TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DERECELİ KÜMELER TEORİSİNDE TEMEL TEOREMLERİN SEZGİSEL GENİŞLEMELERİ VE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNE BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Selami BAYEĞ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer AKIN

AĞUSTOS 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

………………………..
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

……………………….
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 122117001 numaralı Doktora Öğrencisi **Selami BAYEĞ**'in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"DERECELİ KÜMELER TEORİSİNDE TEMEL TEOREMLERİN SEZGİSEL GENİŞLEMELERİ VE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNE BAZI UYGULAMALARI"** başlıklı tezi **10 Ağustos 2018** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ömer AKIN** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Şahin EMRAH (Başkan)** ....
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Nizami GASİLOV ....
Başkent Üniversitesi

Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Zülfükar SAYGI ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Selami BAYEĞ

ÖZET

Doktora Tezi

DERECELİ KÜMELER TEORİSİNDE TEMEL TEOREMLERİN SEZGİSEL GENİŞLEMELERİ VE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNE BAZI UYGULAMALARI

Selami BAYEĞ

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer AKIN

Tarih: Ağustos 2018

Bu tez çalışmasında, dereceli kümeler teorisinde önemli olan bazı tanım ve teoremler sezgisel dereceli kümelere genişletilerek, birinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği Hukuhara ve kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevleri altında incelenmiştir. Bunun için öncelikle dereceli sayılar için verilen karakterizasyon teoremleri sezgisel dereceli sayılara genişletilerek bu sayıların α ve β kesitleri incelenmiştir. Sezgisel dereceli sayıların Minkowski toplamı ve skalerle çarpımı α ve β kesitler yardımıyla tanımlandıktan sonra sezgisel dereceli sayılar uzayının bu iki işlem altında kapalı olduğu ispatlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla sezgisel dereceli sayıların Hukuhara ve genelleştirilmiş Hukuhara farklarının bazı özellikleri ifade edilip ispatlanmıştır. Hausdorff metriği yardımıyla, sezgisel dereceli sayılar uzayında D_∞ metriği tanımlandıktan sonra bu metriğin bazı temel özellikleri verilmiştir ve sezgisel dereceli sayılar uzayının D_∞ metriği altında tam olduğu ispat edilmiştir. Bu teorem yardımıyla sürekli sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonlar uzayında D_S metriği tanımlanmıştır ve bu uzayın D_S metriği altında tam olduğu ispatlanmıştır. Dereceli kümeler için tanımlanmış olan Hukuhara türevi, kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi ve Aumann integrali kavramları sezgisel dereceli kümelere genişletilerek, bu kavramların bazı temel özellikleri α ve β kesitler yardımıyla ifade edilip ispatlanmıştır. Sezgisel dereceli sayılar için tanımlanan Hukuhara türevi ve Aumann integrali kavramları arasındaki ilişki, analizin temel teoremleri yardımıyla ifade edilip ispatlanmıştır. Bu tanım ve teoremler kullanılarak Hukuhara ve kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevleri altında birinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer problemerinin çözümlerinin varlık ve tekliği, Banach sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır. Son olarak Zadeh'in genişleme ilkesi yardımıyla ikinci mertebeden lineer sezgisel dereceli başlangıç değer problemlerinin çözümlerini veren bir teorem ifade edilip ispatlanmıştır ve elde ettiğimiz sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dereceli kümeler, Sezgisel dereceli kümeler, Karakterizasyon teoremleri, Hausdorff metriği, Hukuhara türevi, Kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi, Aumann integrali, Zadeh'in genişleme ilkesi, Sezgisel dereceli başlangıç değer problemleri.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

INTUITIONISTIC EXTENSIONS OF FUNDAMENTAL THEOREMS IN FUZZY SET THEORY AND SOME APPLICATIONS TO INITIAL VALUE PROBLEMS

Selami BAYEĞ

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömer AKIN

Date: August 2018

In this thesis, we have firstly generalized the fundamental definitions and theorems from fuzzy set theory to intuitionistic fuzzy set theory and then studied the existence and uniqueness of the solution of the first order intuitionistic initial value problems under Hukuhara and strongly generalized Hukuhara derivative concept and we have given an algorithm to find the solution of the second order linear differential equations with intuitionistic fuzzy initial values and forcing coefficients. First of all, the characterization theorems in fuzzy set theory are extended to intuitionistic fuzzy environment and the properties of α and β cuts of intuitionistic fuzzy numbers are investigated. Then we have defined Minkowski sum and scalar multiplication of intuitionistic fuzzy numbers in terms of α and β cuts. And then, we have shown that the set of intuitionistic fuzzy numbers are closed with respect to Minkowski sum and scalar multiplication. With the aid of these operations we have given some properties of Hukuhara difference and generalized Hukuhara difference for intuitionistic fuzzy numbers. We have defined D_∞ metric on the set of intuitionistic fuzzy numbers and given some of its properties. And we have proved that the space of intuitionistic fuzzy numbers is complete with respect to D_∞. Moreover, we have proved that the space of continuous intuitionistic fuzzy number valued functions is complete with respect to the metric D_s. Besides, the concepts of Hukuhara derivative, strongly generalized Hukuhara derivative and Aumann integral are investigated in intuitionistic fuzzy environment by taking the properties of α and β cuts into consideration. With the help of these generalizations, the existence and uniqueness of the solution of the first order intuitionistic initial value problems under Hukuhara and strongly generalized Hukuhara derivative concept are studied and the algorithm to find the solution of second order linear differential equations with intuitionistic fuzzy initial values and forcing coefficients is given. Finally, numerical examples are given in line with these results.

Keywords: Fuzzy set theory, Intuitionistic fuzzy set theory, Characterization theorems, Hausdorff metric, Hukuhara derivative, Strongly generalized Hukuhara derivative, Aumann integral, Zadeh's extension principle, Intuitionistic initial value problems.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren kıymetli hocam Prof. Dr. Ömer AKIN‘a, tez çalışmamdaki yardımlarından dolayı değerli tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Şahin EMRAH’a ve Doç. Dr. Zülfükar SAYGI’ya; seminer çalışmalarımızda değerli yorumları ve bilgi birikimi ile çalışmamıza katkı sağlayan Prof. Dr. İ. Burhan TÜRKŞEN’e ve Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU’na; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimim boyunca sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi’ne teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

H-Farkı : Hukuhara farkı
gH-Farkı : Genelleştirilmiş Hukuhara farkı
H-Türevi : Hukuhara türevi
GH-Türevi : Kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\tilde{A}$	Dereceli küme
$\tilde{A}^i$	Sezgisel dereceli küme
$A(\alpha)$	Dereceli veya sezgisel dereceli kümelerin α-kesit kümesi
$A^*(\beta)$	Sezgisel dereceli kümelerin β-kesit kümesi
$K_C(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de kompakt ve konveks kümeler ailesi
$F(X)$	X kümesinde dereceli kümeler ailesi
$F(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de dereceli kümeler ailesi
$F_N(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de dereceli sayılar ailesi
$IF(X)$	X kümesinde sezgisel dereceli kümeler ailesi
$IF(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de sezgisel dereceli kümeler ailesi
$IF_N(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de sezgisel dereceli sayılar ailesi
$s_A(p)$	A kümesinin destek fonksiyonu
$s_{A(\alpha)}(p)$	$A(\alpha)$ kesiti için destek fonksiyonu
$s_{A^*(\beta)}(p)$	$A^*(\beta)$ kesiti için destek fonksiyonu
$d_H(.,.)$	Hausdorff metriği
$d_\infty(.,.)$	Dereceli kümeler için Hausdorff metriği
$D_\infty(.,.)$	Sezgisel dereceli kümeler için Hausdorff metriği
$D_1(.,.)$	Sezgisel dereceli kümelerin α-kesiti için Hausdorff metriği
$D_2(.,.)$	Sezgisel dereceli kümelerin β-kesit kümesi için Hausdorff metriği
$D_s(.,.)$	Sezgisel dereceli sayı değerli sürekli fonksiyonlar için supremum metriği
$f(x;\alpha)$	Dereceli veya sezgisel dereceli f fonksiyonunun α-kesiti
$f^*(x;\beta)$	Sezgisel dereceli f fonksiyonunun β-kesiti
$kap(A)$	A kümesinin kapanışı

1. GİRİŞ

Bilim insanları, gerçek dünyayı daha iyi anlamak için modeller kurarlar ve bu modelleri belirli şartlar altında incelerler. Başka bir deyişle gerçek dünyayı değil bunların modellerini inceleyerek olayları anlamaya çalışırlar. Ancak hemen hemen bu modellerin tümünde çeşitli belirsizlikler mevcuttur [32].

Belirsizlik, epistemolojik anlamda bilginin tersi olarak düşünülebilir. Belirli bir mühendislik ya da bilimsel problem hakkında bilgi; eksik, kesin olmayan, parçalara ayrılmış, güvenilmez, belirsiz ya da çelişkili olabilir. Bir problem hakkında daha fazla bilgi edindiğimizde, bu problemin modeli ve çözümü hakkında olan belirsizlik gittikçe azalmaktadır. Aksi durumda çok az bilgi ile karakterize edilen problemlerin veya modellerin kötü konulmuş (ill-posed) veya karmaşık (kompleks) olduğu söylenir. Bu tip problemler yüksek derecede belirsizlikler kapsamaktadır. Belirsizlik birçok biçimde ortaya çıkabilir: bulanık (fuzzy, belirsiz, yaklaşık), muğlak (vague, spesifik olmayan, amorf), çok anlamlı (ambiguous, kuşkulu) ya da tabiatı gereği sürekli değişken (çelişen, rastgele, kaotik, öngörülemeyen) olabilir. Dolayısıyla belirsizliğin yapısı, uygun bir model oluşturulurken düşünülmesi gereken önemli bir noktadır [65].

Tarihsel bir bakış açısıyla, belirsizlik konusu çoğu zaman bilim insanları tarafından benimsenmemiştir. Bilimin geleneksel bakış açısında, belirsizlik istenmeyen her ne pahasına olursa olsun kaçınılması gereken bir durumu temsil etmiştir [65]. Bu durum, fizikçilerin Newton mekaniğinin moleküler düzeyde problemleri çözemediğini fark ettikleri 19. yüzyıla kadar sürmüştür. Bu yüzden mekanikte olasılık ve istatistiksel yöntemlere dayalı yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu sayede, belirsizliklerin incelenmesine yer vermeyen Newton mekaniği, moleküler düzeyde yerini rastlantısal belirsizlikleri yorumlayabilecek olan istatistiksel mekaniğe bırakmıştır. İstatistiksel mekaniğin geliştirilmesinden sonra, geçtiğimiz yüzyılda bilimde, belirsizliğin problemler üzerindeki etkisini değerlendirmek, belirsizlik tipini tayin etmek, belirsizlik miktarını ölçmek, modelleri daha sağlam bir hale getirmek ve bu sayede güvenilir çözümler üretebilmek için belirsizliklerin araştırılması üzerine kademeli bir eğilim oluşmuştur [65].

Modern fiziğin gelişmesiye, bazı bilim insanları iki-değerli mantık (bivalent logic, binary logic) anlayışının gerçek hayattaki belirsizlikleri açıklamadaki yetersizliğini dile getirmiştir. 1923'te Bertrand Russell "Tüm geleneksel mantık yaklaşımları, alışkanlıklarımız gereğince, kesin sembollerle çalışmaktadır. Bu yüzden bu yaklaşımlar dünya hayatı için değil ancak kurgulanmış semavi bir dünyaya uygulanabilir." sözleriyle iki-değerli mantık anlayışını eleştirmiştir [53].

Matematikte iki-değerli mantığın kullanımı, büyük ölçüde, Aristo'nun (Aristoteles) çabalarına ve onu destekleyen filozofların başarısına borçludur. Bu mantığın kullanımı üçüncü halin olmazlık ilkesine (law of excluded middle) dayanmaktadır. Bu ilkeye göre bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. Başka bir deyişle bir eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir. Ancak bu yasanın ilk versiyonu Antik Yunan felsefesinde rasyonalizm geleneğinin ilk filozoflarından biri olan Parmenides tarafından ortaya atılmıştır. Parmenides'e göre, evrende değişen hiçbir şey yoktur. Gerçeklik, yani varlık; mutlak anlamda birdir, kalıcıdır, süreklidir, yaratılmamıştır, yok edilemez; onda hareket ve değişim yoktur. Parmenides, bu fikirlerin ortaya atıldığı ilk zamanlarda Heraclitus gibi görecelik kavramını savunan bir çok filozofun güçlü itirazlarıyla karşılaşmıştır. Heraclitus'a göre bir şey aynı anda kısmen yanlış veya kısmen doğru olabilir, mutlak doğru veya mutlak yanlış yoktur. Benzer şekilde Platon'a göre, doğru ile yanlış arasında üçüncü bir bölge vardır. Aslında üçüncü halin olmazlık ilkesini benimseyen ve klasik mantığın babası olarak adlandırılan Aristo'nun kendisi bile bu ilkenin tüm durumlarda geçerli olamayacağını itiraf etmiştir. Ancak bu durumlar için kullanılabilecek başka mantık sistemi arayışına girmemiştir [53, 65].

20. yüzyıla gelinceye kadar mantıkçılar ve bilim insanları üçüncü halin olmazlık ilkesine dayanan mantığı benimsemişlerdir. İki-değerli matematiksel mantık, 20. yüzyıl biliminin ve teknolojisinin temelini oluşturmuştur. Hiçbir matematikçi, onun sağlamlığından, öneminden kuşkulanmaz. Fakat doğa olayları ile ilgilenen bilim insanları, özellikle modern fizikçiler, bazı doğa olaylarını açıklamak için iki-değerli mantığın yetmediğini çaresizlik içinde görüyorlardı. İki-değerli mantıkla istenilen kesinliğin elde edilemediği yerlerde, doğa bilimciler olasılık teorisine başvurmuşlardır [50]. Bu arada bazı mantıkçılar iki-değerli mantıktan farklı çok-değerli mantık (multi-valued logic) sistemleri oluşturuyorlardı. Nihayet, 20. yüzyılın başlarında modern fizikteki gelişmelerden dolayı çok-değerli mantık anlayışı tekrar geri gelmiştir.

Çok-değerli mantık sistemi ilk kez 1920'de Polonyalı düşünür ve mantıkçı Jan Lukasiewicz tarafından ortaya atılmıştır. Lukasiewicz üç-değerli mantık yaklaşımında bir önermeye "doğru", "yanlış" veya "mümkün (possible)" değerlerini vermiştir. Daha sonraki çalışmalarında dört-değerli mantık, beş-değerli mantık yaklaşımları derken Alfred Tarski ile birlikte n-değerli mantık yaklaşımını ortaya atarak sonsuz-değerli mantık yaklaşımlarının mümkün olabileceği üzerinde çalışmalar yayımlamışlardır. Aynı yıllarda Emil L. Post, Hans Reichenbach, Kurt Gödel gibi düşünür ve matematikçiler çok-değerli ve sonsuz-değerli mantık üzerine çalışmalar yapmışlardır [27].

19. yüzyılın sonlarından 20. yüzyıla kadar olan bilimsel modellerde belirsizliği ölçmede önde gelen teori olasılık teorisi olmuştur. Ancak olasılık teorisi ile sadece rastgele ve rastlantısal belirsizlikler hakkında bilgiler edinilmektedir. Hatta dönemin ünlü fizikçilerinden Albert Einstein "Tanrı'nın zar attığına inanmam!" sözleriyle doğa olaylarının olasılık yöntemleri ile açıklanmasına karşı çıkmıştır. 20. yüzyıl, olasılık teorisiyle rastgele türden belirsizlikler haricindeki belirsizlikleri inceleyebilmek için geliştirilen alternatif mantık yaklaşımlarının yüzyılı olmuştur. Ancak, olasılık teorisini kullanarak belirsizlik ifadesinin kademeli gelişimi, ilk olarak 1937'de Max Black tarafından muğlaklıkla ilgili yaptığı çalışmalarla başlamıştır [65]. Sözel (Bilişsel) ifadelerdeki belirsizliğin mantık üzerindeki etkilerini araştıran ünlü bilim insanı Max Black, insan duyularının kullanıldığı tüm uygulamalarda belirsizlik olduğunu dolayısıyla insanın dünya ile olan her türlü ilişkilerinde belirsizliklerin kaçınılmaz olduğunu savunmuştur [27]. 1960'lı yıllarda Arthur Dempster, bilgi eksikliklerinden kaynaklanan belirsizlikler üzerine çalışmalar yaparak kanıt teorisini (Evidence theory) ortaya atmıştır. 1965'te Lotfi A. Zadeh sonsuz-değerli bir mantık temeline dayanan dereceli (fuzzy, bulanık) mantık teorisini ve dereceli kümeler teorisini ortaya atmıştır. 1970'lerde Glenn Shafer, Arthur Dempster'ın ortaya attığı kanıt teorisini genişletmiştir ve aynı yılda Lotfi A. Zadeh dereceli kümelerden yola çıkarak olabilirlik

teorisini (Possibility theory) geliştirmiştir. 1980'lerde araştırmacılar olasılık teorisi, kanıt teorisi ve olabilirlik teorisi arasında güçlü ilişkiler olduğunu göstermişlerdir [65].

1965 yılında Lotfi A. Zadeh "Fuzzy sets" adlı çalışmasında temeli sonsuz-değerli mantığa dayanan dereceli mantığı sunarak, dereceli kümeler teorisinin matematiksel temellerini atmıştır [72]. Bu teoriye göre bir kümenin her bir elemanı, [0,1] aralığında değerler alan ve üyelik fonksiyonu adı verilen bir fonksiyon ile verilmektedir. Bu fonksiyon yardımıyla, kümenin elemanı kümeye tam olarak ait olabilir, kısmi olarak ait olabilir veya hiç ait olmayabilir. Dolayısıyla dereceli kümede, bir elemanın kümeye aidiyetinde bir derecelendirme vardır. Dereceli mantığın çok çeşitli uygulamaları günümüz teknolojisi tarafindan kullanılmaktadır. Genel olarak, mühendislik ve kontrol teorisine çok yaygın bir şekilde uygulanmaktadır. Örneğin; Japonya'daki metro hatları ve elektronik sistemleri; Almanya'daki otomobil endüstrisi ve ev aletlerine ek olarak finans, borsa, biyomedikal, ekoloji, tarım, coğrafya, reoloji, uydu kontrolü, nükleer bilim, hava durumu tahmini, yapay zeka, robotik ve roket bilimi gibi daha bir çok alanda kullanılmaktadır [53]. Bu uygulamaların çoğu dereceli kümeler teorisinin matematiksel modellere uygulanması ile doğru orantılı olarak artmaktadır.

Matematiksel modeller gerçek hayatı anlamamızda son derece önemli bir yere sahiptir. Bu modellerin bir çoğu diferensiyel denklemler kapsamakadır. Diferensiyel denklemler gerçek hayattaki olayları modellemek için kullanılan etkili yollardan biridir. Ancak çoğu zaman yetersiz veri, ölçümlerdeki hatalar ve başlangıç koşullarındaki eksiklikler gibi birçok değişik sebepten kaynaklanan belirsizlikler, bu problemlerin tam olarak modellenmesini engellemektedir. Dolayısıyla matematiksel modellemelerde bu belirsizlikler dereceli kümelerle ifade edilerek dereceli diferensiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar gün geçtikçe artmaktadır. Örneğin, inşaat mühendisliği [62], biyoinformatik ve hesaplamalı biyoloji [31], ekonomi modellemeleri [64], kuantum optiği ve rölativite [37], HIV modellemesi [46, 73], bakteri kültürü modellemesi [29], gıda mühendisliği [4], av-avcı modelleri [3], popülasyon dinamiği [19] gibi birçok modellemede kullanılmaktadır. Özellikle dinamik sistemlerde veriler hakkındaki bilgilerin yeterli olmaması ile ortaya çıkan belirsizlikler altında gerçeğe yakın ve etkili bir modelleme için dereceli diferensiyel denklemlerin kullanılması kaçınılmazdır [53]. Bazı uygulamalarda üyelik fonksiyonunun kendisi de belirsizlik içerebilir. Bu durum esas olarak uzman bilgisinin (expert knowledge) öznelliğinden veya modellerdeki bilgi eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla, Zadeh'in [72] ortaya attığı dereceli küme kavramı, dereceli kümedeki bir elemanın o kümeye aidiyetinin belirsizlik derecesi (degree of uncertainity) hakkında herhangi bir bilgi vermemektedir. Bu yüzden dereceli kümeler için latis-değerli dereceli kümeler [42], tip-2 dereceli kümeler [55] ve sezgisel dereceli kümeler [7] gibi çeşitli genelleştirmeler yapılmıştır.

Bu genelleştirmelerden biri olan sezgisel dereceli kümeler, Krassimir T. Atanassov tarafından 1986 yılında ortaya atılmıştır [7]. Atanassov, sezgisel dereceli kümedeki bir elemanı, değerleri toplamı birden küçük olan üye olma (üyelik) fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonuyla vererek, elemanın kümeye aidiyetinin belirsizlik derecesini tanımlamıştır. Lilija Atanassova ile birlikte dereceli olmayan ancak sezgisel dereceli olan bir küme örneği vererek sezgisel dereceli kümelerin, dereceli kümelerin bir genelleştirilmesi olduğunu göstermişlerdir [16]. Daha sonra sezgisel dereceli küme kavramının kendine has özellikleri olduğu yapılan çalışmalarda gösterilmiştir [6, 8–15]. Sezgisel dereceli kümelerin isim babası olan George Gargov, sezgisel dereceli sayıların aralık değerli dereceli sayılara denk olduğunu göstermiştir [5]. Sezgisel dereceli kümeler teorisi son yıllarda aktif bir araştırma alanı olmuştur. Örüntü tanıma [35], tıbbi tanı [34], ilaç seçimi [49], mikroelektronik hata analizi [68], karar verme mekanizmaları [71] gibi bir çok alanda uygulanmaya başlanmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Sezgisel dereceli başlangıç değer problemleri ile ilgili yapmış olduğumuz literatür taramasında sezgisel dereceli sayılar ile çalışan araştırmacıların dereceli kümelerdeki temel tanım ve teoremleri sezgisel dereceli kümelere genişletmeden kullandıklarını gözlemledik [28, 56–58, 66, 67]. Bu nedenle tez çalışmamızda dereceli kümeler teorisindeki bu tanım ve teoremlerin sezgisel dereceli kümelere genişletilerek sezgisel başlangıç değer problemlerine uygulanması amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda yapacağımız çalışmaları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1) Öncelikle Goetschel-Voxman [41] ve Negoita-Ralescu [60] tarafından dereceli kümeler için verilen karakterizasyon teoremlerini, $\mathbb{R}^n$ deki sezgisel dereceli sayılara genişleteceğiz. Bu teoremler yardımıyla sezgisel dereceli sayıların α-kesitler ve β-kesitlerinin kompakt ve konveks kümeler olduğunu göstereceğiz. Böylece sezgisel dereceli sayılar ile kompakt ve konveks kümeler arasındaki ilişki sayesinde kompakt ve konveks kümeler uzayının özelliklerinden yararlanarak, sezgisel dereceli sayılar için Minkowski toplamnı, skalerle çarpımını, Hukuhara farkını (H-farkı) ve genelleştirilmiş Hukuhara farkını (gH-farkı) tanımlayacağız ve bunların temel özelliklerini α ve β kesitler yardımıyla inceleyeceğiz. $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümelere karşılık bir ve yalnız bir destek fonksiyonu karşılık geldiği için [36] sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitlerinin bazı özelliklerini destek fonksiyonu yardımıyla inceledikten sonra sezgisel dereceli sayıların gH-farkının mevcut olması için gerek ve yeter şartı vereceğiz.

2) Dereceli kümeler teorisinde en sık kullanılan metrik supremum Hausdorff metriğidir [23, 36, 47, 48]. Bu metrik esasen $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümeler için tanımlanmış olan Pompeiu-Hausdorff metriğine dayanmaktadır [36]. Sezgisel dereceli sayılar kümesinin metrik özelliklerini α ve β kesitlerini göz önünde bulundurarak inceleyebilmek için D_∞ metriğini tanımlayacağız ve sezgisel dereceli sayılar kümesinin bu metrik ile tam bir metrik uzay oluşturduğunu ispatlayacağız. Bu metrik yardımıyla D_s metriğini tanımlayacağız ve sürekli sezgisel dereceli fonksiyon uzayının D_s metriği altında tam olduğunu göstereceğiz.

3) Dereceli sayı değerli fonksiyonlar için türevlenebilme kavramı ilk kez Puri-Ralescu tarafından Hukuhara farkı yardımıyla tanımlanmıştır [63]. Ancak uygulamalarda bu türev tanımının bazı dezavantajları mevcuttur [47]. Bu yüzden, Bede-Gal [24] tarafından kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara (GH) türevi tanımı verilmiştir. Tez çalışmamızın 5. Bölümünde, 3. ve 4. Bölümlerde elde ettiğimiz sonuçlardan yararlanarak sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonların H-türevini ve GH-türevinin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

4) Dereceli kümeler teorisinde integrallenebilme kavramı $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks küme değerli fonksiyonlar için tanımlanan Aumann integrali kavramına dayanmaktadır [17, 36]. Bu yüzden, kompakt ve konveks küme değerli fonksiyonlar için tanımlanan Aumann integrali yardımıyla, sezgisel sayı değerli fonksiyonlar için Aumann integrallenebilme kavramını α ve β kesitlerin özelliklerini göz önüne alarak tanımlayıp bazı özelliklerini inceleyeceğiz. GH-türevi ile Aumann integrali arasındaki ilişkiyi analizin temel teoremleri yardımıyla ispatlayacağız.

5) Tez çalışmamızın 6.1 ve 6.2 Kesimlerinde, önceki bölümlerde elde ettiğimiz sonuçlar yardımıyla H-türevi ve GH-türevi altında birinci mertebeden sezgisel başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve teklik teoremlerini ifade edip bunları Banach sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlayacağız. Kesim 6.3'te ise başlangıç koşulları ve zorlayıcı fonksiyon katsayıları sezgisel dereceli sayılar olan ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerini sezgisel dereceli kümeler için verilen Zadeh'in genişleme ilkesi [15, 54] ve Heaviside fonksiyonu [1] yardımı ifade edip ispatlayacağız.

1.2 Literatür Araştırması

Dereceli kümeler teorisinde ve aralık analizinde Minkowski toplamına göre her elemanın tersi mevcut olmak zorunda değildir [36, 59]. Bu durum dereceli kümeler teorisinde ve uygulamalarında problemler oluşturmaktadır [69]. Bu yüzden yeni "fark" arayışları uzun bir süre araştırmacılar için ilgi alanı olmuştur. Bunlardan en çok kullanılanı ve bilineni Hukuhara farkı (H-farkı) dır [24]. Esasen kompakt ve konveks kümeler için tanımlanan H-farkı daha sonra dereceli kümeler için tanımlanmıştır [44]. Ancak H-farkı her zaman mevcut olmadığı için, Bede ve ark. [22, 24, 70] H-farkını genişleterek genelleştirilmiş Hukuhara farkını (gH-farkı) tanımlayarak dereceli küme değerli fonksiyonlar için yeni türev tanımları oluşturmuşlardır.

Dereceli türev kavramı ilk olarak Chang ve Zadeh [33] tarafından ortaya konulmuştur. Onları takiben Puri ve Ralescu [63] bu konuda çalışmışlardır. Puri ve Ralescu küme değerli fonksiyonlardaki Hukuhara türevini genelleştirip dereceli fonksiyonlara genişletmişlerdir. Bunun sonucu olarak Puri ve Ralescu'nun genelleştirdiği Hukuhara türevini, ilk defa Kaleva [47, 48] kullanarak dereceli diferensiyel denklemler konusunu incelemiştir. Ancak daha sonra Hukuhara türevinin zayıf bir tarafi görülmüştür.

Bu türev tanımı kullanılarak bulunan diferensiyel denklemin çözümü, zaman geçtikçe derecelileşmekte (bulanıklaşmakta) ve sonunda diferensiyel denklemin klasik çözümü ile tamamen farklı davranmaktadır. Hukuhara türevinin bu zayıf yönüne karşı Hüllermeier [45] farklı bir alternatif sunmuştur.

Hüllermeier, dereceli diferensiyel denklemi bir diferensiyel kapsamalar ailesi olarak yorumlamıştır. Ancak bu yaklaşımın, dereceli türevden bahsetmemesi bir eksiklik olarak görülmüştür. Sonunda Bede ve Gal [24], dereceli değerli fonksiyonlar için güçlü genelleştirilmiş türev tanımını geliştirmişlerdir. Bu türev tanımı ile yukarıda bahsedilen eksiklikler ortadan kaldırılmıştır.

Dereceli başlangıç değer problemlerini çözerken uygulanan türev tanımı büyük önem teşkil etmektedir. Çünkü her yöntemin sunduğu çözümler aynı olmak zorunda değildir [23]. Dolayısıyla literatürde bir çok yöntem mevcuttur [23, 43]. Buckley ve arkadaşları, Zadeh' in genişleme ilkesini kullanarak dereceli diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerini alt aralıklarda incelemişlerdir [30]. Bede ve arkadaşları kuvvetli genelleştirilmiş türev, zayıf genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş türev tanımları altında dereceli başlangıç değer problemlerini incelemişlerdir [22, 24, 25, 70]. Fard [38], dereceli diferensiyel denklemler için nümerik çözümler geliştirmiştir. Bu denklem sistemleri için Gasilov ve ark. [40] geometrik yaklaşımlar kullanılarak çözümler sunmuşlardır. Literatürde dereceli diferensiyel denklem ve denklem sistemleri için daha birçok çalışma mevcuttur [1, 2, 39, 61, 62].

2. DERECELİ KÜMELER TEORİSİ

2.1 Amaç

Bu bölümde literatürde sıklıkla kullanılan ve sezgisel dereceli sayılara genişlemelerini yapacağımız dereceli kümelerle ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.2 Klasik Kümeler

Küme kavramı matematiktiğin hemen hemen tüm alanlarında temel bir kavramdır. Sezgisel olarak klasik bir kümeyi, iyi tanımlanmış veya iyi belirlenmiş nesnelerin ailesi olarak tanımlayabiliriz. Bu yüzden klasik bir kümede bir elemanın kümeye aidiyeti kesin olduğundan klasik kümelerde bir eleman kümeye ya aittir ya da değildir. Bu aidiyet karakteristik fonksiyonu yardımıyla verilebilir.

Tanım 2.2.1. *X bir küme ve $A \subseteq X$ alt kümesi verilmiş olsun. Bu durumda*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$$

*ile tanımlanan fonksiyona A kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir.*

Klasik kümeler ve bu kümelerdeki işlemler karakteristik fonksiyon yardımıyla gösterilebilir. Örneğin, herhangi iki A ve $B \subseteq X$ kümesinin birleşimi $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ veya } x \in B\}$, kesişimi $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ ve A kümesinin tümleyeni $A^t = \{x \in X : x \notin A\}$ sırasıyla

$$\begin{aligned} \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A, \chi_B\} \\ \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A, \chi_B\} \\ \chi_{A^t}(x) &= 1 - \chi_A \end{aligned}$$

ile tanımlanabilir. Karakteristik fonksiyonun tanımından görüldüğü üzere bu fonksiyon 0 ve 1 olmak üzere sadece iki değer almaktadır.

2.3 Dereceli Kümeler

Dereceli kümeler kavramı ilk kez 1965'te L. A. Zadeh tarafından ortaya atıldı [72]. Dereceli bir küme, aslında karakteristik fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değerler alan elemanların oluşturduğu bir kümedir. Dereceli kümeler gerçek hayatta "genç-yaşlı", "soğuk-sıcak" ve "uzak-yakın" gibi kesin olarak ifade edilemeyen kavramların matematiksel olarak ifade edilmesini sağlamaktadır. Dolayısıyla sözel değişkenleri, sözel ifadeleri veya tam olarak tanımlanamayan kümeleri matematiksel olarak ifade edebilmek için dereceli kümelerin kullanılması gerekmektedir.

Tanım 2.3.1. *[23] $A \subseteq X$ kümesi ve $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu verilmiş olsun.*

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) : X \to [0,1]\}$$

*kümesine X de dereceli bir küme denir. μ_A fonksiyonuna **üye olma (üyelik) fonksiyonu** adı verilir.*

Burada, $\mu_A(x) = 0$ ise x, A kümesine ait değildir; $\mu_A(x) = 1$ ise x, A kümesine tam olarak aittir ve $0 < \mu_A(x) < 1$ ise x, A kümesine kısmi olarak aittir denir. X kümesindeki tüm dereceli kümeler ailesini $F(X)$ ile göstereceğiz.

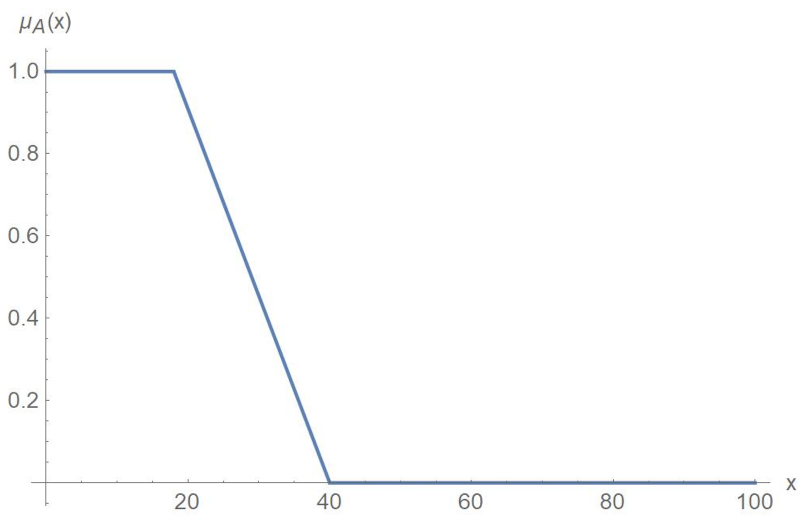
Örnek 2.3.1. X tüm insanlar kümesi olsun. $A \subseteq X$ kümesi "genç insanlar" kümesi olsun. "Genç" kelimesi sözel ve göreceli bir kelime olduğu için A kümesinin elemanlarını dereceli olarak

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq 20 \\ \frac{40-x}{20}; & 20 < x \leq 40 \\ 0; & x > 40 \end{cases}$$

fonksiyonu ile belirtirsek

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) : X \to [0,1]\}$$

dereceli kümesi elde edilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Genç insanlar kümesi.

Tanım 2.3.2. *[36]*

*$\tilde{A} \in F(X)$ dereceli kümesi verilmiş olsun. $\tilde{A}$ kümesinin **α-kesit (seviye)** kümesi*

$\alpha \in (0,1]$ için

$$A(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$\alpha = 0$ için

$$A(0) = kap\left(\bigcup_{\alpha\in(0,1]} A(\alpha)\right)$$

olarak tanımlanır. Burada "kap" kümenin kapanışını belirtmektedir.

2.4 $\mathbb{R}^n$ de Dereceli Sayılar

$X = \mathbb{R}^n$ deki dereceli kümelere belirli şartların eklenmesiyle "Dereceli sayılar" adı verilen özel dereceli kümeler elde edilmektedir. Dereceli sayılar uygulamalarda sıklıkla kullanıldığı için dereceli kümeler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu kesimde dereceli sayılar hakkında temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.4.1. *[36] Aşağıdaki şartları sağlayan $\tilde{A} \in F(\mathbb{R}^n)$ dereceli kümesine **dereceli sayı** adı verilir.*

1) *$\tilde{A}$ dereceli kümesi normaldir. Yani, $A(1) \neq \varnothing$ dır.*

2) *$A(0)$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir kümedir.*

3) *$\mu_A(x) : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu üst yarı-süreklidir. Yani, $\forall k \in [0,1]$ için $\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) < k\}$ kümesi açık bir kümedir.*

4) *$\mu_A(x) : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu kuasi-konkavdir (dereceli konveksdir). Yani, $\forall x, y \in A(\alpha)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

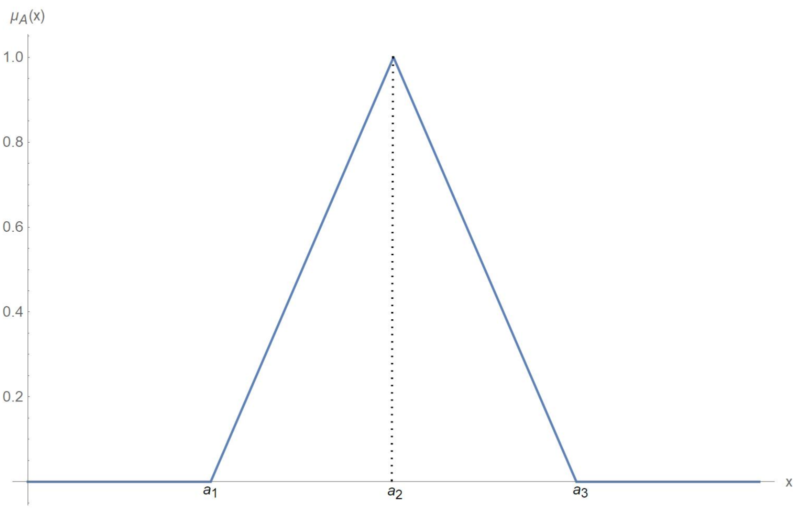
sağlanır.

Bundan sonra kolaylık sağlaması açısından $\mathbb{R}^n$ deki dereceli sayılar ailesini $F_N(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz. Literatürdeki uygulamalarda en sık kullanılan dereceli sayılar üçgen ve yamuk dereceli sayılardır.

Tanım 2.4.2. *[23] $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ olmak üzere a_1, a_2 ve a_3 reel sayıları verilmiş olsun.*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x < a_1 \ \& \ x > a_3 \end{cases}$$

*üyelik fonksiyonu ile verilen $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısına **üçgen dereceli sayı** denir ve $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ile gösterilir (Şekil 2.2).*

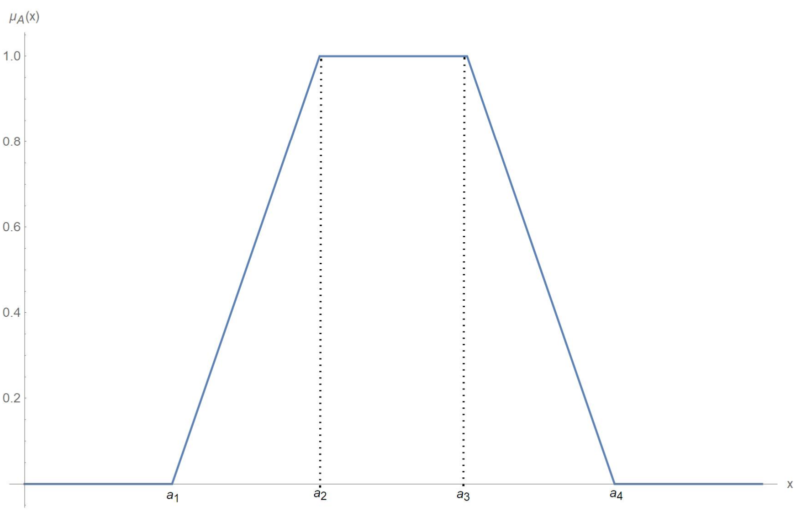


Şekil 2.2: $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ üçgen dereceli sayısı.

Tanım 2.4.3. *[23] $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ olmak üzere a_1, a_2, a_3 ve a_4 reel sayıları verilmiş olsun.*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x < a_1 \ \& \ x > a_4 \end{cases}$$

*üyelik fonksiyonu ile verilen $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısına **yamuk dereceli sayı** denir ve $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ile gösterilir (Şekil 2.3).*



Şekil 2.3: $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuk dereceli sayısı.

Not.

1) Üçgen dereceli sayılarda $|a_2 - a_1|$ değeri $|a_3 - a_2|$ değerine eşit olmak zorunda değildir. Yani üyelik fonksiyonunun oluşturduğu üçgen simetrik olmak zorunda değildir.

2) Yamuk dereceli sayılarda $|a_2 - a_1|$ değeri $|a_4 - a_3|$ değerine eşit olmak zorunda değildir.

Şimdi dereceli sayıların α-kesitleri hakkında bizlere önemli bilgiler veren karakterizasyon teoremlerini verelim.

Teorem 2.4.1. *[23, 36] $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayısı ve $A(\alpha)$ α-kesiti verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

1) *Her $\alpha \in [0,1]$ için $A(\alpha)$, $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan kompakt ve konveks bir kümedir.*

2) *$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ için $A(1) \subseteq A(\alpha_2) \subseteq A(\alpha_1) \subseteq A(0)$ dır.*

3) *$[0,1]$ aralığında α ya azalmayarak yakınsayan her (α_n) dizi için*

$$A(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)$$

(veya denk olarak $\alpha_n \nearrow \alpha$ iken $d_H(A(\alpha_n), A(\alpha)) \to 0$) dir.

4) *$[0,1]$ aralığında sıfır sayısına artmayarak yakınsayan her (α_n) dizi için*

$$A(0) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)\right)$$

sağlanır.

Teorem 2.4.2. *[23, 36]*

*$\{C_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 2.4.1'deki **1)-4)** şıklarını sağlasın ve*

$$\mu(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in C_\alpha\}, & x \in C_0 \\ 0, & x \notin C_0 \end{cases}$$

olacak şekilde bir $\mu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda her $\alpha \in [0,1]$ için α-kesitleri

$$A(\alpha) = C_\alpha$$

olan bir $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayısı mevcuttur.

Teorem 2.4.3. *[23, 41]*

$\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısı ve $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ α-kesiti verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) *A_1 azalmayan sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve sıfır noktasında sağdan süreklidir.*

2) *A_2 artmayan sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve sıfır noktasında sağdan süreklidir.*

3) *$A_1(1) \leq A_2(1)$ sağlanır.*

Teorem 2.4.4. *[23, 41]*

$A_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

1) *A_1 azalmayan sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve sıfır noktasında sağdan süreklidir.*

2) *A_2 artmayan sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve sıfır noktasında sağdan süreklidir.*

3) *$A_1(1) \leq A_2(1)$ dır.*

Bu taktirde α-kesitleri

$$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

olan bir $\tilde{A}$ dereceli sayısı mevcuttur.

Tanım 2.4.4. *[36] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. Dereceli sayıların Minkowski toplamı ve skalerle çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.*

1) *$\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{C} \Leftrightarrow \forall\alpha \in [0,1]$ için $C(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)$ dır.*

2) *$(k\tilde{A}) = \tilde{C} \Leftrightarrow \forall\alpha \in [0,1]$ için $C(\alpha) = kA(\alpha)$ dır.*

Teorem 2.4.5. *[36] $F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayılar kümesi Tanım 2.4.4' te verilen toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır.*

Tanım 2.4.5. *[52] $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_r$ kartezyen çarpım kümesi ve $A_1 \subseteq X_1$, $A_2 \subseteq X_2$,..., $A_r \subseteq X_r$ olmak üzere $\tilde{A}_k \in F(X_k)$ $(k : 1, 2, 3, ..., r)$ dereceli kümeleri verilmiş olsun. $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_r$ dereceli kümelerinin kartezyen çarpımı, üyelik fonksiyonu*

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times ... \times A_r}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), ..., \mu_{A_r}(x)\}$$

ile verilen bir $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_r$ dereceli kümesi tanımlar. $f : \tilde{A} \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda Y kümesinde

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), ..., \mu_{A_r}(x)\}, & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen $\tilde{B} \in F(Y)$ dereceli kümesi elde edilir.

*Bu tanıma **Zadeh' in genişleme ilkesi** denir. Bu ilke yardımıyla dereceli sayıların toplamı ve skaler çarpımı şu şekilde tanımlanır[36]:*

$$\widetilde{A+B} = \tilde{C} \Leftrightarrow \mu_C(z) = \sup_{z=x+y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

$$\widetilde{kA} = \tilde{C} \Leftrightarrow \mu_C(z) = \mu_A(z/k)$$

Teorem 2.4.6. *[36] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ verilmiş olsun. Bu taktirde,*

$$\widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B},$$

$$\widetilde{kA} = k\tilde{A} \text{ dır.}$$

Literatürde $\mathbb{R}$ de dereceli sayılarla yapılan toplama, çarpma, bölme ve çıkarma işlemleri Zadeh'in genişleme ilkesi yanısıra α-kesitler üzerinde aralık aritmetiği kullanılarak da yapılmaktadır.

Tanım 2.4.6. *[52, 59] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ dereceli sayıları verilmiş olsun ve α-kesitleri $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ ve $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olsun. Bu durumda aralık aritmetiği yarımıyla temel cebirsel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.*

1) Toplama:

$$[A+B](\alpha) = [A_1(\alpha)+B_1(\alpha), A_2(\alpha)+B_2(\alpha)].$$

2) Çıkarma:

$$[A-B](\alpha) = [A_1(\alpha)-B_2(\alpha), A_2(\alpha)-B_1(\alpha)].$$

3) Çarpma:

$$[A.B](\alpha) = [\min\{A_1(\alpha)B_1(\alpha), A_1(\alpha)B_2(\alpha), A_2(\alpha)B_1(\alpha), A_2(\alpha)B_2(\alpha)\},$$
$$\max\{A_1(\alpha)B_1(\alpha), A_1(\alpha)B_2(\alpha), A_2(\alpha)B_1(\alpha), A_2(\alpha)B_2(\alpha)\}].$$

5) Bölme: $0 \notin B(0)$ *şartıyla*

$$[A/B](\alpha) = [\min\{A_1(\alpha)/B_1(\alpha), A_1(\alpha)/B_2(\alpha), A_2(\alpha)/B_1(\alpha), A_2(\alpha)/B_2(\alpha)\},$$
$$\max\{A_1(\alpha)/B_1(\alpha), A_1(\alpha)/B_2(\alpha), A_2(\alpha)/B_1(\alpha), A_2(\alpha)/B_2(\alpha)\}].$$

Zadeh'in genişleme ilkesi veya Minkowski toplamı ile tanımlanan $\tilde{A}+(-1)\tilde{A} = 0$ farkı her zaman sağlanmamaktadır. Bu durum dereceli kümeler teorisinde ve uygulamalarında sıkıntı yaratmaktadır. Bu yüzden çeşitli fark tanmları yapılmıştır. Bu tanımların en sık kullanılanları Hukuhara farkı ve genelleştirilmiş Hukuhara farkıdır. Burada verilen sıfır sayısı $0 = \chi_{\{0\}}$ sıfır kümesidir. Sıfır reel sayısı veya kümesi kullanıldığı yere göre kolayca anlaşılacağı için gösterimde sadelik olması açısından her ikisini de 0 ile göstereceğiz.

