiksel yakınsaklığı için Fridy tarafından verilen Tauber koşuludur [8].

Durum 2: Teorem 3.1.1'de $\mathbb{T}=[a,\infty)$, $a>0$, alalım. $\mu(t)=0$ azalmayan bir fonksiyondur. Bu örnekte, $f^{\Delta}(t)$ ifadesi $f'(t)$ ifadesine dönüştüğünü Örnek 2.2.1'de görmüştük.

$$\mu_\Delta\left([a,t]_{[a,\infty)}\right) = t-a$$

ve (3.2) koşulu

$$(t-a)\left|f^{'}(t)\right| \leq B$$

olacaktır. Bu durumda aşağıdaki Tauber sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1. *$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $st([a,\infty))-\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ olduğunu kabul edelim. Eğer her $t\geq a$ sayısı için*

$$(t-a)\left|f^{'}(t)\right| \leq B \tag{3.11}$$

olacak şekilde $B>0$ sayısı mevcutsa bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = L.$$

dir.

$st([a,\infty))-\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$ ifadesinin her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(\{s\in[a,t]:|f(s)-L|\geq\varepsilon\})}{t-a} = 0 \tag{3.12}$$

ifadesine eşit olduğunu daha önce göstermiştik [18]. (3.12) eşitliğindeki ifade zaman skalası notasyonu kullanılmadan Mòricz tarafından verilmiştir [16]. Burada belitelim ki (3.11) eşitliğiyle verilen koşul yerine

$$f^{'}(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

şeklinde de alınabilir.

Durum 3: Teorem 3.1.1'de $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$, $q>1$, alalım. t yerine artık q^n aldığımızda $n\leq m$ için

$$\begin{aligned}\mu(q^n) &= q^{n+1}-q^n = q^n(q-1)\\ &\leq q^m(q-1)\\ &= \mu(q^m)\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. Bu bize μ fonksiyonunun $q^{\mathbb{N}}$ üzerinde artan olduğunu gösterir. $f^{\Delta}(q^n)$ ifadesinin

$$D^q f(q^n) = \frac{f(q^{n+1}) - f(q^n)}{q^n (q-1)}$$

değerine dönüştüğünü Örnek 2.2.1'de göstermiştik. Bu ifade ise f fonksiyonunun q-türevi olarak adladırılmaktadır [1]. (3.2) koşulu

$$|D^q f(q^n)| = O\left(\frac{1}{q^n (q-1)}\right)$$

koşuluna dönüşür. Bu durumda aşağıdaki Tauber sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2. *$f : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $st\left(q^{\mathbb{N}}\right) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ olduğunu kabul edelim. Eğer her $t \geq q$ sayısı için*

$$|D^q f(q^n)| = O\left(\frac{1}{q^n (q-1)}\right)$$

koşulu sağlanıyorsa $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$'dir.

$st\left(q^{\mathbb{N}}\right) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ ifadesinin her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \chi_{K(\varepsilon)}\left(q^k\right)}{[n]_q} = 0 \tag{3.13}$$

ifadesine denk olduğunu göstermiştik [18]. Burada $[n]_q$ ifadesi q tam sayıları göstermekte olup $[n]_q = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$ şeklinde tanımlanmaktadır. $K(\varepsilon)$ kümesi ise

$$K(\varepsilon) = \left\{q^k \in [q, q^n]_{q^{\mathbb{N}}} : \left|f\left(q^k\right) - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. (3.13) eşitliği Aktuğlu ve Bekar tarafından zaman skalası kavramı kullanılmadan verilmiştir (bkz. [1]).

Yukarıdaki örneklerden de anlaşılabileceği gibi bilinen bazı zaman skalalarının μ fonksiyonları zaten azalmayandır. Ancak elbette μ fonksiyonunun bu koşulu sağlamadığı zaman skalası örnekleri bulmak da mümkündür. Örneğin;

$$\mathbb{T} = \cup_{n=1}^{\infty} [2n, 2n+1] \tag{3.14}$$

zaman skalasını alalım. Bu durumda

$$\mu(t)=\begin{cases}0, & t\in\cup_{n=1}^{\infty}[2n,2n+1)\\ 1, & t\in\cup_{n=1}^{\infty}\{2n+1\}\end{cases}$$

dir. Burada belirtelim ki Teorem 3.1.1'teki μ fonksiyonunun azalmayan olması koşulu kaldırıldığında Teorem 3.1.1'ün geçerli olup olmadığı sorusu halen açık bir problemdir.

Yine Teorem 3.1.1'de μ fonksiyonunun azalmayan olması koşulu yerine farklı bir monotonluk koşulu koyarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.3. *$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $h(t):\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $h(t)=\frac{\sigma(t)-t_0}{t}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ üzerinde $\Delta-$ölçülebilir ve $\Delta-$türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki*

$$st(\mathbb{T})-\lim_{t\to\infty}f(t)=L$$

olsun. Eğer

$$\left|f^{\Delta}(t)\right|=O\left(\frac{1}{t}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=L$$

gerçeklenir.

$\mathbb{N}$, $a>0$ olmak üzere $[a,\infty)$ ve $q>1$ olmak üzere $q^{\mathbb{N}}$ gibi bir çok zaman skalası için Sonuç 3.2.3'te tanımlanan h fonksiyonu azalmayandır. Ancak elbette h fonksiyonunun azalmayan olmadığı zaman skalası örnekleri de mevcuttur. Örneğin (3.14) eşitliği ile tanımlanan zaman skalası için

$$h(t)=\begin{cases}\frac{t-2}{t}, & t\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n,2n+1)\\ \frac{2n}{2n+1}, & t=2n+1,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

dir. Burada h fonksiyonu azalmayan olma şartını sağlamaz.

Üçüncü bölümde elde ettiğimiz tüm sonuçlar [19] nolu makalede yayımlanmıştır.

4. ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Literatürde yer alan lacunary dizisi tanımı ve lacunary istatistiksel yakınsaklık metodu doğal sayılar kümesi üzerinde kurulan tanımlardır. Bu bölümde, doğal sayılar üzerinde (ayrık analizde) mevcut olan bu tanımlar zaman skalaları çerçevesinde incelenmiş ve böylece sadece ayrık fonksiyonlar için bilinen bu teori zaman skalaları üzerinde tanımlanan Δ-ölçülebilir herhangi bir foksiyon için geliştirilmiş olacaktır. Şüphesiz bazı özel zaman skalası örnekleri üzerinde de durulacaktır.

Zaman skalaları üzerindeki bu yeni toplanabilme metodunun istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilme metodlarıyla olan ilişkileri incelenmiştir. Aynı zamanda bu metodların birbirleriyle olan ilişkileri de incelenmiştir. Son olarak zaman skalaları üzerinde tanımlanacak olan lacunary istatistiksel yakınsaklık metodu ile ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilecektir.

4.1 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık Kavramı

1993 yılınnda Fridy ve Orhan doğal sayılar kümesi üzerinde lacunary istatistiksel yakınsalık kavramını tanımlamışlardır [10]. Bir lacunary dizisi $\theta = \{k_r\}$ ile gösterilen artan bir doğal sayı izisi olup $k_0 = 0$ ve $h_r := k_r - k_{r-1}$ olmak üzere $r \to \infty$ iken $h_r \to \infty$ şeklinde tanımlanmıştır.

Klasik anlamda bir (x_k) sayı dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\} = 0, (\forall \varepsilon > 0 \text{ için})$$

limitinin mevcut olması gerekmektedir [6]. (Burada # işareti kümenin eleman saysını göstermektedir.) Fridy ve Orhan lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımında $\{k : k \le n\}$ kümesi yerine lacunary dizisinin elemanlarını alarak $\{k : k_{r-1} < k \le k_r\}$ kümesini kullanmışlardır ve bir dizinin lacunary istatistiksel yakınsaklığını her $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \# \{k \in (k_{r-1}, k_r] : |x_k - L| \ge \varepsilon\} = 0$$

şeklinde tanımlamışlardır. Bilindiği üzere kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin kümesi $|\sigma_1|$ ve kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilen diziler kümesi de N_θ ile gösterilir; yani

$$|\sigma_1| := \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| \right) = 0, \text{ bir } L \text{ sayısı için} \right\}$$

ve

$$N_\theta := \left\{ x : \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k\in[k_{r-1},k_r)} |x_k - L| \right) = 0, \text{ bir } L \text{ sayısı için} \right\}$$

dir (bkz. [7], [14] ve [15]).

Biz bu bölümde yukarıdaki tanımı bir zaman skalası üzerinde vereceğiz.

$\theta = \{k_r\}_{r=0}^{\infty}$ negatif olmayan artan bir tamsayı dizisi $\mathbb{T}$ içerisinde bulunmak üzere $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}) \to \infty$ şartlarını sağlıyorsa θ, $\mathbb{T}$ de bir lacunary dizisi olarak adlandırılır. Burada, daha önce de ifade ettiğimiz üzere $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörünü göstermektedir. Eğer bu tanımda $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ veya $\mathbb{R}$ alırsak bu durumda Freedman tarafından tanımlanmış olan klasik lacunary dizisi tanımını elde ederiz. (bkz. [7])

Yüksek lisans tez çalışmamızda elde etmiş olduğumuz zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık tanımında [18], $\{s \in [t_0,t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$ kümesini $\{s \in (k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$ kümesiyle değiştirerek $\mathbb{T}$'de verilen herhangi bir θ lacunary dizisi için aşağıdaki tanımı elde ederiz.

Tanım 4.1.1. *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}})} = 0, \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda f fonksiyonu L reel sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.1'den aşağıdaki temel özellikleri kolaylıkla elde edebiliriz:

- Eğer $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L$ ise bu durumda herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} \alpha f(t) = \alpha L$ 'dir.
- Eğer $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_1$ ve $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} f(t) = L_2$ ise

$$st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} (f(t) + g(t)) = L_1 + L_2$$

olur.

- Eğer f fonksiyonu lacunary istatistiksel yakınsak ise bu limit tektir.

Bu limitin tek olduğunu göstermek için öncelikle f fonksiyonunun L_1 ve L_2 gibi iki farklı limiti olduğunu kabul edelim. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için,

$$A_r(\varepsilon) := \{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L_1| \geq \varepsilon/2\} \tag{4.2}$$

ve

$$B_r(\varepsilon) := \{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L_2| \geq \varepsilon/2\} \tag{4.3}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A_r(\varepsilon))}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta(B_r(\varepsilon))}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0.$$

olur. Ayrıca $\mu_\Delta(A_r(\varepsilon) \cup B_r(\varepsilon)) \leq \mu_\Delta(A_r(\varepsilon)) + \mu_\Delta(B_r(\varepsilon))$ özelliğini kullanırsak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta(A_r(\varepsilon) \cup B_r(\varepsilon))}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0,$$

elde edilir. Bu ise $s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} \setminus \{A_r(\varepsilon) \cup B_r(\varepsilon)\}$ olacak şekilde sonsuz çoklukta s olacağını garanti etmektedir. Bu s'ler için,

$$|L_1 - L_2| \leq |f(s) - L_1| + |f(s) - L_2| < \varepsilon.$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan son eşitsizlikten limitin tek olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 4.1.1'in bazı özel örnekleri aşağıda incelenmiştir:

- Eğer (4.1) eşitliğinde $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alırsak, Fridy ve Orhan'ın klasik tanımını elde ederiz. [10]

- Eğer (4.1) eşitliğinde $\mathbb{T} = [a, \infty)$ $(a > 0)$ alırsak bu durumda μ_Δ ölçüsü klasik Lebesgue ölçüsü m'ye indirgenir ve

  $$\lim_{r\to\infty} \frac{m(\{k_{r-1} < s \leq k_r : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{k_r - k_{r-1}} = 0. \tag{4.4}$$

  eşitliği elde edilir

Zaman skalaları üzerinde Lebesgue Δ-integrali kullanılarak aşağıdaki tanım elde edilir.

Tanım 4.1.2. *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir $\Delta-$ölçülebilir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon>0$ için,*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|f(s)-L|\,\Delta s=0. \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda f fonksiyonu L reel sayısına kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilir denir.

Burada belirtelim ki (4.5) teki Δ-integralin anlamlı olduğu kabul edilmektedir.

(4.5) eşitliğinin ayrık versiyonu yani $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ durumu Freedman tarafından verilen tanıma indirgenir. (bakınız[7]). Ayrıca (4.5) eşitliğinin sürekli versiyonu ise yani $T=[a,\infty)$, $a>0$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r-k_{r-1}}\int\limits_{k_{r-1}}^{k_r}|f(s)-L|\,ds=0. \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilir.

Tüm çalışmalarımız boyunca $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel yakınsak fonsiyonların kümesi $S_{\mathbb{T}}$, lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $S_{\theta-\mathbb{T}}$ ve tüm kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilir fonksiyonların kümesi $N_{\theta-\mathbb{T}}$ ile gösterilmiştir.

Teorem 4.1.1. *$N_{\theta-\mathbb{T}}\subset S_{\theta-\mathbb{T}}$. Üstelik bu içerme sadece tek yönlüdür.*

İspat. $f\in N_{\theta-\mathbb{T}}$ alalım. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\begin{aligned}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|f(s)-L|\,\Delta s &\geq \int\limits_{\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:|f(s)-L|\geq\varepsilon\}}|f(s)-L|\,\Delta s\\ &\geq \varepsilon\mu_\Delta\left(\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:|f(s)-L|\geq\varepsilon\}\right)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitsizliği (4.5) ile birleştirirsek (4.1) eşitliğini elde ederiz. Buradan $f\in S_{\theta-\mathbb{T}}$ olacağı görülebilir. Bir sonraki örnek ise bize bu içermenin tek yönlü olduğunu göstermektedir. $\mathbb{T}$ de verilen bir $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi için

$$u_r=\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})$$

olmak üzere $[\sigma(k_{r-1}),\sigma(k_r))_{\mathbb{T}}$ aralıklarında f fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[\sigma(k_{r-1}),\sigma(k_{r-1})+1)_{\mathbb{T}} \\ 2, & t\in[\sigma(k_{r-1})+1,\sigma(k_{r-1})+2)_{\mathbb{T}} \\ \ldots & \\ \left[\sqrt{u_r}\right], & t\in\left[\sigma(k_{r-1})+\left[\sqrt{u_r}\right]-1,\sigma(k_{r-1})+\left[\sqrt{u_r}\right]\right)_{\mathbb{T}} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.7}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\mu_\Delta(\{s\in[\sigma(k_{r-1}),\sigma(k_r))_{\mathbb{T}}:|f(s)|\geq\varepsilon\})}{\mu_\Delta([\sigma(k_{r-1}),\sigma(k_r))_{\mathbb{T}})} &\leq \frac{\mu_\Delta\left(\left[\sigma(k_{r-1}),\sigma(k_{r-1})+\left[\sqrt{u_r}\right]\right)_{\mathbb{T}}\right)}{u_r} \\ &= \frac{\left[\sqrt{u_r}\right]}{u_r}\to 0\ (r\to\infty) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada son eşitliği yazarken $\mu_\Delta([a,b)_{\mathbb{T}})=b-a$ ve $r\to\infty$ iken $u_r=\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\to\infty$ olduğundan yararlandık. Dolayısıyla (4.7) eşitliği ile tanımlanan f fonksiyonunun $S_{\theta-\mathbb{T}}$'de olduğunu görebiliriz. Ancak

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_\Delta((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}})}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|f(s)|\Delta s \\ &= \frac{1}{u_r}\sum_{m=1}^{\left[\sqrt{u_r}\right]} m\mu_\Delta([\sigma(k_{r-1})+m-1,\sigma(k_{r-1})+m)_{\mathbb{T}}) \\ &= \frac{1}{u_r}\sum_{m=1}^{\left[\sqrt{u_r}\right]} m \\ &= \frac{\left[\sqrt{u_r}\right]\left(\left[\sqrt{u_r}\right]+1\right)}{2u_r}\to\frac{1}{2}\neq 0\ \ (r\to\infty) \end{aligned}$$

olduğundan $f\notin N_{\theta-\mathbb{T}}$ olur. Buradan ispat tamamlanır.