Tanım 2.4.7. *[44, 47] $\tilde{A}$ ve $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ dereceli sayılarının **Hukuhara farkı (H-farkı)**, eğer $\tilde{C} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ mevcut ise,*

$$\tilde{A} \ominus_H \tilde{B} = \tilde{C} \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} + \tilde{C}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 2.4.7. *[47] $\tilde{A}$ ve $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ olsun. $\tilde{A} \ominus_H \tilde{B}$ farkı mevcutsa tektir.*

Teorem 2.4.8. *[47] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ olsun ve $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ ve $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ aralıkları sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ dereceli sayılarının α-kesitleri olsun. $\tilde{A} \ominus_H \tilde{B}$ farkının α-kesiti*

$$(\tilde{A} \ominus_H \tilde{B})(\alpha) = [A_1(\alpha)-B_1(\alpha), A_2(\alpha)-B_2(\alpha)]$$

dir.

Tanım 2.4.8. *[69, 70] $\tilde{A}$ ve $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayılarının **genelleştirilmiş Hukuhara (gH) farkı**, eğer $\tilde{C} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ mevcutsa, aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B} = \tilde{C} \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \tilde{A} = \tilde{B} + \tilde{C} \\ \text{veya} \\ ii)\ \tilde{B} = \tilde{A} + (-1)\tilde{C} \end{cases}$$

Teorem 2.4.9. *[69, 70] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayıları verilmiş olsun ve $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ ve $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin α-kesitleri olsun. $\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ farkının α-kesiti*

$$P(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha)$$

ve

$$R(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha)$$

olmak üzere

$$(\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B})(\alpha) = [\min\{P(\alpha), R(\alpha)\}, \max\{P(\alpha), R(\alpha)\}]$$

dir.

Teorem 2.4.10. *[69, 70] $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayıları verilmiş olsun ve $\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ gH-farkı mevcut olsun. Bu taktirde, aşağıdakiler sağlanır.*

1) *$\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{A} = \{0\}$ dır.*

2) *$(\tilde{A} + \tilde{B}) \ominus_{gH} \tilde{B} = \tilde{A}$ ve $\tilde{A} + (\tilde{B} \ominus_{gH} \tilde{A}) = \tilde{B}$ dir.*

3) *$(\tilde{A} - \tilde{B}) + \tilde{B} = \tilde{C} \Longleftrightarrow \tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{C} \ominus_{gH} \tilde{B}$ dir.*

4) *$\tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B} = \tilde{C}$ ve $\tilde{B} \ominus_{gH} \tilde{A} = \tilde{C} \Longleftrightarrow \tilde{C} = \{0\}$ ve $\tilde{A} = \tilde{B}$ dır.*

2.5 Dereceli Kümeler için Destek Fonksiyonu

Bu bölümde klasik (krisp) ve dereceli kümeler için tanımlanan destek fonksiyonunun temel tanım ve teoremlerini vereceğiz. Gösterimde kolaylık olması için $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümeler ailesini $K_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5.1. *[36] Sınırlı $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. Her $p \in \mathbb{R}^n$ için*

$$s_A(p) = \sup\{< p, x >: x \in A\}$$

*şeklinde tanımlanan $s_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna A **kümesinin destek fonksiyonu** denir. Buradaki $< . >$ iç çarpımı, $\mathbb{R}^n$ deki standart iç çarpımdır.*

Teorem 2.5.1. *[36] Destek fonksiyonu aşağıdaki ifadeleri sağlar.*

1) *Her A, $B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $p \in \mathbb{R}^n$ için*

$$A \subseteq B \Rightarrow s_A(p) \leq s_B(p)$$

dir.

2) *$A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kompakt ve konveks kümesi verilmiş olsun ve $\|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\}$ olsun. Her $p \in \mathbb{R}^n$ için Lipschitz özelliğini sağlar, yani;*

$$|s_A(p) - s_A(q)| \leq \|A\| \, \|p - q\|$$

dur.

3) *Her A, $B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $p \in \mathbb{R}^n$ için*

$$A = B \Longleftrightarrow s_A(p) = s_B(p)$$

dir.

4) *Her A, $B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $p \in \mathbb{R}^n$ için*

$$s_{A+B}(p) = s_A(p) + s_B(p)$$

dir.

5) *Her $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve her p, $q \in \mathbb{R}^n$ için alt toplanabilirdir (subadditive), yani;*

$$s_A(p+q) \leq s_A(p) + s_A(q)$$

dur.

6) *Her $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$, her $p \in \mathbb{R}^n$ ve $t \geq 0$ için s_A pozitif homogendir, yani;*

$$s_A(tp) = ts_A(p)$$

dir.

7) *Her $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $p \in \mathbb{R}^n$ için s_A konveks bir fonksiyondur.*

8) *$A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kümesinin destek fonksiyonu s_A olsun. Her $p \in \mathbb{R}^n$ için*

$$s_{-A}(p) = s_A(-p)$$

dir.

Teorem 2.5.2. *[36] Sürekli, pozitif homogen ve alt toplanabilir bir $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall p \in \mathbb{R}^n \text{ için } < p, x > \leq s(p)\}$$

olacak şekilde destek fonksiyonu s olan bir tek $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kümesi mevcuttur.

$\mathbb{R}^n$ de Öklid normu 1 olan noktalar (vektörler) kümesini

$$S^{n-1} = \{p : p \in \mathbb{R}^n, \ \|p\| = 1\}$$

ile tanımlayalım.

Teorem 2.5.3. *[39] $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kompakt ve konveks kümesi verilmiş olsun ve $s_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A kümesinin destek fonksiyonu olsun. Bu durumda*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall p \in S^{n-1}, < p, x > \leq s(p)\}$$

dir.

Not. *Bu teoremden anlaşılacağı üzere $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümeler, destek fonksiyonları tarafindan tek türlü olarak ifade edilmektedir.*

Tanım 2.5.2. *[36] $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\tilde{A}$ nın α-kesiti $A(\alpha)$ olmak üzere,*

her $p \in S^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ için

$$s_{A(\alpha)}(p) = \sup\{< p, x >: x \in A(\alpha)\}$$

ile tanımlanan $s_{A(\alpha)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\tilde{A}$ ***dereceli sayısının destek fonksiyonu*** *denir.*

Not. *Dereceli sayıların α-kesitleri kompakt ve konveks olduğu için destek fonksiyonu iyi tanımlı ve mevcuttur.*

Teorem 2.5.4. *[36] $\tilde{A}$ ve $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ olsun. $s_{A(\alpha)}(p)$ ve $s_{B(\alpha)}(p)$ destek fonksiyonları verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

1) *Her $\alpha \in [0,1]$ için $s_{A(\alpha)}$ fonksiyonu S^{n-1} üzerinde sınırlıdır.*

2) *Her $\alpha \in [0,1]$ için p ye göre Lipschitz şartını sağlar.*

3) *Her $\alpha \in [0,1]$ için*

$$d_H(A(\alpha), B(\alpha)) = \sup\left\{\left|s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)\right| : p \in S^{n-1}\right\}$$

dir.

Teorem 2.5.5. *[36] $\tilde{A} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $\tilde{A}$ dereceli kümesinin destek fonksiyonu $s_{A(\alpha)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ olsun. $s_{A(\alpha)}$ fonksiyonu her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan ve soldan süreklidir.*

$F_N(\mathbb{R}^n)$ de gH-farkı destek fonksiyonu ile tanımlanabilir. Şimdi dereceli kümeler için destek fonsiyonu tanımını ve bazı temel teoremlerini verelim.

Tanım 2.5.3. *[69] $\tilde{C} = \tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ olmak üzere $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ ve $\tilde{C} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ verilmiş olsun. $s_{A(\alpha)}$, $s_{B(\alpha)}$, $s_{C(\alpha)}$ ve $s_{-C(\alpha)}$ sırasıyla $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ ve $(-1)\tilde{C}$ nin destek fonksiyonu olsun. Bu durumda her $p \in S^{n-1}$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ nin gH-farkı destek fonksiyonu yardımıyla*

$$s_{C(\alpha)}(p) = \begin{cases} i) & s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p) \\ & \text{veya} \\ ii) & s_{(-1)B(\alpha)}(p) - s_{(-1)A(\alpha)}(p) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.5.6. *[69] A ve $B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kompakt ve konveks kümeleri verilmiş olsun. s_A ve s_B sırasıyla A ve B kümelerinin destek fonksiyonları olmak üzere $s_1 = s_A - s_B$ ve $s_2 = s_B - s_A$ fonksiyonlarını tanımlayalım.*

1) *Eğer s_A ve s_B alt toplanabilir ise $A \ominus_{gH} B = C$ farkı $A = B + C$ ve $B = A + (-1)C$ durumları aynı anda sağlanacak şekilde mevcuttur ve C kümesi bir tek nokta kümesidir.*

2) *Eğer s_A alt toplanabilir ama s_B alt toplanabilir değilse $A \ominus_{gH} B = C$ farkı $A = B + C$ durumu sağlanacak şekilde mevcuttur ve $s_C = s_A - s_B$ dır.*

3) *Eğer s_B alt toplanabilir ama s_A alt toplanabilir değilse $A \ominus_{gH} B = C$ farkı $B = A + (-1)C$ durumu sağlanacak şekilde mevcuttur ve $s_C = s_{-B} - s_{-A}$ dır.*

4) *Eğer s_A ve s_B alt toplanabilir değilse $A \ominus_{gH} B = C$ farkı mevcut değildir.*

Teorem 2.5.7. *[69] $s_{A(\alpha)}$ ve $s_{B(\alpha)}$ fonksiyonları $\tilde{A}$ ve $\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayılarının destek fonksiyonları olsun. $s_1 = s_{A(\alpha)} - s_{B(\alpha)}$ ve $s_2 = s_{B(\alpha)} - s_{A(\alpha)}$ olarak tanımlansın.*

1) *Eğer s_1 ve s_2 fonksiyonları her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon ise $\tilde{C} = \tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ farkı mevcut ve klasik tek nokta kümesidir.*

2) *Eğer s_1 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon ancak s_2 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon değil ise $\tilde{C} = \tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ farkı, $\tilde{A} = \tilde{B} + \tilde{C}$ sağlanacak şekilde mevcuttur ve $s_{C(\alpha)}(p) = s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)$ sağlanır.*

3) *Eğer s_2 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon ancak s_1 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon değil ise, $\tilde{C} = \tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ farkı, $\tilde{B} = \tilde{A} + (-1)\tilde{C}$ sağlanacak şekilde mevcuttur ve $s_{C(\alpha)}(p) = s_{-B(\alpha)}(p) - s_{-A(\alpha)}(p)$ sağlanır.*

4) *Eğer s_1 ve s_2 fonksiyonları her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değilse veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre birer artmayan fonksiyon değil ise $\tilde{C} = \tilde{A} \ominus_{gH} \tilde{B}$ mevcut değildir.*

2.6 Hausdorff Metriği ve Dereceli Hausdorff Metriği

Tanım 2.6.1. *[36] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ noktasının A kümesine olan uzaklığı*

$$d(x,A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

ile tanımlanır. Burada $\|.\|$ normu Öklid normudur.

Tanım 2.6.2. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve $r > 0$ sayısı verilmiş olsun. A kümesinin açık ve kapalı r yuvarı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\begin{aligned} N(A,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) < r\} \\ \overline{N}(A,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq r\} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.6.3. *[36] A ve $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri verilmiş olsun. $\mathbb{R}^n$ de birim yuvar kümesini $N_1 = N(0,1)$ ile gösterelim. Bu durumda,*

1) *A kümesinin B kümesinden Hausdorff ayrışımı*

$$\rho(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\}$$

veya denk olarak

$$\rho(A,B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq B + rN_1\}$$

ile tanımlanır.

2) *B kümesinin A kümesinden Hausdorff ayrışımı*

$$\rho(B,A) = \sup\{d(b,A) : b \in B\}$$

veya denk olarak

$$\rho(B,A) = \inf\{r > 0 : B \subseteq A + rN_1\}$$

olarak tanımlanır.

Not.

1)

$$\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq kap(B),$$

ve

$$\rho(B,A) = 0 \Leftrightarrow B \subseteq kap(A) \text{ dır.}$$

2) $\rho(A,B)$ *ve* $\rho(B,A)$ *eşit olmak zorunda değildir.*

3) *A, B ve* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *ise*

$$\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C)$$

üçgen eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.6.4. *[36] A ve* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *kümeleri verilmiş olsun. A ve B kümesinin* ***Hausdorff uzaklığı***

$$d_H(A,B) = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.6.1. *[36]*

1) $... \subseteq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq ... \subseteq A_2 \subseteq A_1$ *olmak üzere boş kümeden farklı* $(A_n) \subseteq K_C(\mathbb{R}^n)$ *kümeler dizisi verilsin. Bu durumda*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olmak üzere bir $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ *kümesi mevcuttur ve* $n \to \infty$ *iken*

$$d_H(A_n, A) \to 0$$

dır.

2) *Eğer* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ...$ *olmak üzere boş kümeden farklı* $(A_n) \subseteq K_C(\mathbb{R}^n)$ *kümeler dizisi verilsin. Eğer*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in K_C(\mathbb{R}^n)$$

ise $n \to \infty$ *iken*

$$d_H(A_n, A) \to 0$$

dır.

Teorem 2.6.2. *[36] $A,B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri verilmiş olsun.*

$$d_H(A,B) = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$$

ile tanımlanan $d_H : K_C(\mathbb{R}^n) \times K_C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ Hausdorff uzaklık fonksiyonu $K_C(\mathbb{R}^n)$ de bir metrik tanımlar.

Teorem 2.6.3. *[36] $(K_C(\mathbb{R}^n), d_H)$ metrik uzayı tamdır.*

Teorem 2.6.4. *[36] A, B, C ve $D \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri ve $\lambda \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. $d_H : K_C(\mathbb{R}^n) \times K_C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ Hausdorff metriği aşağıdaki ifadeleri sağlar.*

1)
$$d_H(A+C, B+C) = d_H(A,B)$$

2)
$$d_H(\lambda A, \lambda B) = |\lambda|\, d_H(A,B)$$

3)
$$d_H(A+B, C+D) \leq d_H(A,C) + d_H(C,D)$$

Tanım 2.6.5. *[36] $d_\infty : F_N(\mathbb{R}^n) \times F_N(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu verilsin.*

$$d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup\{d_H(A(\alpha), B(\alpha)) : \alpha \in [0,1]\}$$

*olarak tanımlanan fonksiyona **dereceli sayılar için Hausdorff metriği** denir.*

Sonuç 2.6.1. *[36] $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayıları verilmiş olsun ve α-kesitleri sırasıyla $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ ve $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olsun. Bu durumda*

$$d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|A_1(\alpha) - B_1(\alpha)|, |A_2(\alpha) - B_2(\alpha)|\}$$

dır.

Teorem 2.6.5. *[36]*

1) *$(F_N(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ bir metrik uzay tanımlar.*

2) *Her $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ ve $\tilde{C} \in F(\mathbb{R}^n)$ için*

$$d_\infty(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C}) = d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}),$$

3) *Her $k \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için*

$$d_\infty(k\tilde{A}, k\tilde{B}) = |k| d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}),$$

4) *Her $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ ve $\tilde{D} \in F(\mathbb{R}^n)$ için*

$$d_\infty(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{D}) \leq d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}) + d_\infty(\tilde{C}, \tilde{D}).$$

Örnek 2.6.1. $\tilde{A},\tilde{B} \in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayılarının α-kesitleri

$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ için $A(\alpha) = B(\alpha) = [0,1]$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ için $A(\alpha) = \{0\}$ ve $B(\alpha) = [0, 2(1-\alpha)]$ olsun.

Bu durumda

$$d_H(A(\alpha), B(\alpha)) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ 2(1-\alpha) & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

olduğundan

$$d_\infty(\tilde{A},\tilde{B}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{d_H(A(\alpha), B(\alpha))\} = 1$$

olur.

Teorem 2.6.6. *[36] $(F_N(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ metrik uzayı tamdır.*

2.7 Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlar

Bu kesimde, dereceli sayı değerli fonksiyonlar için süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramlarını vereceğiz.

Tanım 2.7.1. *[36] $A \subseteq \mathbb{R}$ aralığından $F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayılar kümesine giden $f : A \to F_N(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna (dönüşümüne)* ***reel değişkenli dereceli sayı değerli fonksiyon*** *denir.*

Dereceli sayı değerli fonksiyonların α-kesitlerini $f(x;\alpha)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.7.2. *[36] $f : A \subseteq \mathbb{R} \to F_N(\mathbb{R})$, $x_0 \in A$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in A \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } d_\infty(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcutsa f, x_0 noktasında ***süreklidir*** *denir. f, A kümesinin her noktasında sürekli ise f, A kümesinde* ***süreklidir*** *denir.*

Tanım 2.7.3. *[36] $f : A \subseteq \mathbb{R} \to F_N(\mathbb{R}^n)$ ve $x_0 \in A$ verilmiş olsun. x_0 noktasına yakınsayan her $(x_k) \subseteq A$ dizisi için*

$$\lim_{k \to \infty} d_\infty(f(x_k), f(x_0)) = 0$$

ise f ye x_0 da ***dizisel süreklidir*** *denir.*

Tanım 2.7.4. *[36] $f : A \subseteq \mathbb{R} \to F_N(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in A$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in A \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } \rho(f(x;\alpha), f(x_0,\alpha)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcutsa f, x_0 da ***üst yarı-süreklidir*** *denir. f, A kümesinin her noktasında üst yarı-sürekli ise f, A kümesinde* ***üst yarı-süreklidir*** *denir.*

Tanım 2.7.5. *[36] $f : A \subseteq \mathbb{R} \to F_N(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in A$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in A \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } \rho(f(x_0,\alpha), f(x;\alpha)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcutsa f, x_0 da ***alt yarı-süreklidir*** *denir. f, A kümesinin her noktasında alt yarı-sürekli ise f, A kümesinde* ***alt yarı-süreklidir*** *denir.*

2.8 Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlar için Aumann İntegrali

Dereceli sayı değerli fonksiyonların integrallenebilme kavramı kompakt ve konveks küme değerli fonksiyonların integrallenmesi için tanımlanan Aumann integraline dayanmaktadır. Bu kesimde öncelikle kompakt ve konveks küme değerli değerli fonksiyonlar için Aumann integrali tanımını vereceğiz; daha sonra dereceli sayı değerli fonksiyonlar için Aumann integrali tanımını vereceğiz.

Tanım 2.8.1. *[36] $f : \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ve $\mathfrak{B}(K_C(\mathbb{R}^n))$ sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $K_C(\mathbb{R}^n)$ nın Borel cebirleri olsun. Her $O \in \mathfrak{B}(K_C(\mathbb{R}^n))$ kümesi için $f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \cap O \neq \varnothing\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ise $f : \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna* ***ölçülebilir*** *denir.*

Teorem 2.8.1. *[36] $f : \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ise ölçülebilirdir.*

Tanım 2.8.2. *[36] $f : A \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x \in A$ için*

$$g(x) \in f(x)$$

şartını sağlayan $g : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna f küme değerli fonksiyonunun bir ***seçicisi (selektörü)*** *denir.*

Teorem 2.8.2. *[36, 47]*

$f : \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise ölçülebilir bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ seçicisi mevcuttur.

Tanım 2.8.3. *[34, 45] $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $S(f)$ kümesi $[a,b]$ üzerinde f nin integrallenebilen seçicileri kümesi olsun. f küme değerli fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki Auman integrali*

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{ \int_a^b g(x)dx : g \in S(f) \right\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $S(f) \neq \varnothing$ ise f fonksiyonunun Auman integrali mevcuttur ve f fonksiyonuna da ***Aumann integrallenebilirdir*** *denir.*

Tanım 2.8.4. *[36, 47] $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer hemen hemen her $x \in [a,b]$ için*

$$d_H(f(x), 0) \leq h(x)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde integrallenebilen reel değerli bir $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu mevcut ise f fonksiyonuna ***integral anlamında (integralce, integrably) sınırlıdır*** *denir.*

Teorem 2.8.3. *[36] $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ölçülebilir ve integralce sınırlı ise Aumann integrali mevcuttur ve $\int_a^b f(x)dx \in K_C(\mathbb{R}^n)$ dir.*

Teorem 2.8.4. *$k = 1,2,3....$ olmak üzere ölçülebilir f_k ve $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ ve her k için $d_H(f_k(x),0) \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut ve her $x \in [a,b]$ için $k \to \infty$ iken $f_k(x) \to f(x)$ ise*

$$\int_a^b f_k(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

dir.

Teorem 2.8.5. *[36] f, $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer f ve g fonksiyonları $[a,b]$ de Aumann integrallenebilir ise aşağıdakiler sağlanır.*

1) *$f+g$, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilir ve*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

dir.

2) *λf, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilir ve*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

dir.

3) *$c \in [a,b]$ ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir.

4) *Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \subseteq g(x)$ ise*

$$\int_a^b f(x)dx \subseteq \int_a^b g(x)dx$$

dir.

Teorem 2.8.6. *[36] Eğer $f,g : [a,b] \to K_C(\mathbb{R}^n)$ küme değerli fonksiyonları Aumann integrallenebilir ise $d_H(f,g) : K_C(\mathbb{R}^n) \times K_C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ Hausdorff metriği integrallenebilirdir ve*

$$d_H\left(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx\right) \leq \int_a^b d_H(f(x),g(x))dt$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.8.5. *[36] $f : [a,b] \to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $\alpha \in [0,1]$ için $f(x;\alpha)$ kesitleri ölçülebilir ise f fonksiyonu **kuvvetli ölçülebilirdir** denir.*

Tanım 2.8.6. *[36] $f : [a,b] \to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için*

$$d_\infty(f(x),0) \leq h(x)$$

*eşitsizliği sağlanacak şekilde integrallenebilen reel değerli bir $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu mevcut ise f dereceli fonksiyonuna **integral anlamında (integralce, integrably) sınırlıdır** denir.*

Tanım 2.8.7. *[36] $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı olsun. Eğer her $\alpha\in[0,1]$ için*

$$u(\alpha)=\int_a^b f(x;\alpha)dx$$

olacak şekilde bir $u\in F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayısı mevcut ise dereceli f fonksiyonuna dereceli Aumann integrallenebilir denir. Bu durumda u ya da f nin ***(dereceli) Aumann integrali*** *denir ve*

$$\tilde{u}=FA\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir.

Gösterimde sadelik olması açısından gerekmedikce $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonun (dereceli) Aumann integralini

$$\tilde{u}=\int_a^b f(x)dx$$

ile göstereceğiz.

Teorem 2.8.7. *[47] Her $\alpha\in[0,1]$ için α-kesitleri $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ olmak üzere $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ise f_1 ve f_2 fonksiyonları ölçülebilirdir.*

Tanım 2.8.8. *[45], [22] $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonunun Aumann integrali her $\alpha\in[0,1]$ için*

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)(\alpha)=\int_a^b f(x;\alpha)dx=\left[\int_a^b f_1(x;\alpha)dx,\int_a^b f_2(x;\alpha)dx\right]$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.8.8. *[36, 47] $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı ise Aumann integrallenebilirdir.*

Teorem 2.8.9. *[36, 47] $f:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli ise Aumann integrallenebilirdir.*

Teorem 2.8.10. *[36, 47] $f,g:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonları ve $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer f ve g dereceli Aumann integrallenebilir ise aşağıdakiler sağlanır.*

1) *$f+g$ toplamı, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilir ve*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

sağlanır.

2) λf, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \left(\int_a^b f(x)dx \right)$$

sağlanır.

Teorem 2.8.11. *[36, 47] $f,g:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer f ve g Aumann integrallenebilir ve her $x\in[a,b]$ için $f(x)\subseteq g(x)$ ise*

$$\int_a^b f(x)dx \subseteq \int_a^b g(x)dx$$

dir.

Teorem 2.8.12. *[36, 47] $f,g:[a,b]\to F_N(\mathbb{R}^n)$ dereceli sayı değerli fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer f ve g Aumann integrallenebilir ise $d_\infty(f,g):[a,b]\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ fonksiyonu integrallenebilir ve*

$$d_\infty\left(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \right) \leq \int_a^b d_\infty(f(x),g(x))dx$$

eşitsizliği sağlanır.

2.9 Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlar için Türev Kavramı

Dereceli sayı değerli fonksiyonlar için türevlenebilme kavramı ilk kez Puri-Ralescu tarafından Hukuhara farkı yardımıyla tanımlanmıştır [63]. Ancak uygulamalarda bu türev tanımının bazı dezavantajlar mevcuttur [47]. Bu yüzden, Bede-Gal [24] tarafından kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi tanımı verilmiştir.

2.9.1 Hukuhara türevi

Tanım 2.9.1. *[47] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $h>0$ olmak üzere x_0, $x_0+h\in(a,b)$ sayıları verilmiş olsun. Eğer $f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)$ ve $f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)$ farkları mevcut olmak üzere*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}$$

ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}$$

*limitleri mevcut ve $f'_H(x_0)\in F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısına eşit ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **Hukuhara türevlenebilirdir (H-türevlenebilir)** denir.*

Teorem 2.9.1. *[47] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve f nin α-kesiti $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu Hukuhara türevlenebilir ise sabit her $\alpha\in[0,1]$ için $f_1(x;\alpha)$ ve $f_2(x;\alpha)$ fonksiyonları klasik anlamda türevlenebilirdir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$f'_H(x;\alpha)=[f'_1(x;\alpha),f'_2(x;\alpha)].$$

Örnek: *$f:[0,\infty)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli fonksiyonu $f(x)=(-1,0,1)x$ ile tanımlansın. f fonksiyonu Hukuhara türevlenebilirdir ve $f'_H(x)=(-1,0,1)$ dir.*

Tanım 2.9.2. *[47] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve f nin α-kesiti $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ verilmiş olsun. Sabit her $\alpha\in[0,1]$ için $f(x;\alpha)$ kesitinin* ***çapı (uzunluğu)***

$$çap(f(x;\alpha))=f_2(x;\alpha)-f_1(x;\alpha)$$

ile tanımlanmaktadır.

Teorem 2.9.2. *[47] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu H-türevlenebilir ise sabit her $\alpha\in[0,1]$ için $çap(f(x;\alpha))$ fonksiyonu x'e göre azalmayandır.*

Teorem 2.9.3. *[47] Eğer $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli fonksiyonu Hukuhara türevlenebilir ise süreklidir.*

Teorem 2.9.4. *[47] Eğer $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ ve $g:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonları Hukuhara türevlenebilir ise aşağıdakiler sağlanır.*

1)

$$(f+g)'_H(x)=f'_H(x)+g'_H(x)$$

dir.

2) *$k\in\mathbb{R}$ olmak üzere*

$$(kf)'_H(x)=kf'_H(x)$$

dir.

Teorem 2.9.5. *[47] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x\in(a,b)$ için*

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ise g dereceli fonksiyonu Hukuhara türevlenebilirdir ve $g'_H(x)=f(x)$ dir.

Teorem 2.9.6. *[47]*

$f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu Hukuhara türevlenebilir olsun. Eğer f'_H dereceli fonksiyonu (a,b) de Aumann integrallenebilir ise her $x\in(a,b)$ için

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f(t)dt$$

eşitliği sağlanır.

2.9.2 Kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi

Tanım 2.9.3. *[24] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $h>0$ olmak üzere x_0, $x_0+h\in(a,b)$ sayıları verilmiş olsun. Eğer $f'(x_0)\in F_N(\mathbb{R})$ mevcutsa ve aşağıdaki limitler mevcut olacak şekilde*

i)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$$

ii)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0+h)}{(-h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)}{(-h)}=f'(x_0)$$

iii)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)}{(-h)}=f'(x_0)$$

iv)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0+h)}{(-h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$$

durumlarından biri sağlanıyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında ***kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara (GH) türevlenebilirdir*** *denir ve $f'_{GH}(x_0)$ ile gösterilir.*

Kolaylık sağlaması açısından (i), (ii), (iii) veya (iv) durumunda GH türevlenebilen bir f fonksiyonu i-GH,ii-GH, iii-GH veya iv-GH türevlenebilir olarak adlandırılacaktır. Bu tanımda (i) durumu, H-türevlenebilme tanımına denk gelmektedir.

Teorem 2.9.7. *[24] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve f nin α-kesiti $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ verilmiş olsun. Bu taktirde,*

1) *Eğer f dereceli fonksiyonu i-GH türevlenebilir ise sabit her $\alpha_0\in[0,1]$ için çap$(f(x;\alpha_0))=f_2(x;\alpha_0)-f_1(x;\alpha_0)$ fonksiyonu x'e göre azalmayan fonksiyondur.*

2) *Eğer f dereceli fonksiyonu ii-GH türevlenebilir ise sabit her $\alpha_0\in[0,1]$ için çap$(f(x;\alpha_0))=f_2(x;\alpha_0)-f_1(x;\alpha_0)$ fonksiyonu x'e göre artmayan bir fonksiyondur.*

Teorem 2.9.8. *[24] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve f nin α-kesiti $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ verilmiş olsun. Bu taktirde,*

1) *iii-GH veya iv-GH türevlenebilen dereceli fonksiyonların türevlerinin α-kesitleri tek nokta kümesinden oluşmaktadır.*

2) *GH-türevi tanımında verilmiş olan maddelerden herhangi ikisi aynı anda sağlanırsa $f'_{GH}(x_0)=0$ veya $f'_{GH}(x_0)\in\mathbb{R}$ dır.*

Teorem 2.9.9. *[24] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu her $x\in(a,b)$ noktasında (iii) veya (iv) durumları sağlanacak şekilde GH-türevlenebilir ise her $x\in(a,b)$ için $f'_{GH}(x_0)\in\mathbb{R}$ dır.*

Örnek 2.9.1. $f:\mathbb{R}\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli fonksiyonu $f(x)=(-1,0,2)x$ ile tanımlansın. f fonksiyonu $x\geq 0$ için i-GH türevlenebilirdir ve $f'_{GH}(x)=(-1,0,2)$ dir. Ancak f fonksiyonu $x<0$ için ii-GH türevlenebilirdir ve $f'_{GH}(x)=(-2,0,1)$ dir.

3. SEZGİSEL DERECELİ KÜMELER TEORİSİ

Dereceli kümeler teorisinde bir elemanın kümeye aidiyetinin üyelik fonksiyonuyla verildiğini önceki bölümde belirtmiştik. Ancak bazı uygulamalarda üyelik fonksiyonunun bilir kişi tarafından öznel bir yaklaşımla oluşturulmasından veya modellerdeki bilgi eksikliğinden kaynaklanan kusurlar üyelik fonksiyonunda belirsizliğe sebeb olmaktadır [23]. Bunun gibi durumlarda tip-2 dereceli kümeler [55], latis değerli dereceli kümeler [42] veya sezgisel dereceli kümeler [7] gibi dereceli kümelerin bazı genelleştirilmeleri kullanılmaktadır [44]. Biz bu bölümde öncelikle Atanassov'un 1984 yılında ortaya attığı sezgisel dereceli kümeler teorisindeki temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Daha sonra $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümelerin özelliklerinden yararlanarak 2. Bölümde dereceli sayılar için verilen tanım ve teoremleri sezgisel dereceli kümelere genişleteceğiz.

Tanım 3.0.1. *[7] $A \subseteq X$ kümesi, $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\nu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonları verilmiş olsun.*

$$\tilde{A}^i = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X,\ 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}$$

*kümesine **sezgisel dereceli bir küme** denir. μ_A fonksiyonuna **üye olma fonksiyonu** ve ν_A fonksiyonuna **üye olmama fonksiyonu** denir.*

Burada, $\mu_A(x) = 1$ ve $\nu_A(x) = 0$ ise x elemanı, A ya tam olarak aittir; $\mu_A(x) = 0$ ve $\nu_A(x) = 1$ ise x elemanı, A ya ait değildir; $0 < \mu_A(x) + \nu_A(x) < 1$ ise x elemanı, A ya kısmi olarak aittir denir.

Bir X kümesinde tanımlı olan tüm sezgisel dereceli kümeler ailesini $IF(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.0.2. [7] *$A \subseteq X$ kümesi; $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\nu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonları verilmiş olsun.*

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

*olarak tanımlanan $\pi_A : X \to [0,1]$ fonksiyonuna $x \in X$ elemanının A kümesine olan **aidiyet belirsizliği** adı verilir.*

Not. Dikkat edilecek olursa, dereceli bir $\tilde{A}$ kümesinde üye olmama fonksiyonu $1 - \mu_A$ olduğu için dereceli kümelerde her $x \in X$ için $\pi_A(x) = 0$ dır.

Şimdi sezgisel dereceli kümelerin daha iyi anlaşılabilmesi için sıradaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.0.1. Bir okuldaki tüm öğrenciler üzerinde bir anket çalışması yapılacaktır. Bu ankette, "Evet" veya "Hayır" olarak cevaplanmak üzere n tane soru bulunmaktadır. Öğrenciler kararsız kaldıkları soruları boş bırakabilirler.

Okuldaki tüm öğrencilerin kümesi X olsun. Anketteki sorulara "Evet" cevabını verenler kümesi A ve "Hayır" cevabını verenler kümesi B olsun.

Bir $x \in X$ öğrencisi bu anketteki maddelerin a_x tanesine "Evet" ve b_x tanesine "Hayır" cevabını vermiş olsun. Şimdi bu anket çalışmasını klasik mantık, dereceli mantık ve sezgisel dereceli mantık yaklaşımlarıyla inceleyelim:

Klasik mantığa göre; bir $x \in X$ öğrencisinin A kümesine ait olması için anketteki her maddeye "Evet" ve B kümesine ait olması için her soruya "Hayır" cevabını vermesi gerekmektedir.

Dereceli mantığa göre; her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) = \frac{a_x}{n}$$

olmak üzere $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonunu tanımlarsak

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

dereceli kümesi elde edilir. O halde bir $x \in X$ öğrencisi A kümesine $\mu_A(x) = \frac{a_x}{n}$ derecesi kadar ait ve $1 - \mu_A(x)$ derecesi kadar ait değildir. Benzer sonuç B kümesi için de elde edilebilir.

Sezgisel dereceli mantığa göre; bu anket çalışmasında boş bırakılan sorular olabileceği için dereceli mantıktaki üye olma veya üye olmama fonksiyonlarında belirsizlik oluşmaktadır.

Her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) = \frac{a_x}{n}$$

ve

$$\nu_A(x) = \frac{b_x}{n}$$

olmak üzere $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\nu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonlarını tanımlarsak

$0 \leq a_x + b_x \leq n$ olduğu için

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\tilde{A}^i = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X\}$$

sezgisel dereceli kümesini tanımlarsak, bir $x \in X$ öğrencisi A kümesine $\mu_A(x) = \frac{a_x}{n}$ derecesi kadar ait ve $\nu_A(x) = \frac{b_x}{n}$ derecesi kadar ait değildir. Benzer sonuç B kümesi için de elde edilebilir.

Tanım 3.0.3. *[7, 56] $\tilde{A}^i \in IF(X)$ sezgisel dereceli kümesi verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ kümesinin* ***α-kesit (seviye) kümesi*** *$\alpha \in (0,1]$ için*

$$A(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$\alpha = 0$ için

$$A(0) = kap\left(\bigcup_{\alpha \in (0,1]} A(\alpha)\right)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.0.4. *[7, 56] $\tilde{A}^i \in IF(X)$ sezgisel dereceli kümesi verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ kümesinin* ***β-kesit (seviye) kümesi*** *$\beta \in [0,1)$ için*

$$A^*(\beta) = \{x \in X : \nu_A(x) \leq \beta\}$$

$\beta = 1$ için

$$A^*(1) = kap\left(\bigcup_{\beta \in [0,1)} A^*(\beta)\right)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.0.5. *[7] $\tilde{A}^i \in IF(X)$ sezgisel dereceli kümesi verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ kümesinin (α,β)-kesit kümesi $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere*

$$A(\alpha,\beta) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha \text{ ve } \nu_A(x) \leq \beta\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.0.1. *[7] $\tilde{A}^i \in IF(X)$ sezgisel dereceli kümesi ve α, $\beta \in [0,1]$ sayıları verilmiş olsun. Bu durumda*

$$A(\alpha,\beta) = A(\alpha) \cap A^*(\beta)$$

sağlanır.

Teorem 3.0.2. *[7] $\tilde{A}^i \in IF(X)$ sezgisel dereceli kümesi ve $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere α, $\beta \in [0,1]$ sayıları verilmiş olsun. Bu durumda*

$$A(\alpha,\beta) \subseteq A(\alpha) \subseteq A$$

ve

$$A(\alpha,\beta) \subseteq A^*(\beta) \subseteq A$$

sağlanır.

Örnek 3.0.2. $X = \{a,b,c,d,e\}$ olmak üzere

$$\tilde{A}^i = \{(a,0.3,0.5),(b,0.7,0.1),(c,0.0,0.0),(d,1.0,0.0),(e,0.0,1.0)\}$$

sezgisel kümesi verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(0.3) &= \{a,b,d\} \\ A^*(0.5) &= \{a,b,c,d\} \\ A(0.3,0.5) &= \{a,b,d\} \end{aligned}$$

kesit kümeleri elde edilir.

3.1 $\mathbb{R}^n$ de Sezgisel Dereceli Sayılar

$\mathbb{R}^n$ de tanımlı sezgisel dereceli kümelere bazı şartların eklenmesiyle sezgisel dereceli sayılar elde edilmektedir.

Tanım 3.1.1. *Aşağıdaki şartları sağlayan sezgisel dereceli bir $\tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R}^n)$ kümesine* ***sezgisel dereceli sayı*** *adı verilir.*

1) *$\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli kümesi normaldir . Yani, $A(1) \neq \varnothing$ ve $A^*(0) \neq \varnothing$ dir .*

2) *$A(0)$ ve $A^*(1)$ kesitleri $\mathbb{R}^n$ de sınırlıdır.*

3) *$\mu_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üye olma fonksiyonu üst yarı-süreklidir . Yani, her $k \in [0,1]$ için*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) < k\}$$

kümesi açık bir kümedir.

4) *$\nu_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üye olmama fonksiyonu alt yarı-süreklidir. Yani, her $k \in [0,1]$ için*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \nu_A(x) > k\}$$

kümesi açık bir kümedir.

5) *$\mu_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üye olma fonksiyonu kuasi-konkavdır. Yani, her $\lambda \in [0,1]$ ve her x, $y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

dir.

6) *$\nu_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ üye olmama fonksiyonu kuasi-konvekstir. Yani, her $\lambda \in [0,1]$ ve her x, $y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\nu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

dir.

Kolaylık sağlaması açısından $\mathbb{R}^n$ deki sezgisel dereceli sayılar kümesini $IF_N(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

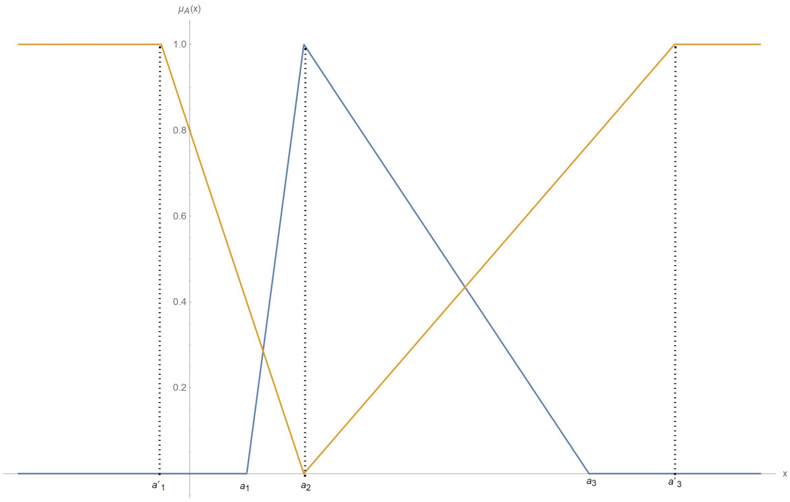
Tanım 3.1.2. *[56] $a_1' \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_3'$ olacak şekilde a_1', a_1, a_2, a_3 ve a_3' reel sayıları verilmiş olsun. Üye olma ve üye olmama fonksiyonları sırasıyla*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x < a_1 \ \& \ x > a_3 \end{cases}$$

ve

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a_1'} & a_1' \leq x \leq a_2 \\ \frac{x-a_2}{a_3'-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3' \\ 1 & x < a_1' \ \& \ x > a_3' \end{cases}$$

ile verilen sezgisel dereceli $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sayısına ***üçgen sezgisel dereceli sayı*** *denir ve $\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3; a_1', a_2, a_3')$ ile gösterilir (Şekil 3.1).*



Şekil 3.1: $\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3)$ üçgen sezgisel dereceli sayısı.

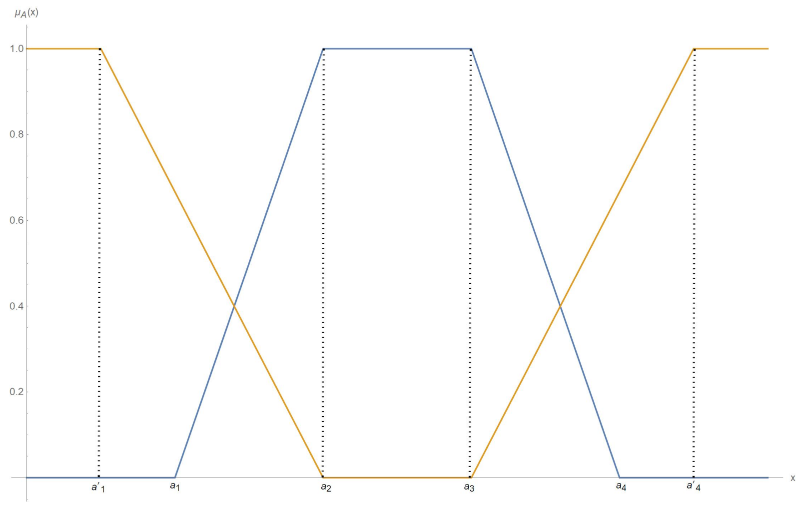
Tanım 3.1.3. *[56] $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a'_4$ olacak şekilde a'_1, a_1, a_2, a_3, a_4 ve a'_4 reel sayıları verilmiş olsun. Üye olma ve üye olmama fonksiyonları sırasıyla*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x < a_1 \;\&\; x > a_4 \end{cases}$$

ve

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & a'_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a'_4 \\ 1 & x < a'_1 \;\&\; x > a'_4 \end{cases}$$

*ile verilen sezgisel dereceli $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sayısına **yamuk sezgisel dereceli sayı** denir ve $\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a_2, a_{3,} a'_4)$ ile gösterilir (Şekil 3.2).*



Şekil 3.2: $\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a_2, a_{3,} a'_4)$ yamuk sezgisel dereceli sayısı.

Not.

1) Üçgen sezgisel dereceli sayılarda $|a_2 - a_1|$ değeri $|a_3 - a_2|$ değerine veya $|a_2 - a_1'|$ değeri $\left|a_3' - a_2\right|$ değerine eşit olmak zorunda değildir.

2) Yamuk dereceli sayılarda $|a_2 - a_1|$ değeri $|a_4 - a_3|$ değerine veya $|a_2 - a_1'|$ değeri $|a_4' - a_3|$ değerine eşit olmak zorunda değildir.

3.2 Sezgisel Dereceli Sayılar için Karakterizasyon Teoremleri

Bu bölümde karakterizasyon teoremlerininin sezgisel sayılar için genişlemesini yapacağız.

Teorem 3.2.1. *$\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı ile $A(\alpha)$ ve $A^*(\beta)$ kesitleri verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1) *Her $\alpha \in [0,1]$ için $A(\alpha)$ kesiti $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan kompakt ve konveks bir kümedir.*

2) *$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ için $A(\alpha_2) \subseteq A(\alpha_1)$ di r.*

3) *$[0,1]$ aralığında $\alpha \in (0,1]$ sayısına azalmayarak yakınsayan her (α_n) dizisi için*

$$A(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)$$

dir.

4) *$[0,1]$ aralığında 0 sayısına artmayarak yakınsayan her (α_n) dizisi için*

$$A(0) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)\right)$$

dir.

5) *Her $\beta \in [0,1]$ için $A^*(\beta)$ kesiti $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan kompakt ve konveks bir kümedir.*

6) *$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ için $A^*(\beta_1) \subseteq A^*(\beta_2)$ di r.*

7) *$[0,1]$ aralığında $\beta \in [0,1)$ sayısına artmayarak yakınsayan her (β_n) dizisi için*

$$A^*(\beta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$$

dir.

8) *$[0,1]$ aralığında 1 sayısına azalmayarak yakınsayan her (β_n) dizisi için*

$$A^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)\right)$$

dir.

İspat. Teorem 2.4.1 gereğince **1)-4)** şıkları sağlanır. Şimdi **5)-8)** şıklarını ispatlayalım.

5) $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli bir sayı olduğu için tanımı gereği $A^*(0) \neq \varnothing$ dir. x, $y \in A^*(\beta)$ olsun. Bu durumda β kesit tanımı gereği $\nu_A(x) \leq \beta$ ve $\nu_A(y) \leq \beta$ dir. Öte yandan ν_A fonksiyonu kuasi-konveks olduğu için her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\nu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

eşitsizliğinden

$$\nu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \beta$$

elde edilir. Bu yüzden $\lambda x + (1-\lambda)y \in A^*(\beta)$ olduğu için $A^*(\beta)$ konveks bir kümedir. Şimdi $A^*(\beta)$ kesitinin kapalı bir küme olduğunu gösterelim. ν_A fonksiyonu alt-yarı sürekli olduğu için $\{x \in \mathbb{R}^n : \nu_A(x) > \beta\}$ kümesi açık bir kümedir. Dolayısıyla bu kümenin tümleyeni $\{x \in \mathbb{R}^n : \nu_A(x) \leq \beta\}$ kapalı bir küme olduğundan $A^*(\beta)$ kesit kümesi kapalı bir kümedir.

6) $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ ve $x \in A^*(\beta_1)$ olsun. Bu durumda β kesit tanımı gereği $\nu_A(x) \leq \beta_1$ ve $\beta_1 \leq \beta_2$ olduğundan $\nu_A(x) \leq \beta_2$ dir. Sonuç olarak $x \in A^*(\beta_2)$ olduğundan $A^*(\beta_1) \subseteq A^*(\beta_2)$ elde edilir.

7) (β_n) dizisi β ya artmayarak yakınsayan bir dizi ve $x \in A^*(\beta)$ verilmiş olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta \leq \beta_n$ olduğundan $x \in A^*(\beta_n)$ dir. Dolayısıyla

$$A^*(\beta) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$$

dir. Öte yandan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in A^*(\beta_n)$ dir.

(β_n) dizisi β ya artmayarak yakınsayan bir dizi olduğundan verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ki $n > n_0$ iken

$$\beta_n - \beta < \epsilon$$

olduğundan

$$A^*(\beta_n) \subset A^*(\beta + \epsilon)$$

yazılabilir. ϵ yeterince küçük seçilirse

$$A^*(\beta_n) \subseteq A^*(\beta)$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in A^*(\beta_n)$ olduğundan $x \in A^*(\beta)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n) \subseteq A^*(\beta)$$

dir. Sonuç olarak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n) = A^*(\beta)$$

sağlanır.

8) (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsayan bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A^*(\beta_n) \subseteq A^*(1)$ olduğundan

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)\right) \subseteq A^*(1)$$

dir. Öte yandan $x \in A^*(1) = kap(\bigcup_{\beta\in(0,1]} A^*(\beta))$ olsun. Bir kümenin kapanışı tanımı gereğince $\bigcup_{\beta\in(0,1]} A^*(\beta)$ kümesinde x'e yakınsayan bir (x_n) dizisi mevcuttur. Genelliği bozmaksızın $\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_n \leq \beta_{n+1} \leq ... \leq 1$ olmak üzere $x_1 \in A^*(\beta_1)$, $x_2 \in A^*(\beta_2)$, $x_3 \in A^*(\beta_3)$, ..., $x_n \in A^*(\beta_n)$,... olacak şekilde bir $(x_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$ dizisi oluşturalım. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n) \subseteq kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n))$ olduğu için $(x_n) \subseteq kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n))$ dir. Bir kümenin kapanışı kapalı bir küme olduğu için $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğundan $x \in kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n))$ dir. Dolayısıyla

$$A^*(1) \subseteq kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)\right)$$

dir. Sonuç olarak

$$A^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.1. *$IF_N(\mathbb{R})$ de $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli bir sayının α ve β kesitleri*

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ A_2(\alpha) &= \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ A_1^*(\beta) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \nu_A(x) \leq \beta\} \\ A_2^*(\beta) &= \sup\{x \in \mathbb{R} : \nu_A(x) \leq \beta\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

ve

$$A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

kapalı aralıklarından oluşmaktadır.

Teorem 3.2.2. *$\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ nin α ve β kesitleri sırasıyla*

$$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

ve

$$A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

ile verilmiş olsun. Bu durumda $A_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A_1^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ ve $A_2^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için aşağıdakiler sağlanır.

1) *A_1 sınırlı ve azalmayan bir fonksiyon olup; $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve 0 noktasında sağdan süreklidir.*

2) *A_2 sınırlı ve artmayan bir fonksiyon olup; $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve 0 noktasında sağdan süreklidir.*

3) *$A_1(1) \leq A_2(1)$ dır.*

4) *A_1^* sınırlı ve artmayan bir fonksiyon olup; $[0,1)$ aralığında sağdan sürekli ve 1 noktasında soldan süreklidir.*

5) *A_2^* sınırlı ve azalmayan bir fonksiyon olup; $[0,1)$ aralığında sağdan sürekli ve 1 noktasında soldan süreklidir.*

6) *$A_1^*(0) \leq A_2^*(0)$ dır.*

İspat. Teorem 2.4.3'den dolayı **1)-3)** şıkları sağlanmaktadır. **4)-6)** şıklarının sağlandığını gösterelim.

$\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısının $A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$ kesiti verilmiş olsun.

$0 \leq \beta \leq 1$ sayısı için β kesit özelliği gereğince $A^*(0) \subseteq A^*(\beta) \subseteq A^*(1)$ olduğundan

$$A_1^*(1) \leq A_1^*(\beta) \leq A_1^*(0) \leq A_2^*(0) \leq A_2^*(\beta) \leq A_2^*(1)$$

eşitsizliği elde edilir. $A^*(1)$ kesiti kapalı ve sınırlı bir aralık olduğu için $A_1^*(\beta)$ ve $A_2^*(\beta)$ fonksiyonları sınırlıdır ve $A_1^*(0) \leq A_2^*(0)$ sağlanmaktadır.

$\beta_1 \leq \beta_2$ olsun. Bu durumda $A^*(\beta_1) \subseteq A^*(\beta_2)$ olduğundan

$$A_1^*(\beta_2) \leq A_1^*(\beta_1) \leq A_2^*(\beta_1) \leq A_2^*(\beta_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $A_1^*(\beta_2) \leq A_1^*(\beta_1)$ olduğundan A_1^* fonksiyonu β ya göre artmayandır ve $A_2^*(\beta_1) \leq A_2^*(\beta_2)$ olduğundan A_2^* fonksiyonu β ya göre azalmayandır

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun ve (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Teorem 3.2.1 gereğince

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_1^*(\beta_n), A_2^*(\beta_n)] = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

eşitliği sağlanır. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsadığından Teorem 2.6.1 gereğince $A_1^*(\beta_n) \to A_1^*(\beta)$ ve $A_2^*(\beta_n) \to A_2^*(\beta)$ elde edilir. Sağdan sürekliliğin dizisel tanımından A_1^* ve A_2^* fonksiyonları her $\beta \in [0,1)$ noktasında sağdan süreklidir.

Şimdi A_1^* ve A_2^* fonksiyonları1 noktasında soldan sürekli olduğunu gösterelim. (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. Teorem 3.2.1 gereğince

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_1^*(\beta_n), A_2^*(\beta_n)]\right) = [A_1^*(1), A_2^*(1)]$$

eşitliği sağlanır. (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsadığından Teorem 2.6.1 gereğince $A_1^*(\beta_n) \to A_1^*(1)$ ve $A_2^*(\beta_n) \to A_2^*(1)$ elde edilir. Soldan sürekliliğin dizisel tanımından A_1^* ve A_2^* fonksiyonlarını 1 noktasında soldan süreklidir. $\square$

Teorem 3.2.3. *$\{M_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n : \alpha \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıklarını ve $\{M_\beta \subseteq \mathbb{R}^n : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağlasın;*

$$\mu(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in M_\alpha\}, & x \in M_0 \\ 0, & x \notin M_0 \end{cases}$$

ve

$$\nu(x) = \begin{cases} \inf\{\beta \in [0,1] : x \in M_\beta\}, & x \in M_1 \\ 1, & x \notin M_1 \end{cases}$$

olacak şekilde $\mu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ve $\nu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda

1) *Her $\alpha \in [0,1]$ için α-kesitleri*

$$A(\alpha) = M_\alpha$$

2) *Her $\beta \in [0,1]$ için β-kesitleri*

$$A^*(\beta) = M_\beta$$

olacak şekilde bir $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur.

İspat. $\{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** ve $\{M_\beta : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağlasın. $\mu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ve $\nu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ fonksiyonları tanımları gereği $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$ olduğundan

$$\tilde{A}^i = \{(x, \mu(x), \nu(x)) : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1\}$$

kümesi bir $\mathbb{R}^n$ de sezgisel dereceli küme oluşturur. Şimdi her $\alpha \in [0,1]$ için α-kesitleri

$$A(\alpha) = M_\alpha$$

ve her $\beta \in [0,1]$ için β-kesitleri

$$A^*(\beta) = M_\beta$$

olacak şekilde $\overline{A^i}$ kümesinin bir *sezgisel dereceli sayı* olduğunu gösterelim. Teorem 2.4.2 gereğince $\alpha \in [0,1]$ için $A(\alpha) = M_\alpha$ sağlanır. Şimdi $\beta \in [0,1]$ için $A^*(\beta) = M_\beta$ olduğunu gösterelim. $\beta_0 \in [0,1)$ keyfi sabit bir sayı olmak üzere $x \in M_{\beta_0}$ olsun.
$M_{\beta_0} \subseteq M_1$ olduğu için $x \in M_1$ dir. O halde $\nu(x)$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$\beta_0 \in \{\beta : x \in M_\beta\} \Rightarrow \nu(x) \leq \beta_0 \Rightarrow x \in A^*(\beta_0)$$

olduğundan

$$M_{\beta_0} \subseteq A^*(\beta_0)$$

elde edilir.

Öte yandan, $x \in A^*(\beta_0)$ olsun. β kesit tanımı gereği $\nu(x) \leq \beta_0$ dir. ν fonksiyonu tanımı gereği

$$\inf\{\beta : x \in M_\beta\} \leq \beta_0$$

elde edilir. Bu durumda ya $\inf\{\beta : x \in M_\beta\} = \beta_0$ ya da $\inf\{\beta : x \in M_\beta\} < \beta_0$ dır.

1. Durum. $\inf\{\beta : x \in M_\beta\} = \beta_0$ olsun. İnfimum özelliği gereği $\{\beta : x \in M_\beta\}$ kümesinde β_0 sayısına yakınsayan bir (β_n) dizisi mevcuttur. Teorem 3.2.1 gereğince

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n} = M_{\beta_0}$$

dır. Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $x \in M_{\beta_n}$ olduğu için $x \in M_{\beta_0}$ dır. Dolayısıyla

$$A^*(\beta_0) \subseteq M_{\beta_0}$$

dır.

2. Durum. $\inf\{\beta : x \in M_\beta\} < \beta_0$ olsun. İnfimum tanımı gereği

$$\inf\{\beta : x \in M_\beta\} \leq \beta_1 < \beta_0$$

olacak şekilde $x \in M_{\beta_1}$ olmak üzere bir $\beta_1 \in \{\beta : x \in M_\beta\}$ reel sayısı mevcuttur. $\beta_1 < \beta_0$ iken $M_{\beta_1} \subseteq M_{\beta_0}$ olduğundan $x \in M_{\beta_0}$ dır. Dolayısıyla

$$A^*(\beta_0) \subseteq M_{\beta_0}$$

dır.

Sonuç olarak keyfi bir $\beta_0 \in [0,1)$ için $A^*(\beta_0) = M_{\beta_0}$ olduğundan her $\beta \in [0,1)$ için

$$A^*(\beta) = M_\beta$$

elde edilir.

Şimdi

$$A^*(1) = M_1$$

olduğunu gösterelim. $x \in M_1$ olsun. ν fonksiyonu tanımı gereği

$$\nu(x) = \inf\{\beta : x \in M_\beta\} \leq 1$$

olduğundan, β-kesit tanımından $x \in A^*(1)$ elde edilir.

$x \in A^*(1) = kap(\bigcup_{\beta[0,1)} A^*(\beta))$ olsun. Bir kümenin kapanışı tanımından

$\bigcup_{\beta\in[0,1)} A^*(\beta)$ kümesinde x'e yakınsayan bir (x_n) dizisi mevcuttur. Genelliği bozmaksızın $\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_n \leq \beta_{n+1} \leq ... \leq 1$ olmak üzere $x_1 \in A^*(\beta_1)$, $x_2 \in A^*(\beta_2)$, $x_3 \in A^*(\beta_3)$, ..., $x_n \in A^*(\beta_n)$,... olacak şekilde bir $(x_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$ dizisi oluşturalım. Her $\beta \in [0,1)$ için $A^*(\beta) = M_\beta$ olduğundan ve (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsarken

$$M_1 = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n}\right)$$

olduğundan $x \in M_1$ elde edilir. Sonuç olarak

$$A^*(1) = M_1$$

elde edilir.

Şimdi $\nu(x)$ fonksiyonunun $\overline{A^i}$ sezgisel dereceli sayısı için üye olmama fonksiyonu olduğunu gösterelim:

Normallik. M_β kümesi Teorem 3.2.1'deki **5)** şıkkını sağladığından öyle bir $x_0 \in M_0$ elemanı vardır ki $\nu(x_0) = 0$ dır. O halde $\nu(x)$ normaldir.

Kuasi-konvekslik. $\beta \in [0,1]$ için M_β kümesi konveks ve $A^*(\beta) = M_\beta$ olduğu için ν fonksiyonu kuasi-konvekstir.

Alt yarı- süreklilik. $M_\beta = A^*(\beta)$ kümesi kapalı bir küme olduğundan $\{x : \nu(x) > \beta\}$ açık bir kümedir. Dolayısıyla $\nu(x)$ fonksiyonu alt yarı- sürekli bir fonksiyondur.

Kompaktlık. (β_n) dizisi 1 sayısına alttan yakınsayan bir dizi olsun. O halde

$$A^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)\right) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n}\right) = M_1$$

sağlanmaktadır. Dolayısıyla $A^*(1) = M_1$ olur. $A^*(1)$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan M_1 kümesi sınırlı ve kapalıdır. Yani kompakt bir kümedir.

Sonuç olarak $\nu(x)$ fonksiyonu sezgisel dereceli sayılar için üye olmama fonksiyonu şartlarını sağlamaktadır. Dolayısıyla $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur. □

Teorem 3.2.4. *$A_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A_1^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ ve $A_2^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.*

1) *A_1 sınırlı ve azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca, $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve 0 noktasında sağdan süreklidir.*

2) *A_2 sınırlı ve artmayan bir fonksiyondur. Ayrıca, $(0,1]$ aralığında soldan sürekli ve 0 noktasında sağdan süreklidir.*

3) *$A_1(1) \le A_2(1)$ dır.*

4) *A_1^* sınırlı ve artmayan bir fonksiyondur. Ayrıca, $[0,1)$ aralığında sağdan sürekli ve 1 noktasında soldan süreklidir.*

5) *A_2^* sınırlı ve azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca, $[0,1)$ aralığında sağdan sürekli ve 1 noktasında soldan süreklidir.*

6) *$A_1^*(0) \le A_2^*(0)$ dır.*

Bu taktirde, α ve β kesitleri sırasıyla

$$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

ve

$$A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

olan bir $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur.

İspat. **1)-3)** şartlarından Teorem 2.4.4 gereğince

$$[A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

aralığı bir α-kesit oluşturur. Şimdi **4)-6)** şartlarının sağlanması halinde

$$[A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

aralığının bir β-kesit oluşturduğunu gösterelim.

$$M_\beta = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

olsun. $\{M_\beta : \beta \in [0,1]\}$ ailesinin Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağladığını gösterelim.

$0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le 1$ olsun. A_1^* artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$A_1^*(1) \le A_1^*(\beta_2) \le A_1^*(\beta_1) \le A_1^*(0)$$

olur ve A_2^* azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$A_2^*(0) \le A_2^*(\beta_1) \le A_2^*(\beta_2) \le A_2^*(1)$$

olur. $A_1^*(0) \le A_2^*(0)$ olduğundan

$$A_1^*(1) \le A_1^*(\beta_2) \le A_1^*(\beta_1) \le A_1^*(0) \le A_2^*(0) \le A_2^*(\beta_1) \le A_2^*(\beta_2) \le A_2^*(1)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak buradan

$$M_0 \subseteq M_{\beta_1} \subseteq M_{\beta_2} \subseteq M_1$$

sağlanır. $(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun.

(β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. A_1^* ve A_2^* fonksiyonları $[0,1)$ aralığında soldan sürekli olduğu için $A_1^*(\beta_n) \to A_1^*(\beta)$ ve $A_2^*(\beta_n) \to A_2^*(\beta)$ elde edilir. Bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_1^*(\beta_n), A_2^*(\beta_n)] = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

eşitliğinden

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n} = M_\beta$$

elde edilir.

(β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. A_1^* ve A_2^* fonksiyonları 1 noktasında soldan sürekli olduğu için $A_1^*(\beta_n) \to A_1^*(1)$ ve $A_2^*(\beta_n) \to A_2^*(1)$ elde edilir. Bu durumda

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_1^*(\beta_n), A_2^*(\beta_n)]\right) = [A_1^*(1), A_2^*(1)]$$

eşitliğinden

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n}\right) = M_1$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\{M_\beta : \beta \in [0,1]\}$ ailesi Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıkları sağladığından Teorem 3.2.3 gereğince

$$[A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

aralığı β-kesit tanımlar.

Sonuç olarak Teorem 2.4.4, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.3 gereğince α ve β kesitleri sırasıyla

$$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$$

ve

$$A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$$

olan bir $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur. □

Tanım 3.2.1. *$\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i$, $\tilde{C}^i$, $\tilde{D}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. Sezgisel dereceli sayıların Minkowski toplamı ve skalerle çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.*

1) *$\tilde{A}^i + \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow$ Her α, $\beta \in [0,1]$ için $C(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)$ ve $C^*(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$ dır.*

2) *$(k\tilde{A}^i) = \tilde{D}^i \Leftrightarrow$ Her α, $\beta \in [0,1]$ için $D(\alpha) = kA(\alpha)$ ve $D^*(\beta) = kA^*(\beta)$ dır.*

Teorem 3.2.5. *$IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayılar kümesi, Tanım 3.2.1'de verilen Minkowski toplamı ve skalerle çarpım altında kapalıdır.*

İspat. **1)** $\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun.

$$C(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)$$

ve

$$C^*(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$$

olmak üzere $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ küme ailelerini tanımlayalım. $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümeler ailesi Minkowski toplamı ve skalerle çarpım altında kapalı olduğu için her α ve $\beta \in [0,1]$ için $C(\alpha)$ ve $C^*(\beta)$, $\mathbb{R}^n$ de kompakt ve konveks kümelerdir [36].

Teorem 2.4.5 gereğince $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıkları sağlamaktadır. Şimdi $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesinin Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarının sağladığını gösterelim.

$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olmak üzere $A^*(\beta_1) \subseteq A^*(\beta_2)$ ve $B^*(\beta_1) \subseteq B^*(\beta_2)$ olduğundan $C^*(\beta_1) \subseteq C^*(\beta_2)$ dir.

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda Hausdorff metriği özelliği gereğince

$$\begin{aligned} d_H(C^*(\beta_n), C^*(\beta)) &= d_H(A^*(\beta_n) + B^*(\beta_n), A^*(\beta) + B^*(\beta)) \\ &\leq d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta)) + d_H(B^*(\beta_n), B^*(\beta)) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken $d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta)) \to 0$ ve $d_H(B^*(\beta_n), B^*(\beta)) \to 0$ olduğu için $d_H(C^*(\beta_n), C^*(\beta)) \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.6.1 gereğince

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n) = C^*(\beta)$$

elde edilir.

(β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \leq 1$ olduğu için $A^*(\beta_n) \subseteq A^*(1)$ ve $B^*(\beta_n) \subseteq B^*(1)$ den $C^*(\beta_n) \subseteq C^*(1)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right) \subseteq C^*(1)$$

Şimdi $x \in A^*(1) + B^*(1)$ olsun. Bu durumda $x = a + b$ olacak şekilde

$a \in A^*(1) = kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n))$ ve $b \in B^*(1) = kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} B^*(\beta_n))$ elemanları mevcuttur. Kapanış özelliği gereğince $n \to \infty$ iken $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olacak şekilde $(a_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$ ve $(b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B^*(\beta_n)$ dizileri mevcuttur. Genelliği bozmadan $a_1 \in A_1^*$, $a_2 \in A_2^*$, $a_3 \in A_3^*$, ..., $a_n \in A_n^*$ ve $b_1 \in B_1^*$, $b_2 \in B_2^*$, $b_3 \in B_3^*$, ..., $b_n \in B_n^*$ olacak şekilde $(a_n) \subseteq A^*(\beta_n)$ ve $(b_n) \subseteq B^*(\beta_n)$ dizilerini oluşturursak $(a_n + b_n) \subseteq A^*(\beta_n) + B^*(\beta_n)$ elde edilir. Buradan

$$(a_n + b_n) \subseteq kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n) + B^*(\beta_n)\right)$$

ve $n \to \infty$ iken $a_n + b_n \to a + b$ olduğundan

$$x \in kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right) = C^*(1)$$

sağlanır.

Sonuç olarak Teorem 3.2.3 gereğince α ve β kesitleri $C(\alpha)$ ve $C^*(\beta)$ olan bir $\tilde{C}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur.

2) $\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ reel sayısı verilmiş olsun. $D(\alpha) = kA(\alpha)$ ve $D^*(\beta) = kA^*(\beta)$ olmak üzere $\{D(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{D^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ küme ailelerini tanımlayalım.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ deki kompakt ve konveks kümeler ailesi Minkowski toplamı ve skalerle çarpım altında kapalı olduğu için her α ve $\beta \in [0,1]$ için $D(\alpha)$ ve $D^*(\beta)$, $\mathbb{R}^n$ de kompakt ve konveks kümelerdir.

Teorem 2.4.5 gereğince $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıkları sağlamaktadır. Şimdi $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesinin Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağladığını gösterelim.

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_H(D^*(\beta_n), D^*(\beta)) &= d_H(kA^*(\beta_n), kA^*(\beta)) \\ &= |k|\, d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta)) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken $d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta)) \to 0$ olduğu için $d_H(D^*(\beta_n), D^*(\beta)) \to 0$ olur ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D^*(\beta_n) = D^*(\beta)$$

elde edilir.

(β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \leq 1$ olduğu için $A^*(\beta_n) \subseteq A^*(1)$ olduğundan $D^*(\beta_n) \subseteq D^*(1)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D^*(\beta_n)\right) \subseteq D^*(1)$$

Şimdi $x \in \lambda A^*(1)$ olsun. Bu durumda $x = \lambda a$ olacak şekilde $a \in A^*(1) = kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n))$ elemanı vardır. Kapanış özelliği gereği $n \to \infty$ iken $a_n \to a$ olacak şekilde $(a_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^*(\beta_n)$ dizisi mevcuttur. Genelliği bozmadan $a_1 \in A_1^*$, $a_2 \in A_2^*$, $a_3 \in A_3^*$, ..., $a_n \in A_n^*$ olacak şekilde $(a_n) \subseteq A^*(\beta_n)$ dizisini oluşturursak $\lambda(a_n) \subseteq \lambda A^*(\beta_n)$ elde edilir. Buradan

$$(\lambda a_n) \subseteq kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda A^*(\beta_n)\right)$$

ve $n \to \infty$ iken $\lambda a_n \to \lambda a$ olduğundan

$$x \in kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D^*(\beta_n)\right) = D^*(1)$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.2.3 gereğince α ve β kesitleri $D(\alpha)$ ve $D^*(\beta)$ olan bir $\tilde{D}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur.

□

Teorem 3.2.6.

1) *Her $\tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R})$ için*

$$\begin{aligned} \tilde{A}^i + 0 &= \tilde{A}^i \\ 0 + \tilde{A}^i &= \tilde{A}^i \end{aligned}$$

sağlanır.

2) *Hiç bir $\tilde{A}^i \neq 0$ sezgisel dereceli sayısının Tanım 3.2.1'de verilen toplama işlemine göre tersi mevcut değildir.*

3) *$\tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı ve $ab > 0$ olmak üzere a, $b \in \mathbb{R}$ reel sayıları verilmiş olsun. Bu durumda*

$$\tilde{A}^i(a+b) = \tilde{A}^i a + \tilde{A}^i b$$

dir.

4) *$\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i \in IF(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayıları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı verilmiş olsun.Bu durumda*

$$\lambda(\tilde{A}^i + \tilde{B}^i) = \lambda\tilde{A}^i + \lambda\tilde{B}^i$$

dir.

5) *$\tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı ve a, $b \in \mathbb{R}$ reel sayıları verilmiş olsun. Bu durumda*

$$(ab)\tilde{A}^i = a(b\tilde{A}^i)$$

dir.

İspat. **1)** $\tilde{A}^i + 0 = \tilde{B}^i$ olsun. Tanım 3.2.1 gereğince

$$A(\alpha)+0(\alpha)=B(\alpha) \Leftrightarrow [A_1(\alpha),A_2(\alpha)]+[0,0]=[B_1(\alpha),B_2(\alpha)]$$

ve

$$A^*(\beta)+0^*(\beta)=B^*(\beta) \Leftrightarrow [A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]+[0,0]=[B_1^*(\beta),B_2^*(\beta)]$$

dır. Aralıkların eşitliğinden her α, $\beta \in [0,1]$ için $B_1(\alpha)=A_1(\alpha)$,$B_2(\alpha)=A_2(\alpha)$ ve $B_1^*(\beta)=A_1^*(\beta)$, $B_2^*(\beta)=A_2^*(\beta)$ olduğundan $\tilde{A}^i=\tilde{B}^i$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\tilde{A}^i+0=\tilde{A}^i$$

eşitliği sağlanır. Benzer şeklide $0+\tilde{A}^i=\tilde{A}^i$ eşitliği de gösterilebilir.

2) $0 \neq \tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R})$ verilmiş olsun ve

$$\tilde{A}^i+\tilde{B}^i=0$$

olacak şekilde bir $\tilde{B}^i \in IF(\mathbb{R})$ mevcut olsun. Tanım 3.2.1 gereğince

$$A(\alpha)+B(\alpha)=0(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta)+B^*(\beta)=0^*(\beta)$$

sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} A_1(\alpha)+B_1(\alpha) &= 0 \\ A_2(\alpha)+B_2(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_1^*(\beta)+B_1^*(\beta) &= 0 \\ A_2^*(\beta)+B_2^*(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $A_1(\alpha)=-B_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)=-B_2(\alpha)$, $A_1^*(\beta)=-B_1^*(\beta)$ ve $A_2^*(\beta)=-B_2^*(\beta)$ elde edilir. Ancak α ve β kesitleri gereğince

$$A_1(\alpha)<A_2(\alpha) \Rightarrow -B_1(\alpha)<-B_2(\alpha) \Rightarrow B_1(\alpha)>B_2(\alpha)$$

ve

$$A_1^*(\beta)<A_2^*(\beta) \Rightarrow -B_1^*(\beta)<-B_2^*(\beta) \Rightarrow B_1^*(\beta)>B_2^*(\beta)$$

çelişkileri elde edilir. Dolayısıyla

$$\tilde{A}^i+\tilde{B}^i=0$$

sağlanacak şekilde $\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcut değildir.

3) $\tilde{A}^i \in IF(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı ve $ab>0$ olmak üzere a, $b \in \mathbb{R}$ reel sayıları verilmiş olsun.

1. Durum. $a>0$ ve $b>0$ olsun. Her α ve $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (a+b)A(\alpha) &= (a+b)[A_1(\alpha),A_2(\alpha)] \\ &= [(a+b)A_1(\alpha),(a+b)A_2(\alpha)] \\ &= [aA_1(\alpha),aA_2(\alpha)]+[bA_1(\alpha),bA_2(\alpha)] \\ &= a[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]+b[A_1(\alpha),A_2(\alpha)] \\ &= aA(\alpha)+bA(\alpha) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(a+b)A^*(\beta) &= (a+b)[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]\\ &= [(a+b)A_1^*(\beta),(a+b)A_2^*(\beta)]\\ &= [aA_1^*(\beta),aA_2^*(\beta)]+[bA_1^*(\beta),bA_2^*(\beta)]\\ &= a[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]+b[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]\\ &= aA^*(\beta)+bAA^*(\beta)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından

$$\tilde{A}^i(a+b)=\tilde{A}^i a+\tilde{A}^i b$$

sağlanır.

2. Durum. $a<0$ ve $b<0$ olsun. Her α ve $\beta\in[0,1]$ için benzer şekilde gösterilebilir.

4) ve **5)** şıkları da α ve β kesit kümeleri kullanılarak benzer şekilde gösterilebilir. □

Örnek 3.2.1. $\tilde{A}^i=(0,1,2;-1,1,3)$ ve $\tilde{B}^i=(2,3,4;1,3,5)$ üçgen dereceli sayıları verilsin. $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli sayısının α ve β kesitleri sırasıyla:

$$A(\alpha)=[\alpha,2-\alpha]$$

ve

$$A^*(\beta)=[1-2\beta,1+2\beta]$$

$\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayısının α ve β kesitleri sırasıyla:

$$B(\alpha)=[2+\alpha,4-\alpha]$$

ve

$$B^*(\beta)=[3-2\beta,3+2\beta]$$

yazılabilir. Bu durumda

$$A(\alpha)+B(\alpha)=[2+2\alpha,6-2\alpha]$$

ve

$$A^*(\beta)+B^*(\beta)=[4-4\beta,4+4\beta]$$

olduğu için $\tilde{A}^i+\tilde{B}^i=\tilde{C}^i$ dersek $\tilde{C}^i$ nin α ve β kesitleri sırasıyla:

$$C(\alpha)=[2+2\alpha,6-2\alpha]$$

ve

$$C^*(\beta)=[4-4\beta,4+4\beta]$$

olarak elde edilir. Buradan $\alpha=0,\alpha=1,\beta=1$ ve $\beta=0$ değerlerini yerine yazarsak $\tilde{C}^i=(2,4,6;0,4,8)$ olarak elde edilir.

Örnek 3.2.2. $\tilde{A}^i = (0,1,2;-1,1,3)$ sezgisel dereceli sayısı ve $k = 2$ reel sayısı verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli sayısının α ve β kesitleri sırasıyla:

$$A(\alpha) = [\alpha, 2-\alpha]$$

ve

$$A^*(\beta) = [1-2\beta, 1+2\beta]$$

dır. Bu durumda

$$2A(\alpha) = [2\alpha, 4-2\alpha]$$

ve

$$2A^*(\beta) = [2-4\beta, 2+4\beta]$$

olduğu için $2\tilde{A}^i = \tilde{D}^i$ dersek $\tilde{D}^i$ nin α ve β kesitleri sırasıyla:

$$D(\alpha) = [2\alpha, 4-2\alpha]$$

ve

$$D^*(\beta) = [2-4\beta, 2+4\beta]$$

olarak elde edilir. Buradan $\alpha = 0, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $\beta = 0$ değerlerini yerine yazarsak $\tilde{D}^i = (0,2,4;-2,2,6)$ olarak elde edilir.

3.3 Sezgisel Dereceli Sayılar için Hukuhara ve Genelleştirilmiş Hukuhara Farkı

Tanım 3.3.1. *$\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayılarının **Hukuhara farkı (H-farkı)**, eğer $\tilde{C}^i$ mevcut ise,*

$$\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow \tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$$

olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 3.3.1. *$\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayıların H-farkı mevcut ise tektir.*

İspat. $\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ olacak şekilde $\tilde{C}^i$ ve $\tilde{D}^i$ sezgisel dereceli sayıları mevcut olsun. H-farkı tanımından ve Tanım 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i &= \tilde{C}^i \Leftrightarrow \tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i \\
&\Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta) = B^*(\beta) + C^*(\beta) \\
&\Leftrightarrow A(\alpha) \ominus_H B(\alpha) = C(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta) \ominus_H B^*(\beta) = C^*(\beta)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i &= \tilde{D}^i \Leftrightarrow \tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i \\
&\Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha) + D(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta) = B^*(\beta) + D^*(\beta) \\
&\Leftrightarrow A(\alpha) \ominus_H B(\alpha) = D(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta) \ominus_H B^*(\beta) = D^*(\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kompakt ve konveks kümeler için H-farkı tek olduğu için her α ve $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= D(\alpha) \\ C^*(\beta) &= D^*(\beta) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{C}^i$ ve $\tilde{D}^i$ sezgisel dereceli sayıları mevcut olduğundan

$$\tilde{C}^i = \tilde{D}^i$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.2. *$\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayıları verilsin ve $\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ farkı mevcut olsun. Bu durumda her α, $\beta \in [0.1]$ için*

$$C(\alpha) = [A_1(\alpha) - B_1(\alpha), A_2(\alpha) - B_2(\alpha)]$$

ve

$$C^*(\beta) = [A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), A_2^*(\alpha) - B_2^*(\beta)]$$

dır.

İspat.

$$\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow \tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$$

Tanım 3.2.1'de verilen toplama işlemine göre her α, $\beta \in [0,1]$ için

$$\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha) \text{ ve } A^*(\beta) = B^*(\beta) + C^*(\beta)$$

olduğundan aralık aritmetiğinden

$$C(\alpha) = [A_1(\alpha) - B_1(\alpha), A_2(\alpha) - B_2(\alpha)]$$

ve

$$C^*(\beta) = [A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), A_2^*(\alpha) - B_2^*(\beta)]$$

elde edilir. □

Tanım 3.3.2. *$\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayılarının* ***genelleştirilmiş Hukuhara farkı (gH-farkı)****, eğer $\tilde{C}^i$ mevcut ise, aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{i)}}\ \tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i \\ \quad \textit{veya} \\ \textbf{\textit{ii)}}\ \tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.3. *$\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i$ sezgisel dereceli sayılarının gH-farkı mevcut ise tektir.*

İspat. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ olacak şekilde $\tilde{C}^i$ ve $\tilde{D}^i$ sezgisel dereceli sayıları mevcut olsun.

1. Durum. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ gH-farkları $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{D}^i$sağlanacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda Teorem 3.3.1 gereğince

$$\tilde{C}^i = \tilde{D}^i$$

elde edilir.

2. Durum. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ gH-farkları $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i$ ve

$\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{D}^i$ sağlanacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda

$$\tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{D}^i$$

ifadesinden, her α ve $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{array}{rcl} A(\alpha) + (-1)C(\alpha) & = & A(\alpha) + (-1)D(\alpha) \\ & & \text{ve} \\ A^*(\beta) + (-1)C^*(\beta) & = & A^*(\beta) + (-1)D^*(\beta) \end{array}$$

olduğundan

$$\begin{array}{rcl} (A(\alpha) + (-1)C(\alpha)) \ominus_H A(\alpha) & = & (-1)D(\alpha) \\ (A^*(\beta) + (-1)C^*(\beta)) \ominus_H A^*(\beta) & = & (-1)D^*(\beta) \end{array}$$

yazılabilir. Buradan her α ve $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{array}{rcl} (-1)C(\alpha) & = & (-1)D(\alpha) \\ (-1)C^*(\beta) & = & (-1)D^*(\beta) \end{array}$$

olduğundan

$$\tilde{C}^i = \tilde{D}^i$$

elde edilir.

3. Durum. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ gH-farkları sırasıyla $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ ve $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{D}^i$ sağlanacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda

$$\tilde{A}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{D}^i + \tilde{C}^i$$

ifadesinden

$$(-1)\tilde{D}^i + \tilde{C}^i = 0$$

elde edilir. Teorem 3.2.6 gereğince $\tilde{C}^i = \tilde{D}^i = 0$ veya $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tilde{C}^i = \tilde{D}^i = \{x\}$ tek nokta kümesinden ibarettir.

4. Durum. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{D}^i$ gH-farkları sırasıyla $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i$ ve $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{D}^i$ sağlanacak şekilde mevcut olsun. 3. Durum'a benzer şekilde gösterilirse, Teorem 3.2.6 gereğince $\tilde{C}^i = \tilde{D}^i = 0$ veya $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tilde{C}^i = \tilde{D}^i = \{x\}$ tek nokta kümesinden ibarettir. □

Teorem 3.3.4. *$\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayıları verilsin ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ farkı mevcut olsun. Bu durumda her α, $\beta \in [0,1]$ için*

$$P(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha)$$
$$R(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha)$$
$$P^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta)$$
$$R^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= [\min\{P(\alpha),R(\alpha)\},\max\{P(\alpha),R(\alpha)\}] \\ C^*(\beta) &= [\min\{P^*(\beta),R^*(\beta)\},\max\{P^*(\beta),R^*(\beta)\}] \end{aligned}$$

dır.

İspat. Eğer $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ durumu sağlanacak şekilde mevcut ise Teorem 3.3.2 gereğince

$$C(\alpha) = [A_1(\alpha) - B_1(\alpha), A_2(\alpha) - B_2(\alpha)]$$

ve

$$C^*(\beta) = [A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), A_2^*(\alpha) - B_2^*(\beta)]$$

elde edilir.

Eğer $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ farkı $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i$ durumu sağlanacak şekilde mevcut ise Tanım 3.2.1 gereğince her α, $\beta \in [0,1]$ için

$$\tilde{A}^i \ominus_H \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \Leftrightarrow B(\alpha) = A(\alpha) + (-1)C(\alpha) \text{ ve } B^*(\beta) = A^*(\beta) + (-1)C^*(\beta)$$

olduğundan aralık aritmetiğinden

$$C(\alpha) = [A_2(\alpha) - B_2(\alpha), A_1(\alpha) - B_1(\alpha)]$$

ve

$$C^*(\beta) = [A_2^*(\alpha) - B_2^*(\beta), A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta)]$$

elde edilir. Her iki durumu göz önüne alırsak sonuç olarak eğer $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ olması halinde her α, $\beta \in [0,1]$ için

$$P(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha)$$
$$R(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha)$$
$$P^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta)$$
$$R^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= [\min\{P(\alpha),R(\alpha)\},\max\{P(\alpha),R(\alpha)\}] \\ C^*(\beta) &= [\min\{P^*(\beta),R^*(\beta)\},\max\{P^*(\beta),R^*(\beta)\}] \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

3.4 Sezgisel Dereceli Sayılar için Destek Fonksiyonu ve Özellikleri

Tanım 3.4.1. *$\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ nın α ve β kesitleri $A(\alpha)$ ve $A^*(\beta)$ olmak üzere her $p \in S^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ için*

$$s_{A(\alpha)}(p) = \sup\{< p,x >: x \in A(\alpha)\}$$

ve

$$s_{A^*(\beta)}(p) = \sup\{< p,x >: x \in A^*(\beta)\}$$

olarak tanımlanan $s_{A(\alpha)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ve $s_{A^*(\beta)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarına $\tilde{A}^i$ dereceli sayısının α ***ve*** *β* ***destek fonksiyonları*** *denir. Buradaki $< . >$ iç çarpımı, $\mathbb{R}^n$ deki standart iç çarpımdır.*

Teorem 3.4.1. *$\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları ve $s_{A^*(\beta)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ destek fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

1) *Her $\beta \in [0,1]$ için $s_{A^*(\beta)}$, S^{n-1} de sınırlıdır.*

2) *Her $\beta \in [0,1]$ için p ye göre Lipschitz şartını sağlar.*

3) *Her $\beta \in [0,1]$ için*

$$d_H(A^*(\beta), B^*(\beta)) = \sup\{\left|s_{A^*(\beta)} - s_{B^*(\beta)}\right| : p \in S^{n-1}\}$$

olur.

İspat. **1)** $\|A^*(\beta)\| := \sup\{\|x\| : x \in A^*(\beta)\}$ olsun. Mutlak değer ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left|s_{A^*(\beta)}(p)\right| &= |\sup\{< p,x >: x \in A^*(\beta)\}| \\
&\leq |\sup\{|< p,x >| : x \in A^*(\beta)\}| \\
&\leq |\sup\{\|p\| \, \|x\| : x \in A^*(\beta)\}| \\
&= \sup\{\|x\| : x \in A^*(\beta)\} \\
&= \|A^*(\beta)\| \\
&\leq \|A^*(1)\|
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left|s_{A^*(\beta)}(p)\right| \leq \|A^*(1)\|$$

elde edilir. Dolayısıyla her β için $s_{A^*(\beta)}$ destek fonksiyonu sınırlıdır.

2) Supremum ve iç çarpımın özelliği gereği

$$\begin{aligned}
s_{A^*(\beta)}(p) &= \sup\{< p,x >: x \in A^*(\beta)\} \\
&= \sup\{< p-q+q,x >: x \in A^*(\beta)\} \\
&= \sup\{< p-q,x > + < q,x >: x \in A^*(\beta)\} \\
&\leq \sup\{< p-q,x >: x \in A^*(\beta)\} + \sup\{< q,x >: x \in A^*(\beta)\} \\
&= s_{A^*(\beta)}(p-q) + s_{A^*(\beta)}(q)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$s_{A^*(\beta)}(p) - s_{A^*(\beta)}(q) \leq s_{A^*(\beta)}(p-q)$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} \left| s_{A^*(\beta)}(p) - s_{A^*(\beta)}(q) \right| &\leq \left| s_{A^*(\beta)}(p-q) \right| \\ &\leq \|p-q\| \, \|A^*(\beta)\| \\ &\leq \|p-q\| \, \|A^*(1)\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığı için $s_{A^*(\beta)}$ fonksiyonu p ye göre Lipschitz şartını sağlar ve $\|A^*(1)\|$ Lipschitz katsayısıdır.

3) [51] Lemma 2.4 gereğince sağlanır.

□

Teorem 3.4.2. *$\tilde{A}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı, $s_{A(\alpha)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ve $s_{A^*(\beta)} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ destek fonksiyonları verilmiş olsun. Her $p \in S^{n-1}$ için aşağıdakiler sağlanır.*

1) *$s_{A(\alpha)}$ fonksiyonu α ya göre artmayan ve soldan sürekli bir fonksiyondur.*

2) *$s_{A^*(\beta)}$ fonksiyonu β ya göre azalmayan ve sağadan sürekli bir fonksiyondur.*

İspat. **1)** Teorem 2.5.5 gereğince sağlanır.

2) $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olmak üzere β_1, β_2 sayıları verilmiş olsun. Sezgisel dereceli sayıların β kesitleri β ya göre azalmayan kümeler dizisi oluşturduğu için

$$A^*(\beta_1) \subseteq A^*(\beta_2)$$

sağlanır. Supremum özelliği gereğince her bir $p \in S^{n-1}$ için

$$\sup\{< p,x >: x \in A^*(\beta_1)\} \leq \sup\{< p,x >: x \in A^*(\beta_1)\}$$

eşitsizliğinden

$$s_{A^*(\beta_1)}(p) \leq s_{A^*(\beta_2)}(p)$$

elde edilir. Dolayısıyla $s_{A^*(\beta)}$ fonksiyonu β ya göre azalmayan bir fonksiyondur. $(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda

$$d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta)) \to 0$$

ve

$$\left| s_{A^*(\beta_n)}(p) - s_{A^*(\beta)}(p) \right| \leq d_H(A^*(\beta_n), A^*(\beta))$$

olduğu için

$$\left| s_{A^*(\beta_n)}(p) - s_{A^*(\beta)}(p) \right| \to 0$$

elde edilir. Yani (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsarken $s_{A^*(\beta_n)}$ fonksiyonu $s_{A^*(\beta)}$ fonksiyonuna yakınsadığı için $s_{A^*(\beta)}$ fonksiyonu β ya göre sağadan sürekli bir fonksiyondur.

□

Tanım 3.4.2. *$\tilde{C}^i = \tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ olmak üzere $\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i$ ve $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i$, $\tilde{C}^i$ ve $(-1)\tilde{C}^i$ nin α ve β destek fonksiyonları sırasıyla $s_{A(\alpha)}$, $s_{A^*(\beta)}$; $s_{B(\alpha)}$, $s_{B^*(\beta)}$; $s_{C(\alpha)}$, $s_{C^*(\beta)}$ ve $s_{-C(\alpha)}$, $s_{-C^*(\beta)}$ olsun. Bu durumda her $p \in S^{n-1}$ için $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ gH-farkı destek fonksiyonu yardımıyla*

$$s_{C(\alpha)}(p) = \begin{cases} \text{i) } s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p) \\ \text{veya} \\ \text{ii) } s_{(-1)B(\alpha)}(p) - s_{(-1)A(\alpha)}(p) \end{cases}$$

ve

$$s_{C^*(\beta)}(p) = \begin{cases} \text{i) } s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p) \\ \text{veya} \\ \text{ii) } s_{(-1)B^*(\beta)}(p) - s_{(-1)A^*(\beta)}(p) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.3. *$\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i$ nin α ve β destek fonksiyonları sırasıyla $s_{A(\alpha)}$, $s_{A^*(\beta)}$ ve $s_{B(\alpha)}$, $s_{B^*(\beta)}$ olsun. $s_1(p) = s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)$, $s_2(p) = s_{B(\alpha)}(p) - s_{A(\alpha)}(p)$, $s_1^*(p) = s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p)$ ve $s_2^*(p) = s_{B^*(\beta)}(p) - s_{A^*(\beta)}(p)$ olmak üzere s_1, s_2, s_1^*,s_2^* : $S^{n-1} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım.*

1) *Eğer*

- **a)** *Her $\alpha \in [0,1]$ için s_1 fonksiyonu $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_1 fonksiyonu $\alpha \in [0,1]$ ya göre artmayan ise; ancak s_2 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon değil ise*

ve

- **b)** *Her $\beta \in [0,1]$ için s_1^* fonksiyonu $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_1^* fonksiyonu $\beta \in [0,1]$ ye göre azalmayan ise; ancak s_2^* fonksiyonu her $\beta \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre azalmayan bir fonksiyon değil ise*

$\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ sağlanacak şekilde mevcuttur ve $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ nin α ve β destek fonksiyonları için $s_{C(\alpha)}(p) = s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)$ ve $s_{C^*(\beta)}(p) = s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p)$ eşitlikleri sağlanır.

2) *Eğer*

- **a)** *Her $\alpha \in [0,1]$ için s_2 fonksiyonu $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_2 fonksiyonu $\alpha \in [0,1]$ ye göre artmayan ise ancak s_1 fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre artmayan bir fonksiyon değil ise*

ve

- **b)** *Her $\beta \in [0,1]$ için s_2^* fonksiyonu $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_2^* fonksiyonu $\beta \in [0,1]$ ye göre azalmayan ise ancak s_1^* fonksiyonu her $\beta \in [0,1]$ için p'ye göre alt toplanabilir değil veya her $p \in S^{n-1}$ için α ya göre azalmayan bir fonksiyon değil ise*

$\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i$ sağlanacak şekilde mevcuttur ve $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ nin α ve β destek fonksiyonları için $s_{C(\alpha)}(p) = s_{-B(\alpha)}(p) - s_{-A(\alpha)}(p)$ ve $s_{C^*(\beta)}(p) = s_{-B^*(\beta)}(p) - s_{-A^*(\beta)}(p)$ eşitlikleri sağlanır.

3) *Eğer*

- ***a)*** *Her $\alpha \in [0,1]$ için s_1 ve s_2 fonksiyonları $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_1 ve s_2 fonksiyonları $\alpha \in [0,1]$ ye göre artmayan ise*

ve

- ***b)*** *Her $\beta \in [0,1]$ için s_1^* ve s_2^* fonksiyonları $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir ve her $p \in S^{n-1}$ ye göre s_1^* ve s_2^* fonksiyonları $\beta \in [0,1]$ ye göre azalmayan ise*

$\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ ve $\tilde{B}^i = \tilde{A}^i + (-1)\tilde{C}^i$ eşitlikleri aynı anda sağlanacak şekilde mevcuttur.