$\mathbb{T}$'de reel değerli, $\Delta-$ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonların kümesini $C_b(\mathbb{T})$ ile gösterelim. Aşağıdaki teorem Teorem 4.1.1'deki içermenin tersinin sınırlı fonksiyonlar için gerçeklendiğini göstermektedir.

Teorem 4.1.2. *$C_b(\mathbb{T})\cap S_{\theta-\mathbb{T}}\subset N_{\theta-\mathbb{T}}$ gerçeklenir.*

İspat. $f\in C_b(\mathbb{T})\cap S_{\theta-\mathbb{T}}$ alalım. Her $t\in\mathbb{T}$ için $|f(t)-L|\leq M$ olacak şekilde $M>0$

sayısı vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s)-L|\,\Delta s \\
=\ &\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:|f(s)-L|\geq\varepsilon} |f(s)-L|\,\Delta s \\
&+\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:|f(s)-L|<\varepsilon} |f(s)-L|\,\Delta s \\
\leq\ &\frac{M}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:|f(s)-L|\geq\varepsilon} \Delta s \\
&+\frac{\varepsilon}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
=\ &\frac{M\mu_\Delta\left(\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s)-L|\geq\varepsilon\}\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}+\varepsilon
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $r\to\infty$ iken son eşitsizliğin her iki tarafında limit alırsak ve hipotezi kullanırsak istediğimiz sonucu elde ederiz.

Burada belirtmeliyiz ki f'in sınırlılık şartı kaldırılırsa bu durumda $S_{\theta-\mathbb{T}}\subset N_{\theta-\mathbb{T}}$ alt küme özelliği sağlanmayabilir. Bunun için (4.7) eşitliği ile verilen sınırlı olmayan f fonksiyonunu örnek olarak gösterebiliriz.

Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2'yi birlikte düşünerek aşağıdaki sonucu kolaylıkla elde edebiliriz.

Sonuç 4.1.1. $C_b(\mathbb{T})\cap S_{\theta-\mathbb{T}} = C_b(\mathbb{T})\cap N_{\theta-\mathbb{T}}$ *gerçeklenir.*

Yukarıdaki sonuç için $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ ayrık durumu düşünülürse Fridy ve Orhan tarafından elde edilmiş olan klasik sonuçlara ulaşabiliriz [10]. Sürekli durum ise bize aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 4.1.2. $f\in C_b(\mathbb{T})$ *alalım.* f *fonksiyonunun* (4.4) *eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart* f *fonksiyonunun* (4.6) *eşitliğini gerçeklemesidir.*

4.1 bölümünde elde ettiğimiz sonuçlar [17]'de yayımlanmıştır.

4.2 İçerme Teoremleri

Zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki teoremlerle incelenmiştir. Daha önce de ifade edildiği gibi $\mathbb{T}$, $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini içeren bir zaman skalası olsun.

Teorem 4.2.1.

$$S_{\mathbb{T}} \subset S_{\theta-\mathbb{T}} \iff \liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$$

gerçeklenir.

İspat. *Yeterlilik*. Kabul edelim ki $\liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$ olsun. Yeterince büyük r'ler için ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} \geq 1+\delta$$

eşitsizliği mevcuttur. Dolayısıyla

$$\frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \tag{4.8}$$

olur. Şimdi $f \in S_{\mathbb{T}}$ alalım. Yani $st(\mathbb{T}) - \lim f(t) = L$ dir. (4.8) eşitsizliğinden her bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_\Delta(\{s \in [t_0, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta([t_0, k_r]_{\mathbb{T}})} \\
\geq\; & \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\sigma(k_r) - t_0} \\
\geq\; & \frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} \\
\geq\; & \frac{\delta}{1+\delta} \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikte $r \to \infty$ iken limit alırsak, $st(\mathbb{T}) - \lim f(t) = L$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafı 0'a gider. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde ederiz. Buradan $f \in S_{\theta-\mathbb{T}}$ olur.

Gereklilik. $S_{\mathbb{T}} \subset S_{\theta-\mathbb{T}}$ iken $\liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} = 1$ olduğunu kabul edelim. [7] çalışmasındakine benzer bir yolla θ lacunary dizisinden $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisini aşağıdaki gibi seçebiliriz:

$$\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}<1+\frac{1}{j} \tag{4.9}$$

ve

$$\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0}>j \text{ burada } r(j)\geq r(j-1)+1,\ \ j=1,2,\ldots\text{dir.} \tag{4.10}$$

Şimdi Δ-ölçülebilir bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$f(s)=\begin{cases} 1,\ s\in\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}} \\ 0,\text{ diğer durumlarda.}\end{cases} \tag{4.11}$$

İddia ediyoruz ki $f\notin N_{\theta-\mathbb{T}}$. Eğer $r=r(j)$ ise herhangi bir L reel sayısı için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|f(s)-L|\,\Delta s \\ = & \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}}|1-L|\,\Delta s \\ = & |1-L| \end{aligned}$$

olur. Eğer $r\neq r(j)$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|f(s)-L|\,\Delta s \\ = & \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}|L|\,\Delta s \\ = & |L| \end{aligned}$$

elde ederiz. Herhangi bir L reel sayısı için $|1-L|\neq|L|$ olduğundan $f\notin N_{\theta-\mathbb{T}}$' dır. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $f\notin S_{\theta-\mathbb{T}}$. Şimdi (4.11) eşitliğiyle tanımlanan f fonksiyonunun 0'a Cesàro toplanabilir olduğunu yani $f\in N_{\mathbb{T}}$ olduğunu gösterelim. Yeterince büyük $t\in\mathbb{T}$ sayıları için,

$$k_{r(j)-1}<t\leq k_{r(j+1)-1}$$

olacak şekilde bir tek j sayısı bulabiliriz. (4.9) ve (4.10) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})}\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}}|f(s)|\Delta s &\leq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}}|f(s)|\Delta s \\
&= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{\left[t_0,k_{r(j-1)}\right]_{\mathbb{T}}}|f(s)|\Delta s \\
&\quad +\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int\limits_{\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}}|f(s)|\Delta s \\
&\leq \frac{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}+\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0} \\
&< \frac{1}{j}+\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}-1 \\
&< \frac{1}{j}+\frac{1}{j}=\frac{2}{j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j\to\infty$ için limit alırsak son eşitsizlik 0'a gider. Bu ise bize $f\in N_{\mathbb{T}}$ olduğunu gösterir. f sınırlı olduğundan, $f\in S_{\mathbb{T}}$ olmalıdır [18]. Yani $S_{\mathbb{T}}\nsubseteq S_{\theta-\mathbb{T}}$ elde ederiz. Bu ise hipotezle çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2. *$\mathbb{T}$, her bir $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)\leq Mt$ ($M>0$) olacak şekilde bir zaman skalası olsun. Bu duruma*

$$S_{\theta-\mathbb{T}}\subset S_{\mathbb{T}} \iff \limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$$

olur.