İspat. Sadece **1)** şıkkını ispatlayalım. **2)** ve **3)** şıklarının ispatı benzer şekilde yapılır. Her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)$ ve $s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p)$ fonksiyonları $p \in S^{n-1}$ ye göre alt toplanabilir olduğu için Teorem 2.5.6 ve Tanım 3.4.2 gereğince

$$s_{C(\alpha)}(p) = s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p)$$

ve

$$s_{C^*(\beta)}(p) = s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p)$$

olacak şeklide $C(\alpha) = A(\alpha) \ominus_{gH} B(\alpha)$ ve $C^*(\beta) = A^*(\beta) \ominus_{gH} B^*(\beta)$ kümeleri mevcuttur.

Şimdi $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ ailelerinin bir $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel fonksiyonu için α ve β kesit oluşturduğunu gösterelim. Teorem 2.5.7 gereğince $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ailesi α kesit oluşturmaktadır. Sadece $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ nin β kesit oluşturduğunu gösterelim.

Her $\beta \in [0,1]$ için $s_{C^*(\beta)}$ fonksiyonu $C^*(\beta)$ kümesinin destek fonksiyonu olduğundan ve her $\mathbb{R}^n$ de tanımlı her destek fonksiyona karşılık bir tek kompakt ve konveks küme karşılık geldiği için $C^*(\beta)$ kümesini β destek fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz [69].

$$C^*(\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n :< p, x > \leq s_{C^*(\beta)}(p),\, p \in \mathbb{R}^n,\ \|p\| = \beta\}$$

ve

$$C^*(1) = kap\left(\bigcup_{\beta_k \in [0,1)} C^*(\beta_k)\right).$$

Her $p \in \mathbb{R}^n$ için $s_{C^*(\beta)}$ fonksiyonu β ya göre azalmayan olduğu için

$$\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow s_{C^*(\beta_1)} \leq s_{C^*(\beta_2)} \Rightarrow C^*(\beta_1) \subseteq C^*(\beta_2)$$

elde edilir.

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\beta \leq \beta_n \Rightarrow s_{C^*(\beta)} \leq s_{C^*(\beta_n)} \Rightarrow C^*(\beta) \subseteq C^*(\beta_n)$$

ifadesinden

$$C^*(\beta) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)$$

elde edilir.

Öte yandan, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in C^*(\beta_n)$ ve $\|p\| = \beta_n$ olmak üzere her $p \in \mathbb{R}^n$ için

$$< p, x > \leq s_{C^*(\beta_n)}(p)$$

sağlanır. Özel olarak $\|p_1\| = \beta$ olmak üzere $p = \frac{\beta_n}{\beta} p_1$ seçersek

$$< \frac{\beta_n}{\beta} p_1, x > \leq s_{C^*(\beta_n)}(\frac{\beta_n}{\beta} p_1)$$

elde edilir. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsadığı için $n \to \infty$ iken

$$< p_1, x > \leq s_{C^*(\beta)}(p_1)$$

elde edilir. Bu durumda $x \in C^*(\beta)$ dır. Sonuç olarak

$$C^*(\beta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)$$

elde edilir.

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi verilmiş olsun. (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\beta_n \leq 1 \Rightarrow s_{C^*(\beta_n)} \leq s_{C^*(1)} \Rightarrow C^*(\beta_n) \subseteq C^*(1)$$

olduğundan

$$kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)) \subseteq C^*(1)$$

Öte yandan $x \in C^*(1)$ olsun. $\|p\| = \beta$ olmak üzere her $p \in \mathbb{R}^n$ için $< p, x > \leq s_{C^*(\beta)}(p)$ olduğundan özel olarak $\|p_1\| = \beta_n$ olmak üzere $p = \frac{p_1}{\|p_1\|}$ seçelim. Bu durum da

$$\begin{aligned} &< \frac{p_1}{\|p_1\|}, x > \leq s_{C^*(\beta)}(\frac{p_1}{\|p_1\|}) \\ \frac{1}{\|p_1\|} &< p_1, x > \leq s_{C^*(\beta)}(p_1) \frac{1}{\|p_1\|} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\|p_1\| = \beta_n$ olmak üzere her $p_1 \in \mathbb{R}^n$ için

$$< p_1, x > \leq s_{C^*(\beta_n)}(p_1)$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in C^*(\beta_n)$ olduğundan

$$x \in kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir ve

$$C^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right)$$

sağlanır.

Dolayısıyla Teorem 2.5.7 ve Teorem 3.2.3 gereğince $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesi bir $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısının α, β kesitlerini oluşturmaktadır.

Sonuç olarak $\tilde{A}^i = \tilde{B}^i + \tilde{C}^i$ sağlanacak şekilde $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ gH-farkı mevcuttur. □

Teorem 3.4.4. *$\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i$ nin α ve β kesitleri sırasıyla $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, $A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]$ ve $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$, $B^*(\beta) = [B_1^*(\beta), B_2^*(\beta)]$ ile verilmiş olsun. Bu durumda $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkının mevcut olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır.*

$$\textbf{1)}\quad \textbf{a)}\ \begin{cases} C_1(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ C_2(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre artmayandır.} \\ \textit{çap}(A(\alpha)) \geq \textit{çap}(B(\alpha)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

ve

$$\textbf{b)}\ \begin{cases} C_1^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \textit{ ya göre artmayandır.} \\ C_2^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ \textit{çap}(A^*(\beta)) \geq \textit{çap}(B^*(\beta)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

veya

$$\textbf{2)}\quad \textbf{a)}\ \begin{cases} C_1(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ C_2(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre artmayandır.} \\ \textit{çap}(A(\alpha)) \geq \textit{çap}(B(\alpha)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

ve

$$\textbf{b)}\ \begin{cases} C_1^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \textit{ ya göre artmayandır.} \\ C_2^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ \textit{çap}(A^*(\beta)) \leq \textit{çap}(B^*(\beta)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

veya

$$\textbf{3)}\quad \textbf{a)}\ \begin{cases} C_1(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ C_2(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \textit{ ya göre artmayandır.} \\ \textit{çap}(A(\alpha)) \leq \textit{çap}(B(\alpha)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

ve

$$\textbf{b)} \begin{cases} C_1^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta),\ \beta \textit{ ya göre artmayandır.} \\ C_2^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta),\ \beta \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ \textit{çap}(A^*(\beta)) \geq \textit{çap}(B^*(\beta)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

veya

$$\textbf{4)} \quad \textbf{a)} \begin{cases} C_1(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha),\ \alpha \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ C_2(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha),\ \alpha \textit{ ya göre artmayandır.} \\ \textit{çap}(A(\alpha)) \leq \textit{çap}(B(\alpha)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

ve

$$\textbf{b)} \begin{cases} C_1^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta),\ \beta \textit{ ya göre artmayandır.} \\ C_2^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta),\ \beta \textit{ ya göre azalmayandır.} \\ \textit{çap}(A^*(\beta)) \leq \textit{çap}(B^*(\beta)) \textit{ sağlanır.} \end{cases}$$

İspat. $\Rightarrow$:) $\tilde{A}^i$ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı mevcut olsun. Her $p \in S^0 = \{-1, 1\}$ için $\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i$ nin α ve β destek fonksiyonları

$$\begin{aligned} s_{A(\alpha)}(p) &= \sup\{< x, p >: x \in A(\alpha)\} \\ &= \sup\{x.p : x \in [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]\} \\ s_{A^*(\beta)}(p) &= \sup\{< x, p >: x \in A^*(\beta)\} \\ &= \sup\{x.p : x \in [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)]\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_{B(\alpha)}(p) &= \sup\{< x, p >: x \in B(\alpha)\} \\ &= \sup\{x.p : x \in [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]\} \\ s_{B^*(\beta)}(p) &= \sup\{< x, p >: x \in B^*(\beta)\} \\ &= \sup\{x.p : x \in [B_1^*(\beta), B_2^*(\beta)]\} \end{aligned}$$

Buradan

$p = -1$ için

$$\begin{aligned} s_{A(\alpha)}(p) &= -A_1(\alpha) \\ s_{A^*(\beta)}(p) &= -A_1^*(\beta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_{B(\alpha)}(p) &= -B_1(\alpha) \\ s_{B^*(\beta)}(p) &= -B_1^*(\beta) \end{aligned}$$

elde edilir.

$p = 1$ için

$$\begin{aligned} s_{A(\alpha)}(p) &= A_2(\alpha) \\ s_{A^*(\beta)}(p) &= A_2^*(\beta) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
s_{B(\alpha)}(p) &= B_2(\alpha)\\
s_{B^*(\beta)}(p) &= B_2^*(\beta)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı mevcut olduğu için gH-farkı tanımındaki **i)** veya **ii)** durumlarına göre α- kesitleri için

$$
s_{C(\alpha)}(p) = s_{A(\alpha)}(p) - s_{B(\alpha)}(p) = \begin{cases} -(A_1(\alpha) - B_1(\alpha)); & p = -1 \\ A_2(\alpha) - B_2(\alpha); & p = 1 \end{cases} \tag{3.1}
$$

veya

$$
s_{C(\alpha)}(p) = s_{-B(\alpha)}(p) - s_{-A(\alpha)}(p) = \begin{cases} -(A_2(\alpha) - B_2(\alpha)); & p = -1 \\ A_1(\alpha) - B_1(\alpha); & p = 1 \end{cases} \tag{3.2}
$$

elde edilir. Öte yandan β- kesitleri için

$$
s_{C^*(\beta)}(p) = s_{A^*(\beta)}(p) - s_{B^*(\beta)}(p) = \begin{cases} -(A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta)); & p = -1 \\ A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta); & p = 1 \end{cases} \tag{3.3}
$$

veya

$$
s_{C^*(\beta)}(p) = s_{-B^*(\beta)}(p) - s_{-A^*(\beta)}(p) = \begin{cases} -(A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta)); & p = -1 \\ A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta); & p = 1 \end{cases} \tag{3.4}
$$

elde edilir. Sonuç olarak bu ifadelerden aşağıdaki durumlar elde edilir.

1. Durum. (3.1) ve (3.3) ifadeleri sağlansın. Bu durumda $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **i)** anlamında mevcut olduğu için ve $s_{C(\alpha)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince α ya göre artmayan olduğu için

$$
\begin{cases} C_1(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre azalmayan olmalı,} \\ C_2(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre artmayan olmalı,} \\ \text{çap}(A(\alpha)) \geq \text{çap}(B(\alpha)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}
$$

ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **i)** anlamında mevcut olduğundan ve $s_{C^*(\beta)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince β ya göre azalmayan olduğu için

$$
\begin{cases} C_1^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre artmayan olmalı,} \\ C_2^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre azalmayan olmalı,} \\ \text{çap}(A^*(\beta)) \geq \text{çap}(B^*(\beta)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}
$$

2. Durum. (3.1) ve (3.4) ifadeleri sağlansın. Bu durumda $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **i)** anlamında mevcut olduğu için ve $s_{C(\alpha)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince α ya göre artmayan olduğu için

$$
\begin{cases} C_1(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre azalmayan olmalı,} \\ C_2(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre artmayan olmalı,} \\ \text{çap}(A(\alpha)) \geq \text{çap}(B(\alpha)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}
$$

ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **ii)** anlamında mevcut olduğundan ve $s_{C^*(\beta)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince β ya göre azalmayan olduğu için

$$\begin{cases} C_1^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre artmayan olmalı,} \\ C_2^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre azalmayan olmalı,} \\ \text{çap}(A^*(\beta)) \leq \text{çap}(B^*(\beta)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}$$

3. Durum. (3.2) ve (3.3) ifadeleri sağlansın. Bu durumda $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **ii)** anlamında mevcut olduğu için ve $s_{C(\alpha)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince α ya göre artmayan olduğu için

$$\begin{cases} C_1(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre azalmayan olmalı} \\ C_2(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre artmayan olmalı} \\ \text{çap}(A(\alpha)) \leq \text{çap}(B(\alpha)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}$$

ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **i)** anlamında mevcut olduğundan ve $s_{C^*(\beta)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince β ya göre azalmayan olduğu için

$$\begin{cases} C_1^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre artmayan olmalı} \\ C_2^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre azalmayan olmalı} \\ \text{çap}(A^*(\beta)) \geq \text{çap}(B^*(\beta)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}$$

4. Durum. (3.2) ve (3.4) ifadeleri sağlansın. Bu durumda $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **ii)** anlamında mevcut olduğu için ve $s_{C(\alpha)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince α ya göre artmayan olduğu için

$$\begin{cases} C_1(\alpha) = A_2(\alpha) - B_2(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre azalmayan olmalı} \\ C_2(\alpha) = A_1(\alpha) - B_1(\alpha), \ \alpha \text{ ya göre artmayan olmalı} \\ \text{çap}(A(\alpha)) \leq \text{çap}(B(\alpha)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}$$

ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkı **ii)** anlamında mevcut olduğundan ve $s_{C^*(\beta)}$ destek fonksiyonu Teorem 3.4.2 gereğince β ya göre azalmayan olduğu için

$$\begin{cases} C_1^*(\beta) = A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre artmayan olmalı} \\ C_2^*(\beta) = A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta), \ \beta \text{ ya göre azalmayan olmalı} \\ \text{çap}(A^*(\beta)) \geq \text{çap}(B^*(\beta)) \text{ sağlanmalıdır} \end{cases}$$

$\Leftarrow$:) **1)-4)** durumlarından herhangi biri sağlansın. O halde, $C_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $C_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $C_1^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ ve $C_2^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları Teorem 3.2.4 şartlarını sağladığı için Teorem 3.2.4 gereğince $\tilde{C}^i$ sezgisel sayısı mevcut olduğundan $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ farkı mevcuttur. □

Örnek 3.4.1. $\tilde{A}^i = (6,9,10;5,9,11)$ ve $\tilde{B}^i = (13,15,18;12,15,19)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun ve $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ mevcut olsun. $\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i$ nin α, β kesitleri

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= [6+3\alpha, 10-\alpha] \\ A^*(\beta) &= [9-4\beta, 9+2\beta] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= [13+2\alpha, 18-3\alpha] \\ B^*(\beta) &= [15-3\beta, 15+4\beta] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A(\alpha)\ominus_{gH} B(\alpha) &= [2\alpha-8, \alpha-7] \\ &= [C_1(\alpha), C_2(\alpha)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A^*(\beta)\ominus_{gH} B^*(\beta) &= [-7-2\beta, -7-\beta] \\ &= [C_1^*(\beta), C_2^*(\beta)] \end{aligned}$$

elde edilir. $C_2(\alpha)$, α ya göre artan ve $C_2^*(\beta)$, β ya göre azalan olduğu için Teorem 3.4.4 gereğince $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ farkı mevcut değildir. Gerçekten de $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ farkı hesaplandığında $\tilde{C}^i = (-8,-6,-7;-9,-7,-8)$ elde edilir ama bu sayı üçgen sezgisel dereceli bir sayı değildir.

Sonuç 3.4.1. *$\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3; a_1', a_2, a_3')$ ve $\tilde{B}^i = (b_1, b_2, b_3; b_1', b_2, b_3')$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i = \tilde{C}^i$ gH-farkının mevcut olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şıklardan birinin sağlanmasıdır.*

1)

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &\leq a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3 \\ &ve \\ a_1' - b_1' &\leq a_2 - b_2 \leq a_3' - b_3' \end{aligned}$$

sağlanır.

2)

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &\leq a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3 \\ &ve \\ a_3' - b_3' &\leq a_2 - b_2 \leq a_1' - b_1' \end{aligned}$$

sağlanır.

3)

$$\begin{aligned} a_3 - b_3 &\leq a_2 - b_2 \leq a_1 - b_1 \\ &ve \\ a_1' - b_1' &\leq a_2 - b_2 \leq a_3' - b_3' \end{aligned}$$

sağlanır.

4)

$$\begin{aligned} a_3 - b_3 &\leq a_2 - b_2 \leq a_1 - b_1 \\ &ve \\ a_3' - b_3' &\leq a_2 - b_2 \leq a_1' - b_1' \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. $\Rightarrow$:) $\tilde{A}^i = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3)$ ve $\tilde{B}^i = (b_1, b_2, b_3; b'_1, b_2, b'_3)$ sezgisel sayılarının α ve β kesitleri

$A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)] = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 + \alpha(a_2 - a_3)]$

$B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)] = [b_1 + \alpha(b_2 - b_1), b_3 + \alpha(b_2 - b_3)]$

$A^*(\beta) = [A_1^*(\beta), A_2^*(\beta)] = [a'_2 + \beta(a'_1 - a_2), a'_2 + \beta(a'_3 - a_2)]$

$B^*(\beta) = [B_1^*(\beta), B_2^*(\beta)] = [b'_2 + \beta(b'_1 - b_2), b'_2 + \beta(b'_3 - b_2)]$

olarak yazılabilir. Teorem 3.4.4'deki **1)** şıkkı sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) - B_1(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1) - b_1 - \alpha(b_2 - b_1) \\ &= a_1 - b_1 + \alpha(a_2 - a_1 - b_2 + b_1)) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$A_1(\alpha) - B_1(\alpha)$ nın α ya göre azalmayan olması için gerek ve yeter şart

$$a_2 - a_1 - b_2 + b_1 \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} A_2(\alpha) - B_2(\alpha) &= a_3 + \alpha(a_2 - a_3) - b_3 - \alpha(b_2 - b_3) \\ &= a_3 - b_3 + \alpha(a_2 - a_3 - b_2 + b_3)) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$A_2(\alpha) - B_2(\alpha)$ nın α ya göre artmayan olması için gerek ve yeter şart

$$a_2 - a_3 - b_2 + b_3 \leq 0$$

sağlanmasıdır. Buradan

$$a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3$$

elde edilir.

Her iki eşitsizlikten

$$a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta) &= a'_2 + \beta(a'_1 - a_2) - b'_2 - \beta(b'_1 - b_2) \\ &= a'_2 - b'_2 + \beta(a'_1 - a_2 - b'_1 + b_2) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$A_1^*(\beta) - B_1^*(\beta)$ nın β ya göre artmayan olması için gerek ve yeter şart

$$a_1' - a_2 - b_1' + b_2 \leq 0$$

dır. Buradan

$$a_1' - b_1' \leq a_2 - b_2$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta) &= a_2' + \beta(a_3' - a_2) - b_2' - \beta(b_3' - b_2) \\ &= a_2' - b_2' + \beta(a_3' - a_2 - b_3' + b_2) \end{aligned}$$

elde edilir. $A_2^*(\beta) - B_2^*(\beta)$ nın β ya göre azalmayan olması için gerek ve yeter şart

$$a_3' - a_2 - b_3' + b_2 \geq 0$$

dır. Buradan

$$a_2 - b_2 \leq a_3' - b_3'$$

elde edilir. Her iki eşitsizlikten

$$a_1' - b_1' \leq a_2 - b_2 \leq a_3' - b_3'$$

bulunur.

$\Leftarrow$:) **1)** şıkkı sağlansın. Bu taktirde Teorem 3.4.4 deki **1)** şıkkı sağlandığı için gH-farkı mevcuttur.

Sonuç $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ gH-farkı mevcut olması için gerek ve yeter

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &\leq a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3 \\ a_1' - b_1' &\leq a_2 - b_2 \leq a_3' - b_3' \end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Diğer durumlar için de ispatlar benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Örnek 3.4.2. $\tilde{A}^i = (6, 9, 10; 5, 9, 11)$ ve $\tilde{B}^i = (13, 15, 18; 12, 15, 19)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun. Sonuç 3.4.1 gereğince

$$a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2 \leq a_3 - b_3$$

den

$$-7 \leq -6 \leq -8$$

eşitsizliği sağlanmadığı için $\tilde{A}^i \ominus_{gH} \tilde{B}^i$ farkı mevcut değildir.

4. SEZGİSEL DERECELİ SAYILARIN METRİK ÖZELLİKLERİ

Teorem 4.0.1. *$\tilde{A}^i$ ve $\tilde{B}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları verilmiş olsun.*

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) &= \sup\{d_H(A(\alpha),B(\alpha)) : \alpha \in [0,1]\} \\ D_2(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) &= \sup\{d_H(A^*(\beta),B^*(\beta)) : \beta \in [0,1]\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) = \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i),D_2(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i)\}$$

ile tanımlanan $D_\infty : IF_N(\mathbb{R}^n) \times IF_N(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $IF_N(\mathbb{R}^n)$ de bir metrik tanımlar.

İspat. Metrik aksiyomlarının ilk üç şartı sağlandığı kolayca görülebilir. Metrik aksiyomlarının 4. şartı olan üçgen eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

M4) $\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i$ ve $\tilde{C}^i \in IF_N(R^n)$ olsun. D_1 ve D_2 birer metrik olduğu için

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) &\leq D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{C}^i,\tilde{B}^i) \\ D_2(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) &\leq D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{C}^i,\tilde{B}^i) \end{aligned}$$

üçgen eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned} P &= \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i),D_2(\tilde{B}^i,\tilde{A}^i)\} \\ R &= \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{C}^i,\tilde{B}^i),D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{C}^i,\tilde{B}^i)\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $P \leq R$ olduğu kolayca görülür. Her a ve $b \in \mathbb{R}$ için

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

eşitliği yardımıyla

$$R \leq \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i),D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)\}+\max\{D_1(\tilde{C}^i,B),D_2(\tilde{C}^i,B)\}$$

eşitsizliği kolayca elde edilir. Dolayısıyla $P \leq R$ olduğundan

$$D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) \leq D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_\infty(\tilde{C}^i,\tilde{B}^i)$$

üçgen eşitsizliği sağlanır.

□

Teorem 4.0.2. *$\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^i$, $\tilde{C}^i$ ve $\tilde{D}^i \in IF(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayıları ve $\lambda \in R$ reel sayısı verilmiş olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1)

$$D_\infty(\tilde{A}^i+\tilde{C}^i,\tilde{B}^i+\tilde{C}^i)=D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i)$$

2)

$$D_\infty(\lambda\tilde{A}^i,\lambda\tilde{B}^i)=|\lambda|D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i)$$

3)

$$D_\infty(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i)\leq D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_\infty(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)$$

İspat.

1) Sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitleri kompakt ve konveks olduğu için Teorem 2.6.4 ve Teorem 3.2.5 gereğince

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{A}^i+\tilde{C}^i,\tilde{B}^i+\tilde{C}^i) &= D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) \\ D_2(\tilde{A}^i+\tilde{C}^i,\tilde{B}^i+\tilde{C}^i) &= D_2(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından

$$D_\infty(\tilde{A}^i+\tilde{C}^i,\tilde{B}^i+\tilde{C}^i) = D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i)$$

elde edilir.

2) Sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitleri kompakt ve konveks olduğu için Teorem 2.6.4 ve Teorem 3.2.5 gereğince her $\lambda\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} D_1(\lambda\tilde{A}^i,\lambda\tilde{B}^i) &= |\lambda|D_1(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) \\ D_2(\lambda\tilde{A}^i,\lambda\tilde{B}^i) &= |\lambda|D_2(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından

$$D_\infty(\lambda\tilde{A}^i,\lambda\tilde{B}^i) = |\lambda|D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{B}^i)$$

elde edilir.

3) Teorem 2.6.4 gereğince

$$\begin{aligned} D_1(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i) &\leq D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i) \\ D_2(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i) &\leq D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Gösterimde kolaylık olması açısından

$$\begin{aligned} P &= \max\{D_1(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i),D_2(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i)\} \\ R &= \max\{D_1(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i),D_2(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i)\} \end{aligned}$$

olsun.
Her a ve $b\in\mathbb{R}$ için

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
R &= \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i),D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)\}\\
&= \frac{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)+D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)}{2}+\\
&\quad \frac{\left|D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)-D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)-D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)\right|}{2}\\
&\leq \frac{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)+D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)}{2}+\\
&\quad \frac{\left|D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)-D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)\right|+\left|D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)-D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)\right|}{2}\\
&= \frac{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+\left|D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)-D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)\right|}{2}+\\
&\quad \frac{D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)+D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)+\left|D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)-D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)\right|}{2}\\
&= \max\{D_1(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i),D_2(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)\}+\max\{D_1(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i),D_2(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuç olarak $P \leq R$ olduğundan

$$D_\infty(\tilde{A}^i+\tilde{B}^i,\tilde{C}^i+\tilde{D}^i) \leq D_\infty(\tilde{A}^i,\tilde{C}^i)+D_\infty(\tilde{B}^i,\tilde{D}^i)$$

elde edilir.

□

Teorem 4.0.3. *$(IF_N(\mathbb{R}^n),D_\infty)$ metrik uzayı tamdır.*

İspat. $(\tilde{A}_k^i)$ dizisi $IF_N(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{A}_k^i$ nin α ve β kesitleri $A_k(\alpha)$ ve $A_k^*(\beta)$ olsun.
$(\tilde{A}_k^i)$ Cauchy dizisi olduğu için her α ve $\beta \in [0,1]$ için $(A_k(\alpha))$ ve $(A_k^*(\beta))$ kesitleri $(K_C(\mathbb{R}^n),d_H)$ de birer Cauchy dizisidir [36]. $(K_C(\mathbb{R}^n),d_H)$ metrik uzayı tam olduğundan $k \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
d_H(A_k(\alpha),C(\alpha)) &\to 0\\
d_H(A_k^*(\beta),C^*(\beta)) &\to 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde $C(\alpha)$ ve $C^*(\beta) \in K_C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri mevcuttur [35].

Şimdi eğer $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ ailelerinin Teorem 3.2.1 deki ilgili **1)-8)** şıklarını sağladığını gösterirsek $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısının mevcut olduğunu dolayısıyla keyfi $(\tilde{A}_k^i)$ dizisinin $IF_N(\mathbb{R}^n)$ de yakınsak bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 2.6.6 gereğince $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıklarını sağlar.

Şimdi $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ ailelesinin Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağladığını gösterelim.

5) Her $\beta \in [0,1]$ için $C^*(\beta) \in K_C(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $C^*(\beta)$ kümesi kompakt ve konvekstir.

6) $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olsun. $\rho(C^*(\beta_1), C^*(\beta_2)) = 0$ olduğunu gösterirsek $C^*(\beta_1) \subseteq C^*(\beta_2)$ olduğunu göstermiş oluruz. $C^*(\beta_1)$ kümesinin $C^*(\beta_2)$ den Hausdorff ayrışımı yardımıyla

$$\rho(C^*(\beta_1), C^*(\beta_2)) \leq \rho(C^*(\beta_1), A_k^*(\beta_1)) + \rho(A_k^*(\beta_1), A_k^*(\beta_2)) + \rho(A_k^*(\beta_2), C^*(\beta_2))$$

eşitsizliği yazılabilir.
$\beta_1 \leq \beta_2$ iken $A_k^*(\beta_1) \subseteq A_k^*(\beta_2)$ olduğundan $\rho(A_k^*(\beta_1), A_k^*(\beta_2)) = 0$ dır.
$k \to \infty$ iken $\rho(C^*(\beta_1), A_k^*(\beta_1))$ ve $\rho(A_k^*(\beta_2), C^*(\beta_2))$ sıfıra yakınsar. Sonuç olarak $\rho(C^*(\beta_1), C^*(\beta_2)) \to 0$ olduğu için $C^*(\beta_1) \subseteq C^*(\beta_2)$ elde edilir.

7) $(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun. (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Yukardaki sonuçtan her $n \in \mathbb{N}$ için $C^*(\beta) \subseteq C^*(\beta_n)$ olduğu için

$$C^*(\beta) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)$$

elde edilir.
$x \in \bigcap C^*(\beta_n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in C^*(\beta_n)$ dir. $\{x\} \subseteq C^*(\beta_n)$ olduğu için

$$\begin{aligned}\rho(\{x\}, C^*(\beta)) &\leq \rho(C^*(\beta_n), C^*(\beta)) \\ &\leq \rho(C^*(\beta_n), A_k^*(\beta_n)) + \rho(A_k^*(\beta_n), A_k^*(\beta)) + \rho(A_k^*(\beta), C^*(\beta))\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\beta \in [0,1]$ için $k \to \infty$ iken $d_H(A_k^*(\beta), C^*(\beta)) \to 0$ olduğundan $\rho(A_k^*(\beta), C^*(\beta)) \to 0$ ve $\rho(C^*(\beta_n), A_k^*(\beta_n)) \to 0$ yazılabilir. Teorem 3.2.1 gereğince $n \to \infty$ iken $d_H(A_k^*(\beta_n), A_k^*(\beta)) \to 0$ olduğundan $\rho(A_k^*(\beta_n), A_k^*(\beta)) \to 0$ dır. Dolayısıyla

$$\rho(\{x\}, C^*(\beta)) = 0$$

elde edilir. Buradan $\{x\} \subseteq C^*(\beta)$ başka bir deyişle $x \in C^*(\beta)$ olduğu için

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n) \subseteq C^*(\beta)$$

elde edilir. Sonuç olarak (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsarken

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n) = C^*(\beta)$$

elde edilir.

8) (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \leq$ iken $C^*(\beta_n) \subseteq C^*(1)$ olduğu için

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right) \subseteq C^*(1)$$

elde edilir. $x \in C^*(1)$ olsun. Bu durumda

$$\rho(\{x\}, C^*(\beta_n)) \leq \rho(\{x\}, C^*(1)) + \rho(C^*(1), C^*(\beta_n))$$

yazılabilir. Burada $\{x\} \subseteq C^*(1)$ olduğu için $\rho(\{x\}, C^*(1)) = 0$ ve $n \to \infty$ iken (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsadığı için $\rho(C^*(1), C^*(\beta_n)) \to 0$ olur. Dolayısıyla

$$\rho(\{x\}, C^*(\beta_n)) \to 0$$

ifadesinden $\{x\} \subseteq C^*(\beta_n)$ ve $C^*(\beta_n) \subseteq kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n))$ elde edilir. Buradan $x \in kap(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n))$ olduğu için

$$C^*(1) \subseteq kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla (β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsarken

$$C^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{C(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{C^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ aileleri Teorem 3.2.1 ilgili **1)-8)** şıklarını sağladığı için Teorem 3.2.3 gereğince $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $k \to \infty$ iken keyfi $(\tilde{A}^i_k)$ Cauchy dizisi $\tilde{C}^i \in IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayısına yakınsadığ için $(IF_N(\mathbb{R}^n), D_\infty)$ metrik uzayı tamdır.

$\square$

5. SEZGİSEL DERECELİ SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Tanım 5.0.1. *$A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi verilmiş olsun. A kümesinden $IF_N(\mathbb{R}^n)$ sezgisel dereceli sayılar kümesine giden $f : A \to IF_N(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna (dönüşümüne)* ***reel değişkenli sezgisel dereceli sayı değerli*** *bir fonksiyon denir.*

Sezgisel dereceli sayı değerli $f : A \to IF_N(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun α ve β kesitlerini sırasıyla $f(x;\alpha)$ ve $f^*(x;\beta)$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.0.2. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in [a,b]$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } D_\infty(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı mevcut ise f fonksiyonu x_0 noktasında ***süreklidir*** *denir. f, $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ de süreklidir denir.*

Tanım 5.0.3. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R}^n)$ ve $x_0 \in [a,b]$ verilmiş olsun. x_0 noktasına yakınsayan her $(x_k) \subseteq [a,b]$ dizisi için*

$$\lim_{k\to\infty} D_\infty(f(x_k), f(x_0)) = 0$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında ***dizisel süreklidir*** *denir.*

Tanım 5.0.4. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in [a,b]$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } \rho(f(x;\alpha), f(x_0;\alpha)) < \epsilon \text{ ve } \rho(f^*(x;\beta), f^*(x_0;\beta)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna x_0 noktasında ***üst yarı-süreklidir*** *denir.*

Tanım 5.0.5. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in [a,b]$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.*

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } \rho(f(x_0;\alpha), f(x;\alpha)) < \epsilon \text{ ve } \rho(f^*(x_0;\beta), f^*(x;\beta)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna x_0 noktasında ***alt yarı-süreklidir*** *denir.*

$[a,b]$ kapalı aralığından $IF_N(\mathbb{R}^n)$ kümesine giden sürekli sezgisel dereceli fonksiyonların uzayını $C([a,b], IF_N(\mathbb{R}^n))$ ile gösterelim. $f, g \in C([a,b], IF_N(\mathbb{R}^n))$ olmak üzere

$$D_s(f,g) = \sup\{D_\infty(f(x), g(x)) : x \in [a,b]\}$$

ile tanımlanan $D_s : C([a,b], IF_N(\mathbb{R}^n)) \times C([a,b], IF_N(\mathbb{R}^n)) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu D_∞ metriğinden dolayı bir metrik tanımlamaktadır. Şimdi $(C([a,b], IF_N(\mathbb{R}^n)), D_s)$ uzayının tam olduğunu gösterelim.

Teorem 5.0.1. *$C([a,b],IF_N(\mathbb{R}^n))$ uzayı*

$$D_s(f,g) = \sup\{D_\infty(f(x),g(x)) : x \in [a,b]\}$$

metriğine göre tamdır.

İspat. $(f_n) \subseteq C([a,b],IF_N(\mathbb{R}^n))$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirder her $\epsilon > 0$ için m, $n > n_0$ olduğunda

$$D_s(f_m,f_n) = \sup\{D_\infty(f_m(x),f_n(x)) : x \in [a,b]\} < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Buradan her $x \in [a,b]$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$D_\infty(f_m(x),f_n(x)) < \epsilon$$

dur. O halde $(f_n(x))$, $IF_N(\mathbb{R})$ de bir Cauchy dizisidir. $IF_N(\mathbb{R}^n)$, D_∞ metriğine göre tam olduğundan $n \to \infty$ iken

$$f_n(x) \to f(x) \in IF_N(\mathbb{R}^n)$$

dır. Supremum metriğine göre yakınsama düzgün olduğundan ve her $n \in \mathbb{N}$ için f_n sürekli olduğundan f de süreklidir. Dolayısıyla $f \in C([a,b],IF_N(\mathbb{R}^n))$ olduğundan $C([a,b],IF_N(\mathbb{R}))$ uzayı D_s metriğine göre tamdır. □

5.1 Sezgisel Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlar için Aumann İntegrali

Bu kesimde kompakt ve konveks küme değerli fonksiyonlar için tanımlanmış olan Aumann integrali ile ilgili temel tanım ve teoremleri kullanarak sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonlar için Aumann integrallenebilme kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 5.1.1. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her α, $\beta \in [0,1]$ için $f(x;\alpha)$ ve $f(x;\beta)$ kesitleri Borel ölçülebilir ise f fonksiyonuna* ***kuvvetli ölçülebilirdir*** *denir.*

Tanım 5.1.2. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için*

$$D_\infty(f(x),0) \leq h(x)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde integrallenebilen bir $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu mevcut ise f fonksiyonuna ***integral anlamında (integralce) sınırlıdır*** *denir.*

Tanım 5.1.3. *$f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı olsun.*

Eğer her α, $\beta \in [0,1]$ için α ve β kesitleri

$$u(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$$

$$u^*(\beta) = \int_a^b f^*(x;\beta)dx$$

olacak şekilde bir $\tilde{u}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı mevcut ise f fonksiyonuna ***(sezgisel dereceli) Aumann integrallenebilir*** *denir. Bu durumda $\tilde{u}^i$ ya da f fonksiyonunun Aumann integrali denir ve*

$$\tilde{u}^i = \int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir.

Teorem 5.1.1. *$f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı ise $[a,b]$ aralığı üzerinde Aumann integrallenebilirdir.*

İspat. $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı olsun. Bu durumda her bir $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= \int_a^b f(x;\alpha)dx \\ u^*(\beta) &= \int_a^b f^*(x;\beta)dx \end{aligned}$$

Aumann integralleri mevcuttur.

Şimdi $\{u(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{u^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ küme ailelerinin Teorem 3.2.1 ilgili **1)-8)** şıklarını sağladığını gösterirsek Teorem 3.2.3 gereğince $\tilde{u}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısının mevcut olduğunu dolayısıyla f nin Aumann integrallenebildiğini göstermiş oluruz. Teorem 2.8.8 ispatı gereğince $\{u(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıklarını sağlar.

Şimdi $\{u^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ ailesinin Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağladığını gösterelim:

Teorem 2.8.3 gereğince her $\beta \in [0,1]$ için $u^*(\beta) \in K_C(\mathbb{R})$ olduğundan $u^*(\beta)$ kümesi kompakt ve konvekstir.

$0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le 1$ olsun. Bu durumda $f^*(x;\beta_1) \subseteq f^*(x;\beta_2)$ olduğu için $u^*(\beta_1) \subseteq u^*(\beta_2)$ dir.

$(\beta_n) \subseteq [0,1]$ dizisi ve $\beta \in [0,1)$ sayısı verilmiş olsun ve (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsamış olsun. Bu durumda f sezgisel dereceli sayı olduğu için

$$f^*(x;\beta_n) \to f^*(x;\beta)$$

sağlanır ve her $\beta \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$d_H(f^*(x;\beta),0) \le d_H(f^*(x;1),0)$$

olduğundan Teorem 2.8.4 gereğince (β_n) dizisi β sayısına artmayarak yakınsarken $\int_a^b f^*(x;\beta_n)dx \to \int_a^b f^*(x;\beta)dx$ olur. Dolayısıyla

$$d_H\left(\int_a^b f^*(x;\beta_n)dx, \int_a^b f^*(x;\beta)dx\right) \to 0$$

elde edilir.

(β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsamış olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için
$\beta_n \leq 1 \Rightarrow u^*(\beta_n) \subseteq u^*(1)$ olduğu için

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} u^*(\beta_n)\right) \subseteq u^*(1)$$

elde edilir.

(β_n) dizisi 1 sayısına azalmayarak yakınsadığı için verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ki $n > n_0$ iken

$$1 - \beta_n < \epsilon$$

dur. Bu durumda $f^*(x;1) \subset f^*(x;\epsilon + \beta_n)$ olduğu için

$$u^*(1) \subset u^*(\epsilon + \beta_n)$$

elde edilir. ϵ yeterince küçük seçilirse $u^*(1) \subseteq u^*(\beta_n)$ kapsamasından

$$u^*(1) \subseteq kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} u^*(\beta_n)\right)$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$u^*(1) = kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} u^*(\beta_n)\right)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{u(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ ve $\{u^*(\beta) : \beta \in [0,1]\}$ kümeler ailesi Teorem 3.2.3 şartlarını sağladığı için $\tilde{u}^i \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur. Dolayısıyla f, $[a,b]$ aralığı üzerinde Aumann integrallenebilirdir. □

Lemma 5.1.1. *Eğer $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli ise kuvvetli ölçülebilirdir.*

İspat. $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu keyfi bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında sürekli olduğundan

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } D_\infty(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. D_∞ metriğinin tanımı gereğince

$$D_\infty(f(x), f(x_0)) = \max\{D_1(f(x), f(x_0)), D_2(f(x), f(x_0))\} < \epsilon$$

olduğundan

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } d_H(f(x;\alpha), f(x_0;\alpha)) < \epsilon$$

ve

$$x \in [a,b] \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } d_H(f^*(x;\beta), f^*(x_0;\beta)) < \epsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(x;\alpha)$ ve $f^*(x;\beta)$ kesitleri Hausdorff metriğine göre $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu için Teorem 2.8.1 gereğince ölçülebilirdir. Sonuç olarak $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli ise kuvvetli ölçülebilirdir. □

Teorem 5.1.2. *$f:[a,b]\to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ise Aumann integrallenebilirdir.*

İspat. f fonksiyonu sürekli olduğu için Lemma 5.1.1 gereğince kuvvetli ölçülebilirdir. Hausdorff metriği özelliği gereğince

$$d_H(f(x;\alpha),0)\le d_H(f(x;0),0)$$

ve

$$d_H(f^*(x;\beta),0)\le d_H(f^*(x;1),0)$$

olduğu için

$$D_\infty(f,0)\le \max\{d_H(f(x;0),0),d_H(f^*(x;1),0)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$h(x)=\max\{d_H(f(x;0),0),d_H(f^*(x;1),0)\}$$

olmak üzere $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$D_\infty(f,0)\le h(x)$$

elde edilir. h fonksiyonu integrallenebildiği için f fonksiyonu integralce sınırlıdır.

Sonuç olarak $f:[a,b]\to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve integralce sınırlı olduğu için Aumann integrallenebilir. □

Teorem 5.1.3. *$f,g:[a,b]\to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonları ve $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun.*

Eğer f ve g fonksiyonları Aumann integrallenebilir ise

1) *$f+g$ toplamı, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

sağlanır.

2) *λf, $[a,b]$ de Aumann integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$$

sağlanır.

3) *Her $c\in(a,b)$ için*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

sağlanır.

İspat. **1)** α ve β kesitleri $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$, $f^*(x;\beta)=[f_1^*(x;\beta),f_2^*(x;\beta)]$ ve $g(x;\alpha)=[g_1(x;\alpha),g_2(x;\alpha)]$, $g^*(x;\beta)=[g_1^*(x;\beta),g_2^*(x;\beta)]$ olacak şekilde f ve $g \in IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonları verilmiş olsun. f ve g Aumann integrallenebiliğinden, Teorem 2.8.5, Teorem 2.8.7 ve Tanım 2.8.8 gereğince

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))dx\right)(\alpha) &= \int_a^b (f(x)+g(x))(\alpha)dx \\ &= \int_a^b (f(x;\alpha)+g(x;\alpha))dx \\ &= \int_a^b [f_1(x;\alpha)+g_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)+g_2(x;\alpha)]dx \\ &= \int_a^b [f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]dx+\int_a^b [g_1(x;\alpha),g_2(x;\alpha)]dx\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))dx\right)(\beta) &= \int_a^b [f_1^*(x;\beta)+g_1^*(x;\beta),f_2^*(x;\beta)+g_2^*(x;\beta)]dx \\ &= \int_a^b [f_1^*(x;\beta),f_2^*(x;\beta)]dx+\int_a^b [g_1^*(x;\beta),g_2^*(x;\beta)]dx\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 gereğince

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

elde edilir.

Benzer şekilde **2)** ve **3)** şıklar gösterilebilir. □

Teorem 5.1.4. *$f,g:[a,b]\to IF(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonları verilmiş olsun.*

Eğer f ve g fonksiyonları Aumann integrallenebilir ise $D_\infty(f,g):[a,b]\to\mathbb{R}$ metriği integrallenebilir ve

$$D_\infty\left(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b g(x)dx\right)\le\int_a^b D_\infty(f(x),g(x))dx$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.8.6 ve Teorem 2.8.12 gereğince $D_1(f(x),g(x))$ ve $D_2(f(x),g(x))$ fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned}D_1(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b g(x)dx) &\le \int_a^b D_\infty(f(x),g(x))dx \\ D_2(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b g(x)dx) &\le \int_a^b D_\infty(f(x),g(x))dx\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$P=\max\{D_1(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b g(x)dx),D_2(\int_a^b f(x)dt\int_a^b g(x)dt)\}$$

ve

$$R = \int_a^b D_\infty(f(x), g(x))dx$$

olsun. Buradan

$$P \leq R$$

olduğundan

$$D_\infty(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx) \leq \int_a^b D_\infty(f(x), g(x))dx$$

elde edilir. □

5.2 Sezgisel Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlar için Türev Kavramı

5.2.1 Hukuhara türevi

Tanım 5.2.1. *$f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu ve*

$h > 0$ olmak üzere x_0, $x_0 + h$, $x_0 - h \in (a,b)$ sayıları verilmiş olsun.

Eğer $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)$, $f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ H-farkları mevcut olmak üzere

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h}$$

ve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h}$$

*limitleri mevcut ve $f'(x_0) \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayısına eşit ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **Hukuhara türevlenebilirdir (H-türevlenebilir)** denir. $f'(x_0)$ fonksiyonuna f nin x_0 noktasındaki **Hukuhara türevi (H-türevi)** denir ve $f'_H(x_0)$ ile gösterilir.*

Teorem 5.2.1. *$f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli fonksiyonu verilmiş olsun ve α, $\beta \in [0,1]$ olmak üzere f nin α ve β kesitleri $f(x;\alpha) = [f_1(x;\alpha), f_2(x;\alpha)]$ ve $f^*(x;\beta) = [f_1^*(x;\beta), f_2^*(x;\beta)]$ ile verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu Hukuhara türevlenebilir ise*

$$\begin{aligned} f'_H(x;\alpha) &= [f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)] \\ (f^*_H)'(x;\beta) &= [(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ H-türevlenebilir olsun ve $h > 0$ olmak üzere $x_0, x_0 + h \in (a,b)$ sayıları verilmiş olsun. Bu durumda $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)$ H-farkı mevcut ve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_H(x_0)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $f'_H(x_0) \in IF_N(\mathbb{R})$ mevcuttur. Buradan α ve β kesitler yardımıyla

$$\begin{aligned}
f'_H(x_0;\alpha) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[f_1(x_0+h;\alpha), f_2(x_0+h;\alpha)] \ominus_H [f_1(x_0;\alpha), f_2(x_0;\alpha)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{[f_1(x_0+h;\alpha) - f_1(x_0;\alpha), f_2(x_0+h;\alpha) - f_2(x_0;\alpha)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} [\frac{f_1(x_0+h;\alpha) - f_1(x_0;\alpha)}{h}, \frac{f_2(x_0+h;\alpha) - f_2(x_0;\alpha)}{h}] \\
&= \left[\lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(x_0+h;\alpha) - f_1(x_0;\alpha)}{h}, \lim_{h\to 0^+} \frac{f_2(x_0+h;\alpha) - f_2(x_0;\alpha)}{h}\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f^*_H)'(x;\beta) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[f^*_1(x_0+h;\beta), f^*_2(x_0+h;\beta)] \ominus_H [f^*_1(x_0;\beta), f^*_2(x_0;\beta)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{[f^*_1(x_0+h;\beta) - f^*_1(x_0;\beta), f^*_2(x_0+h;\beta) - f^*_2(x_0;\beta)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} [\frac{f^*_1(x_0+h;\beta) - f^*_1(x_0;\beta)}{h}, \frac{f^*_2(x_0+h;\beta) - f^*_2(x_0;\beta)}{h}] \\
&= \left[\lim_{h\to 0^+} \frac{f^*_1(x_0+h;\beta) - f^*_1(x_0;\beta)}{h}, \lim_{h\to 0^+} \frac{f^*_2(x_0+h;\beta) - f^*_2(x_0;\beta)}{h}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonu H-türevlenebilir olduğu için $f(x;\alpha)$ ve $f^*(x;\beta)$ kesitleri klasik anlamda türevlenebilirdir. Dolayısıyla aralıkların eşitliğinden her α, $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
f'_H(x;\alpha) &= [f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)] \\
(f^*_H)'(x;\beta) &= [(f^*_1)'(x;\beta), (f^*_2)'(x;\beta)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $h > 0$ olmak üzere x_0, $x_0 - h \in (a,b)$ olmak üzere $f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ H-farkı mevcut ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h} = f'_H(x_0)$$

eşitliğinden her α, $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
f'_H(x;\alpha) &= [f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)] \\
(f^*_H)'(x;\beta) &= [(f^*_1)'(x;\beta), (f^*_2)'(x;\beta)]
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 5.2.2. *$f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli fonksiyonu sürekli olsun ve f nin α, β kesitleri $f(x;\alpha) = [f_1(x;\alpha), f_2(x;\alpha)]$ ve $f^*(x;\beta) = [f^*_1(x;\beta), f^*_2(x;\beta)]$ ile verilsin.*

1) *$u(x) = \int_a^x f(t)dt$ olmak üzere $u : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer u fonksiyonu (a,b) de H-türevlenebilir ise*

$$u'_H(x) = f(x)$$

tir.