İspat. *Yeterlilik.* Kabul edelim ki $\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ olsun. Buradan

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}<\infty$$

olduğunu ve buradan da bir $K>0$ sayısı için ve her $r\in\mathbb{N}$ için,

$$\frac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\leq K \tag{4.12}$$

yazabiliriz. Şimdi Δ-ölçülebilir bir $f\in S_{\theta-\mathbb{T}}$ fonksiyonu alalım. Bu durumda en az bir

L sayısı vardır öyle ki her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{U_r}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} = 0 \tag{4.13}$$

olur. Burada $U_r := U_r(\varepsilon) = \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)$ şeklinde tanımlanmıştır. (4.13) eşitliğiyle tanımlanan limit ifadesinden yola çıkarak en az bir $r_0 = r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ için

$$\frac{U_r}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} < \varepsilon \tag{4.14}$$

olur. Verilen bir $t \in \mathbb{T}$ sayısı için $t \in (k_{r-1}, k_r]$ olacak şekilde $(k_{r-1}, k_r]$ aralığı bulabiliriz. $B = \max\{U_1, U_2, ..., U_{r_0}\}$ olsun. Yeterince büyük r'ler için

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_{\mathbb{T}}\right)} \\
\leq \; & \frac{\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_0, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, k_{r-1}]_{\mathbb{T}}\right)} \\
\leq \; & \frac{U_1 + U_2 + ... + U_{r_0} + U_{r_0+1} + ... + U_r}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
\leq \; & \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \frac{1}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
& \text{x}\left\{\frac{\left(\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})\right) U_{r_0+1}}{\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})} + ... + \frac{\left(\sigma(k_{r+1}) - \sigma(k_r)\right) U_r}{\sigma(k_{r+1}) - \sigma(k_r)}\right\} \\
\leq \; & \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon \frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r_0})}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
\leq \; & \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon \frac{\sigma(k_r) - t_0}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
\leq \; & \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon K
\end{aligned}$$

son eşitsizlikte her iki tarafın $r \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_{\mathbb{T}}\right)} = 0$$

bulunur. Bu ise teoremin yeterlilik tarafını ispatlar.

Gereklilik. $S_{\theta-\mathbb{T}} \subset S_{\mathbb{T}}$ iken $\limsup\limits_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} = \infty$ olsun. Hipotezden her $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ için

$$t \leq \sigma(t) \leq (M+1)t$$

olur. Buradan

$$\frac{k_r}{\sigma(k_{r-1})} = \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\frac{k_r}{\sigma(k_r)} \geq \frac{1}{M+1}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik bize

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{k_r}{\sigma(k_{r-1})} = \infty$$

olduğunu verir. θ lacunary dizisinden $\left\{k_{r(j)}\right\}$ alt dizisini aşağıdaki gibi seçebiliriz:

$$\frac{k_{r(j)}}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} > j. \tag{4.15}$$

Şimdi Δ-ölçülebilir bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$f(s) = \begin{cases} 1, \ s \in \left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} & j = 1,2,\ldots \\ 0, \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.16}$$

İddia ediyoruz ki (4.16) eşitliğiyle tanımlanmış olan f fonksiyonu 0'a kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilir olsun yani, $f \in N_{\theta-\mathbb{T}}$. Şimdi

$$\tau_r = \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s)|\,\Delta s$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer $r \neq r(j)$ ise $\tau_r = 0$' dır. Eğer $r = r(j)$ ise (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)|\,\Delta s \\ = \ & \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) eşitliğinin payı $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$ sayısının $\mathbb{T}$ ye ait olup olmamasına göre farklılık gösterir. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \in \mathbb{T}$ ise (4.17) eşitliği, (4.15) eşitliği yardımıyla

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} = \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} < \frac{1}{j-1}$$

ifadesine dönüşür. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise

$$\alpha_j := \max\left\{s \in \mathbb{T} : s < 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\} \tag{4.18}$$

olmak üzere

$$\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} = \left(k_{r(j)-1}, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}$$

olur. Hipotezden yararlanarak ve (4.15) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} &= \frac{\mu_\Delta\left(k_{r(j)-1}, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&= \frac{\sigma\left(\alpha_j\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&\leq \frac{(M+1)\,\alpha_j - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&\leq \frac{2\,(M+1)\,\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&= \frac{(2M+1)\,\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&< \frac{(2M+1)}{j-1}
\end{aligned}$$

olur. Her iki durumda da $j \to \infty$ için limit alınırsa eşitsizliklerin son adımları 0 a gider. O halde $f \in N_{\theta-\mathbb{T}}$ gerçeklenir. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $f \in S_{\theta-\mathbb{T}}$ olmak zorundadır. Şimdi f fonksiyonunun ne 0 a ne de 1 e kuvvetli Cesàro toplanabilir olmadığını gösterelim. Yani $f \notin N_{\mathbb{T}}$'dir. (4.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} |f(s) - 1|\,\Delta s \\
\geq\ & \frac{1}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - t_0} \int_{\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right), k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
\geq\ & \frac{\mu_\Delta\left(\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right), k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \in \mathbb{T}$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)-1|\Delta s &\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&= 1 - \frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&\geq 1 - \frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{k_{r(j)}} \\
&> 1 - \frac{2}{j} \to 1 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise (4.18) eşitliği ile tanımlanan α_j sayısı için

$$\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right), k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}} = \left(\alpha_j, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)-1|\Delta s &\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(\alpha_j\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - (M+1)\,\alpha_j}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - 2(M+1)\,\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&= 1 - 2(M+1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)} \\
&> 1 - \frac{2(M+1)}{j} \to 1 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

bulunur. f fonksiyonunun tanımından ve hipotezden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)|\Delta s \\
\geq\ & \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
=\ & \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \in \mathbb{T}$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)|\,\Delta s &\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)} \\
&\geq \frac{1}{2(M+1)} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise (4.18) eşitliği ile tanımlanan α_j sayısı ile aynı yolla

$$\beta_j := \min\left\{s \in \mathbb{T} : s > 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$$

tanımlanır. Bu durumda

$$\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} = \left(k_{r(j)-1}, \beta_j\right)_{\mathbb{T}}$$

ve

$$\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}} = \left[t_0, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}$$

olur. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} |f(s)|\,\Delta s &\geq \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, \beta_j\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right)} \\
&= \frac{\beta_j - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(\alpha_j\right) - t_0} \\
&\geq \frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{(M+1)\,\alpha_j} \\
&\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{2(M+1)\,\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} \\
&= \frac{1}{2(M+1)}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Buradan görülmektedir ki $f \notin N_{\mathbb{T}}$'dir. f sırlı olduğundan $f \notin S_{\mathbb{T}}$ olmak zorundadır. Bu durumda $S_{\theta-\mathbb{T}} \nsubseteq S_{\mathbb{T}}$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'yi birleştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.3. $\mathbb{T}$, *her bir* $t \in \mathbb{T}$ *için* $\mu(t) \leq Mt$ $(M > 0)$ *olacak şekilde bir zaman* *skalası olsun. Bu duruma*

$$S_{\theta-\mathbb{T}} = S_{\mathbb{T}} \iff 1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty \tag{4.19}$$

olur.

Burada belirtelim ki $\mu(t) \le Mt$ koşulu sadece Teorem 4.2.2'nin gereklilik ispatında kullanılmaktadır. $\mathbb{N}$, $a > 0$ için $[a,\infty)$ ve $q > 1$ için $q^{\mathbb{N}}$ gibi pek çok zaman skalası bu şartı zaten sağlamaktadır. Ancak elbette $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}^2} = \left\{2^{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ gibi bu koşulu sağlamayan zaman skalaları da mevcuttur. Bu koşulun Teorem 4.2.3 ün hipotezinden kaldırılıp kaldırılamayacağı halen açık bir problemdir.
Şimdi Teorem 4.2.3'nin bazı özel durumlarını inceleyelim.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ *için (4.19) denkliğinin sağ tarafı*

$$1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{k_r+1}{k_{r-1}+1} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{k_r+1}{k_{r-1}+1} < \infty$$

olur. Bu ise bize Fridy ve Orhan tarafından verilmiş olan

$$1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{k_r}{k_{r-1}} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{k_r}{k_{r-1}} < \infty$$

koşulunu verir [10].

Teorem 4.2.3'de $\mathbb{T} = [a,\infty)$, $a > 0$ zaman skalasını alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.2.1.

$$S_{\theta-[a,\infty)} = S_{\mathbb{T}} \iff 1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{k_r}{k_{r-1}} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{k_r}{k_{r-1}} < \infty$$

dir.

Son olarak Teorem 4.2.3'de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$, $q > 1$ zaman skalasını alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.2.2. $\theta = (k_r) \subset q^{\mathbb{N}}$, $q > 1$ *olacak şekilde lacunary dizisini alalım. Bu durumda*

$$S_{\theta-q^{\mathbb{N}}} = S_{q^{\mathbb{N}}} \iff 1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{q^{k_r+1}}{q^{k_{r-1}+1}} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{q^{k_r+1}}{q^{k_{r-1}+1}} < \infty$$

olur.

Bölüm 4.2’de elde edilen orjinal sonuçlar [19] makalesinde yayımlanmıştır.

5. ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE HARDY TİPİ TAUBER KOŞULU

5.1 Yavaş Azalanlık Ve Tauber Teoremi

Hardy'nin ünlü Tauber teoremi şu şekildedir: Bir L sayısına Cesàro toplanabilen ve $\Delta x_k = O(1/k)$ şartını sağlayan bir x dizisi L ye yakınsaktır; yani

$$\lim Cx = L \text{ ve } \Delta x_k = O(1/k) \text{ ise } \lim x = L$$

dir (bkz. [4] ve [12]). Bu bölümde Hardy'nin bu sonucunun zaman skalaları üzerinde ispatlayacağız. Ardından istatistiksel yakınsaklık için yeni bir Tauber teoremi elde edeceğiz.

Şimdi zaman skalaları üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için yavaş azalma, yavaş artma ve yavaş salınma kavramlarını tanımlayacağız.

Tanım 5.1.1. *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun.*

i) *Eğer f fonksiyonu*

$$\liminf_{\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \to 1,\ s \geq t \to \infty} (f(s) - f(t)) \geq 0 \tag{5.1}$$

şartını sağlıyorsa yavaş azalan bir fonksiyondur denir. (5.1) ifadesine denk olarak şunu yazabiliriz: Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ ve bir $r \in \mathbb{T}$ vardı öyle ki her $s,t \in \mathbb{T}$, $s \geq t \geq r$ ve $\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \leq 1 + \delta$ için $f(s) - f(t) \geq -\varepsilon$ olur. Eğer $-f$ fonksiyonu yavaş azalan ise f fonksiyonu yavaş artandır denir.

ii) *Eğer f fonksiyonu*

$$\lim_{\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \to 1,\ s \geq t \to \infty} (f(s) - f(t)) = 0 \tag{5.2}$$

şartını sağlıyorsa yavaş salınan bir fonksiyondur denir. (5.4) ifadesine denk olarak şunu yazabiliriz: Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ ve bir $r \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki her $s,t \in \mathbb{T}$, $s \geq t \geq r$ ve $\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \leq 1 + \delta$ için $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ olur.

Yukarıdaki tanımlar yardımıyla aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 5.1.1. ***i)*** *Her yakınsak fonksiyon yavaş salınımlıdır.*

ii) *Artan fonksiyonlar yavaş azalandır.*

iii) *Bir fonksiyon hem yavaş artan hem yavaş azalansa yavaş salınımlıdır.*

İspat. i) Gerçekten,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = L$$

olacak şekilde L sayısını alalım. Her $s,t \in \mathbb{T}$ ve $s \geq t \geq r$ için t sayısı sonsuza giderken, s sayısı da sonsuza gider. Böylece,

$$\lim_{\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)}\to 1,\, t\to\infty} (f(s) - f(t)) = L - L = 0 \tag{5.3}$$

eşitliği elde edilir. (5.6) eşitliği bize f fonksiyonunun yavaş salınımlı olduğunu gösterir.

ii) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\Delta-$ölçülebilir ve artan bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $s \geq t \geq r$ olacak şekilde $s,t \in \mathbb{T}$ için,

$$\begin{aligned} f(s) - f(t) &\geq 0 \\ &\geq -\varepsilon \end{aligned}$$

ve son eşitsizlik bize f'in yavaş azalan olduğunu gösterir.

$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ve $\mathbb{T} = [a,\infty)$, $a > 0$ durumları için [4] ve [12] nolu referanslar incelenebilir.

$\mathscr{B}(\Delta)$ ifadesi $\mathbb{T}$'nin her kapalı ve sınırlı alt kümesi üzerinde sınırlı olan $\Delta-$ölçülebilir ve $\Delta-$integrallenebilir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonların sınıfını göstersin.

$f \in \mathscr{B}(\Delta)$ ve $t > t_0$ için

$$(C_{\mathbb{T}} f)(t) := \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} f(p)\,\Delta p$$

olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty\ (t\in\mathbb{T})} (C_{\mathbb{T}} f)(t) = L$$

ise bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L sayısına Cesàro toplanabilirdir denir [18].

Lemma 5.1.1. *Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde Cesàro toplanabilme metodu regülerdir.*

Yani; eğer $f \in \mathscr{B}(\Delta)$ için

$$\lim_{t\to\infty\ (t\in\mathbb{T})} f(t) = L \tag{5.4}$$

ise

$$\lim_{t\to\infty\ (t\in\mathbb{T})} (C_{\mathbb{T}}f)(t) = L \tag{5.5}$$

dir.

İspat. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $t_1 := t_1(\varepsilon) \in \mathbb{T}$ vardır öyleki her $t > t_1$, $t \in \mathbb{T}$ için

$$|f(t) - L| < \varepsilon \tag{5.6}$$

olduğunu 5.4'ten yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |(C_{\mathbb{T}}f)(t) - L| &\leq \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}} |f(p) - L|\Delta p \\ &\leq \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \left(\int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}} |f(p) - L|\Delta p + \int\limits_{(t_1,t]_{\mathbb{T}}} |f(p) - L|\Delta p \right) \end{aligned}$$

(5.6) eşitliği yardımıyla ve $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ aralığı üzerinde f'in sınırlı olmasından yararlanarak her $t > t_1$, $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} |(C_{\mathbb{T}}f)(t) - L| &\leq K\frac{\mu_\Delta([t_0,t_1]_{\mathbb{T}})}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} + \varepsilon \\ &\leq K\frac{\sigma(t_1) - t_0}{\sigma(t) - t_0} + \varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı mevcuttur. Son ifadede $t \to \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafı 0'a gideceğinden ispat tamamlanır.

Bir sonraki teorem bize Hardy'nin ünlü Tauber teoreminin yavaş azalan fonksiyonlar için zaman skalası versiyonunu vermektedir.

Teorem 5.1.1. $\mathbb{T}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)} = 1$ *olacak şekilde bir zaman skalası olsun.* $f \in \mathscr{B}(\Delta)$, $\mathbb{T}$ *zaman skalası üzerinde yavaş azalan bir fonksiyon olmak üzere eğer f fonksiyonu L sayısına Cesàro toplanabilir ise*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = L \tag{5.7}$$

dir.