2) *$u(x)=\int_x^b f(t)dt$ olmak üzere $u:[a,b]\to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer u fonksiyonu (a,b) de H-türevlenebilir ise*

$$u'_H(x)=-f(x)$$

tir.

İspat.

1) f fonksiyonu sürekli olduğu için Aumann integrallenebilirdir. Dolayısıyla

$$u(x)=\int_a^x f(t)dt$$

olacak şekilde $u\in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli fonksiyonu mevcuttur. u fonksiyonunun α ve β kesitleri

$$\begin{aligned}
u(x;\alpha) &= \int_a^x f(t;\alpha)dt\\
u^*(x;\beta) &= \int_a^x f^*(t;\beta)dt.
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
[u_1(x;\alpha),u_2(x;\alpha)] &= \int_a^x [f_1(t;\alpha),f_2(t;\alpha)]dt\\
&= \left[\int_a^x f_1(t;\alpha)dt,\int_a^x f_2(t;\alpha)dt\right]\\
[u_1^*(x;\beta),u_2^*(x;\beta)] &= \int_a^x [f_1^*(t;\beta),f_2(t;\beta)]dt\\
&= \left[\int_a^x f_1^*(t;\beta),\int_a^x f_2^*(t;\beta)\right]dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Aralıkların eşitliğinden her bir α, β için

$$\begin{aligned}
u_1(x;\alpha) &= \int_a^x f_1(t;\alpha)dt\\
u_2(x;\alpha) &= \int_a^x f_2(t;\alpha)dt\\
u_1^*(x;\beta) &= \int_a^x f_1^*(t;\beta)dt\\
u_2^*(x;\beta) &= \int_a^x f_2^*(t;\beta)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. u fonksiyonu H-türevlenebildiği için keyfi her α ve $\beta\in[0,1]$ için $u_1(x;\alpha)$, $u_2(x;\alpha)$, $u_1^*(x;\beta)$ ve $u_2^*(x;\beta)$ fonksiyonları klasik anlamda türevlenebilir olduğundan analizin (kalkülüsün, integral hesabın) temel teoreminden

$$\begin{aligned}
u_1'(x;\alpha) &= f_1(x;\alpha)\\
u_2'(x;\alpha) &= f_2(x;\alpha)\\
(u_1^*)'(x;\beta) &= f_1^*(x;\beta)\\
(u_2^*)'(x;\beta) &= f_2^*(x;\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her α ve $\beta \in [0,1]$ için Teorem 5.2.1 gereğince

$$\begin{aligned} u'_H(x;\alpha) &= [u'_1(x;\alpha), u'_2(x;\alpha)] = [f_1(x;\alpha), f_2(x;\alpha)] \\ u'^*_H(x;\beta) &= [(u^*_1)'(x;\beta), (u^*_2)'(x;\beta)] = [f^*_1(x;\beta), f^*_2(x;\beta)] \end{aligned}$$

olduğundan

$$u'_H(x) = f(x)$$

elde edilir.

2) Benzer şekilde ispatlanabilir.

□

Teorem 5.2.3. *Eğer $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli fonksiyonu H-türevlenebilir ve $f'_H(x)$ fonksiyonu Aumann integrallenebilir ise*

$$\int_a^b f'_H(x)dx = f(b) \ominus_H f(a)$$

elde edilir.

İspat. $f : [a,b] \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli bir fonksiyon ve α, $\beta \in [0,1]$ olmak üzere $f(x;\alpha) = [f_1(x;\alpha), f_2(x;\alpha)]$ ve $f^*(x;\beta) = [f^*_1(x;\beta), f_2(x;\beta)]$ kesitleri verilsin. $f'_H(x)$ türevinin α ve β kesitleri $f'_H(x;\alpha) = [(f'_H)_1(x;\alpha), (f'_H)_2(x;\alpha)]$ ve $(f'_H)^*(x;\beta) = [(f'_H)^*_1(x;\beta), (f'_H)^*_2(x;\beta)]$ olsun. $f'_H(x)$ H-türevi Aumann integrallenebilir olduğu için $(f'_H)_1(x;\alpha)$, $(f'_H)_2(x;\alpha)$, $(f'_H)^*_1(x;\beta)$ ve $(f'_H)^*_2(x;\beta)$ fonksiyonları integrallenebilir ve her bir α, $\beta \in [0,1]$ için analizin temel teoreminden

$$\begin{aligned} f_1(b;\alpha) &= \int_a^b (f'_H)_1(x;\alpha)dx \ + f_1(a;\alpha) \\ f_2(b;\alpha) &= \int_a^b (f'_H)_2(x;\alpha)dx \ + f_2(a;\alpha) \\ f^*_1(b;\beta) &= \int_a^b (f'^*_H)_1(x;\beta)dx + f^*_1(a;\beta) \\ f^*_2(b;\beta) &= \int_a^b (f'^*_H)_2(x;\beta)dx + f^*_2(a;\beta) \end{aligned} \tag{5.2}$$

yazılabilir. Buradan

$$f(b;\alpha) = \int_a^b f'_H(x;\alpha)dx + f(a;\alpha) \text{ ve } f^*(b;\beta) = \int_a^b (f'_H)^*(x;\beta)dx + f^*(a;\beta)$$

eşitliği sağlanır. Öte yandan

$$f(b;\alpha) = \int_a^b f'_H(x;\alpha)dx + f(a;\alpha) \text{ ve } f^*(b;\beta) = \int_a^b (f'_H)^*(x;\beta)dx + f^*(a;\beta)$$

eşitliklerinden

$$f(b) = \int_a^b f'_H(x)dx + f(a)$$

yazılabilir. Hukuhara farkı tanımından

$$f(b) = \int_a^b f'_H(x)dx + f(a) \Leftrightarrow \int_a^b f'_H(x)dx = f(b) \ominus_H f(a)$$

elde edilir. $\square$

5.2.2 Kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi

Tanım 5.2.2. *$f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $h > 0$ olmak üzere x_0, $x_0 + h$, $x_0 - h \in (a,b)$ sayıları verilmiş olsun. Eğer $f'(x_0) \in IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu mevcut ve $f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)$, $f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)$, $f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)$, $f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)$ H-farkları mevcut olmak üzere aşağıdaki limitler mevcut olacak şekilde*

i)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)}{h} = f'(x_0)$$

ii)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0)$$

iii)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0)$$

iv)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)}{h} = f'(x_0)$$

*durumlarından biri sağlanıyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında **kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilirdir (GH-türevlenebilir)** denir. $f'(x_0)$ fonksiyonuna f nin x_0 noktasındaki **kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi (GH-türevi)** denir ve $f'_{GH}(x_0)$ ile gösterilir.*

(i), (ii), (iii) veya (iv) durumunda GH türevlenebilen bir f sezgisel dereceli fonksiyonunu, sırasıyla, i-GH, ii-GH, iii-GH veya iv-GH türevlenebilir olarak adlandıracağız.

Teorem 5.2.4. *$f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu (a,b) aralığında iii-GH veya iv-GH anlamında türevlenebilir ise her $x \in (a,b)$ için $f'_{GH}(x) \in \mathbb{R}$ dir.*

İspat. $f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu keyfi bir $x_0 \in (a,b)$ iii-GH anlamında türevlenebilir olsun. Yeterince küçük keyfi $h > 0$ sayısı için

$$f(x_0+h) \ominus_H f(x_0) = m(x_0,h)$$

ve

$$f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)=n(x_0,h)$$

H-farkları mevcut olacak şekilde $m(x_0,h)$, $n(x_0,h)\in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel sayıları mevcuttur. H-farkı tanımından

$$f(x_0+h)=f(x_0)+m(x_0,h) \tag{5.3}$$

ve

$$f(x_0-h)=f(x_0)+n(x_0,h) \tag{5.4}$$

elde edilir. İkinci eşitlikte $x_0=x_0+h$ yazarsak

$$f(x_0)=f(x_0+h)+n(x_0,h) \tag{5.5}$$

Denklem 5.5'de verilen eşitliği Denklem 5.3'te yerine yazarsak

$$n(x_0,h)+m(x_0,h)=0$$

elde edilir. Yeterince küçük $h>0$ için $n(x_0,h)=m(x_0,h)=0$ veya Teorem 3.2.6' deki **2)** şık gereğince $n(x_0,h)$ ve $m(x_0,h)\in\mathbb{R}$ dir. Sonuç olarak

$$f'_H(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{m(x_0,h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{n(x_0,h)}{h}$$

limitleri mevcut ve eşitlikleri sağlandığı için $f'_H(x_0)\in\mathbb{R}$ elde edilir. □

Lemma 5.2.1. *[26] $f:(a,b)\to F_N(\mathbb{R})$ dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ α-kesiti verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu (a,b) de GH-türevlenebilir ise sabit bir $\alpha_0\in(0,1)$ için*

$$f'_2(x;\alpha_0)-f'_1(x;\alpha_0)$$

farkı (a,b) aralığında işaret değiştirmez.

Lemma 5.2.2. *$f:(a,b)\to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $f(x;\alpha)=[f_1(x;\alpha),f_2(x;\alpha)]$ ve $f^*(x;\beta)=[f^*_1(x;\beta),f^*_2(x;\beta)]$ kesitleri verilmiş olsun.*

Eğer f fonksiyonu (a,b) de GH-türevlenebilir ise

1) *Sabit bir $\alpha_0\in(0,1)$ için*

$$f'_2(x;\alpha_0)-f'_1(x;\alpha_0)$$

farkı (a,b) aralığında işaret değiştirmez.

2) *Sabit bir $\beta_0\in(0,1)$ için*

$$(f^*_2)'(x;\beta_0)-(f^*_1)'(x;\beta_0)$$

farkı (a,b) aralığında işaret değiştirmez.

İspat.

1) Lemma 5.2.1 gereğince sağlanır.

2) Sabit bir $\beta_0 \in (0,1)$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta_0) - (f_1^*)'(x;\beta_0)$$

farkı işaret değiştirsin. Özel olarak $\beta < \beta_0$ iken her $x \in (a,b)$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) < 0$$

ve $\beta > \beta_0$ iken her $x \in (a,b)$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) > 0$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu (a,b) de GH-türevlenebilir olduğu için $(f_{GH}^*)'(x;\beta_0)$ kesiti tek nokta kümesinden oluşmaktadır.
Öte yandan her $0 \leq \beta < \beta_0$ için

$$(f_{GH}^*)'(x;\beta) \subseteq (f_{GH}^*)'(x;\beta_0)$$

olduğu için $(f_{GH}^*)'(x;\beta)$ kesiti de tek nokta kümesinden oluşmaktadır. Dolayısıyla $\beta < \beta_0$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\beta < \beta_0$ iken

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) < 0$$

iddiası ile çelişmektedir. Sonuç olarak f fonksiyonu (a,b) de GH-türevlenebilir ise sabit bir $\beta_0 \in (0,1)$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta_0) - (f_1^*)'(x;\beta_0)$$

farkı (a,b) aralığında işaret değiştirmez.

□

Teorem 5.2.5. *$f : (a,b) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $f(x;\alpha) = [f_1(x;\alpha), f_2(x;\alpha)]$ ve $f^*(x;\beta) = [f_1^*(x;\beta), f_2^*(x;\beta)]$ kesitleri verilmiş olsun. Her bir α için $f_1(x;\alpha)$, $f_2(x;\alpha)$ fonksiyonları x' e göre klasik anlamda türevlenebilir olsun ve her bir β için $f_1^*(x;\beta)$ ve $f_2^*(x;\beta)$ fonksiyonları x' e göre klasik anlamda türevlenebilir olsun.*

Eğer f fonksiyonu (a,b) de GH-türevlenebilir ise aşağıdaki durumlardan biri sağlanır.

$$\textbf{1)} \left\{ \begin{array}{c} \textbf{a)}\ f_1'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre azalmayan,} \\ f_2'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre artmayan ve } f_1'(x;1) \leq f_2'(x;1) \text{ dir.} \\ \text{ve} \\ \textbf{b)}\ (f_1^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre artmayan,} \\ (f_2^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre azalmayan ve } (f_1^*)'(x;0) \leq (f_2^*)'(x;0) \text{ dır.} \end{array} \right.$$

veya

$$\textbf{2)} \left\{ \begin{array}{c} \textbf{a)}\ f_1'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre azalmayan,} \\ f_2'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre artmayan ve } f_1'(x;1) \leq f_2'(x;1) \text{ dir.} \\ \text{ve} \\ \textbf{b)}\ (f_2^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre artmayan,} \\ (f_1^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre azalmayan ve } (f_2^*)'(x;0) \leq (f_1^*)'(x;0) \text{ dır.} \end{array} \right.$$

veya

$$\text{3)}\ \begin{cases} \textbf{a)}\ f_2'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre azalmayan,} \\ f_1'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre artmayan ve } f_2'(x;1) \leq f_1'(x;1) \text{ dir.} \\ \text{ve} \\ \textbf{b)}\ (f_1^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre artmayan,} \\ (f_2^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre azalmayan ve } (f_1^*)'(x;0) \leq (f_2^*)'(x;0) \text{ dır.} \end{cases}$$

veya

$$\text{4)}\ \begin{cases} \textbf{a)}\ f_2'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre azalmayan,} \\ f_1'(x;\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre artmayan ve } f_2'(x;1) \leq f_1'(x;1) \text{ dir.} \\ \text{ve} \\ \textbf{b)}\ (f_2^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre artmayan,} \\ (f_1^*)'(x;\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre azalmayan ve } (f_2^*)'(x;0) \leq (f_1^*)'(x;0) \text{ dır.} \end{cases}$$

İspat. Sabit her α ve $\beta \in [0,1]$ için $f(x;\alpha)$ ve $f^*(x;\beta)$ kesitlerinin uç noktları x'e göre klasik anlamda türevlenebilir olsun. f sezgisel dereceli fonksiyonu (a,b) de

GH-türevlenebildiği için GH-türevlenebilme tanımından

$$\begin{aligned} f'_{GH}(x;\alpha) &= [f_1'(x;\alpha), f_2'(x;\alpha)] \\ &\text{ya da} \\ f'_{GH}(x;\alpha) &= [f_2'(x;\alpha), f_1'(x;\alpha)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f'_{GH})^*(x;\beta) &= [(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)] \\ &\text{ya da} \\ (f'_{GH})^*(x;\beta) &= [(f_2^*)'(x;\beta), (f_1^*)'(x;\beta)] \end{aligned}$$

elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f'_{GH}(x;\alpha) &= [\min\{f_1'(x;\alpha), f_2'(x;\alpha)\}, \max\{f_1'(x;\alpha), f_2'(x;\alpha)\}] \\ (f'_{GH})^*(x;\beta) &= [\min\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}, \max\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}] \end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 5.2.2 gereğince sabit bir $\alpha \in (0,1)$ için

$$f_2'(x;\alpha) - f_1'(x;\alpha)$$

farkı işaret değiştirmediği için

$$f_2'(x;\alpha) - f_1'(x;\alpha) \geq 0$$

veya

$$f_2'(x;\alpha) - f_1'(x;\alpha) \leq 0$$

durumlarından biri sağlanır ve sabit bir $\beta \in (0,1)$ için

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta)$$

farkları (a,b) aralığında işaret değiştirmediği için

$$(f_2^*)'(x;\beta)-(f_1^*)'(x;\beta)\geq 0$$

veya

$$(f_2^*)'(x;\beta)-(f_1^*)'(x;\beta)\leq 0$$

durumlarından biri sağlanır. Bu durumları göz önüne alırsak aşağıdaki durumlar elde edilir.

1. Durum. Sabit bir $x\in(a,b)$ ve $\alpha,\ \beta\in[0,1]$ için

$$f_2'(x;\alpha)-f_1'(x;\alpha)\geq 0$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta)-(f_1^*)'(x;\beta)\geq 0$$

olsun. f fonksiyonu GH-türevlenebilir olduğu için

$$\begin{aligned}(f'_{GH})(x;\alpha) &= [\min\{f_1'(x;\alpha),f_2'(x;\alpha)\},\max\{f_1'(x;\alpha),f_2'(x;\alpha)\}]\\ &= [f_1'(x;\alpha),f_2'(x;\alpha)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'_{GH})^*(x;\beta) &= [\min\{(f_1^*)'(x;\beta),(f_2^*)'(x;\beta)\},\max\{(f_1^*)'(x;\beta),(f_2^*)'(x;\beta)\}]\\ &= [(f_1^*)'(x;\beta),(f_2^*)'(x;\beta)]\end{aligned}$$

elde edilir.

$0\leq\alpha_1\leq\alpha_2\leq 1$ olsun. $(f'_{GH})(x;\alpha_2)\subseteq(f'_{GH})(x;\alpha_1)$ olduğu için

$$f_1'(x;\alpha_1)\leq f_1'(x;\alpha_2)$$

ve

$$f_2'(x;\alpha_2)\leq f_2'(x;\alpha_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f_1'(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre azalmayan, $f_2'(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre artmayan ve $f_1'(x;1)\leq f_2'(x;1)$ dir.

$0\leq\beta_1\leq\beta_2\leq 1$ olsun. $(f'_{GH})^*(x;\beta_1)\subseteq(f'_{GH})^*(x;\beta_2)$ olduğu için

$$(f_1^*)'(x;\beta_2)\leq(f_1^*)'(x;\beta_1)$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta_1)\leq(f_2^*)'(x;\beta_2)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $(f_1^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre artmayan, $(f_2^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre azalmayan ve $(f_1^*)'(x;0)\leq(f_2^*)'(x;0)$ dır.

2. Durum. Sabit bir $x\in(a,b)$ ve $\alpha,\ \beta\in[0,1]$ için

$$f_2'(x;\alpha)-f_1'(x;\alpha)\geq 0$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) \leq \ 0$$

olsun. f fonksiyonu GH-türevlenebilir olduğu için

$$\begin{aligned}(f'_{GH})(x;\alpha) &= [\min\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}, \max\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}] \\ &= [f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'_{GH})^*(x;\beta) &= [\min\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}, \max\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}] \\ &= [(f_2^*)'(x;\beta), (f_1^*)'(x;\beta)]\end{aligned}$$

elde edilir.

$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})(x;\alpha_2) \subseteq (f'_{GH})(x;\alpha_1)$ olduğu için

$$f'_1(x;\alpha_1) \leq f'_1(x;\alpha_2)$$

ve

$$f'_2(x;\alpha_2) \leq f'_2(x;\alpha_1)$$

elde edilir.

$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})^*(x;\beta_1) \subseteq (f'_{GH})^*(x;\beta_2)$ olduğu için

$$(f_1^*)'(x;\beta_1) \leq (f_1^*)'(x;\beta_2)$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta_2) \leq (f_2^*)'(x;\beta_1)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $f'_1(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre azalmayan, $f'_2(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre artmayan ve $f'_1(x,1) \leq f'_2(x,1)$ dir. Ve $(f_2^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre artmayan, $(f_1^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre azalmayan ve $(f_2^*)'(x;0) \leq (f_1^*)'(x;0)$ dır.

3. Durum. Sabit bir $x \in (a,b)$ ve α, $\beta \in [0,1]$ için

$$f'_2(x;\alpha) - f'_1(x;\alpha) \leq \ 0$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) \geq 0$$

olsun. f fonksiyonu GH-türevlenebilir olduğu için

$$\begin{aligned}(f'_{GH})(x;\alpha) &= [\min\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}, \max\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}] \\ &= [f'_2(x;\alpha), f'_1(x;\alpha)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'_{GH})^*(x;\beta) &= [\min\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}, \max\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}] \\ &= [(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)]\end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})(x;\alpha_2) \subseteq (f'_{GH})(x;\alpha_1)$ olduğu için

$$f'_1(x;\alpha_2) \leq f'_1(x;\alpha_1)$$

ve

$$f'_2(x;\alpha_1) \leq f'_2(x;\alpha_2)$$

elde edilir.

$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})^*(x;\beta_1) \subseteq (f'_{GH})^*(x;\beta_2)$ olduğu için

$$(f_1^*)'(x;\beta_2) \leq (f_1^*)'(x;\beta_1)$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta_1) \leq (f_2^*)'(x;\beta_2)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $f'_2(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre azalmayan, $f'_1(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre artmayan ve $f'_2(x,1) \leq f'_1(x,1)$ dir. Ve $(f_1^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre artmayan, $(f_2^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre azalmayan ve $(f_1^*)'(x;0) \leq (f_2^*)'(x;0)$ dir.

4. Durum. Sabit bir $x \in (a,b)$ ve α, $\beta \in [0,1]$ için

$$f'_2(x;\alpha) - f'_1(x;\alpha) \leq 0$$

ve

$$(f_2^*)'(x;\beta) - (f_1^*)'(x;\beta) \leq 0$$

olsun. f fonksiyonu GH-türevlenebilir olduğu için

$$\begin{aligned}(f'_{GH})(x;\alpha) &= [\min\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}, \max\{f'_1(x;\alpha), f'_2(x;\alpha)\}] \\ &= [f'_2(x;\alpha), f'_1(x;\alpha)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'_{GH})^*(x;\beta) &= [\min\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}, \max\{(f_1^*)'(x;\beta), (f_2^*)'(x;\beta)\}] \\ &= [(f_2^*)'(x;\beta), (f_1^*)'(x;\beta)]\end{aligned}$$

elde edilir.

$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})(x;\alpha_2) \subseteq (f'_{GH})(x;\alpha_1)$ olduğu için

$$f'_1(x;\alpha_1) \leq f'_1(x;\alpha_2)$$

ve

$$f'_2(x;\alpha_2) \leq f'_2(x;\alpha_1)$$

elde edilir.

$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olsun. $(f'_{GH})^*(x;\beta_1) \subseteq (f'_{GH})^*(x;\beta_2)$ olduğu için

$$f_1^*(x;\beta_1) \leq f_1^*(x;\beta_2)$$

ve

$$f_2^*(x;\beta_2) \leq f_2^*(x;\beta_1)$$

elde edilir.

$f'_2(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre azalmayan, $f'_1(x;\alpha)$ fonksiyonu α ya göre artmayan ve $f'_2(x,1) \leq f'_1(x,1)$ dir. Ve $(f_2^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre artmayan, $(f_1^*)'(x;\beta)$ fonksiyonu β ya göre azalmayan ve $(f_2^*)'(x;0) \leq (f_1^*)'(x;0)$ dır. $\square$

Teorem 5.2.6. *$f:(a,b)\to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu ve $x_0\in(a,b)$ verilmiş olsun. Eğer*

1) *Her α, $\beta\in[0,1]$ için*
$$\lim_{x\to x_0} f(x;\alpha)=[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]$$
ve
$$\lim_{x\to x_0} f^*(x;\alpha)=[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]$$

2) *$[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]$ kümesi Teorem 3.2.1'deki **1)-4)** şıklarını ve $[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]$ Teorem 3.2.1'deki **5)-8)** şıklarını sağlar ise α ve β kesitleri $[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]$ ve $[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]$ olan bir $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur ve*
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\tilde{A}^i$$
dir.

İspat. $[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]$ ve $[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]$ kümeleri Teorem 3.2.1'deki ilgili şıkları sağladığı için Teorem 3.2.3 gereğince bir $\tilde{A}^i$ sezgisel dereceli sayısı mevcuttur. Her $\alpha,\beta\in[0,1]$ için
$$\lim_{x\to x_0} f(x;\alpha)=[A_1(\alpha),A_2(\alpha)]$$
ve
$$\lim_{x\to x_0} f^*(x;\alpha)=[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)]$$
için
$$\lim_{x\to x_0} D_1(f(x;\alpha),[A_1(\alpha),A_2(\alpha)])=0$$
ve
$$\lim_{x\to x_0} D_2(f(x;\beta),[A_1^*(\beta),A_2^*(\beta)])=0$$
elde edilir. Sonuç olarak D metriği tanımı gereği
$$\lim_{x\to x_0} D_\infty(f(x),\tilde{A}^i)=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\tilde{A}^i$$
elde edilir. □

6. SEZGİSEL DERECELİ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde öncelikle Hukuhara türevi ve kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevi ile verilen birinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyeceğiz. Daha sonra başlangıç koşulları ve zorlayıcı fonksiyon katsayıları sezgisel dereceli sayılar olan ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü için Heaviside fonksiyonu ve sezgisel dereceli fonksiyonlar için Zadeh'in genişleme ilkesi yardımıyla geliştirdiğimiz algoritmayı vereceğiz.

Tanım 6.0.1. *$f : \mathbb{R} \times IF_N(\mathbb{R}) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun ve $x_0 \in IF_N(\mathbb{R})$ olsun.*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

*ile verilen başlangıç değer problemine **birinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer problemi** denir.*

6.1 Hukuhara Türevi ile Sezgisel Dereceli Başlangıç Değer Problemleri

Varlık ve teklik teoremini vermeden önce, Hukuhara türevi ile verilen birinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer probleminin başlangıç değerini içeren kapalı bir aralıkta integral denklemine denk olduğunu veren yardımcı teoremi verelim.

Lemma 6.1.1. *$f : \mathbb{R} \times IF_N(\mathbb{R}) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun ve $x_0 \in IF_N(\mathbb{R})$ olsun.*

$$\begin{aligned} x'_H(t) &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

ile verilen sezgisel başlangıç değer problemi ile

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

integral denkleminin çözümü $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasını içeren $[t_0, t_1]$ aralığında birbirine eşittir.

Not. *Burada integral denklemindeki integral aslında Aumann integralidir.*

İspat. $x(t)$ verilen sezgisel başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Teorem 5.2.3 ve H-farkı yardımıyla

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

yazılabilir.

Öte yandan, $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

integral denklemini sağlasın. Bu durumda H-farkı tanımından

$$\begin{aligned} x(t+h) \ominus_H x(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^{t+h} f(s,x(s))ds) \ominus_H (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right) \\ &= \int_{t_0}^{t+h} f(s,x(s))ds \ominus_H \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \\ &= \int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds \end{aligned}$$

elde edilir. H-türevi tanımından

$$x'_H(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(t+h)\ominus_H x(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds$$

yazılabilir. Şimdi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds = f(t,x(t))$$

veya başka bir ifade ile $h \to 0^+$ iken

$$D_\infty\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \to 0$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu nedenle,

$$D_1\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \to 0$$

ve

$$D_2\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \to 0$$

olduğunu göstermeliyiz. [23] de Lemma 9.1 gereğince

$$D_1\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \to 0$$

sağlanır. Benzer şekilde D_2 için de sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
& D_2\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \\
= \;& D_2\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\frac{1}{h}\int_t^{t+h} ds\right) \\
= \;& \frac{1}{h}D_2\left(\int_t^{t+h} f(s,x(s))ds, \int_t^{t+h} f(t,x(t))ds\right) \\
\leq \;& \frac{1}{h}\int_t^{t+h} D_2(f(s,x(s)), f(t,x(t)))ds \\
\leq \;& \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \omega(f(t,x(t)),h)ds \\
= \;& \frac{1}{h}h\omega(f(t,x(t)),h) \\
= \;& \omega(f(t,x(t)),h) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Burada $\omega(f(t,x(t)),h)$, her $[t_0,t_1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında t ye göre sürekli olan f fonksiyonunun süreklilik modülüdür. Süreklilik modülü özelliği gereğince f nin $t \in [t_0,t_1]$ ye göre sürekli olması için gerek ve yeter şart $h \to 0^+$ iken $\omega(f(t,x(t)),h) \to 0$ olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+} D_2\left(\frac{x(t+h)\ominus_H x(t)}{h}, f(t,x(t)\right) = \lim_{h\to 0^+}\omega(f(t,x(t)),h) = 0$$

sağlanmaktadır. Dolayısıyla D_∞ metriği tanımı gereği $h \to 0^+$ iken

$$D_\infty\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s,x(s))ds, f(t,x(t))\right) \to 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$x'_H(t) = \lim_{h\to 0^+}\frac{x(t+h)\ominus_H x(t)}{h} = f(t,x(t))$$

elde edilir. $x'_H(t) = f(t,x(t))$ ve $x(t_0) = x_0$ sağlandığı için $x(t)$ verilen sezgisel başlangıç değer probleminin çözümüdür. □

İleriki kesimlerde D_∞ metriğine göre $x_0 \in IF_N(\mathbb{R})$ merkezli ve $q > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$N(x_0,q) = \{x \in IF_N(\mathbb{R}) : D_\infty(x_0,x) < q\}$$

ve kapalı yuvarı

$$\overline{N}(x_0,q) = \{x \in IF_N(\mathbb{R}) : D_\infty(x_0,x) < q\}$$

ile göstereceğiz.

Lemma 6.1.2. *p ve $q > 0$ olmak üzere $f : [t_0,t_0+p] \times \overline{N}(x_0,q) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun.*

Eğer her $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+p] \times \overline{N}(x_0,q)$ için

$$D_1(f(t,x), f(t,y)) \leq L_1 D_1(x,y) \tag{6.1}$$

ve
$$D_2(f(t,x),f(t,y)) \leq L_2 D_2(x,y) \tag{6.2}$$
sağlanacak şeklide α ve β dan bağımsız $L_1, L_2 > 0$ sayıları mevcut ise f fonksiyonu sınırlıdır. Yani
$$D_\infty(f(t,x),0) \leq M$$
sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur.

İspat. $x_* \in \overline{N}(x_0,q)$ sabit noktasını seçelim. (6.1), (6.2) ve
$$|D_1(f(t,x),0) - D_1(0,f(t,x_*))| \leq D_1(f(t,x),f(t,x_*))$$
$$|D_2(f(t,x),0) - D_2(0,f(t,x_*))| \leq D_2(f(t,x),f(t,x_*))$$
eşitsizlikleri yardımıyla
$$\begin{aligned} D_1(f(t,x),0) &\leq L_1 D_1(x,x_*) + D_1(f(t,x_*),0) \\ D_2(f(t,x),0) &\leq L_2 D_2(x,x_*) + D_2(f(t,x_*),0) \end{aligned}$$
yazılabilir. $D_1(f(t,x_*),0)$ ve $D_2(f(t,x_*),0)$ fonksiyonları, t'ye göre sürekli olduğu için $[t_0,t_0+p]$ kapalı aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla
$$D_1(f(t,x_*),0) \leq M_1$$
ve
$$D_2(f(t,x_*),0) \leq M_2$$
olacak şekilde $M_1, M_2 > 0$ sayıları mevcuttur. Bu durumda
$$\begin{aligned} D_1(f(t,x),0) &\leq L_1 D_1(x,x_*) + M_1 \leq L_1 q + M_1 \\ D_2(f(t,x),0) &\leq L_2 D_2(x,x_*) + M_2 \leq L_2 q + M_2 \end{aligned}$$
olduğundan $M = \max\{L_1 q + M_1, L_2 q + M_2\}$ seçilmesi halinde
$$D_\infty(f(t,x),0) \leq M$$
elde edilir. □

Lemma 6.1.3. *$p,\ q > 0$ olmak üzere $f : [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q)) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun.*

Eğer her $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],IF_N(\mathbb{R}))$ için
$$D_1(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_1 D_s(x,y)$$
ve
$$D_2(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_2 D_s(x,y)$$
sağlanacak şeklide α ve β dan bağımsız $L_1, L_2 > 0$ reel sayıları mevcut ise f fonksiyonu sınırlıdır. Yani
$$D_\infty(f(t,x),0) \leq M$$
sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur.

İspat. $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\eta = \sup D_\infty(f(t,x_0),0)$ olsun. İspat Lemma 6.1.2' ye benzer şekilde yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_\infty(f(t,x(t)),0) &\leq D_\infty(f(t,x),f(t,x_0)) + D_\infty(f(t,x_0),0) \\
&\leq LD_s(x,x_0) + \sup D_\infty(f(t,x_0),0) \\
&\leq Lq + \eta
\end{aligned}
$$

elde edilir. $M = Lq + \eta$ seçilmesi halinde

$$
D_\infty(f(t,x(t)),0) \leq M
$$

sağlanır. □

Teorem 6.1.1. *p, $q > 0$ olmak üzere $f : [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q)) \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))$ için*

$$
D_1(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_1 D_s(x,y)
$$

ve

$$
D_2(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_2 D_s(x,y)
$$

sağlanacak şeklide α ve β dan bağımsız $L_1, L_2 > 0$ sayıları mevcut ise öyle bir $k > 0$ reel sayısı vardır ki

$$
\begin{aligned}
x'_H(t) &= f(t,x(t)) \\
x(t_0) &= x_0 \in IF_N(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

sezgisel başlangıç değer probleminin çözümü $[t_0,t_0+k]$ aralığında mevcuttur ve tektir.

İspat. $0 < c \leq p$ olacak şekilde her $t \in [t_0,t_0+c]$ için $K_0 = C([t_0,t_0+c],IF_N(\mathbb{R}))$ sürekli sezgisel dereceli fonksiyonlar uzayı olsun.

$$
\begin{aligned}
P(x_0)(t) &= x_0 \\
P(x)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds
\end{aligned}
$$

olmak üzere $P : K_0 \to K_0$ operatörünü tanımlayalım. f fonksiyonu sürekli olduğu için Aumann integrallenebilir ve $P(x(t_0)) = x_0$ olduğu için P operatörü iyi tanımlıdır. f fonksiyonu

$$
D_1(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_1 D_s(x,y)
$$

ve

$$
D_2(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq L_2 D_s(x,y)
$$

ifadelerini sağladığı için Lemma 6.1.3 gereğince

$$
M_1 = \sup\{D_1(f(t,x(t)),0) : (t,x) \in [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))\}
$$

ve

$$
M_2 = \sup\{D_2(f(t,x(t)),0) : (t,x) \in [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))\}
$$

olacak şekilde M_1 ve M_2 pozitif sayıları mevcuttur. O halde Hausdorff metriği, Teorem 5.1.4 ve Lemma 6.1.3 gereğince

$$\begin{aligned}
D_1(P(x)(t),x_0) &= D_1(P(x)(t)\ominus_H x_0,0)\\
&= D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds,0\right)\\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(s,x(s)),0)ds\\
&\leq M_1(t-t_0)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
D_2(P(x)(t),x_0) &= D_2(P(x)(t)\ominus_H x_0,0)\\
&= D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s)ds,0\right)\\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(s,x(s)),0)ds\\
&\leq M_2(t-t_0)
\end{aligned}$$

sağlanır.

$d=\min\{c,\frac{q}{M_1},\frac{q}{M_2}\}$ ve $K_1=C([t_0,t_0+d],\overline{N}(x_0,q))$ olsun.
Şimdi $P:K_1\to C([t_0,t_0+d],IF_N(\mathbb{R}))$ kısıtlanışı için $x\in K_1$ iken $P(x)\in K_1$ olduğunu gösterelim. O halde Hausdorff metriği, Teorem 5.1.4 ve Lemma 6.1.3 gereğince

$$\begin{aligned}
D_1(P(x)(t),x_0) &= D_1(P(x)(t)\ominus_H x_0,0)\\
&= D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds,0\right)\\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(s,x(s)),0)ds\\
&\leq M_1 d\leq q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(P(x)(t),x_0) &= D_2(P(x)(t)\ominus_H x_0,0)\\
&= D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s)ds,0\right)\\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(s,x(s)),0)ds\\
&\leq M_2 d\leq q
\end{aligned}$$

Dolayısıla D_∞ metriği gereğince

$$D_\infty(P(x)(t),x_0) \leq \max\{M_1,M_2\}d\leq q.$$

olduğundan $x\in K_1$ iken $P(x)\in K_1$ elde edilir.

Şimdi P operatörünün bir daralma dönüşümü alduğunu gösterelim. O halde Hausdorff metriği, Teorem 5.1.4 ve Lemma 6.1.3 gereğince

$$
\begin{aligned}
D_1(P(x)(t),P(y)(t)) &= D_1(P(x)(t)\ominus_H P(y)(t),0) \\
&= D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\ominus_H f(\tau,y(\tau))d\tau,0\right) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(\tau,x(\tau))\ominus_H f(\tau,y(\tau)),0)d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} D_1(f(\tau,x(\tau)),f(\tau,y(\tau)))d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L_1 D_s(x,y)d\tau \\
&= L_1(t-t_0)D_s(x,y) \\
&\leq L_1 d D_s(x,y)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
D_2(P(x)(t),P(y)(t)) &= D_2(P(x)(t)\ominus_H P(y)(t),0) \\
&= D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\ominus_H f(\tau,y(\tau))d\tau,0\right) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(\tau,x(\tau))\ominus_H f(\tau,y(\tau)),0)d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} D_2(f(\tau,x(\tau)),f(\tau,y(\tau)))d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L_2 D_s(x,y)d\tau \\
&= L_2(t-t_0)D_s(x,y) \\
&\leq L_2 d D_s(x,y)
\end{aligned}
$$

$L=\max\{L_1, L_2\}$ olsun. Bu durumda

$$D_\infty(P(x)(t),P(y)(t)) \leq LdD_s(x,y) \Rightarrow \sup_{t\in[t_0,t_0+d]} D_\infty(P(x)(t),P(y)(t)) \leq LdD_s(x,y)$$

olduğundan

$$D_s(P(x),P(y)) \leq LdD_s(x,y)$$

$k=\min\{d,\frac{1}{L}\}$ olmak üzere $K_2=C([t_0,t_0+k],\overline{N}(x_0,q))$ olsun. Bu durumda $P:K_2\to K_2$ operatörü bir daralma dönüşümüdür. Teorem 5.0.1 gereğince K_2 uzayı D_s metriğine göre tam olduğundan Banach sabit nokta teoremi gereğince $P(x^*)(t)=x^*(t)$ olacak şekilde bir $x^*(t)\in K_2$ mevcuttur. Sonuç olarak $x^*(t)$ fonksiyonu her $t\in[t_0,t_0+k]$ için Lemma 6.1.1 gereğince verilen sezgisel başlangıç değer probleminin bir çözümü olup tektir. □

Teorem 6.1.2. *p, $q>0$ olmak üzere $f:[t_0,t_0+p]\times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))\to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonu sürekli olsun ve α, β kesitleri*

$$
\begin{aligned}
f(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) &= [f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)), f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))] \\
f^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) &= [f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)), f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))]
\end{aligned}
$$

ile verilsin. Eğer

1. ***1)*** *Her* $\alpha \in [0,1]$ *için* $\{f_1\}_{\alpha\in[0,1]}$ *ve* $\{f_2\}_{\alpha\in[0,1]}$ *fonksiyon aileleri eşsürekli,*
2. ***2)*** *Her* $\beta \in [0,1]$ *için* $\{f_1^*\}_{\beta\in[0,1]}$ *ve* $\{f_2^*\}_{\beta\in[0,1]}$ *fonksiyon aileleri eşsürekli,*
3. ***3)*** *Her* $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+p]\times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))$ *ve* $\alpha,\beta \in [0,1]$ *için*

$$\begin{aligned}
|f_1(t,x_1,x_2)-f_1(t,y_1,y_2)| &\leq L_1\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)\\
|f_2(t,x_1,x_2)-f_2(t,y_1,y_2)| &\leq L_2\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)\\
|f_1^*(t,x_1^*,x_2^*)-f_1^*(t,y_1^*,y_2^*)| &\leq L_3\max(|x_1^*-y_1^*|,|x_2^*-y_2^*|)\\
|f_2^*(t,x_1^*,x_2^*)-f_2^*(t,y_1^*,y_2^*)| &\leq L_4\max(|x_1^*-y_1^*|,|x_2^*-y_2^*|)
\end{aligned}$$

sağlanacak şekilde α*'dan bağımsız* L_1*,* L_2 *ve* β*'dan bağımsız* L_3 *ve* L_4 *pozitif reel sayıları mevcut ise*

$$\begin{aligned}
x_H'(t) &= f(t,x)\\
x(t_0) &= x_0 \in IF_N(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

sezgisel başlangıç değer probleminin $k>0$ *olmak üzere* $[t_0,t_0+k]$ *aralığında* $x(t)$ *çözümü mevcuttur ve bu çözümün* α *ve* β *kesitleri*

$$\begin{aligned}
(x_1(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
(x_2(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
x_1(t_0;\alpha) &= x_{01}(\alpha)\\
x_2(t_0;\alpha) &= x_{02}(\alpha)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(x_1^*(t;\beta))' &= f_1(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
(x_2^*(t;\beta))' &= f_2(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
x_1^*(t_0;\beta) &= x_{01}^*(\beta)\\
x_2^*(t_0;\beta) &= x_{02}^*(\beta)
\end{aligned}$$

başlangıç değer problemleri ile karakterize edilmektedir.

İspat. $(t_0,x_0) \in [t_0,t_0+p]\times C([t_0,t_0+p],IF(\mathbb{R}^n))$ keyfi bir nokta ve $\epsilon>0$ verilmiş olsun.

$$|t-t_0|+D_s(x,x_0)<\delta \text{ iken } D_\infty(f(t,x),f(t_0,x_0))<\epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısının mevcut olduğunu göstereceğiz.

$\{f_1\}_{\alpha\in[0,1]}$ ve $\{f_2\}_{\alpha\in[0,1]}$ fonksiyon aileleri eşsürekli olduğundan her $x_0=(t_0,x_{01},x_{02})$, $x=(t,x_1,x_2)\in[t_0,t_0+p]\times\mathbb{R}^2$ için

$$\sqrt{(t-t_0)^2+(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2}<\delta_{1,2}$$

iken
$$\left|f_{1,2}(t,x_1,x_2)-f_{1,2}(t_0,x_1,x_2)\right|<\epsilon$$
olacak şekilde $f_{1,2}$, α ve x_0 dan bağımsız $\delta_{1,2}>0$ sayıları mevcuttur.

Öte yandan, keyfi bir $\in[t,t+p]\times\mathbb{R}^2$ ve $\epsilon>0$ verilmiş olsun.

$\{f_1^*\}_{\beta\in[0,1]}$ ve $\{f_2^*\}_{\beta\in[0,1]}$ fonksiyonları eşsürekli olduğu için, her $x_0^*=(t_0^*,x_{01}^*,x_{02}^*)$, $x=(t,x_1,x_2)\in[t_0,t_0+p]\times\mathbb{R}^2$ için
$$\sqrt{(t-t_0)^2+(x_1-x_{01}^*)^2+(x_2-x_{02}^*)^2}<\delta_{1,2}^*$$
iken
$$\left|f_{1,2}^*(t,x_1^*,x_2^*)-f_{1,2}^*(t_0,x_1^*,x_2^*)\right|<\epsilon$$
olacak şekilde $f_{1,2}^*$, α ve x_0 dan bağımsız $\delta_{1,2}^*>0$ sayıları mevcuttur.
$$\begin{aligned} D_1(x,x_0) &= \sup_{\alpha}\{\max\{|x_1-x_{01}|,|x_2-x_{02}|\}\} \\ &\leq \min\{\delta_1,\delta_2\} \end{aligned}$$
ve
$$\begin{aligned} D_2(x,x_0) &= \sup_{\beta}\{\max\{|x_1^*-x_{01}^*|,|x_2^*-x_{02}^*|\}\} \\ &\leq \min\{\delta_1^*,\delta_2^*\} \end{aligned}$$
olduğundan
$$\begin{aligned} D_\infty(x,x_0) &= \max\{D_1(x,x_0),D_2(x,x_0)\} \\ &\leq \max\{\min\{\delta_1,\delta_2\},\min\{\delta_1^*,\delta_2^*\}\} \end{aligned}$$
elde edilir. Sonuç olarak
$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3^*,\delta_4^*\}+\max\{\min\{\delta_1,\delta_2\},\min\{\delta_1^*,\delta_2^*\}\}$$
seçimi için
$$|t-t_0|+D_s(x,x_0)<\delta \text{ iken } D_\infty(f(t,x),f(t_0,x_0))<\epsilon$$
sağlandığından f sezgisel dereceli fonksiyonu süreklidir. **3)** şartı gereğince
$$|f_1(t,x_1,x_2)-f_1(t,y_1,y_2)|\leq L_1\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$
$$|f_2(t,x_1,x_2)-f_2(t,y_1,y_2)|\leq L_2\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$
eşitsizlikleri sağlanacak şekilde L_1, $L_2>0$ sayıları mevcut olduğu için $M_1=\max\{L_1,L_2\}$ dersek Hausdorff metriği gereği
$$D_1(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \quad\leq\quad M_1D_1(x(t),y(t))$$
olduğundan
$$D_1(f(t,x(t)),f(t,y(t)))\leq M_1D_s(x,y)$$

elde edilir. Öte yandan

$$|f_1(t,x_1^*,x_2^*)-f_1(t,y_1^*,y_2^*)| \leq L_3 \max\{|x_1^*-y_1^*|,|x_2^*-y_2^*|\}$$

$$|f_2(t,x_1^*,x_2^*)-f_2(t,y_1^*,y_2^*)| \leq L_4 \max\{|x_1^*-y_1^*|,|x_2^*-y_2^*|\}$$

olur ve $M_2 = \max\{L_3,L_4\}$ dersek Hausdorff metriği tanımı gereği

$$D_2(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq M_2 D_2(x(t),y(t))$$

olduğundan

$$D_2(f(t,x(t)),f(t,y(t))) \leq M_2 D_s(x,y)$$

elde edilir. O halde $f \in IF_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu Teorem 6.1.1 gereğince

$$\begin{aligned} x'_H(t) &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \in IF_N(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümü var ve tektir. $x(t)$ çözümü Hukuhara türevlenebildiği için Teorem 5.2.1 gereğince $x'_1(t;\alpha)$, $x'_2(t;\alpha)$, $(x_1^*(t;\beta))'$ ve $(x_2^*(t;\beta))'$ klasik türevleri mevcuttur. Dolayısla α ve β kesitler yardımıyla

$$\begin{aligned} [x'_1(t;\alpha),x'_2(t;\alpha)] &= [f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)),f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))] \\ [x_1(t_0;\alpha),x_2(t_0;\alpha)] &= [x_{01}(\alpha),x_{02}(\alpha)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [(x_1^*(t;\beta))',(x_2^*(t;\beta))'] &= [f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)),f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))] \\ [x_1^*(t_0,\beta),x_2^*(t_0,\beta)] &= [x_{01}^*(\beta),x_{02}^*(\beta)] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu aralıkların eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} (x_1(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\ (x_2(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\ x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha) \\ x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1^*(t;\beta))' &= f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) \\ (x_2^*(t;\beta))' &= f_2^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) \\ x_1^*(t_0,\beta) &= x_{01}^*(\beta) \\ x_2^*(t_0,\beta) &= x_{02}^*(\beta) \end{aligned}$$

Öte yandan sabit her α ve β için **1)-3)** şartları gereğince

$$\begin{aligned} (x_1(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\ (x_2(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\ x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha) \\ x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x_1(t;\beta))' &= f_1(t, x_1(t;\beta), x_2(t;\beta))\\
(x_2(t;\beta))' &= f_2(t, x_1(t;\beta), x_2(t;\beta))\\
x_1(t_0;\beta) &= x_{01}(\beta)\\
x_2(t_0;\beta) &= x_{02}(\beta)
\end{aligned}
$$

diferensiyel denklem sistemlerinin $x_1(t;\alpha)$, $x_2(t;\alpha)$, $x_1^*(t;\beta)$ ve $x_2^*(t;\beta)$ çözümleri var ve tektir. Çözümlerin tekliğinden dolayı bu denklem sistemlerinin çözümleri verilen sezgisel başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün α ve β kesitleri ile belirlenmektedir. $\square$

Örnek 6.1.1.

$$
\begin{aligned}
x_H'(t) &= -x + e^t(-1,0,1;-2,0,2) + (1,2,3;0,2,4) &\quad (6.3)\\
x(0) &= (-1,0,1;-2,0,2) &\quad (6.4)
\end{aligned}
$$

ile verilen sezgisel başlangıç değer probleminin Hukuhara türevlenebilme ile çözümünü bulalım.

$$f(t,x) = -x + e^t(-1,0,1;-2,0,2) + (1,2,3;0,2,4)$$

olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
f_1(t, x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)) &= -x_2(t;\alpha) + (\alpha-1)e^t + 1 + \alpha\\
f_2(t, x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)) &= -x_1(t;\alpha) + (1-\alpha)e^t + 3 - \alpha\\
f_1^*(t, x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)) &= -x_2^*(t;\beta) - 2\beta e^t + 2 - 2\beta\\
f_2^*(t, x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)) &= -x_1^*(t;\beta) + 2\beta e^t + 2 + 2\beta
\end{aligned}
$$

olmak üzere f 'nin α ve β kesitleri

$$
\begin{aligned}
f^*(t, x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)) &= [f_1(t, x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)), f_2(t, x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha))]\\
f^*(t, x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)) &= [f_1^*(t, x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)), f_2^*(t, x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta))]
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $\{f_1\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_2\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_1^*\}_{\beta\in[0,1]}$ ve $\{f_2^*\}_{\beta\in[0,1]}$ fonksiyon aileleri eşsüreklidir ve

$$
\begin{aligned}
|f_1(t,x_1,x_2) - f_1(t,y_1,y_2)| &= |y_2 - x_2| \le 1.\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}\\
|f_2(t,x_1,x_2) - f_2(t,y_1,y_2)| &= |y_1 - x_1| \le 1.\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}\\
|f_1^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_1^*(t,y_1^*,y_2^*)| &= |y_2^* - x_2^*| \le 1.\max\{|x_1^*-y_1^*|, |x_2^*-y_2^*|\}\\
|f_2^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_2^*(t,y_1^*,y_2^*)| &= |y_1^* - x_1^*| \le 1.\max\{|x_1^*-y_1^*|, |x_2^*-y_2^*|\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1$ sayıları mevcuttur.