İspat. Lemma 5.1.1'den regülerlik şartı sağlandığından $L = 0$ almak genelliği bozmaz. Eğer f fonksiyonu 0'a Cesàro toplanabilir ise,

$$\lim_{t\to\infty} (C_{\mathbb{T}} f)(t) = 0 \tag{5.8}$$

yazabiliriz. Şimdi (5.8) eşitliğinin gerçekleşmediğini kabul edelim. Bu durumda

$$0 < \limsup_{t\to\infty} f(t) := \lambda \tag{5.9}$$

veya

$$0 > \liminf_{t\to\infty} f(t)$$

olmalıdır. Sadece (5.9) durumunu incelemek yeterlidir, çünkü diğer durumda (5.9) eşitsizliğine $-f$ fonksiyonuna uygulamak yeterlidir. (5.9)'dan bir $\left(k_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{j\to\infty} f\left(k_j\right) = \lambda$$

ve her $j \in \mathbb{N}$ için

$$f\left(k_j\right) \geq \frac{\alpha}{2} \tag{5.10}$$

dir. Burada

$$\alpha := \begin{cases} \lambda \text{ if } \lambda < \infty \\ 2t_0 \text{ if } \lambda = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. f yavaş azalan bir fonksiyon olduğundan $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$ için bir $\delta > 0$ ve $k_{j_1} \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki her $s > k_j > k_{j_1}$ ve $\frac{\sigma(s)}{\sigma\left(k_j\right)} \leq 1+\delta$ için

$$f(s) - f\left(k_j\right) \geq -\frac{\alpha}{4}$$

gerçeklenir. (5.10) eşitsizliğini kullanarak tüm $s > k_j > k_{j_1}$ ve $\frac{\sigma(s)}{\sigma\left(k_j\right)} \leq 1+\delta$ için,

$$f(s) \geq \frac{\alpha}{4} \tag{5.11}$$

yazabiliriz. Şimdi

$$s_j := \min\left\{u \in \mathbb{T} : u \geq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sigma\left(k_j\right)\right\} \tag{5.12}$$

olarak alalım. İlk olarak $s_j \geq k_j$ olacağı açıkça görülebilir. Eğer s_j sola saçılmış ise yani, $\rho\left(s_j\right) < s_j$ şeklinde ise

$$\rho\left(s_j\right) < \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sigma\left(k_j\right) \tag{5.13}$$

olur. (5.13) eşitsizliğini ve $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)} = 1$ olması hipotezini kullanarak yeterince büyük j'ler ve $0 < \delta < 2$ için

$$\sigma\left(s_j\right) = \frac{\sigma\left(s_j\right)}{\rho\left(s_j\right)}\rho\left(s_j\right) \leq \left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sigma\left(k_j\right) \leq (1+\delta)\,\sigma\left(k_j\right) \tag{5.14}$$

elde edilir. Eğer s_j sola yoğun ise yani $\rho\left(s_j\right) = s_j$ şeklinde ise bu durumda $s_j \geq 2t_0$ olmak üzere $s_j - t_0 < \beta_j < s_j$ olacak şekilde bir $\beta_j \in \mathbb{T}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\sigma\left(s_j\right) &= \frac{\sigma\left(s_j\right)}{s_j - t_0}\left(s_j - t_0\right) \leq \frac{\sigma\left(s_j\right)}{\rho\left(s_j\right)-t_0}\beta_j \\ &\leq \left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sigma\left(k_j\right) \leq (1+\delta)\,\sigma\left(k_j\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

yazabiliriz. Burada son eşitsizlik için $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{\sigma\left(s_j\right)}{\rho\left(s_j\right)-t_0} = 1$ olacağını hipotezden görebiliriz. s_j sola saçılmış veya sola yoğun iken (5.12), (5.14) ve (5.15) yardımıyla yeterince büyük j'ler için

$$k_j \leq \sigma\left(k_j\right) \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sigma\left(k_j\right) \leq s_j \leq \sigma\left(s_j\right) \leq (1+\delta)\,\sigma\left(k_j\right) \tag{5.16}$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\left(C_{\mathbb{T}}f\right)\left(s_j\right)-\frac{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,s_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}\left(C_{\mathbb{T}}f\right)\left(k_j\right)\\
=\;& \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,s_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}\left[\int_{\left[t_0,s_j\right]_{\mathbb{T}}} f(p)\,\Delta p-\int_{\left[t_0,k_j\right]_{\mathbb{T}}} f(p)\,\Delta p\right]\\
=\;& \frac{1}{\sigma\left(s_j\right)-t_0}\left[\int_{\left(k_j,s_j\right]_{\mathbb{T}}} f(p)\,\Delta p\right]\\
\geq\;& \frac{\alpha}{4\left(\sigma\left(s_j\right)-t_0\right)}\mu_\Delta\left(\left(k_j,s_j\right]_{\mathbb{T}}\right)\\
=\;& \frac{\alpha}{4\left(\sigma\left(s_j\right)-t_0\right)}\left[\sigma\left(s_j\right)-\sigma\left(k_j\right)\right]\\
\geq\;& \frac{\alpha}{4}\left(1-\frac{\sigma\left(k_j\right)}{\sigma\left(s_j\right)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.16) eşitsizliğini kullanarak

$$
\left(C_{\mathbb{T}}f\right)\left(s_j\right)-\frac{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,s_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}\left(C_{\mathbb{T}}f\right)\left(k_j\right)\geq\frac{\alpha\delta}{4(2+\delta)}>0 \tag{5.17}
$$

bulunur. Son eşitsizlikte $j\to\infty$ için limit alırsak (5.17)'nin sağ tarafı pozitif bir sayı iken sol tarafı ise 0 a gider. Bu çelişki ise ispatı tamamlar.

5.2 Uygulamalar Ve Özel Haller

Aşağıdaki sonuç, Teorem 5.1.1'ten kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 5.2.1. $\mathbb{T}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}=1$ *olacak şekilde bir zaman skalası olsun.* $f\in\mathscr{B}(\Delta)$, $\mathbb{T}$ *zaman skalası üzerinde yavaş salınımlı bir fonksiyon olmak üzere eğer f fonksiyonu L sayısına Cesàro toplanabilir ise*

$$
\lim_{t\to\infty}f(t)=L \tag{5.18}
$$

dir.

Burada belirtelim ki Teorem 5.1.1'teki $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}=1$ şartı pek çok zaman skalası tarafından gerçeklenmektedir. Aşağıdaki durumlarda bazı zaman skalası örnekleri incelenmiştir.

Durum 1: $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ alalım. $t_0=1$ olup $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{\rho(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}=1$ elde edilir. Bu durumda (5.5) eşitliği

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=L$$

klasik Cesàro ortalamasına ve Tanım 5.1.1 ise

$$\liminf_{1\leq\frac{m}{n}\to 1,\, n\to\infty}(x_m-x_n)\geq 0$$

klasik durumuna indirgenir. Burada $x_n:=f(n)$ şeklinde tanımlanmış olan diziler göz önüne alınmaktadır.

Durum 2: $a>0$ için $\mathbb{T}=[a,\infty)$ alalım. Burada $t_0=a$ olup her $t>a$ için zaman skalasının her bir noktası yoğundur, yani $\sigma(t)=\rho(t)=t$ şeklindedir. Bu durumda $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{t}=1$ olur. (5.5) eşitliği

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)\,ds=L$$

ve Tanım 5.1.1 ise

$$\liminf_{1\leq\frac{s}{t}\to 1,\, t\to\infty}(f(s)-f(t))\geq 0$$

haline gelir [12].

Durum 3: $q>1$ olmak üzere $\mathbb{T}=q^{\sqrt{\mathbb{N}}}:=\left\{q^{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\right\}$ zaman skalasını alalım. $t_0=q$ olup

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma\left(q^{\sqrt{n}}\right)}{\rho\left(q^{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{q^{\sqrt{n+1}}}{q^{\sqrt{n-1}}}=1$$

şartı sağlanır. $q^{\sqrt{\mathbb{N}}}$ zaman skalası üzerinde bir f fonksiyonunun Cesàro toplanabilmesi ve yavaş azalan olması tanımları ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(q^{\sqrt{n+1}}-1\right)}\sum_{k=1}^{n}f\left(q^{\sqrt{k}}\right)\left(q^{\sqrt{k+1}}-q^{\sqrt{k}}\right)=L$$

ve

$$\liminf_{\frac{q^{\sqrt{m+1}}}{q^{\sqrt{n+1}}}\to 1,\, m\geq n\to\infty}\left(f\left(q^{\sqrt{m}}\right)-f\left(q^{\sqrt{n}}\right)\right)\geq 0$$

şeklini alır.