Dolayısıyla, Teorem 6.1.2 şartları sağlanmaktadır. (6.3)-(6.4) deki sezgisel başlangıç değer problemini α ve β kesitler yardımıyla ifade edersek

$$
\begin{aligned}
[x_1'(t;\alpha), x_2'(\alpha)] &= [-x_2(t;\alpha), -x_1(\alpha)] + e^t[\alpha-1, 1-\alpha] + [1+\alpha, 3-\alpha]\\
[x_1(0,\alpha), x_2(0,\alpha)] &= [\alpha-1, 1-\alpha]\\
[x_1^{*\prime}(t;\beta), x_2^{*\prime}(\beta)] &= [-x_2^*(t;\beta), -x_1^*(t;\beta)] + e^t[-2\beta, 2\beta] + [2-2\beta, 2+2\beta]\\
[x_1^*(0,\beta), x_2(0,\beta)] &= [-2\beta, 2\beta]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aralık aritmetiği yardımıyla aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
x_1'(t;\alpha) &= -x_2(t;\alpha)+(\alpha-1)e^t+1+\alpha\\
x_2'(t;\alpha) &= -x_1(t;\alpha)+(1-\alpha)e^t+3-\alpha\\
x_1(0;\alpha) &= \alpha-1\\
x_2(0;\alpha) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{*\prime}(t;\beta) &= -x_2^*(t;\beta)-2\beta e^t+2-2\beta\\
x_2^{*\prime}(t;\beta) &= -x_1^*(t;\beta)+2\beta e^t+2+2\beta\\
x_1^*(1;\beta) &= -2\beta\\
x_2^*(1;\beta) &= 2\beta
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemleri çözersek

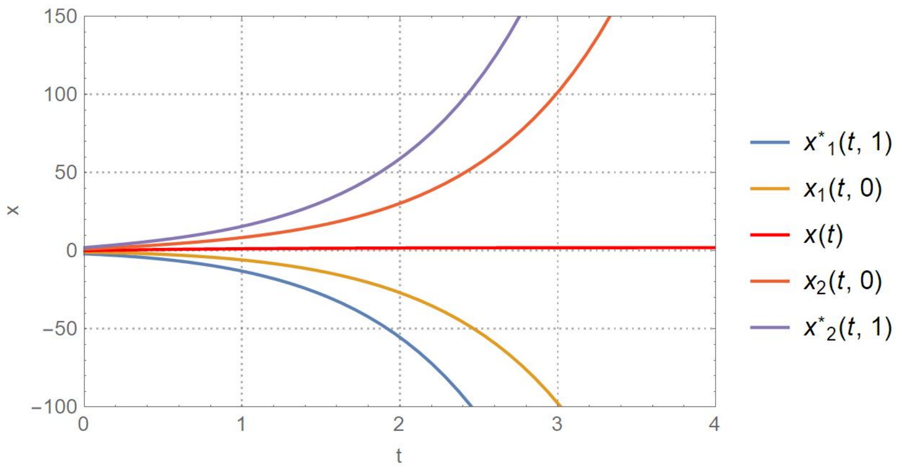
$$\begin{aligned}
x_1(t;\alpha) &= e^{-t}(-2-e^t(\alpha-3)+e^{2t}(2+t)(\alpha-1))\\
x_2(t;\alpha) &= e^{-t}(-2+e^t(\alpha+1)-e^{2t}(2+t)(\alpha-1))\\
x_1(t;\beta) &= 2(1-e^{-t}+\beta-e^t(2+t)\beta)\\
x_2(t;\beta) &= 2-2e^{-t}-2\beta+2e^t(2+t)\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çözümünα, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.2-Şekil 6.4 de gösterilmiştir.

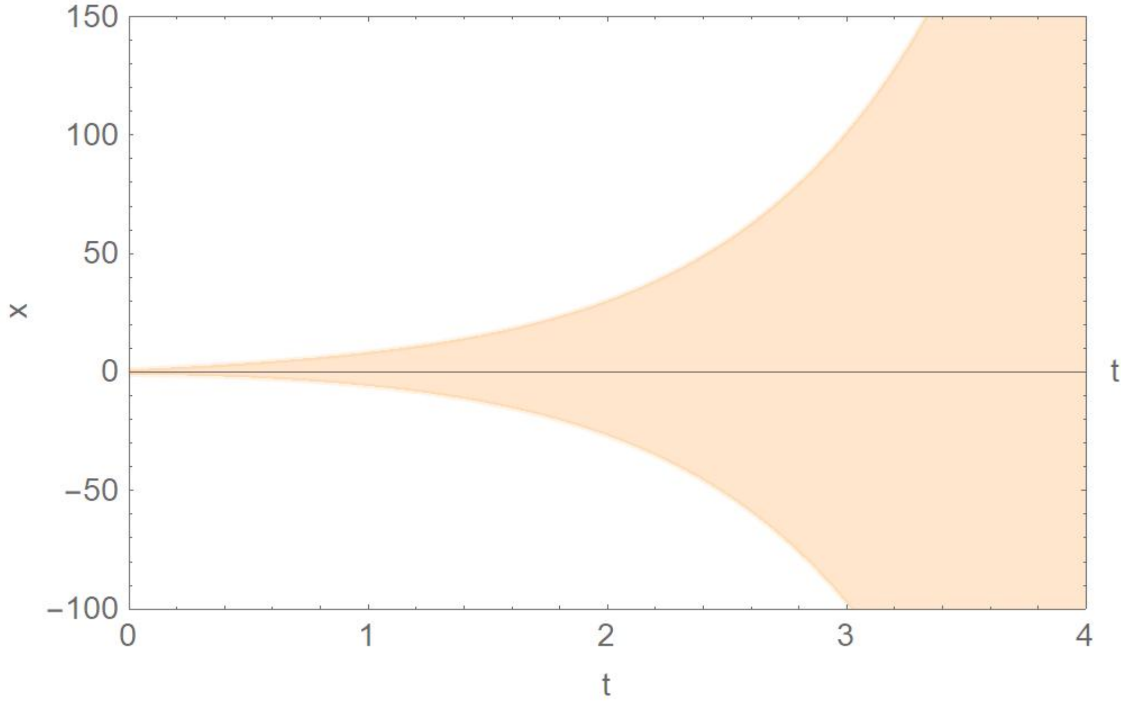
Özel olarak $\alpha=0$, $\beta=1$ kesitleri için başlangıç değer probleminin α ve β kesitlerinin çözümü

$$\begin{aligned}
x_1(t;0) &= 3-2e^{-t}-e^t(2+t)\\
x_2(t;0) &= 1-2e^{-t}+e^t(2+t)\\
x_1^*(t;1) &= 4-2e^{-t}-e^t(2+t)\\
x_2^*(t;1) &= e^{-t}(-2+2e^{2t}(2+t))
\end{aligned}$$

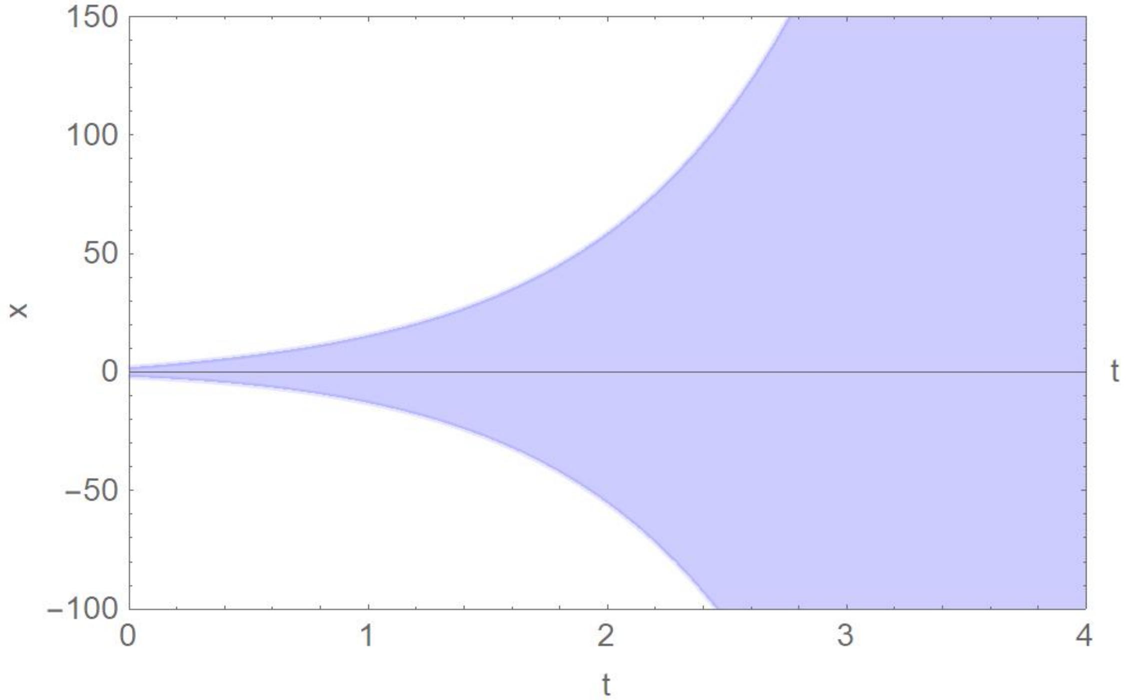
elde edilir (Şekil 6.1). Gerçekten de, keyfi sabit bir $t_0\in[0,\infty)$ değeri için $x_1(t_0;\alpha)$ ve $x_2(t_0;\alpha)$ fonksiyonları α ya göre süreklidir; $x_1^*(t_0;\beta)$ ve $x_2^*(t_0;\beta)$ fonksiyonları β ya göre süreklidir ve $x_1(t_0;0)\le x_2(t_0;0)$ ve $x_1^*(t_0;1)\le x_2^*(t_0;1)$ eşitsizlikleri sağlandığı için Teorem 3.2.4 gereğince keyfi sabit her $t\in[0,\infty)$ için $[x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)]$ ve $[x_1^*(t;\beta);x_2^*(t;\beta)]$ kesitleri sezgisel dereceli bir sayı tanımlamaktadır. Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.5'te gösterilmiştir.



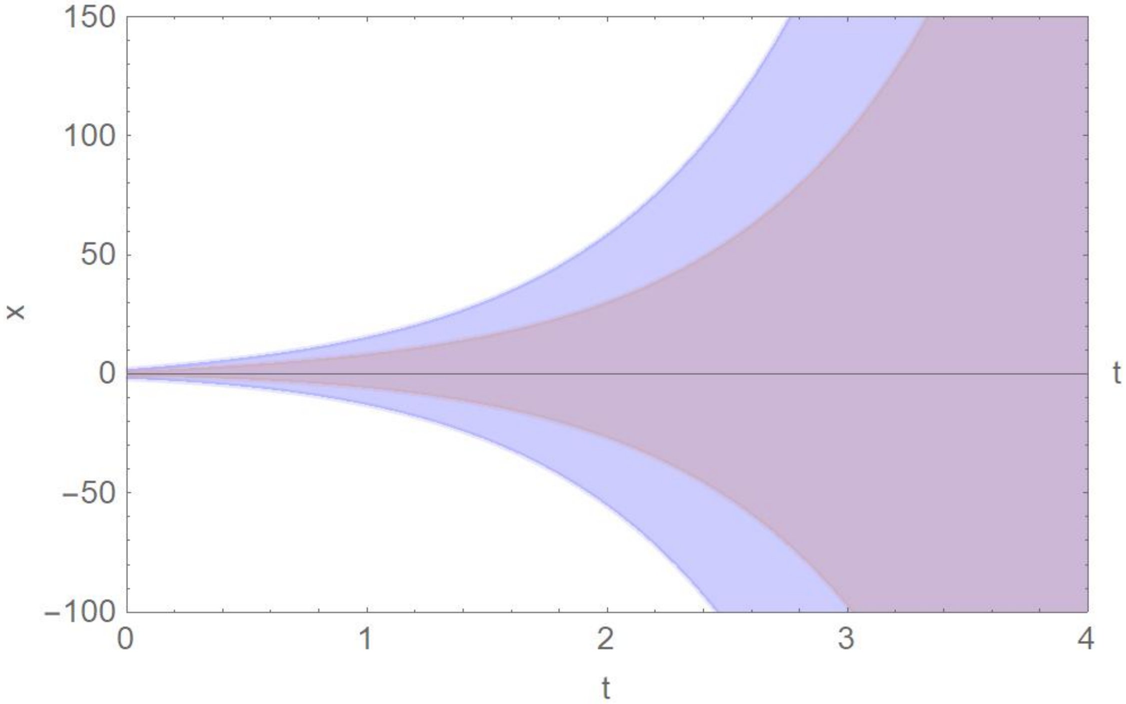
Şekil 6.1: $x_1(t;0)$, $x_2(t;0)$, $x_1^*(t;1)$ ve $x_2^*(t;1)$ fonksiyonları.



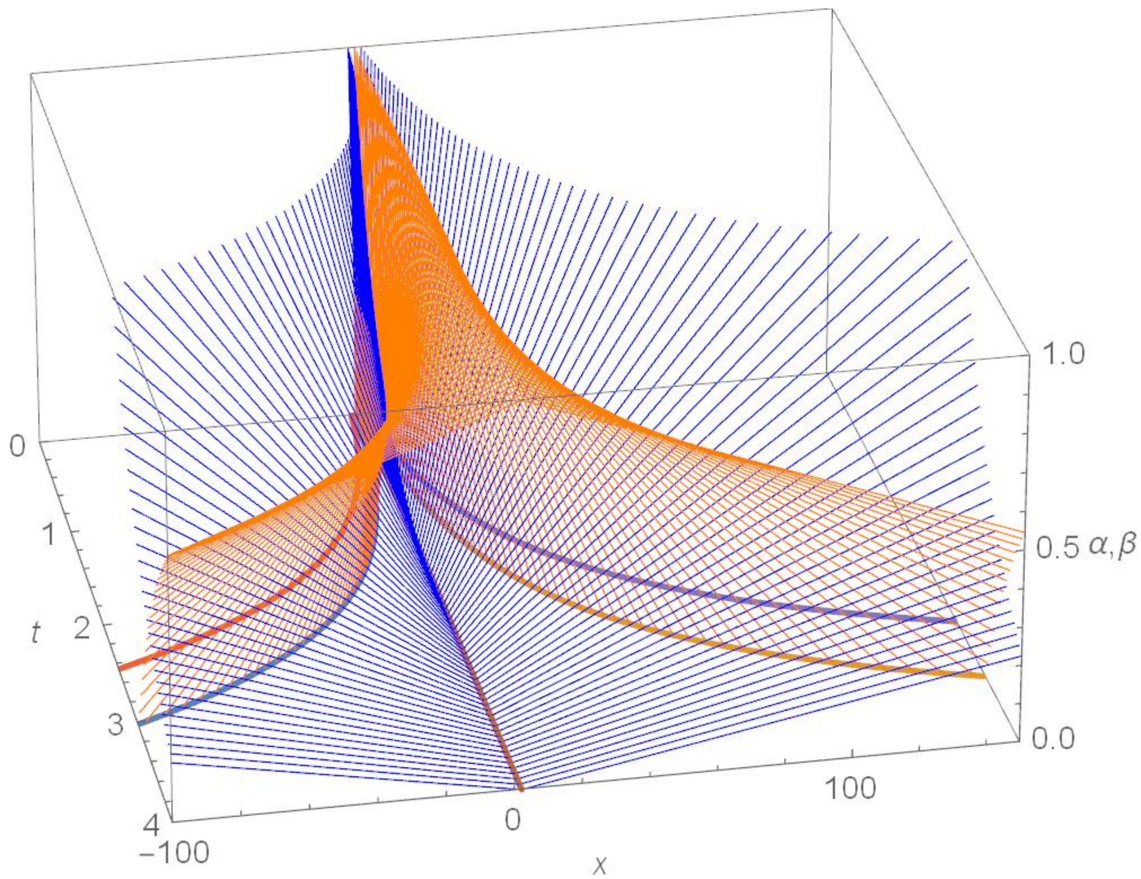
Şekil 6.2: Hukuhara çözümünün α-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



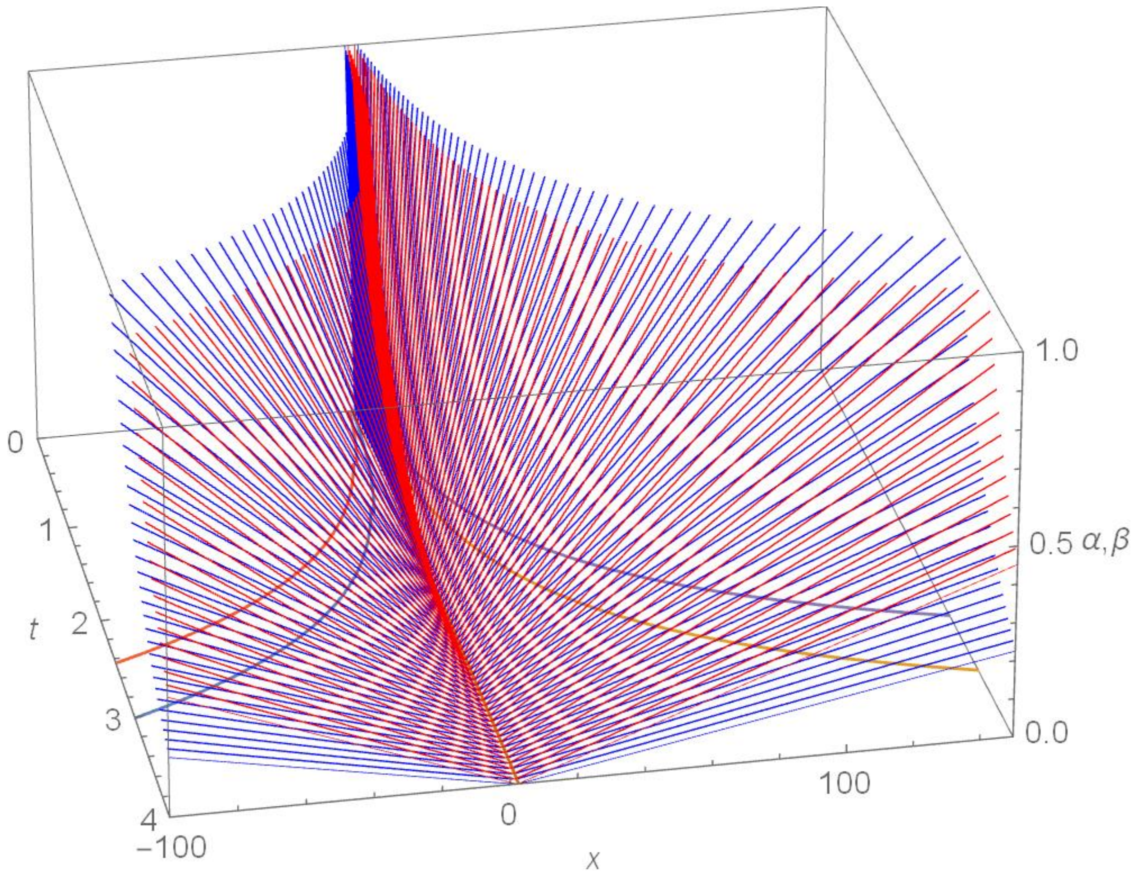
Şekil 6.3: Hukuhara çözümünün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.4: Kesişen bölge Hukuhara çözümünün $(\alpha;\beta)$-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.5: Çözümün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.6: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

Not. Dereceli kümelerde üye olma ve üye olmama fonksiyonları toplamı

$$\mu + \nu = 1$$

olduğundan, $1-\mu$ dereceli kümedeki bir elemanın üye olmama fonksiyonudur. Bu örneği dereceli kümeler için çözersek sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonu ile dereceli çözümün üye olmama fonksiyonları Şekil 6.6'daki gibi elde edilir.

6.2 GH-Türevi ile Sezgisel Dereceli Başlangıç Değer Problemleri

Lemma 6.2.1. *$x \in IF_N(\mathbb{R})$ bir sezgisel dereceli sayı ve $R_0 = [a,b] \times C([a,b], IF_N(\mathbb{R}))$ olmak üzere $f : R_0 \to IF_N(\mathbb{R})$ sürekli sezgisel dereceli fonksiyonu verilsin. x in α ve β kesitleri sırasıyla $x(\alpha) = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, $x^*(\beta) = [x_1^*(\beta), x_2^*(\beta)]$ ile verilsin öyle ki $x_1(\alpha)$ kesin artan, $x_2(\alpha)$ kesin azalan ve $x_1^*(\beta)$ kesin azalan, $x_2^*(\beta)$ kesin artan türevlenebilir fonksiyonlar olsun. f fonksiyonunun α ve β kesitleri sırasıyla $f(t,x;\alpha) = [f_1(t,x;\alpha), f_2(t,x;\alpha)]$ ve $f^*(t,x;\beta) = [f_1^*(t,x;\beta), f_1^*(t,x;\beta)]$ ile verilsin öyle ki her $(t,x) \in R_0$ için $\frac{\partial f_1(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f_2(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{f_1^*(t,x;\beta)}{\partial \beta}$ ve $\frac{f_2^*(t,x;\beta)}{\partial \beta}$ kısmi türevleri mevcut ve sınırlı olsun.*

Eğer

1) *$x_1(1) < x_2(1)$ ve $x_1^*(0) < x_2^*(0)$ sağlanırsa,*
veya

2) *$x_1(1) < x_2(1)$, $x_1^*(0) = x_2^*(0)$ sağlanırsa ve her $(t,x) \in R_0$ için $f^*(t,x;0)$ kesiti tek nokta kümesi ise,*
veya

3) *$x_1(1) = x_2(1)$, $x_1^*(0) < x_2^*(0)$ sağlanırsa ve her $(t,x) \in R_0$ için $f(t,x;1)$ kesiti tek nokta kümesi ise,*
veya

4) *$x_1(1) = x_2(1)$, $x_1^*(0) = x_2^*(0)$ sağlanırsa ve her $(t,x) \in R_0$ için $f(t,x;1)$, $f^*(t,x;0)$ kesitleri tek nokta kümesi ise,*

bu taktirde, her $(t,x) \in [a,h] \times C([a,h], IF_N(\mathbb{R}))$ için

$$x \ominus_H \left(-\int_a^t f(t,x)ds \right)$$

olacak şekilde $h > a$ olacak şekilde bir h sayısı mevcuttur.

İspat. $x \in IF_N(\mathbb{R})$ ve $f : R_0 \to IF_N(\mathbb{R})$ sürekli sezgisel dereceli fonksiyonu verilsin.

1) şartı sağlansın ve

$$z = x \ominus_H \left(-\int_a^t f(s,x(s))ds \right)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} z &= x \ominus_H \left(-\int_a^t f(s,x(s))ds \right) \\ &\iff x = z + \int_a^t (-1) f(s,x(s))ds \\ &\iff x(\alpha) = z(\alpha) + \int_a^t (-1) f(s,x;\alpha)ds \\ &\text{ve} \quad x^*(\beta) = z^*(\beta) + \int_a^t (-1) f^*(s,x;\beta)ds \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} [x_1(\alpha), x_2(\alpha)] &= [z_1(\alpha), z_2(\alpha)] + \left[-\int_a^t f_2(s,x;\alpha)ds, -\int_a^t f_1(s,x;\alpha)ds \right] \\ &\Leftrightarrow z_1(\alpha) = x_1(\alpha) + \int_a^t f_2(s,x;\alpha)ds \\ &\text{ve} \quad z_2(\alpha) = x_2(\alpha) + \int_a^t f_1(s,x;\alpha)ds \end{aligned}$$

sağlanır ve benzer şekilde

$$z_1^*(\beta) = x_1^*(\beta) + \int_a^t f_2^*(s;\beta)ds$$

ve

$$z_2^*(\beta) = x_2^*(\beta) + \int_a^t f_1^*(s;\beta)ds$$

elde edilir. Teorem 3.4.4'de **1)** şartından z nin sezgisel bir sayı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\textbf{i)} \begin{cases} z_1(\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre azalmayan} \\ z_2(\alpha) \text{ fonksiyonu } \alpha \text{ ya göre artmayan} \\ z_1(1) \leq z_2(1) \end{cases}$$

ve

$$\textbf{ii)} \begin{cases} z_1^*(\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre artmayan} \\ z_2^*(\beta) \text{ fonksiyonu } \beta \text{ ya göre azalmayan} \\ z_1^*(0) \leq z_2^*(0) \end{cases}$$

sağlanmasıdır.

$f(t,x;\alpha)$ ve $f^*(t,x;\beta)$ kesitleri kapalı ve sınırlı olduğu için

$$\text{çap}(-f(t,x;1)) = f_2(t,x;1) - f_1(t,x;1)$$

ve

$$\text{çap}(-f^*(t,x;0) = f_2^*(t,x;\beta) - f_1^*(t,x;\beta)$$

uzunlukları sınırlıdır. Yani öyle M_1, $M_2 > 0$ sayıları vardır ki $\forall t \in [a,b]$ için çap$(-f(t;1)) \leq M_1$ ve çap$(-f^*(t;0) \leq M_2$ olur.

$$\text{çap}(-f(t,x;1)) \leq M_1 \Rightarrow \int_a^t \text{çap}(-f(s,x;1))ds \leq \int_a^t M_1 ds = (t-a)M_1$$

olur. Her $t \in [a, a + \frac{\text{çap}(x(1))}{M_1}]$ için $(t-a)M_1 \leq$ çap$(x(1))$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^t \text{çap}(-f(s,x;1))ds &\leq \text{çap}(x(1)) \\ \Rightarrow \int_a^t f_2(s,x;1)ds - \int_a^t f_1(s,x;1)ds &\leq x_2(1) - x_1(1) \\ \Rightarrow \int_a^t f_2(s,x;1)ds + x_1(1) &\leq \int_a^t f_1(s,x;1)ds + x_2(1) \\ \Rightarrow z_1(1) &\leq z_2(1). \end{aligned}$$

elde edilir.

Öte yandan, her $t \in [a, a + \frac{\text{çap}(x^*(0))}{M_2}]$ için $(t-a)M_2 \leq$ çap$(x^*(0))$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^t \text{çap}(-f^*(s,x;0))ds &\leq \text{çap}(x^*(0)) \\ \Rightarrow \int_a^t f_2^*(s,x;\beta)ds - \int_a^t f_1^*(s,x;\beta)ds &\leq x_2^*(0) - x_1^*(0) \\ \Rightarrow \int_a^t f_2^*(s,x;\beta)ds + x_1^*(1) &\leq \int_a^t f_1^*(s,x;\beta)ds + x_2^*(0) \\ \Rightarrow z_1^*(0) &\leq z_2^*(0). \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $t \in [a, \min\{a + \frac{\text{çap}(x(1))}{M_1}, a + \frac{\text{çap}(x^*(0))}{M_2}\}]$ için

$$\begin{aligned} z_1(1) &\leq z_2(1) \\ z_1^*(0) &\leq z_2^*(0). \end{aligned}$$

sağlanır. Şimdi z_1, z_2, z_1^* ve z_2^* monotonluğunu inceleyelim.

$$\frac{\partial f_1(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}, \frac{\partial f_2(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}, \frac{f_1^*(t,x;\beta)}{\partial \beta} \text{ve} \frac{f_2^*(t,x;\beta)}{\partial \beta}$$

kısmi türevleri sınırlı olduğundan her $(t,x) \in R_0$ ve $\alpha, \beta \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{\partial f_1(t,x;\alpha)}{\partial\alpha}\right| \leq K_1, \left|\frac{\partial f_2(t,x;\alpha)}{\partial\alpha}\right| \leq K_2, \left|\frac{f_1^*(t,x;\beta)}{\partial\beta}\right| \leq K_3, \left|\frac{f_2^*(t,x;\beta)}{\partial\beta}\right| \leq K_4$$

olacak şekilde K_1, K_2, K_3, ve K_4, pozitif sayıları mevcuttur. $x_1(\alpha)$ fonksiyonu α ya göre kesin artan olduğu için öyle bir $c_1 > 0$ pozitif reel sayısı mevcuttur ki $(x_1(\alpha))' \geq c_1$ sağlanır. Her $t \in [a, a+\frac{c_1}{K_2}]$ için

$$\begin{aligned} -\int_a^t \frac{\partial f_2(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} ds &\leq \left|\int_a^t \frac{\partial f_2(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} ds\right| \\ &\leq \int_a^t \left|\frac{\partial f_2(s,x;\alpha)}{\partial\alpha}\right| ds \\ &\leq K_2(t-a) \\ &\leq c_1 \leq (x_1(\alpha))' \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(z_1(\alpha))' = (x_1(\alpha))' + \int_a^t \frac{\partial f_2(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} ds \geq 0$$

olduğundan $z_1(\alpha)$ fonksiyonu α ya göre azalmayandır. $x_2(\alpha)$ kesin azalan olduğu için $(x_2(\alpha))' \leq c_2$ olacak şekilde bir $c_2 < 0$ reel sayısı mevcuttur. O halde her $t \in [a, a+\frac{|c_2|}{K_1}]$ için

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{\partial f_1(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} ds &\leq \left|\int_a^t \frac{\partial f_1(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} ds\right| \\ &\leq \int_a^t \left|\frac{\partial f_1(s,x;\alpha)}{\partial\alpha}\right| ds \\ &\leq K_1(t-a) \\ &\leq |c_2| \leq -(x_2(\alpha))' \end{aligned}$$

olur. Yani

$$(z_2(\alpha))' = (x_2(\alpha))' + \int_a^t \frac{\partial f_1(s,x;\alpha)}{\partial\alpha} \leq 0$$

olduğundan $z_2(\alpha)$ fonksiyonu α ya göre artmayandır.
$x_1^*(\beta)$ kesin azalan olduğu için $(x_1^*(\beta))' \leq c_3$ olacak şekilde bir $c_3 < 0$ reel sayısı mevcuttur. Her $t \in [a, a+\frac{|c_3|}{K_4}]$ için

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{f_2^*(s,x;\beta)}{\partial\beta} ds &\leq \left|\int_a^t \frac{f_2^*(s,x;\beta)}{\partial\beta} ds\right| \\ &\leq \int_a^t \left|\frac{f_2^*(s,x;\beta)}{\partial\beta}\right| ds \\ &\leq K_4(t-a) \\ &\leq |c_3| \leq -(x_1^*(\beta))' \end{aligned}$$

olur. Yani

$$(z_1^*(\beta))' = (x_1^*(\beta))' + \int_a^t \frac{f_2^*(s,x;\beta)}{\partial\beta} ds \leq 0$$

olduğundan $z_1^*(\beta)$ fonksiyonu β ya göre artmayandır. $x_2^*(\beta)$ kesin artan olduğu için $(x_2^*(\beta))' \leq c_4$ olacak şekilde bir $c_4 > 0$ reel sayısı mevcuttur. O halde her $t \in [a, a + \frac{c_4}{K_3}]$ için

$$\begin{aligned}
-\int_a^t \frac{f_1^*(s,x;\beta)}{\partial\beta} ds &\leq \left|\int_a^t \frac{f_1^*(s,x;\beta)}{\partial\beta} ds\right| \\
&\leq \int_a^t \left|\frac{f_1^*(s,x;\beta)}{\partial\beta}\right| ds \\
&\leq K_3(t-a) \\
&\leq c_4 \leq (x_2^*(\beta))'
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$(z_2^*(\beta))' = (x_2^*(\beta))' + \int_a^t \frac{f_1^*(s;\beta)}{\partial\beta} ds \geq 0$$

olduğundan $z_2^*(\beta)$ fonksiyonu β ya göre azalmayandır.
Sonuç olarak, $h = \min\left\{\frac{c_1}{K_2}, \frac{|c_2|}{K_1}, \frac{|c_3|}{K_4}, \frac{c_4}{K_3}, a + \frac{\text{çap}(x(1))}{M_1}, a + \frac{\text{çap}(x^*(0))}{M_2}\right\}$ seçilirse **i)** ve **ii)** sağlandığından $(t,x) \in [a,h] \times C([a,h], IF_N(\mathbb{R}))$ için

$$x \ominus_H \left(-\int_a^t f(s,x)ds\right)$$

mevcuttur.
2) şartı sağlansın bu durumda $x_1^*(0) = x_2^*(0)$ ve her $t \in [a,b]$ için $f^*(t,x;0)$ tek nokta kümesi olduğundan her $t \in [a,b]$ için

$$\text{çap}(f^*(t,x;0)) = 0$$

ve

$$\int_a^t \text{çap}(f^*(s,x;0))ds = \text{çap}(x^*(0)) = 0$$

elde edilir. **1)** durumdakine benzer adımlar izlenirse
$h = \min\left\{\frac{c_1}{K_2}, \frac{|c_2|}{K_1}, \frac{|c_3|}{K_4}, \frac{c_4}{K_3}, a + \frac{\text{çap}(x(1))}{M_1}\right\}$ elde edilir; **i)** ve **ii)** şartları sağlandığından her $t \in [a,h]$ için

$$x \ominus_H \left(-\int_a^t f(s,x)ds\right)$$

mevcuttur.
Benzer şekilde **3)** ve **4)** şartları için sırasıyla
$h = \min\left\{\frac{c_1}{K_2}, \frac{|c_2|}{K_1}, \frac{|c_3|}{K_4}, \frac{c_4}{K_3}, a + \frac{\text{çap}(x^*(0))}{M_2}\right\}$
$h = \min\left\{\frac{c_1}{K_2}, \frac{|c_2|}{K_1}, \frac{|c_3|}{K_4}, \frac{c_4}{K_3}\right\}$ elde edilir.
Dolayısıyla Teorem 3.4.4 gereğince $(t,x) \in [a,h] \times C([a,h], IF_N(\mathbb{R}))$ için

$$x \ominus_H \left(-\int_a^t f(s,x)ds\right)$$

mevcuttur. □

Teorem 6.2.1. *$p,q>0$, $x_0 \in IF_N(\mathbb{R})$ olmak üzere $R_0 = [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],$ $\overline{N}(x_0,q))$ olsun ve $f : R_0 \to IF_N(\mathbb{R})$ sürekli sezgisel fonksiyonu verilsin. $x : [t_0,t_0+p] \to IF_N(\mathbb{R})$ olmak üzere x'in α ve β kesitleri sırasıyla $x(t;\alpha) = [x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)]$ ve $x^*(t;\beta) = [x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)]$ ile verilsin öyle ki sabit her $t \in [t_0,t_0+p]$ için $x_1(t;\alpha)$, α ya göre kesin artan; $x_2(t;\alpha)$, α ya göre kesin azalan; $x_1^*(t;\beta)$; β ya göre kesin azalan ve $x_2^*(t;\beta)$; β ya göre kesin artan türevlenebilir fonksiyonlar olsun. f fonksiyonunun α ve β kesitleri sırasıyla $f(t,x;\alpha) = [f_1(t,x;\alpha), f_2(t,x;\alpha)]$ ve $f^*(t;\beta) = [f_1^*(t,x;\beta), f_1^*(t,x;\beta)]$ ile verilsin öyle ki her $(t,x) \in R_0$ için $\frac{\partial f_1(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f_2(t,x;\alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{f_1^*(t,x;\beta)}{\partial \beta}$ ve $\frac{f_2^*(t,x;\beta)}{\partial \beta}$ kısmi türevleri mevcut ve (t,x) den bağımsız olarak sınırlı olsun.*

1) *$f : R_0 \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel fonksiyonu sürekli olsun ve $(t,x),(t,y) \in R_0$ için*

$$D_1(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \le L_1 D_s(x,y)$$

$$D_2(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \le L_2 D_s(x,y)$$

sağlanacak şekilde $L_1, L_2 > 0$ reel sayıları mevcut

2) *Lemma 5.2.1'deki **1)-4)** şartlarından biri sağlasın.*

Bu taktirde, öyle bir $k > 0$ reel sayısı mevcuttur ki

$$\begin{cases} x'_{GH}(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sezgisel başlangıç değer probleminin $[t_0,t_0+k]$ aralığında çözümü vardır ve tektir.

İspat. Teorem 6.1.1 den Hukuhara çözümünün mevcut olduğunu görmüştük. Şimdi diğer çözümün varlığını gösterelim. Lemma 6.2.1 gereğince $0 < c \le p$ olacak şekilde her $t \in [t_0,t_0+c]$ için

$$x_0 \ominus_H \left(-\int_{t_0}^{t} f(s,x(s) \right) ds$$

Hukuhara farkı mevcuttur.
$R_1 = [t_0,t_0+c] \times C([t_0,t_0+c], \overline{N}(x_0,q))$ olsun; $K_0 = C([t_0,t_0+c], IF_N(\mathbb{R}))$ sürekli sezgisel dereceli fonksiyonlar uzayı olsun.

$$\begin{aligned} Q(x)(t_0) &= x_0 \\ Q(x)(t) &= x_0 \ominus_H \left(-\int_{t_0}^{t} f(s,x(s) \right) ds \end{aligned}$$

olacak şekilde $Q : K_0 \to K_0$ operatörünü tanımlayalım. f sezgisel fonksiyonu sürekli, Aumann integrallenebilir ve $Q(x(t_0)) = x_0$ olduğu için Q operatörü iyi tanımlıdır ve her $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+c] \times \overline{N}(x_0,q)$ için

$$\begin{aligned} D_1(f(t,x(t)), f(t,y(t))) &\le L_1 D_s(x,y) \\ D_2(f(t,x(t)), f(t,y()t)) &\le L_2 D_s(x,y) \end{aligned}$$

sağlandığından Lemma 6.1.3 den

$$M_1 = \sup\{D_1(f(t,x),0) : (t,x) \in R_0\}$$

ve

$$M_2 = \sup\{D_2(f(t,x),0) : (t,x) \in R_0\}.$$

olacak şekilde M_1 ve M_2 sayıları mevcuttur. O halde

$$\begin{aligned} D_1(Q(x)(t),x_0) &\leq D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, 0\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(s,x(s)),0)ds \\ &\leq M_1(t-t_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_2(Q(x)(t),x_0) &\leq D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, 0\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(s,x(s)),0)ds \\ &\leq M_2(t-t_0). \end{aligned}$$

sağlanır. $d = \min\{c, \frac{q}{M_1}, \frac{q}{M_2}\}$ ve $K_1 = C([t_0,t_0+d], \overline{N}(x_0,q))$ olsun.
Şimdi $Q : K_1 \to C([t_0,t_0+d], IF_N(\mathbb{R}))$ kısıtlanışı için $x \in K_1$ iken $Q(x) \in K_1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D_1(Q(x)(t),x_0) &= D_1(Q(x)(t) \ominus_H x_0, 0) \\ &= D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, 0\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(s,x(s)),0)ds \\ &\leq M_1 d \leq q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(Q(x)(t),x_0) &= D_2(Q(x)(t) \ominus_H x_0, 0) \\ &= D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, 0\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(s,x(s)),0)ds \\ &\leq M_2 d \leq q \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla D_∞ metriği gereğince

$$D_\infty(Q(x)(t),x_0) \quad \leq \quad \max\{M_1,M_2\}d \leq q$$

olduğundan $x \in K_1$ iken $Q(x) \in K_1$ elde edilir.