Durum 4: $\beta > 0$ için $\mathbb{T} = \mathbb{N}^{\beta} := \left\{ n^{\beta} : n \in \mathbb{N} \right\}$ zaman skalasını alalım. $t_0 = 1$ olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\beta}}{(n-1)^{\beta}} = 1$$

şartını sağlamaktadır. $\mathbb{N}^{\beta}$ zaman skalası üzerinde bir f fonksiyonunun Cesàro toplanabilmesi ve yavaş azalan olması tanımları ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\beta} - 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(k^{\beta}\right)\left((k+1)^{\beta} - k^{\beta}\right) = L$$

ve

$$\liminf_{\frac{(m+1)^{\beta}}{(n+1)^{\beta}} \to 1,\ m \geq n \to \infty} \left(f\left(m^{\beta}\right) - f\left(n^{\beta}\right)\right) \geq 0$$

dır.

Durum 5: $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{N} = \{hn : n \in \mathbb{N}\}$ zaman skalasının da Teorem 5.1.1'de verilen limit şartını sağladığı kolaylıkla görülebilir.

Durum 6: $\mathbb{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n, 2n+1]$ zaman skalasını alalım. $t_0 = 2$'dir. Herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için bir $n = n(t) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$2n \leq t \leq 2n+1$$

şartı sağlanır. Eğer t yoğun bir noktaysa yani $2n < t < 2n+1$ ise $\sigma(t) = \rho(t) = t$ olur. t saçılmış bir nokta ise bu durumda da $\sigma(2n) = 2n$, $\rho(2n) = 2n-1$, $\sigma(2n+1) = 2n+2$, $\rho(2n+1) = 2n+1$ olur. Her durum için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(t)}{\rho(t)} = 1$$

şartı sağlanır.

Yukarıdaki örnekler teoremde verilen limit şartının pek çok zaman skalası tarafından sağlandığını göstermektedir. Ancak elbette bu şartı sağlamayan zaman skalaları bulmak da mümkündür. Aşağıdaki durum söz konusu limit şartının sağlanmadığı bir zaman skalası örneğidir.

Durum 7: $q > 1$ için $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}} = \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ zaman skalasını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{\rho(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{q^{n-1}} = q^2 > 1$$

olur.

Aşağıdaki lemma yardımıyla zaman skalaları üzerinde yeni bir Tauber şartı elde edeceğiz.

Lemma 5.2.1. $\mathbb{T}$, μ *sıçrama fonksiyonu azalmayan olan bir zaman skalası olsun.* $f \in \mathscr{B}(\Delta)$ *ve* $\Delta-$*türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere eğer her* $t > t_0$, $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^{\Delta}(t) \geq \frac{-B}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})}$$

olacak şekilde bir $B > 0$ *sayısı varsa bu durumda* f *fonksiyonu* $\mathbb{T}$ *üzerinde yavaş azalandır.*

İspat. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)B}$ ve $r \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki

$$r \geq \frac{(1+\varepsilon)t_0}{\varepsilon}$$

sayıları bulunabilir. Her $s \geq t \geq r$, $\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \leq 1+\delta$ olacak şekilde $s,t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} f(s) - f(t) &= \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} f^{\Delta}(p)\Delta p \geq -B \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{\mu_\Delta([t_0,p]_{\mathbb{T}})} \\ &\geq \frac{-B}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \Delta p \\ &= \frac{-B}{\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}})} \mu_\Delta([t,s)_{\mathbb{T}}) \\ &= \frac{-B}{\sigma(t)-t_0}(s-t) \end{aligned}$$

μ sıçrama fonksiyonu azalmayan olduğundan $s - t \leq \sigma(s) - \sigma(t)$ olur. Buradan her

$s \geq t \geq r$, $\frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \leq 1+\delta$ olacak şekilde $s,t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} f(s)-f(t) &\geq -B\frac{(\sigma(s)-\sigma(t))}{\sigma(t)-t_0} \\ &\geq -B\delta\frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-t_0} \\ &= -\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{t_0}{\sigma(t)-t_0}\right) \\ &\geq -\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$\beta \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{T} = \mathbb{N}^{\beta}$, $a>0$ için $\mathbb{T}=[a,\infty)$, $h>0$ için $\mathbb{T}=h\mathbb{N}$, $q>1$ için $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$ gibi bir çok zaman skalası için μ sıçrama fonksiyonu azalmayandır. Ancak elbette bu şartı sağlamayan zaman skalası örnekleri bulmak mümkündür. $q>1$ için $\mathbb{T}=q^{\sqrt{\mathbb{N}}}$, $\mathbb{T}=\sqrt{\mathbb{N}}$, $\mathbb{T}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[2n,2n+1]$ gibi zaman skalası örnekleri bu şartı sağlamamaktadır.

Sonuç 5.2.2. $\mathbb{T}$, *μ sıçrama fonksiyonu azalmayan olan ve* $\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}=1$ *olacak şekilde bir zaman skalası olsun.* $f \in \mathscr{B}(\Delta)$, *$\Delta-$türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$\mu_{\Delta}([t_0,t]_{\mathbb{T}})\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq B \tag{5.19}$$

şartını sağlayacak şekilde bir $B>0$ *sayısı mevcut olsun. Bu durumda eğer (5.5) şartı sağlanıyorsa (5.6) eşitliği gerçeklenir.*

İspat. Lemma 5.2.1'den (5.19) eşitsizliği sağlandığında f fonksiyonunun yavaş azalan olduğu sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla Teorem 5.1.1'ten istenen sonuca ulaşırız.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 5.1.1'teki (5.5) şartının daha zayıflatılmış haliyle Hardy tipi Tauber teoremin halen geçerli olduğunu göstermektedir.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{T}$, *μ sıçrama fonksiyonu azalmayan olan ve* $\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}=1$ *olacak şekilde bir zaman skalası olsun.* $f \in \mathscr{B}(\Delta)$, *$\Delta-$türevlenebilen fonksiyonu (5.19) şartını sağlasın ve her* $t>t_0$, $t\in\mathbb{T}$ *için*

$$\mu_{\Delta}([t_0,t]_{\mathbb{T}})\left|(C_{\mathbb{T}}f)^{\Delta}(t)\right| \leq M \tag{5.20}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcut olsun. Eğer

$$st\,(\mathbb{T}) - \lim_{t\to\infty} (C_{\mathbb{T}} f)\,(t) = L \tag{5.21}$$

ise, bu durumda (5.6) gerçeklenir.

İspat. (5.20) ve (5.21) ifadelerinden ve μ, $\mathbb{T}$ üzerinde azalmayan olduğundan Teorem 3.1.1'de f yerine $C_{\mathbb{T}} f$ alırsak (5.5) ifadesini elde ederiz. Sonuç 5.2.2 yardımıyla ispat tamamlanır.

Son olarak bazı temel zaman skalalarında Teorem 5.2.1'teki (5.19) koşulu varken (5.20) nin zaten sağlanmakta olduğunu göstereceğiz.

Durum 1: $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda (5.19) ve (5.20) ifadeleri, $B, M > 0$ olmak üzere

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{B}{n} \tag{5.22}$$

ve

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \frac{M}{n} \tag{5.23}$$

şeklini alır. (5.22) ifadesi sağlandığında $M = B$ seçilerek (5.23) ifadesinin gerçekleştiği [9] Lemma 2.1'den görülebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right| &= \frac{1}{n\,(n+1)} \left| \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1} - x_k) \right| \\
&= \frac{1}{n\,(n+1)} \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \left(x_{j+1} - x_j\right) \right| \\
&= \frac{1}{n\,(n+1)} \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \Delta x_j \right| \\
&\leq \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j \left| \Delta x_j \right| \\
&\leq \frac{B}{n}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde Teorem 5.2.1, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ olması durumunda [9] Lemma 2.1'e indirgenir.