Şimdi Q operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned}
D_1(Q(x)(t),Q(y)(t)) &= D_1(Q(x)(t) \ominus_H Q(y)(t),0) \\
&= D_1\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau)) \ominus_H f(\tau,y(\tau))d\tau,0\right) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_1(f(\tau,x(\tau)) \ominus_H f(\tau,y(\tau)),0)d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} D_1(f(\tau,x(\tau)),f(\tau,y(\tau)))d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L_1D_s(x,y)d\tau \\
&= L_1(t-t_0)D_s(x,y) \\
&\leq L_1dD_s(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(Q(x)(t),Q(y)(t)) &= D_2(Q(x)(t) \ominus_H Q(y)(t),0) \\
&= D_2\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau)) \ominus_H f(\tau,y(\tau))d\tau,0\right) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} D_2(f(\tau,x(\tau)) \ominus_H f(\tau,y(\tau)),0)d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} D_2(f(\tau,x(\tau)),f(\tau,y(\tau)))d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L_2D_s(x,y)d\tau \\
&= L_2(t-t_0)D_s(x,y) \\
&\leq L_2dD_s(x,y)
\end{aligned}$$

$L = \max\{L_1,L_2\}$ olsun. Bu durumda

$$D_\infty(Q(x)(t),Q(y)(t)) \leq LdD_s(x,y) \Rightarrow \sup_{t\in[t_0,t_0+d]} D_\infty(Q(x)(t),Q(y)(t)) \leq LdD_s(x,y)$$

olduğundan

$$D_s(Q(x),Q(y)) \leq LdD_s(x,y)$$

elde edilir. $k = \min\{d,\frac{1}{L}\}$ olmak üzere $K_2 = C([t_0,t_0+k],\overline{N}(x_0,q))$ olsun. O halde $Q : K_2 \to K_2$ operatörü bir daralma dönüşümü olur. Banach sabit nokta teoremi gereğince $Q(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in K_2$ mevcuttur. Dolayısıyla $x^*(t)$ fonksiyonu her $t \in [t_0,t_0+k]$ için verilen sezgisel başlangıç değer probleminin bir çözümü olur. Banach sabit nokta teoremi gereğince bu çözüm tektir. □

Teorem 6.2.2. *$p,q \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in IF_N(\mathbb{R})$ ve $R_0 = [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))$ olsun. $f : R_0 \to IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel fonksiyonu verilsin. x in α ve β kesitleri $x_1(\alpha)$ kesin artan, $x_2(\alpha)$ kesin azalan ve $x_1^*(\beta)$ kesin azalan, $x_2^*(\beta)$ kesin artan türevlenebilir fonksiyonlar olacak şekilde sırasıyla $x(\alpha) = [x_1(\alpha),x_2(\alpha)]$, $x^*(t;\beta) = [x_1^*(\beta),x_2^*(\beta)]$ olsun. f fonksiyonunun α ve β kesitleri ise her $(t,x) \in R_0$ için $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}$, $\frac{f_1^*}{\partial \beta}$ ve $\frac{f_2^*}{\partial \beta}$ kısmi türevleri mevcut ve sınırlı olacak şekilde sırasıyla*

$$\begin{aligned}
f(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) &= [f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)), f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))] \\
f^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) &= [f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)), f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))]
\end{aligned}$$

ile verilsin. Eğer

1) *Her $\alpha,\beta \in [0,1]$ için $\{f_1\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_2\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_1^*\}_{\beta\in[0,1]}$ ve $\{f_2^*\}_{\beta\in[0,1]}$ fonksiyon aileleri eşsürekli,*

2) *Her $(t,x),(t,y) \in [t_0,t_0+p] \times C([t_0,t_0+p],\overline{N}(x_0,q))$ ve $\alpha,\beta \in [0,1]$ için*

$$\begin{aligned}
|f_1(t,x_1,x_2) - f_1(t,y_1,y_2)| &\leq L_1 \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|) \\
|f_2(t,x_1,x_2) - f_2(t,y_1,y_2)| &\leq L_2 \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|) \\
|f_1^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_1^*(t,y_1^*,y_2^*)| &\leq L_3 \max(|x_1^*-y_1^*|, |x_2^*-y_2^*|) \\
|f_2^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_2^*(t,y_1^*,y_2^*)| &\leq L_4 \max(|x_1^*-y_1^*|, |x_2^*-y_2^*|)
\end{aligned}$$

sağlanacak şekilde α'dan bağımsız L_1, L_2 ve β'dan bağımsız L_3 ve L_4 pozitif reel sayıları mevcut ,

3) *Lemma 5.2.1'deki **1)-4)** şartlarından biri sağlanırsa bu taktirde*

$$\begin{aligned}
x_H'(t) &= f(t,x) \\
x(t_0) &= x_0 \in IF_N(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

sezgisel başlangıç değer probleminin $k > 0$ olmak üzere $[t_0,t_0+k]$ aralığında $x(t)$ çözümü mevcuttur ve bu çözümün α ve β kesitleri aşağıdaki başlangıç değer problemleri ile belirlenir.

i)

$$\begin{aligned}
(x_1(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\
(x_2(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha)) \\
x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha) \\
x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1^*(t;\beta))' &= f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) \\
(x_2^*(t;\beta))' &= f_2^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta)) \\
x_1^*(t_0,\beta) &= x_{01}^*(\beta) \\
x_2^*(t_0,\beta) &= x_{02}^*(\beta)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
(x_1(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
(x_2(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha)\\
x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1^*(t;\beta))' &= f_2^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
(x_2^*(t;\beta))' &= f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
x_1^*(t_0,\beta) &= x_{01}^*(\beta)\\
x_2^*(t_0,\beta) &= x_{02}^*(\beta)
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
(x_1(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
(x_2(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha)\\
x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1^*(t;\beta))' &= f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
(x_2^*(t;\beta))' &= f_2^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
x_1^*(t_0,\beta) &= x_{01}^*(\beta)\\
x_2^*(t_0,\beta) &= x_{02}^*(\beta)
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
(x_1(t;\alpha))' &= f_2(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
(x_2(t;\alpha))' &= f_1(t,x_1(t;\alpha),x_2(t;\alpha))\\
x_1(t_0,\alpha) &= x_{01}(\alpha)\\
x_2(t_0,\alpha) &= x_{02}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1^*(t;\beta))' &= f_2^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
(x_2^*(t;\beta))' &= f_1^*(t,x_1^*(t;\beta),x_2^*(t;\beta))\\
x_1^*(t_0,\beta) &= x_{01}^*(\beta)\\
x_2^*(t_0,\beta) &= x_{02}^*(\beta)
\end{aligned}$$

İspat. Her $\alpha,\beta \in [0,1]$ için $\{f_1\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_2\}_{\alpha\in[0,1]}$, $\{f_1^*\}_{\beta\in[0,1]}$ ve $\{f_2^*\}_{\beta\in[0,1]}$ fonksiyon aileleri eşsürekli olduğunda $f(t,x)$ sezgisel fonksiyonu sürekli olduğu Teorem 6.1.2 de olduğu gibi gösterilebilir. **2)** şartı gereğince

$$|f_1(t,x_1,x_2) - f_1(t,y_1,y_2)| \leq L_1 \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

$$|f_2(t,x_1,x_2) - f_2(t,y_1,y_2)| \leq L_2 \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde L_1, $L_2 > 0$ sayıları mevcut olduğu için

$M_1 = \max\{L_1, L_2\}$ dersek Hausdorff metriği gereği

$$D_1(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \quad \leq \quad M_1 D_1(x(t), y(t))$$

olduğundan

$$D_1(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \leq M_1 D_s(x,y)$$

elde edilir. Öte yandan

$$|f_1^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_1^*(t,y_1^*,y_2^*)| \leq L_3 \max\{|x_1^* - y_1^*|, |x_2^* - y_2^*|\}$$

$$|f_2^*(t,x_1^*,x_2^*) - f_2^*(t,y_1^*,y_2^*)| \leq L_4 \max\{|x_1^* - y_1^*|, |x_2^* - y_2^*|\}$$

sağlandığından $M_2 = \max\{L_3, L_4\}$ dersek Hausdorff metriği tanımı gereği

$$D_2(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \quad \leq \quad M_2 D_2(x(t), y(t))$$

olduğundan

$$D_2(f(t,x(t)), f(t,y(t))) \leq M_2 D_s(x,y)$$

elde edilir. O halde Lemma 6.2.1 ve Teorem 6.2.1 gereğince

$$\begin{aligned} x'_{gH}(t) &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \in IF_N(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin $x(t) \in IF(\mathbb{R})$ çözümü vardır ve tektir.
$x(t)$ nin α ve β kesitleri

$$\begin{aligned} x(t;\alpha) &= [x_1(t;\alpha), x_2(t;\alpha)] \\ x^*(t;\beta) &= [x_1^*(t;\beta), x_2^*(t;\beta)] \end{aligned}$$

olsun. $x(t) \in IF_N(\mathbb{R})$ sezgisel dereceli çözümü GH-türevlenebilir olduğundan. Bu durumda her $\alpha,\beta \in [0,1]$ için Teorem 3.3.4 gereğince $(x_1(t;\alpha))'$, $(x_2(t;\alpha))'$, $(x_1^*(t;\beta))'$ ve $(x_2^*(t;\beta))'$ klasik türevleri mevcuttur ve

$$\begin{aligned} (x(t;\alpha))' &= [(x_1(t;\alpha))', (x_2(t;\alpha))'] \\ &\quad \text{veya} \\ (x(t;\alpha))' &= [(x_2(t;\alpha))', (x_1(t;\alpha))'] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (x^*(t;\beta))' &= [(x_1^*(t;\beta))', (x_2^*(t;\beta))'] \\ &\quad \text{veya} \\ (x^*(t;\beta))' &= [(x_2^*(t;\beta))', (x_1^*(t;\beta))'] \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla bu durumları ayrı ayrı göz önüne alırsak verilen sezgisel başlangıç değer probleminin α ve β kesitlerinden **i)-iv)** denklem sistemleri elde edilir. Öte yandan sabit her α ve β için **1)-3)** şartları sağlandığı için **i)-iv)** denklemlerinin çözümlerinin $x_1(t;\alpha)$, $x_2(t;\alpha)$, $x_1^*(t;\beta)$ ve $x_2^*(t;\beta)$ çözümleri var ve tektir. Çözümlerin tekliğinden dolayı bu denklem sisteminin çözümleri verilen sezgisel başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün α ve β kesitleri ile belirlenmektedir. $\square$

Örnek 6.2.1.

$$\begin{aligned} x'_{GH}(t) &= x - e^t(-1,0,1;-2,0,2) + (1,2,3;0,2,4) && (6.6) \\ x(0) &= (-1,0,1;-2,0,2) && (6.7) \end{aligned}$$

ile verilen sezgisel başlangıç değer problemini kuvvetli genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilme ile çözümünü bulalım. Teorem 6.2.2 'de, (6.6)-(6.7) başlangıç değer problemine karşılık gelen dört farklı denklem sisteminin α ve β kesit çözümleri sırası ile aşağıdaki şekil elde edilir.

i)

$$\begin{aligned} x'_1(t;\alpha) &= x_1(t;\alpha) + (\alpha-1)e^t + 1 + \alpha \\ x'_2(t;\alpha) &= x_2(t;\alpha) + (1-\alpha)e^t + 3 - \alpha \\ x_1(0;\alpha) &= \alpha - 1 \\ x_2(0;\alpha) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{*\prime}(t;\beta) &= x_1^*(\beta) - 2\beta e^t + 2 - 2\beta \\ x_2^{*\prime}(t;\beta) &= x_2^*(\beta) + 2\beta e^t + 2 + 2\beta \\ x_1^*(0;\beta) &= -2\beta \\ x_2^*(0;\beta) &= 2\beta \end{aligned}$$

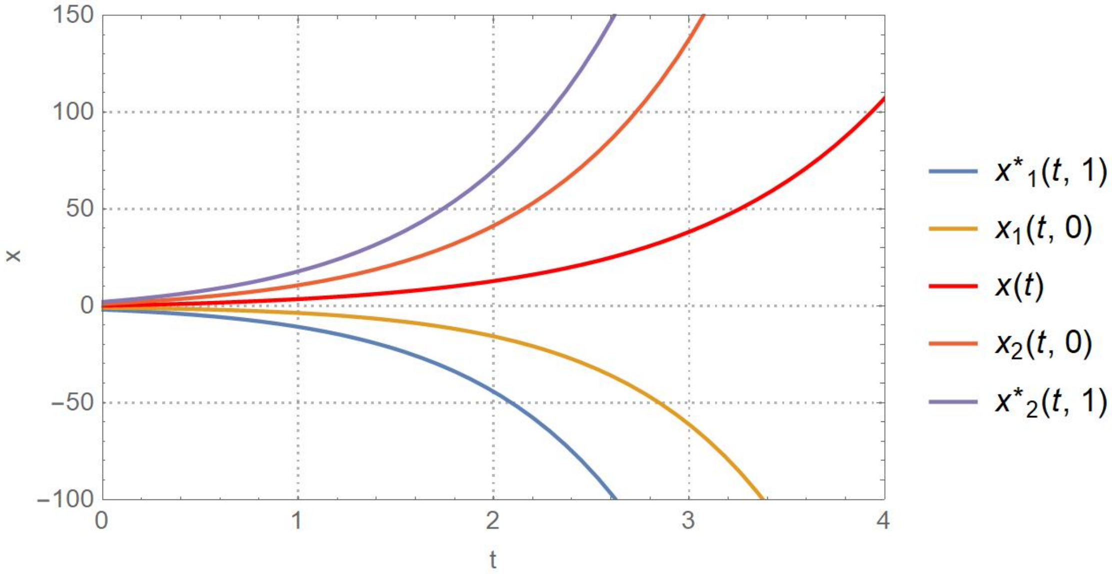
Bu denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} x_1(t;\alpha) &= -1 - \alpha + e^t(-t + 2\alpha + t\alpha) \\ x_2(t;\alpha) &= -3 + \alpha + e^t(4 + t - 2\alpha - t\alpha) \end{aligned}$$

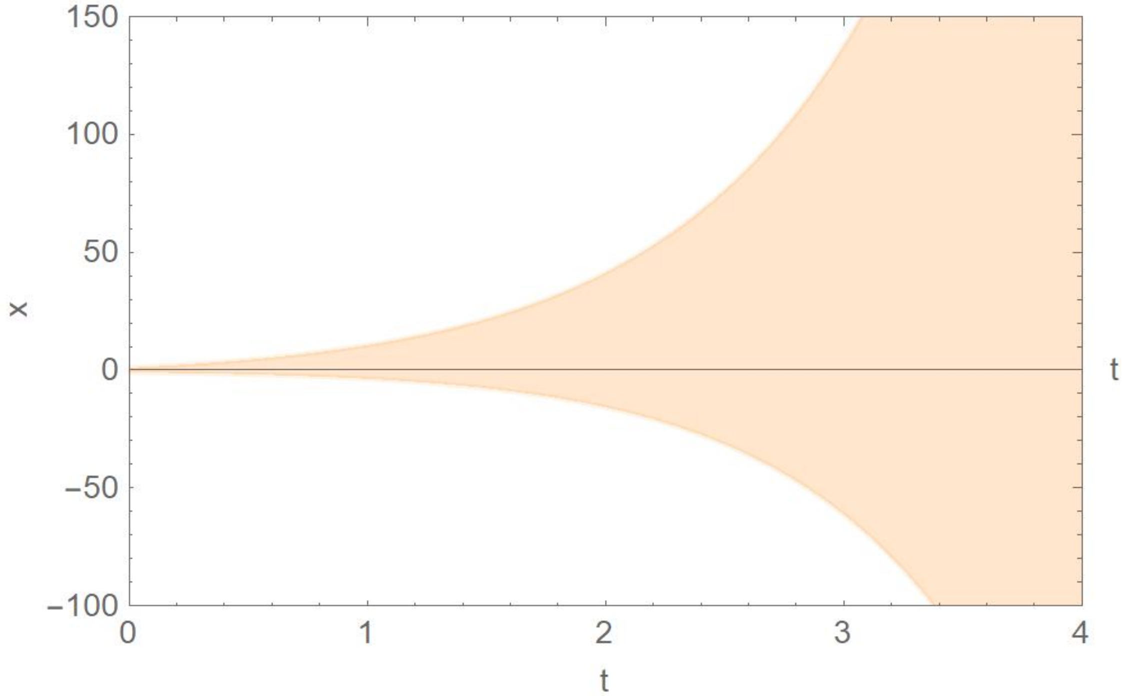
$$\begin{aligned} x_1^*(t;\beta) &= 2(-1 + \beta + e^t(1 - (t+2)\beta)) \\ x_2^*(t;\beta) &= 2(-1 - \beta + e^t(1 + (t+2)\beta)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Çözümünα, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.8-Şekil 6.10'da gösterilmiştir. Özel olarak $\alpha = 0$, $\beta = 1$ kesitleri için başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 6.7). Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.11'de gösterilmiştir.

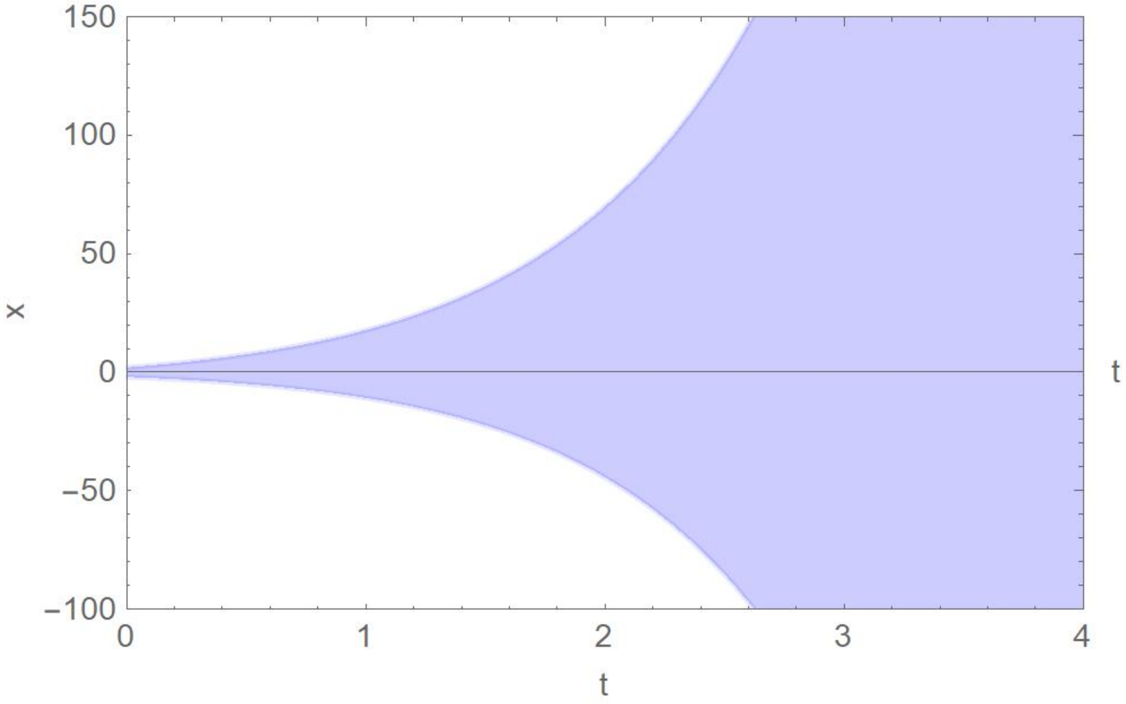
$$\begin{aligned} x_1(t;0) &= -1 - te^t \\ x_2(t;0) &= -3 + e^{-t}(t+4) \\ x_1^*(t;1) &= -2e^t(t+1) \\ x_2^*(t;1) &= -4 + 2e^t(t+3) \end{aligned}$$



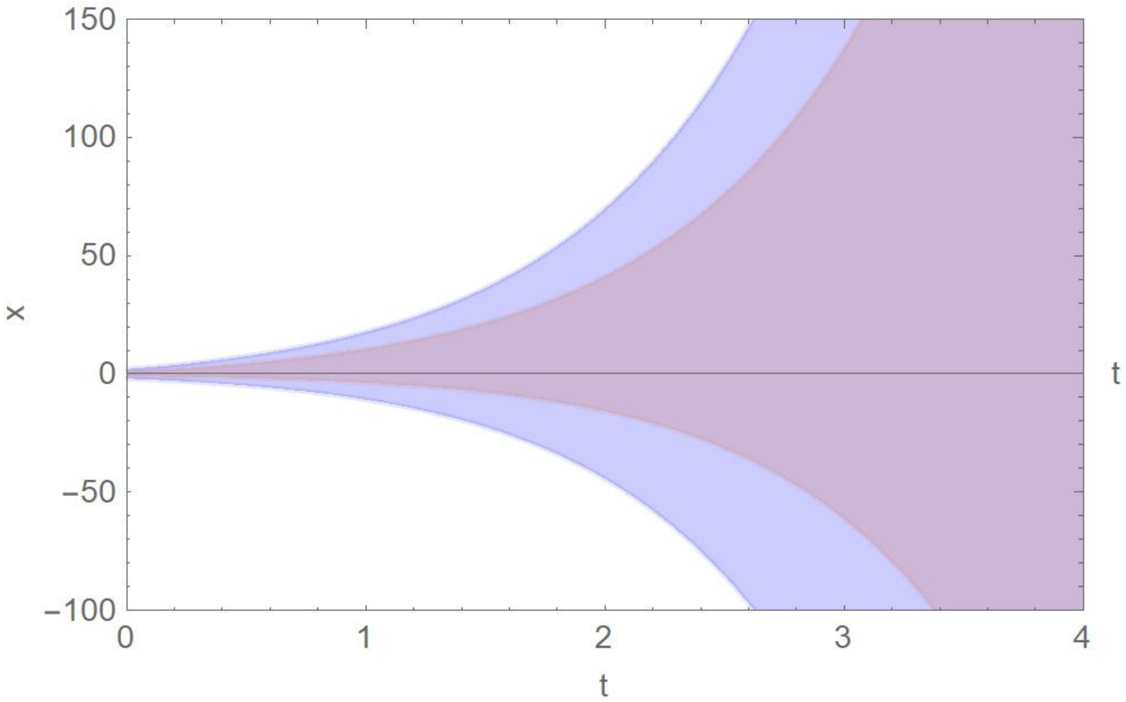
Şekil 6.7: (i) sistemi için $x_1(t;0)$, $x_2(t;0)$, $x_1^*(t;1)$ ve $x_2^*(t;1)$ fonksiyonları.



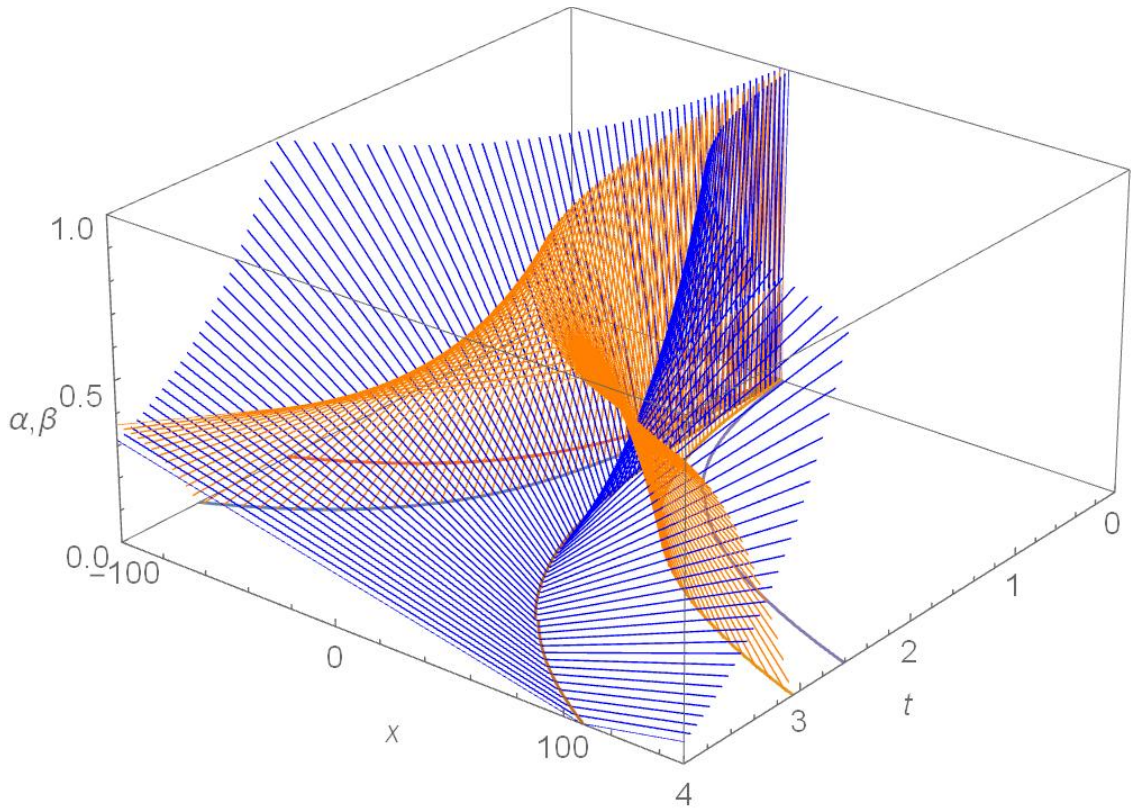
Şekil 6.8: (i)-GH çözümünün α-esitlerinin oluşturduğu bölge.



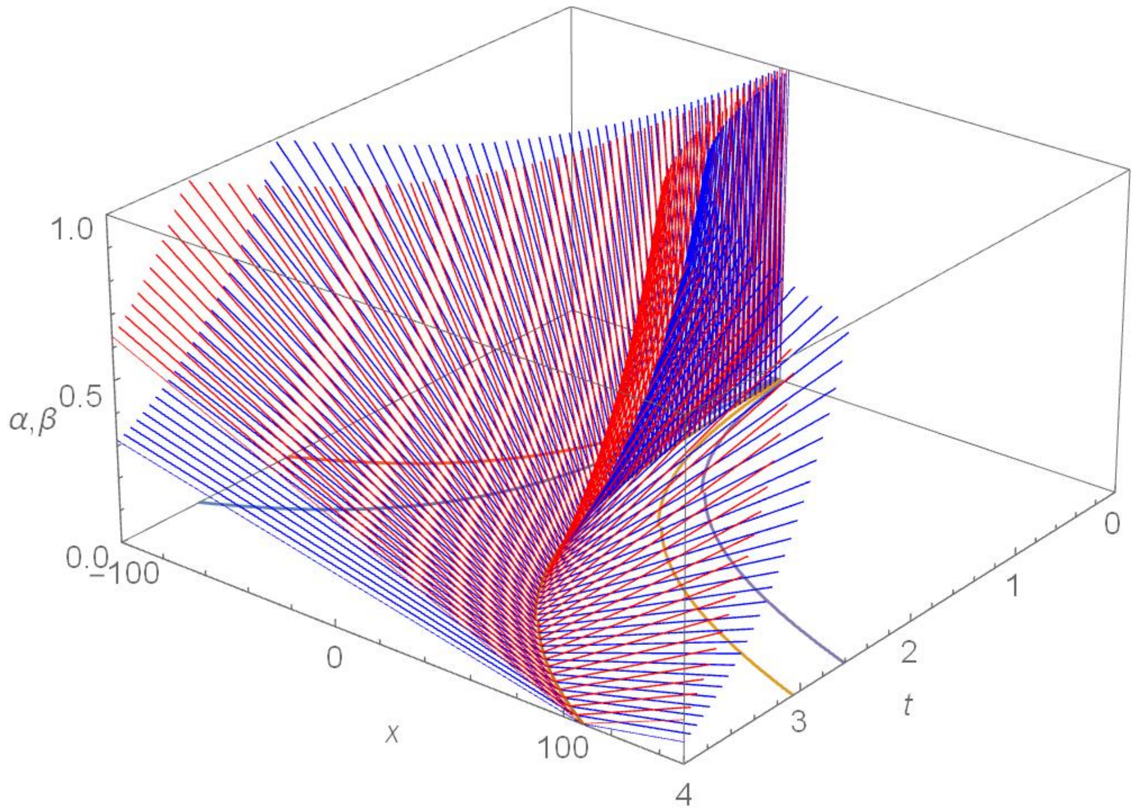
Şekil 6.9: (i)-GH çözümünün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.10: Kesişen bölge (i)-GH çözümünün (α, β)-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.11: (i)-GH çözümünün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.12: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

ii)

$$
\begin{aligned}
x_2'(t;\alpha) &= x_1(t;\alpha)+(\alpha-1)e^t+1+\alpha \\
x_1'(t;\alpha) &= x_2(t;\alpha)+(1-\alpha)e^t+3-\alpha \\
x_1(0;\alpha) &= \alpha-1 \\
x_2(0;\alpha) &= 1-\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{*\prime}(t;\beta) &= x_1^*(t;\beta)-2\beta e^t+2-2\beta \\
x_2^{*\prime}(t;\beta) &= x_2^*(t;\beta)+2\beta e^t+2+2\beta \\
x_1^*(0;\beta) &= -2\beta \\
x_2^*(0;\beta) &= 2\beta
\end{aligned}
$$

Bu denklem sistemine ait başlangıç değer probleminin çözümü

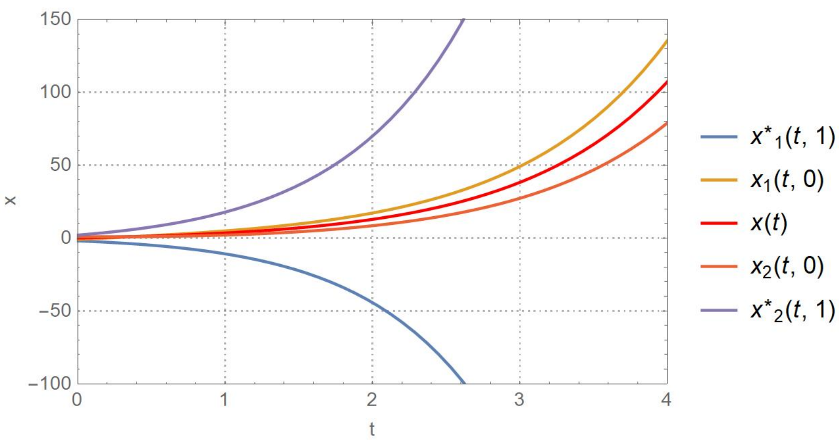
$$
\begin{aligned}
x_1(t;\alpha) &= -\alpha-\frac{1}{2}(\alpha-5)e^t+\frac{5}{2}(\alpha-1)e^{-t}-1 \\
x_2(t;\alpha) &= \frac{1}{2}e^{-t}\left(-5\alpha+2(\alpha-3)e^t+(\alpha+3)e^{2t}+5\right) \\
x_1^*(t;\beta) &= 2(-1+\beta+e^t(1-(t+2)\beta)) \\
x_2^*(t;\beta) &= 2(-1-\beta+e^t(+1+(t+2)\beta))
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

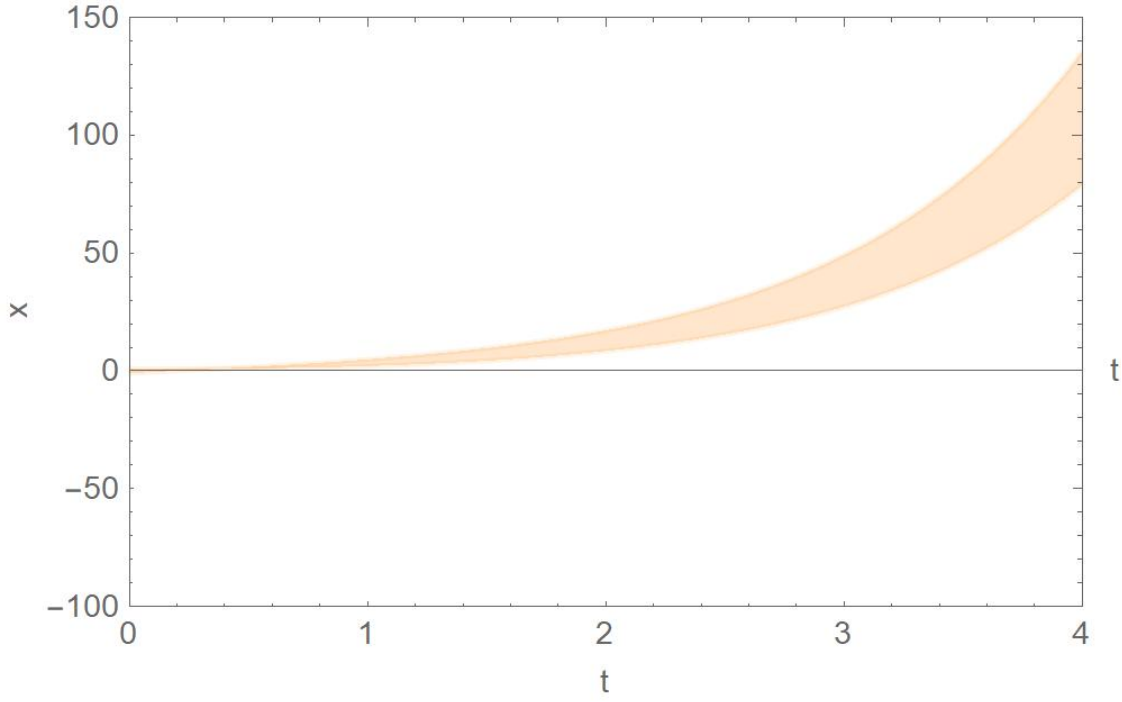
Çözümün α, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.14-Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Özel olarak $\alpha=0$, $\beta=1$ için

$$
\begin{aligned}
x_1(t;0) &= -e^t(t-2)-2e^{-t}-1 \\
x_2(t;0) &= -e^t(t-2)+2e^{-t}-3 \\
x_1^*(t;1) &= -2e^t(t+1) \\
x_2^*(t;1) &= -4+2e^t(t+3)
\end{aligned}
$$

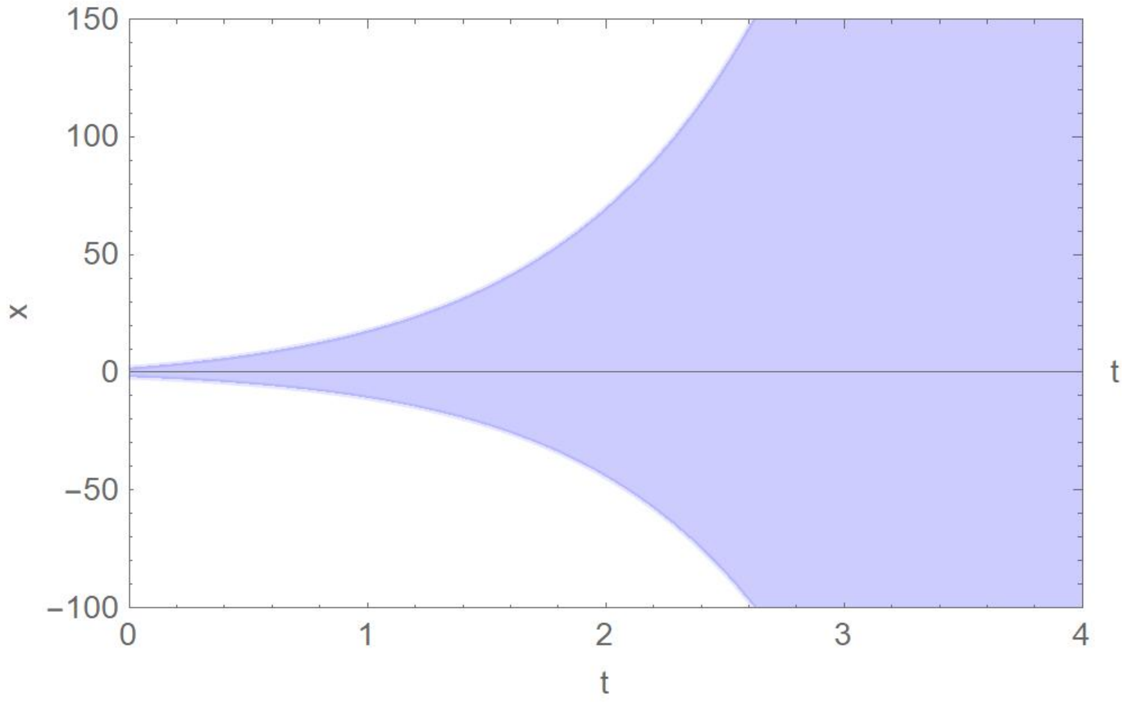
olarak elde edilir (Şekil 6.13). Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.17'de gösterilmiştir.



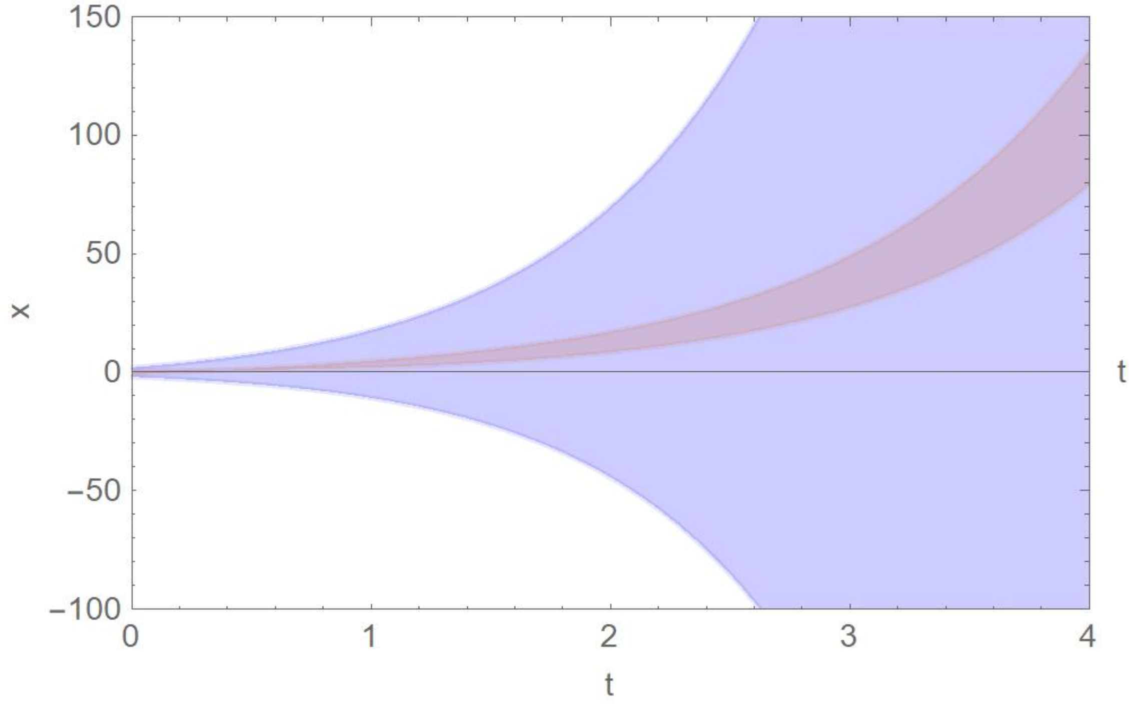
Şekil 6.13: (ii) sistemi için $x_1(t;0)$, $x_2(t;0)$, $x_1^*(t;1)$ ve $x_2^*(t;1)$ fonksiyonları.



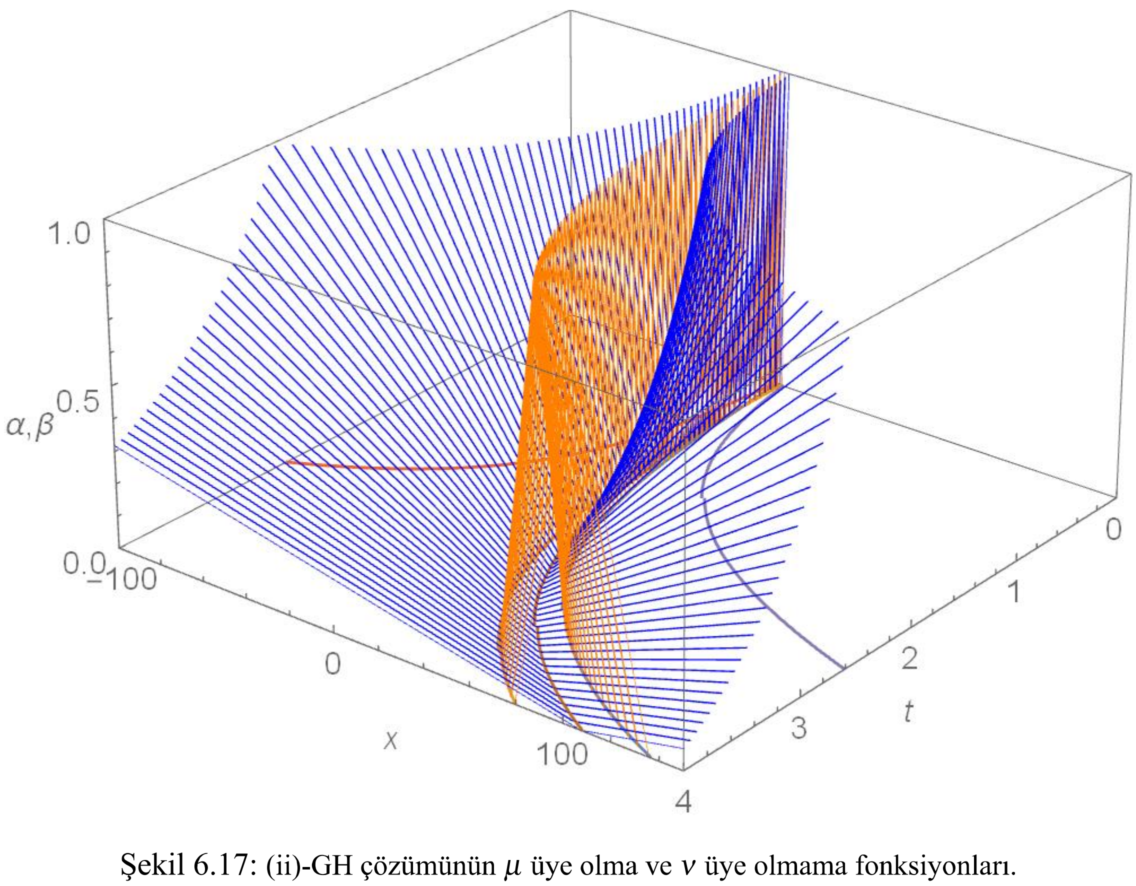
Şekil 6.14: (ii)-GH çözümünün α-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



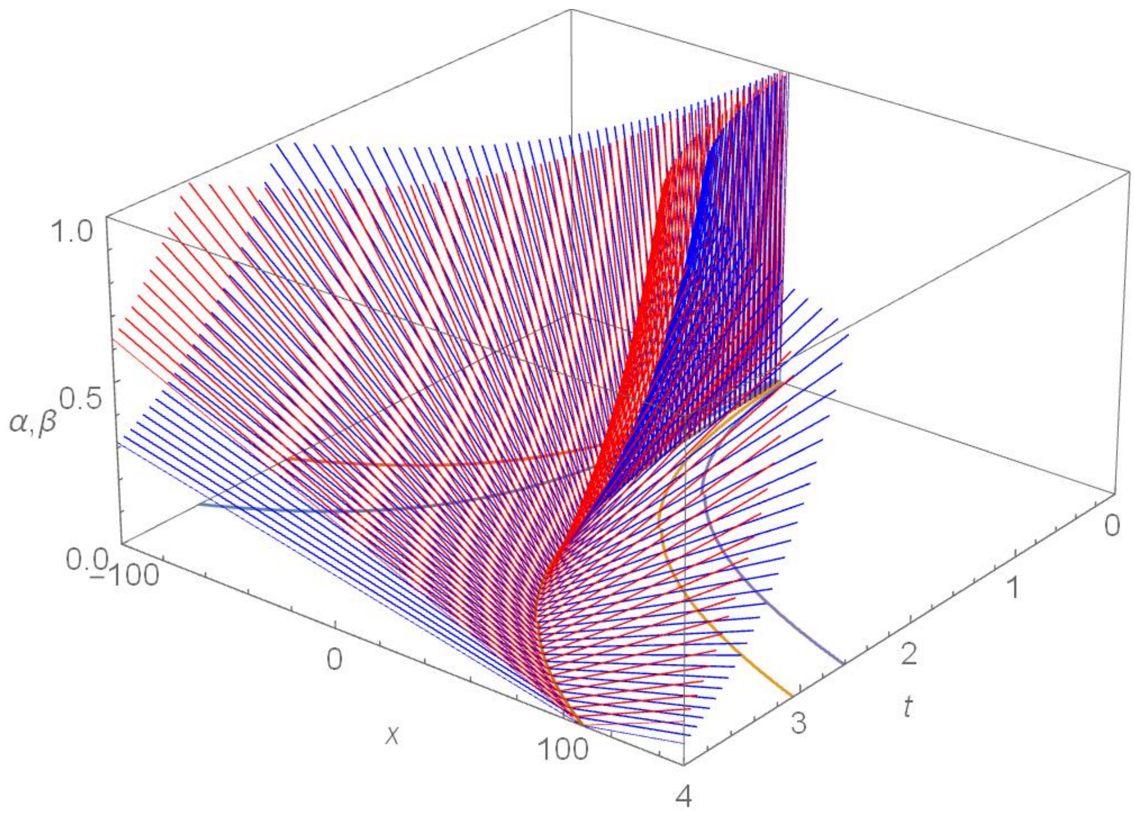
Şekil 6.15: (ii)-GH çözümünün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.16: Kesişen bölge (ii)-GH çözümünün (α, β)-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.17: (ii)-GH çözümünün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.18: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

iii)

$$\begin{aligned}
x_1'(t;\alpha) &= x_1(t;\alpha)+(\alpha-1)e^t+1+\alpha \\
x_2'(t;\alpha) &= x_2(t;\alpha)+(1-\alpha)e^t+3-\alpha \\
x_1(0;\alpha) &= \alpha-1 \\
x_2(0;\alpha) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^{*\prime}(t;\beta) &= x_1^*(t;\beta)-2\beta e^t+2-2\beta \\
x_1^{*\prime}(t;\beta) &= x_2^*(t;\beta)+2\beta e^t+2+2\beta \\
x_1^*(0;\beta) &= -2\beta \\
x_2^*(0;\beta) &= 2\beta
\end{aligned}$$

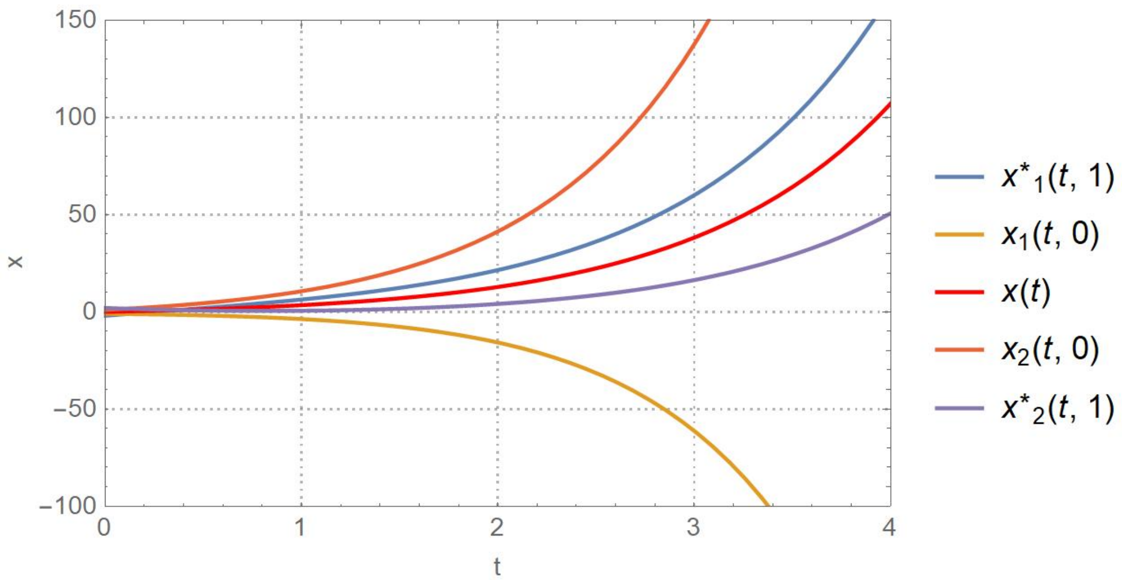
Bu denklem sistemine ait başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned}
x_1(t;\alpha) &= -1-\alpha+e^t(-t+2\alpha+t\alpha) \\
x_2(t;\alpha) &= -3+\alpha+e^t(4+t-2\alpha-t\alpha) \\
x_1(t;\beta) &= 2(\beta-1)-5e^{-t}\beta+e^t(2+\beta) \\
x_2(t;\beta) &= -e^{-t}(\beta-2)+5e^{-t}\beta-2(1+\beta)
\end{aligned}$$

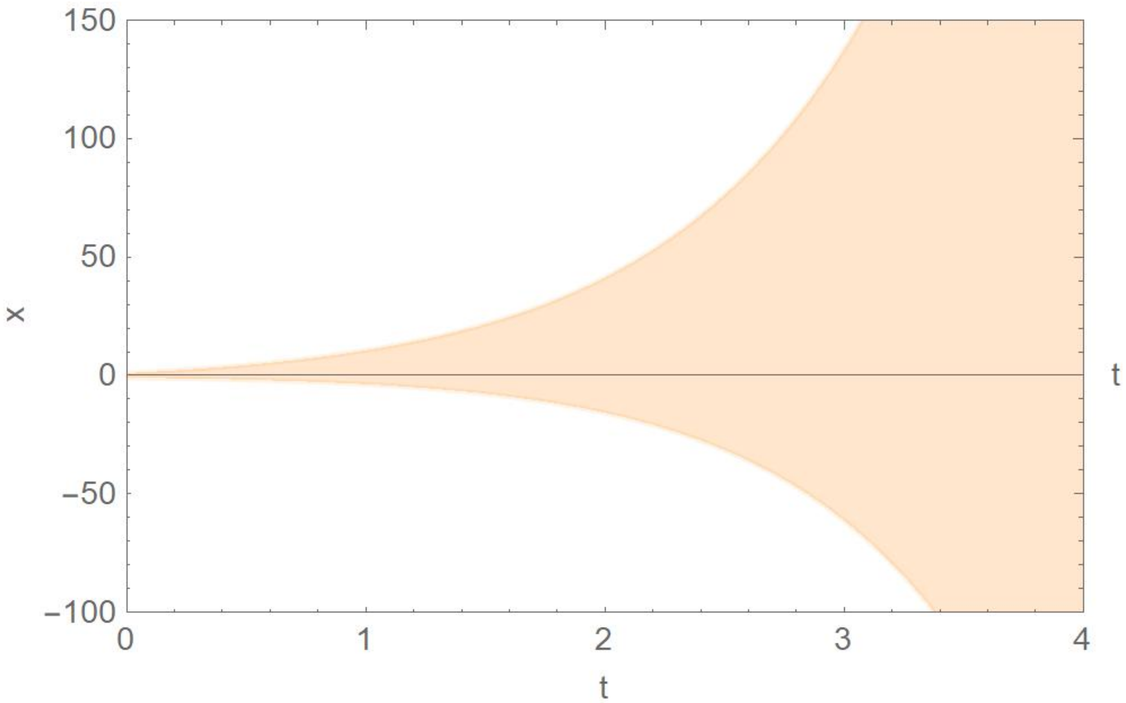
olarak elde edilir. Çözümün α, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.20-Şekil 6.22'de gösterilmiştir. Özel olarak $\alpha = 0$, $\beta = 1$ kesitleri için

$$\begin{aligned} x_1(t;0) &= -1 - te^t \\ x_2(t;0) &= -3 + e^{-t}(t+4) \\ x_1^*(t;1) &= -5e^{-t} + 3e^t \\ x_2^*(t;1) &= -4 + 5e^{-t} + e^t \end{aligned}$$

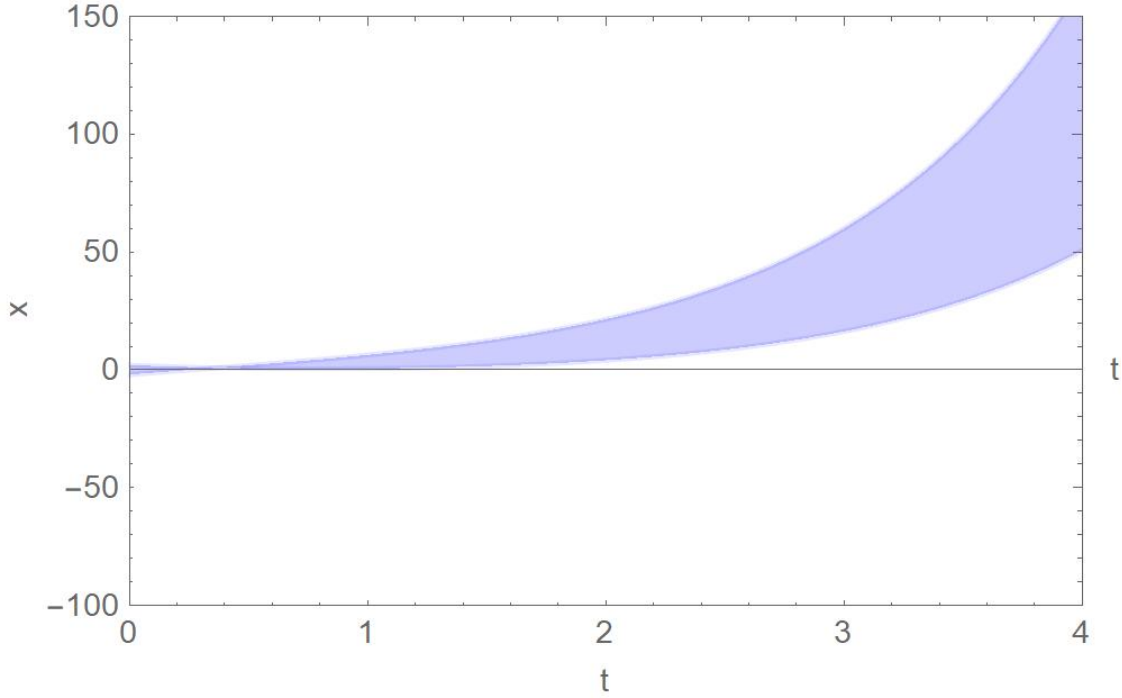
olarak elde edilir (Şekil 6.19). Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.23'te gösterilmiştir.