Durum 2: $a > 0$ için $\mathbb{T} = [a, \infty)$ zaman skalasını alalım. Bu durumda her $t > a$ için

(5.19) ve (5.20) ifadeleri

$$\left|f'(t)\right| \leq \frac{B}{t-a} \tag{5.24}$$

ve

$$\left|\left(\frac{1}{(t-a)}\int_a^t f(s)ds\right)'\right| \leq \frac{M}{t-a} \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{(t-a)}\int_a^t f(s)ds\right)'\right| &= \left|-\frac{1}{(t-a)^2}\int_a^t f(s)ds + \frac{f(t)}{t-a}\right| \\
&= \frac{1}{(t-a)^2}\left|f(t)(t-a) - \int_a^t f(s)ds\right| \\
&= \frac{1}{(t-a)^2}\left|\int_a^t (f(t)-f(s))\,ds\right| \\
&= \frac{1}{(t-a)^2}\left|\int_a^t\int_s^t f'(u)duds\right| \\
&\leq \frac{B}{(t-a)^2}\int_a^t\int_s^t \frac{1}{u-a}duds \\
&= \frac{B}{(t-a)^2}\int_a^t (\ln(t-a) - \ln(s-a))\,ds \\
&= \frac{B}{(t-a)^2}\left((t-a) + \lim_{y\to a^+}\{(y-a)\ln(y-a)\}\right) \\
&= \frac{B}{t-a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $M = B$ seçilerek (5.25) eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 5.2.1'den aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 5.2.3. *$f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere (5.24) eşitsizliğini sağlasın. Eğer*

$$st\left([a,\infty)\right) - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)\,ds = L$$

ise

$$\lim_{t\to\infty} f(s) = L$$

dir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zaman skalaları üzerinde bazı Tauber teoremler elde edilmiş ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı inşa edilmiştir. Literatürde sadece kesikli ve sürekli halleri mevcut olan bazı teoriler zaman skalası yardımıyla geliştirilmiştir. Elbette bu tezde elde edilen sonuçlardan farklı olarak toplanabilme teorisine ait başka kavramları zaman skalalarına dahil etmek ve böylece teoriyi daha da ileri götürmek mümkündür.

Toplanabilme teorisinin bir zaman skalası üzerinde çalışılmasında en büyük zorluk zaman skalasının kendisinden kaynaklanmaktadır. Çünkü çoğu zaman, klasik teoride kolayca aldığımız türevler ve integraller herhangi bir zaman skalası üzerinde elde edilememektedir. Bu durumda zaman skalasına bazı koşullar ekleme ihtiyacı doğmaktadır. Fakat burada da eklenecek koşulların öyle bir hassasiyetle seçilmesi gerekir ki klasik teoriyle de çelişilmemelidir. Bu doktora tezinde mümkün olduğu kadar sade ve doğal koşullar kullanmaya çalıştık. Örneğin $\mathbb{T}$ üzerinde $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{\rho(t)} = 1$ olması ve/veya μ sıçrama fonksiyonunun azalmayan olması gibi. Hem zaman skalası ile çalışmanın güçlüğü hem de toplanabilme teorisindeki klasik ispatların teknik olması bizi çoğu zaman oldukça zorlamıştır. Fakat uygun zaman skalaları üzerinde çeşitli karakterizasyonlar ile Tauber tipi teoremlere ulaşılmış olması bizlere bu konuda gelecekte daha pek çok gelişmenin olabileceği sinyalini ve inancını vermiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Aktuglu, H., Bekar, S.,** (2011). q-cesáro matrix and q-statistical convergence, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 4717–4723.

[2] **Aslim, G., Guseinov, G. Sh.,** (1999). ω-semirings, and measures, *Bull. Allahabad Math. Soc.*, 14, 1–20.

[3] **Bohner, M., Peterson, A.,** (2001). Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, *Birkhäuser Boston*.

[4] **Boos, J.,** (2000). Classical and Modern Methods in Summability, *Oxford University Press*.

[5] **Cabada, A., Vivero, D.R.,** (2006). Expression of the lebesgue δ-integral on time scales as a usual lebesgue integral; application to the calculus of δ-antiderivatives, *Math. Comput. Modelling*, 43, 194-207.

[6] **Fast, H.,** (1951). Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, 2, 241-244.

[7] **Freedman, A.R., Sember, J.J., Raphael, M.,** (1978). Some cesàro type summability spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 37, 508-520.

[8] **Fridy, J.A.,** (1985). On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313.

[9] **Fridy, J.A., Khan, M.K.,** (2000). Statistical extensions of some classical tauberian theorems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, 2347-2355.

[10] **Fridy, J.A., Orhan, C.,** (1993). Lacunary statistical convergence, *Pasific J. Math.*, 160, 43-51.

[11] **Guseinov, G.S.,** (2003). Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 285, 107-127.

[12] **Hardy, G.H.,** (1949). Divergent Series, *Oxford at the Clarendon Press*.

[13] **Hilger, S.,** (1990). Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.*, 18, 18-56.

[14] **Lorentz, G.G.,** (1948). A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.*, 80, 167-190.

[15] **Maddox, I.J.,** (1967). Spaces of strongly summable sequences, *Quart. J. Math. Oxford*, 18, 345-355.

[16] **Móricz, F.,** (2004). Statistical limits of measurable functions, *Analysis*, 24, 207-219.

[17] **Turan, C., Duman, O.,** (2013). Convergence methods on time scales, *AIP Conf. Proc.*, 1558, 1120-1123.

[18] **Turan, C., Duman, O.,** (2013). Statistical convergence on timescales and its characterizations, *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, Springer Proceedings in Math. and Stat.*, 41, 57-71.

[19] **Turan, C., Duman, O.,** (2016). Fundamental properties of statistical convergence and lacunary statistical convergence on time scales, *Filomat (accepted for publication)*.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ceylan YALÇIN

Uyruğu : TC

Doğum Tarihi ve Yeri :25.02.1989-Altındağ

E-posta : cturan@etu.edu.tr, ceylaanturan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2010, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2012, TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü
- **Doktora** : 2017, TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2014	TOBB ETÜ Matematik Bölümü	Burslu Lisansüstü Öğrenci
2010-2016	TÜBİTAK	Yurtiçi Lisansüstü Bursu

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Turan, C.** and Duman, O. 2013. Convergence methods on time scales, AIP Conf. Proc., 1558, 1120-1123. (SCI-Expanded kapsamındadır.)
- **Turan, C.** and Duman, O. 2016. Fundamental properties of statistical convergence and lacunary statistical convergence on time scales, Filomat, accepted for publication. (SCI-Expanded kapsamındadır.)
- **Turan, C.** and Duman, O. 2013. Convergence methods on time scales, 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics - ICNAAM 2013, September 21-27, Rhodes, Greece.

- **Turan, C.** and Duman, O. 2014. Recent developments on convergence methods on time scales, International Conference: Mathematics Days in Sofia - MDS 2014, July 07-10, Sofia, Bulgaria.
- **Turan, C.** and Duman, O. 2014. On convergence methods of functions defined on time scales, International Conference on Recenet Developments in Pure and Applied Mathematics - ICRAPAM 2014, November 06-09, Antalya, Turkey.
- **Turan, C.** and Duman, O. 2016. Hardy type Tauberian condition on time scales, Emerging Trends in Applied Mathematics and Mechanics - ETAMM 2016, May 30-June03, Perpignan, France.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Turan, C.** and Duman, O. 2012. Statistical convergence on time scales, International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory - AMAT 2012, May 17-20 , Ankara, Turkey.
- **Turan, C.** and Duman, O. 2013. Statistical convergence on timescales and its characterizations, Advances in Applied Mathematics Approximation Theory, Springer Proceedings in Math. and Stat.,41, 57-71.