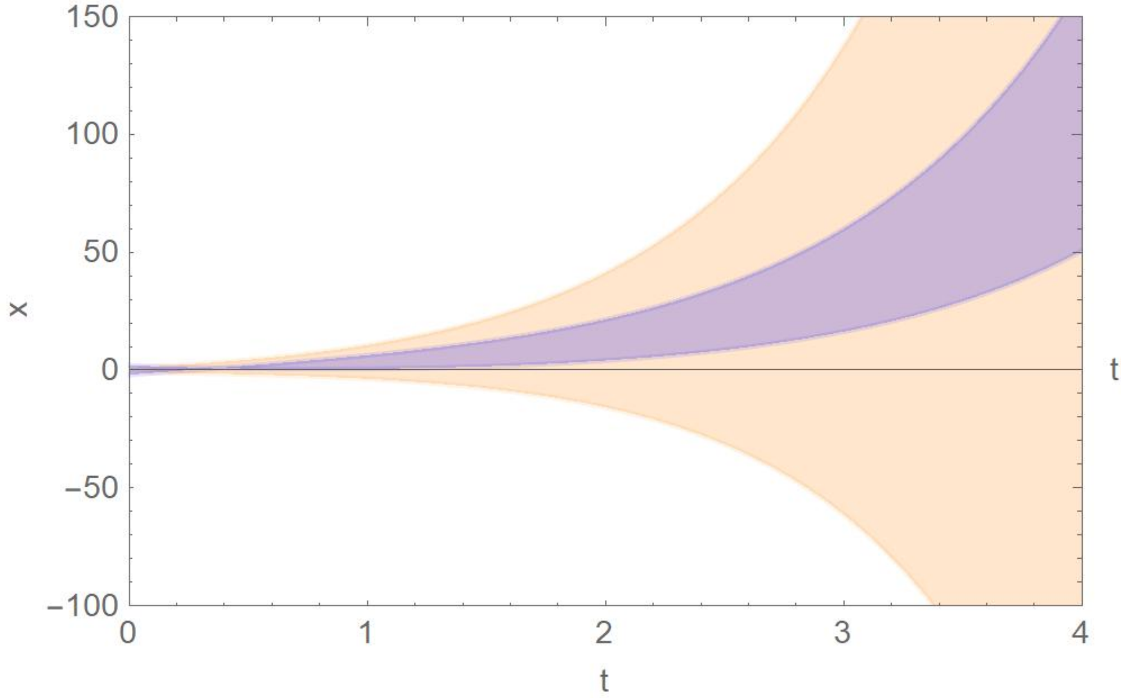
Şekil 6.19: (iii) sistemi için $x_1(t;0)$, $x_2(t;0)$, $x_1^*(t;1)$ ve $x_2^*(t;1)$ fonksiyonları.



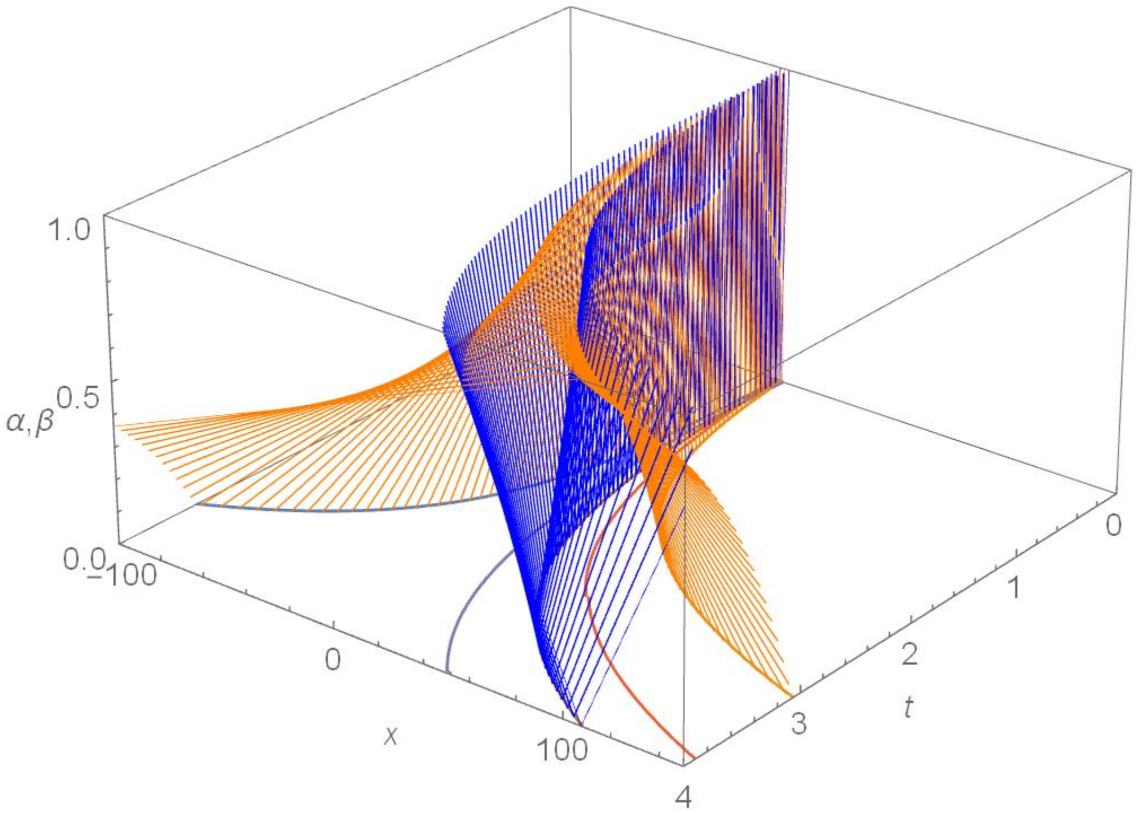
Şekil 6.20: (iii)-GH çözümünün α-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



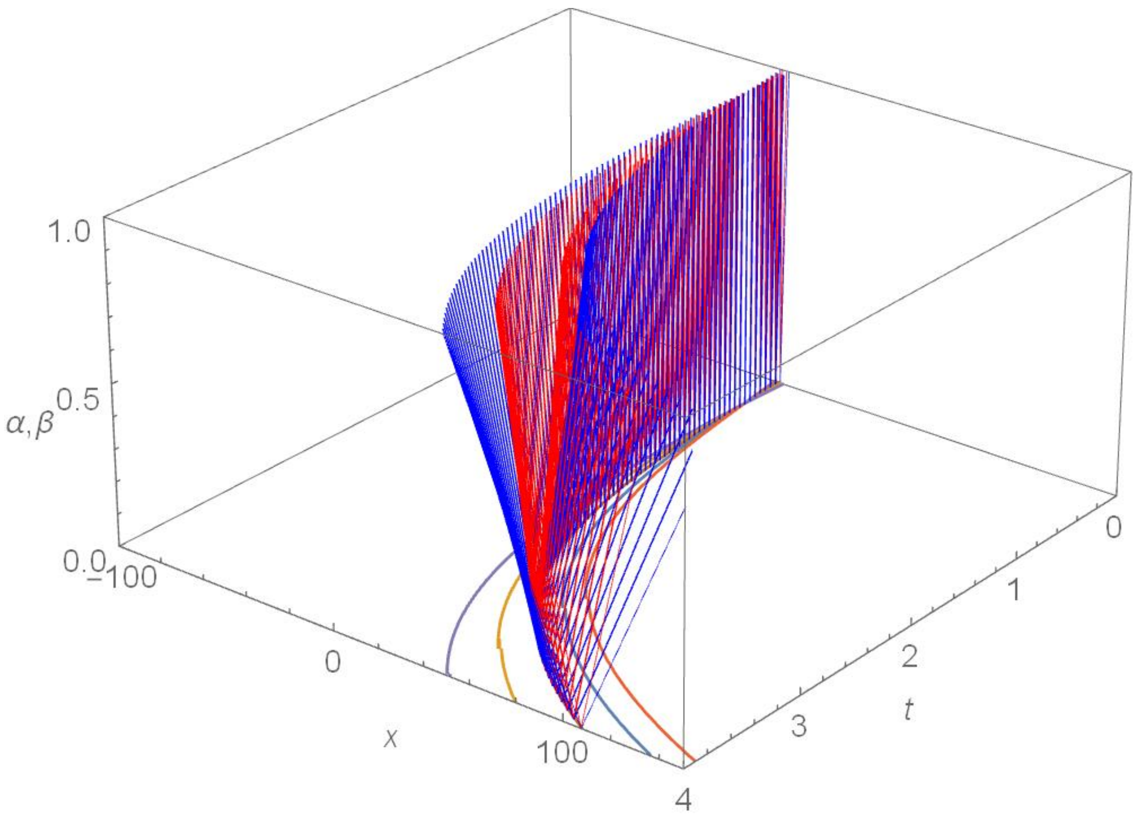
Şekil 6.21: (iii)-GH çözümünün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.22: Kesişen bölge (iii)-GH çözümünün (α, β)-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.23: (iii)-GH çözümünün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.24: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

iv)

$$\begin{aligned}
x_2'(t;\alpha) &= x_1(\alpha)+(\alpha-1)e^t+1+\alpha\\
x_1'(t;\alpha) &= x_2(\alpha)+(1-\alpha)e^t+3-\alpha\\
x_1(0;\alpha) &= \alpha-1\\
x_2(0;\alpha) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^{*\prime}(t;\beta) &= x_1^*(\beta)-2\beta e^t+2-2\beta\\
x_1^{*\prime}(t;\beta) &= x_2^*(\beta)+2\beta e^t+2+2\beta\\
x_1^*(0;\beta) &= -2\beta\\
x_2^*(0;\beta) &= 2\beta
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemine ait başlangıç değer probleminin çözümü

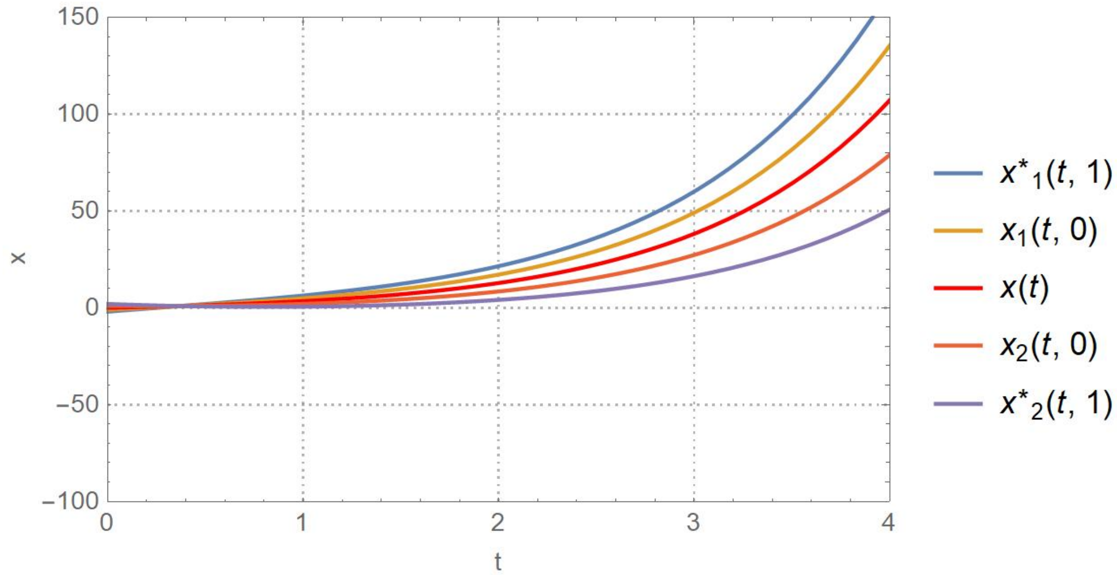
$$\begin{aligned}
x_1(t;\alpha) &= -\alpha-\frac{1}{2}(\alpha-5)e^t+\frac{5}{2}(\alpha-1)e^{-t}-1\\
x_2(t;\alpha) &= \frac{1}{2}e^{-t}\left(-5\alpha+2(\alpha-3)e^t+(\alpha+3)e^{2t}+5\right)\\
x_1(t;\beta) &= 2(\beta-1)-5e^{-t}\beta+e^t(2+\beta)\\
x_2(t;\beta) &= -e^{-t}(\beta-2)+5e^{-t}\beta-2(1+\beta)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

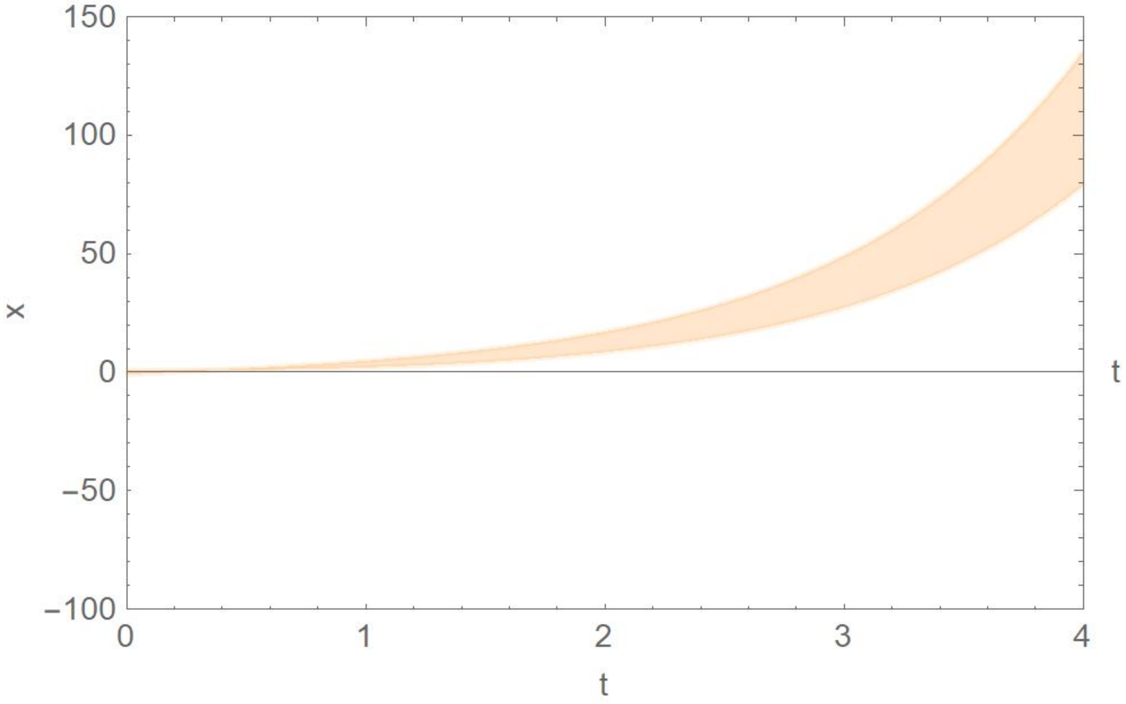
Çözümün α, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.26-Şekil 6.28'de gösterilmiştir. Özel olarak $\alpha=0$, $\beta=1$ kesitleri için

$$\begin{aligned}
x_1(t;0) &= -e^t(t-2)-2e^{-t}-1\\
x_2(t;0) &= -e^t(t-2)+2e^{-t}-3\\
x_1^*(t;1) &= -5e^{-t}+3e^t\\
x_2^*(t;1) &= -4+5e^{-t}+e^t
\end{aligned}$$

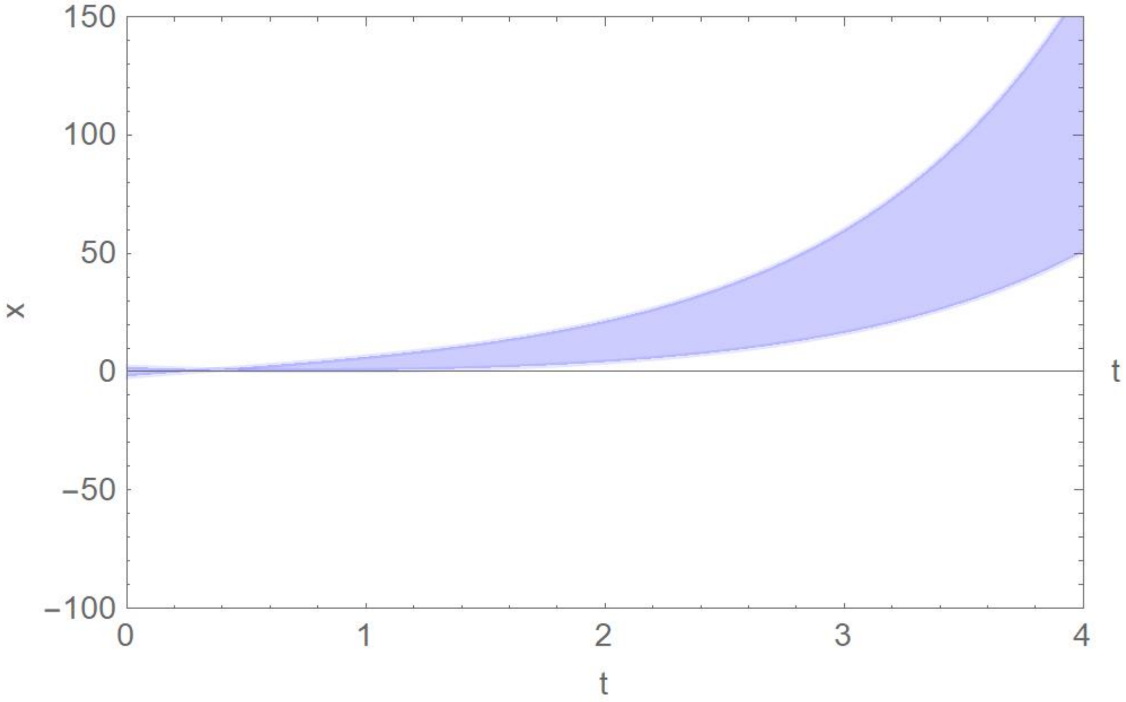
olarak elde edilir (Şekil 6.25). Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.29'da gösterilmiştir.



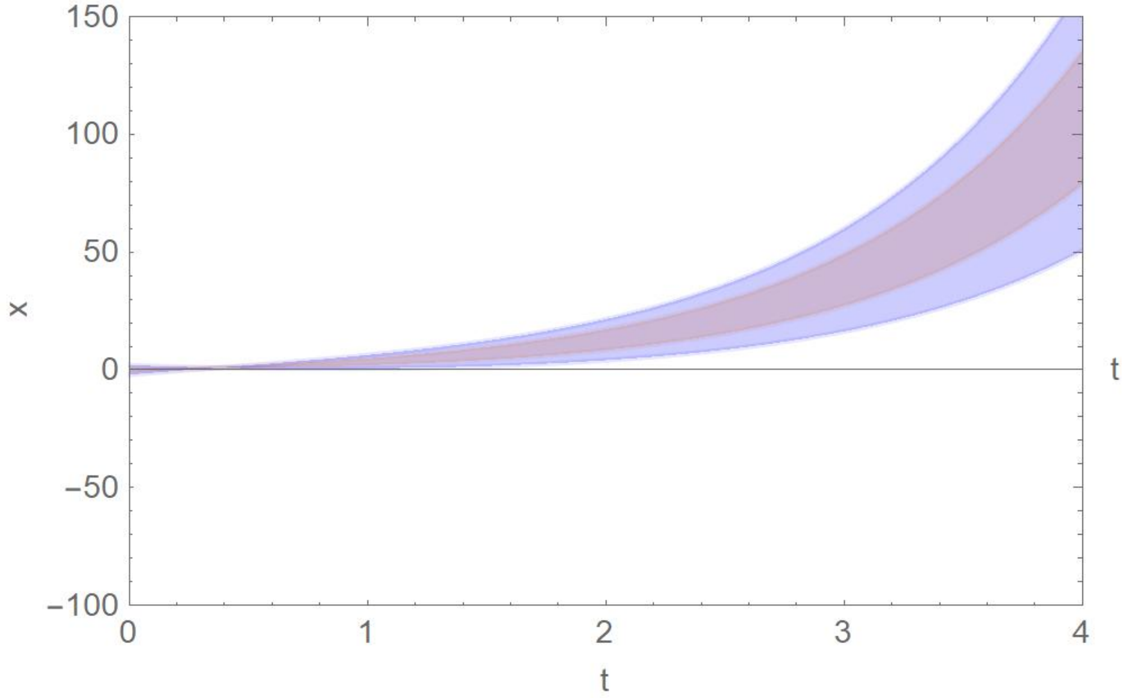
Şekil 6.25: (iv) sistemi için $x_1(t;0)$, $x_2(t;0)$, $x_1^*(t;1)$ ve $x_2^*(t;1)$ fonksiyonları.



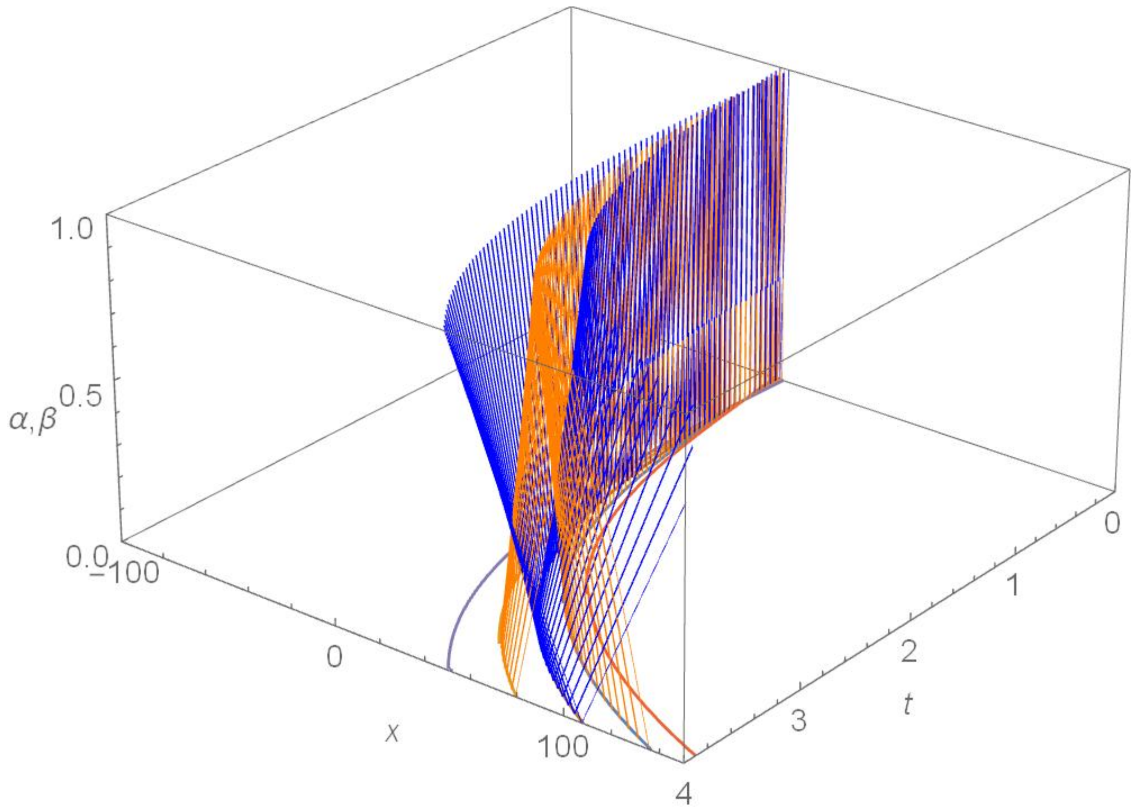
Şekil 6.26: (iv)-GH çözümünün α-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



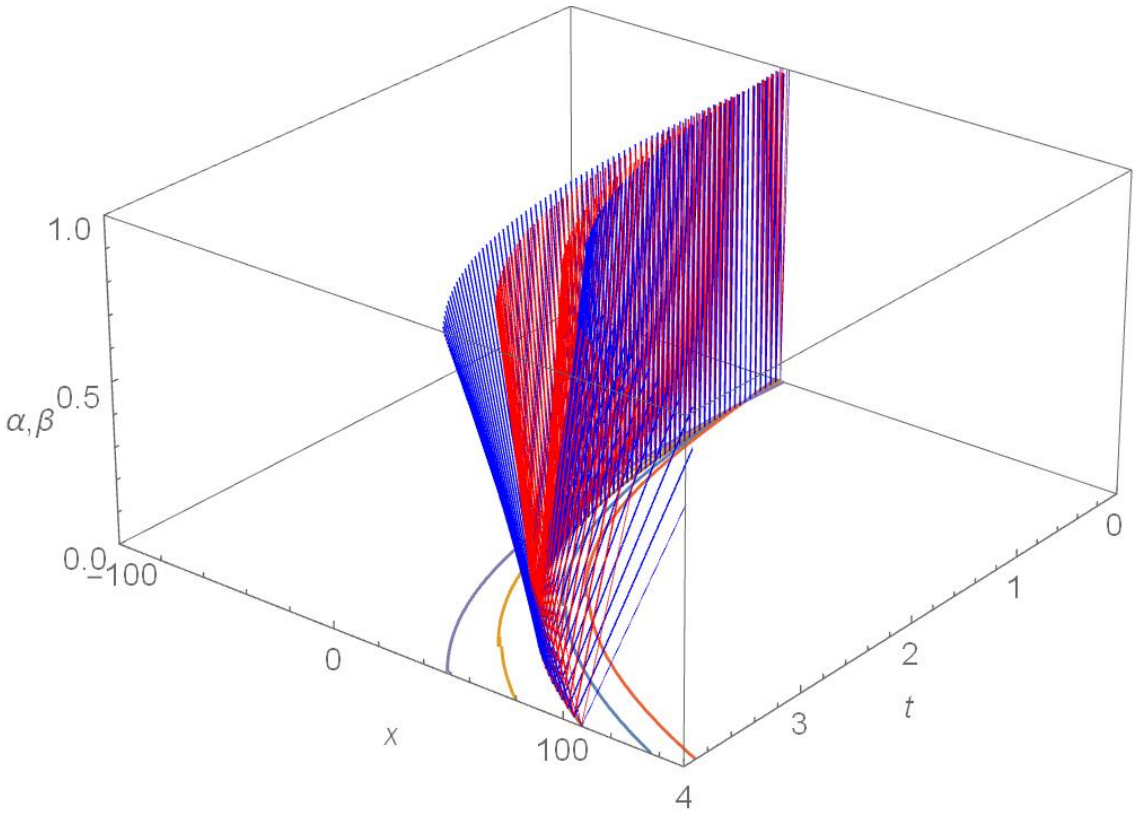
Şekil 6.27: (iv)-GH çözümünün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.28: Kesişen bölge (iv)-GH çözümünün (α, β)-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.29: (iv)-GH çözümünün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.30: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

Not. *Dereceli kümelerde üye olma ve üye olmama fonksiyonları toplamı*

$$\mu + \nu = 1$$

olduğundan, $1-\mu$ *dereceli kümedeki bir elemanın üye olmama fonksiyonudur. Bu örnekteki her bir durumu dereceli kümeler için çözersek sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonu ile dereceli çözümün üye olmama fonksiyonları Şekil 6.12-Şekil 6.30'daki gibi elde edilmiştir.*

6.3 Zadeh'in Genişleme İlkesi ile Sezgisel Dereceli Başlangıç Değer Problemleri

Bu kesimde

$$\begin{aligned} y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) &= \sum_{j=1}^{r} \tilde{b}^i_j g_j(x) \\ y(0) &= \tilde{\gamma}^i_1 \\ y'(0) &= \tilde{\gamma}^i_2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

ile verilen ikinci mertebeden sezgisel dereceli başlangıç değer probleminin çözümünü sezgisel Zadeh genişleme ilkesi ile araştıracağız.

Burada a_1 ve a_2 reel sayılar ve g_j $(j = 1,2,...,r)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. $\tilde{\gamma}_1^i$, $\tilde{\gamma}_2^i$ ve $\tilde{b}_j^i$ $(j : 1,2,...,r)$ sezgisel dereceli sayılardır. Öncelikle sezgisel dereceli kümeler için tanımlanmış olan Zadeh'in genişleme ilkesini, daha sonra bu kesimin temel teoremini verelim.

Tanım 6.3.1. *[15, 54] X ve Y kümeleri verilmiş olsun. $\tilde{A}^i$ kümesi X de sezgisel dereceli bir küme olmak üzere $f : \tilde{A}^i \to Y$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda Y kümesinde her $y \in f(\tilde{A}^i)$ için üye olma ve üye olmama fonksiyonları*

$$\mu_{f(\tilde{A}^i)}(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(x) : y = f(x)\}; & y \in f(X) \\ 0; & y \notin f(X) \end{cases}$$

ve

$$\nu_{f(\tilde{A}^i)}(y) = \begin{cases} \inf\{\nu_A(x) : y = f(x)\}; & y \in f(X) \\ 1; & y \notin f(X) \end{cases}$$

dır.

Tanım 6.3.2. *[1] $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi verilmiş olsun.*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\theta : A \subseteq \mathbb{R} \to \{0,1\}$ fonksiyonunu Heaviside (basamak) fonksiyonu denir.

Teorem 6.3.1. *$\tilde{Y}^i(x)$ sezgisel dereceli fonksiyonu (6.8) ile verilen sezgisel başlangıç değer probeminin çözümü Zadeh'in genişleme ilkesi ile elde edilmiş olsun. $\tilde{Y}^i(x)$ fonksiyonunun ve $\tilde{b}_j^i$ $(j : 1,2,...,r)$, $\tilde{\gamma}_k^i$ $(k : 1,2)$ sezgisel dereceli sayılarının α ve β kesitleri sırasıyla $[Y_1(x;\alpha), Y_2(x;\alpha)]$, $[Y_1^*(x;\beta), Y_2^*(x;\beta)]$; $[b_{j1}(\alpha), b_{j2}(\alpha)]$,*

$[b_{j1}^*(\beta), b_{j2}^*(\beta)]$ ve $[\gamma_{k1}(\alpha), \gamma_{k2}(\alpha)]$, $[\gamma_{k1}^*(\beta), \gamma_{k2}^*(\beta)]$ ile gösterilsin. Bu durumda $\tilde{Y}^i(x)$ sezgisel dereceli çözümün α ve β kesitleri, A_k ve B_j reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}
Y_1(x,\alpha) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k2}(\alpha) - (\gamma_{k2}(\alpha) - \gamma_{k1}(\alpha))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}[b_{j2}(\alpha) - (b_{j2}(\alpha) - b_{j1}(\alpha))\theta(B_j(x))]B_j(x) \\
Y_2(x,\alpha) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}(\alpha) + (\gamma_{k2}(\alpha) - \gamma_{k1}(\alpha))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}[b_{j1}(\alpha) + (b_{j2}(\alpha) - b_{j1}(\alpha))\theta(B_j(x))]B_j(x) \\
Y_1^*(x,\beta) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k2}^*(\beta) - (\gamma_{k2}^*(\beta) - \gamma_{k1}^*(\beta))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}[b_{j2}^*(\beta) - (b_{j2}^*(\beta) - b_{j1}^*(\beta))\theta(B_j(x))]B_j(x) \\
Y_2^*(x,\beta) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}^*(\beta) + (\gamma_{k2}^*(\beta) - \gamma_{k1}^*(\beta))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}[b_{j1}^*(\beta) + (b_{j2}^*(\beta) - b_{j1}^*(\beta))\theta(B_j(x))]B_j(x)
\end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla elde edilir.

İspat. y_1 ve y_2 fonksiyonları

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=0$$

homogen diferensiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri olsun ve G_j $(j:1,...,r)$ fonksiyonları ise

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=g_j(x);(j=1,...,r).$$

diferensiyel denklemine karşılık gelen özel çözümler olsun. Bu durumda c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=\sum_{j=1}^{r}b_jg_j(x)$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$Y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\sum_{j=1}^{r}b_jG_j(x) \tag{6.9}$$

şeklinde yazılabilir. Verilen başlangıç değerleri (6.9) denkleminde yerine yazarsak

$$c_1y_1(0)+c_2y_2(0)+\sum_{j=1}^{r}b_jG_j(x) = \gamma_1 \tag{6.10}$$

$$c_1y_1'(0)+c_2y_2'(0)+\sum_{j=1}^{r}b_jG_j'(x) = \gamma_2 \tag{6.11}$$

denklem sistemi elde edilir. Şimdi gösterimde kolaylık olması açısından bu denklem sistemini matris gösterimiyle verelim:

$w_{11}=y_1(0)$, $w_{12}=y_2(0)$, $w_{21}=y_1'(0)$, $w_{22}=y_2'(0)$ olmak üzere

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix};$$

ve

$$\mathbf{G}_j=\begin{bmatrix} G_j(0) \\ G_j'(0) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix};$$

$$\gamma=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda (6.10) denklemi

$$\mathbf{Wc}=\gamma-\sum_{j=1}^{r}b_j\mathbf{G}_j$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi Cramer kuralı yardımıyla c_1 ve c_2 sabitlerini bulalım.

Aşağıdaki determinantlar yardımıyla

$$
\begin{aligned}
|W| &= \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}; \\
|W_{11}| &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & w_{12} \\ \gamma_2 & w_{22} \end{vmatrix} = \gamma_1 w_{22} - \gamma_1 w_{12}; \\
|W_{12}| &= \begin{vmatrix} w_{11} & \gamma_1 \\ w_{21} & \gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 w_{11} - \gamma_2 w_{21}; \\
|W_{21}| &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{r} b_j G_j(0) & w_{12} \\ \sum_{j=1}^{r} b_j G_j'(0) & w_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j(0)w_{22} - G_j'(0)w_{12}); \\
|W_{22}| &= \begin{vmatrix} w_{11} & \sum_{j=1}^{r} b_j G_j(0) \\ w_{21} & \sum_{j=1}^{r} b_j G_j'(0) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j'(0)w_{11} - G_j(0)w_{21});
\end{aligned}
$$

Cramer kuralıdan

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{|W_{11}| - |W_{21}|}{|W|} \\
&= \frac{\gamma_1 w_{22} - \gamma_2 w_{12} - \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j(0)w_{22} - G_j'(0)w_{12})}{|W|}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{|W_{12}| - |W_{22}|}{|W|} \\
&= \frac{\gamma_2 w_{11} - \gamma_1 w_{21} - \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j'(0)w_{11} - G_j(0)w_{21})}{|W|}.
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Gösterimde sadelik olması açısından $f_{kj} = \frac{w_{kj}}{|W|}$ yazarsak

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \gamma_1 f_{22} - \gamma_2 f_{12} + \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j'(0) f_{12} - G_j(0) f_{22}) \\
c_2 &= \gamma_2 f_{11} - \gamma_1 f_{21} + \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j(0) f_{21} - G_j'(0) f_{11})
\end{aligned}
$$

elde edilir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerini genel çözümde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
Y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \sum_{j=1}^{r} b_j G_j(x); \\
&= (\gamma_1 f_{22} - \gamma_2 f_{12} + \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j'(0) f_{12} - G_j(0) f_{22})) y_1(x) \\
&\quad + (\gamma_2 f_{11} - \gamma_1 f_{21} + \sum_{j=1}^{r} b_j (G_j(0) f_{21} - G_j'(0) f_{11})) y_2(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} b_j G_j(x).
\end{aligned}
$$

veya

$$\begin{aligned} Y(x) &= \gamma_1(f_{22}y_1(x)-f_{21}y_2(x))+\gamma_2(f_{11}y_2(x)-f_{12}y_1(x)) \\ &+\sum_{j=1}^{r} b_j(G_j(x)+y_1(x)(G_j'(0)f_{12}-G_j(0)f_{22}) \\ &+y_2(x)(G_j(0)f_{21}-G_j'(0)f_{11})) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} A_0(x) &= f_{22}y_1(x)-f_{21}y_2(x) && (6.12) \\ A_1(x) &= f_{11}y_2(x)-f_{12}y_1(x) && (6.13) \\ B_j(x) &= G_j(x)+y_1(x)(G_j'(0)f_{12}-G_j(0)f_{22}) && (6.14) \\ &+ y_2(x)(G_j(0)f_{21}-G_j'(0)f_{11}) \end{aligned}$$

yazarsak (6.8) başlangıç değer probleminin çözümü

$$Y(x)=\gamma_1 A_1(x)+\gamma_2 A_2(x)+\sum_{j=1}^{r} b_j B_j(x)$$

olarak yazılabilir. Sezgisel kümeler için Zadeh'in genişleme ilkesi yardımıyla sezgisel dereceli başlangıç değer probleminin çözümü

$$\tilde{Y}^i(x)=\tilde{\gamma}_1^i A_1(x)+\tilde{\gamma}_2^i A_2(x)+\sum_{j=1}^{r} \tilde{b}_j^i B_j(x)$$

olarak elde edilir. Bu durumda çözümün α ve β kesitleri

$$\begin{aligned} [Y_1(x;\alpha),Y_2(x;\alpha)] &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}(\alpha),\gamma_{k2}(\alpha)]A_k(x) \\ &+\sum_{j=1}^{r}[b_{j1}(\alpha),b_{j2}(\alpha)]B_j(x) \\ Y_1^*(x;\beta),Y_2^*(x;\beta)] &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}^*(\beta),\gamma_{k2}^*(\beta)]A_k(x) \\ &+\sum_{j=1}^{r}[b_{j1}^*(\beta),b_{j2}^*(\beta)]B_j(x) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Heaviside fonksiyonu yardımıyla çözümün α ve β kesitlerinin sınırları

$$\begin{aligned} Y_1(x;\alpha) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k2}(\alpha)-(\gamma_{k2}(\alpha)-\gamma_{k1}(\alpha))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\ &+\sum_{j=1}^{r}[b_{j2}(\alpha)-(b_{j2}(\alpha)-b_{j1}(\alpha))\theta(B_j(x))]B_j(x) && (6.15) \\ Y_2(x;\alpha) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}(\alpha)+(\gamma_{k2}(\alpha)-\gamma_{k1}(\alpha))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\ &+\sum_{j=1}^{r}[b_{j1}(\alpha)+(b_{j2}(\alpha)-b_{j1}(\alpha))\theta(B_j(x))]B_j(x) && (6.16) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_1^*(x;\beta) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k2}^*(\beta)-(\gamma_{k2}^*(\beta)-\gamma_{k1}^*(\beta))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&+\sum_{j=1}^{r}[b_{j2}^*(\beta)-(b_{j2}^*(\beta)-b_{j1}^*(\beta))\theta(B_j(x))]B_j(x) \qquad (6.17)\\
Y_2^*(x;\beta) &= \sum_{k=1}^{2}[\gamma_{k1}^*(\beta)+(\gamma_{k2}^*(\beta)-\gamma_{k1}^*(\beta))\theta(A_k(x))]A_k(x) \\
&+\sum_{j=1}^{r}[b_{j1}^*(\beta)+(b_{j2}^*(\beta)-b_{j1}^*(\beta))\theta(B_j(x))]B_j(x) \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

□

Örnek 6.3.1. Zorlayıcı fonksiyon katsayıları $\tilde{b}_1^i=(-3,-2,-1;-4,-2,0)$, $\tilde{b}_2^i=(-6,-5,-4;-7,-5,-3)$ ve başlangıç değerleri $\tilde{\gamma}_1^i=(0,1,2;-1,1,3)$, $\tilde{\gamma}_2^i=(0,1,2;-1,1,3)$ şeklinde üçgen sezgisel sayılarla verilen aşağıdaki sezgisel başlangıç değer probleminin çözümünü Teorem 6.3.1'deki algoritma ile bulalım.

$$
\begin{aligned}
y''+4y'+3y &= \tilde{b}_1e^{-x}+\tilde{b}_2\sin x;\\
\tilde{\gamma}_1^i &= (0,1,2;-1,1,3)\\
\tilde{\gamma}_2^i &= (0,1,2;-1,1,3)
\end{aligned}
$$

Öncelikle bu denkleme karşılık gelen alışılmış başlangıç değer probleminin çözümünü yazalım:

$$
\begin{aligned}
y''+4y'+3y &= -2e^{-x}-5\sin x;\\
y(0) &= 1\\
y\prime(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Başlangıç değer problemindeki diferensiyel denklemin genel çözümü

$$
Y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}(1-2x)+\cos x-\frac{1}{2}\sin x
$$

olarak yazılabilir. Buradan

$g_1(x)=e^{-x}$ için

$$
G_1(x)=\frac{1}{-2}(\frac{1}{2}e^{-x}(1-2x));
$$

$g_2(x)=\sin x$ için

$$
G_2(x)=\frac{1}{-5}(\cos x-\frac{1}{2}\sin x).
$$

elde edilir. Denklem(6.12-6.14) dan

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= -e^{-3x}+3e^{-x}\\
A_2(x) &= -e^{-3x}+e^{-x}\\
B_1(x) &= \frac{e^{-3x}}{2}-\frac{1}{4}e^{-x}(1-2x)\\
B_2(x) &= \frac{-1}{10}e^{-3x}+\frac{e^{-x}}{2}+\frac{1}{5}(-\cos x+\frac{\sin x}{2})
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu durumda denklem (6.15)-(6.18) yardımıyla verilen dereceli başlangıç değer probleminin çözümlerinin α ve β kesitlerinin uç noktaları

$$\begin{aligned}
Y_1(x,\alpha) &= [2-2\alpha-(2-2\alpha)\theta(A_1(x)]A_1(x)+\\
&\quad [2-\alpha-(2-2\alpha)\theta(A_2(x))]A_2(x)+\\
&\quad [-1-\alpha-(2-2\alpha)\theta(B_1(x))]B_1(x)+\\
&\quad [-4-\alpha-(2-2\alpha)\theta(B_2(x))]B_2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(x,\alpha) &= [\alpha+(2-2\alpha)\theta(A_1(x)]A_1(x)+\\
&\quad [\alpha+(2-2\alpha)\theta(A_2(x))]A_2(x)+\\
&\quad [-3+\alpha+(2-2\alpha)\theta(B_1(x))]B_1(x)+\\
&\quad [-6+\alpha+(2-2\alpha)\theta(B_2(x))]B_2(x)
\end{aligned}$$

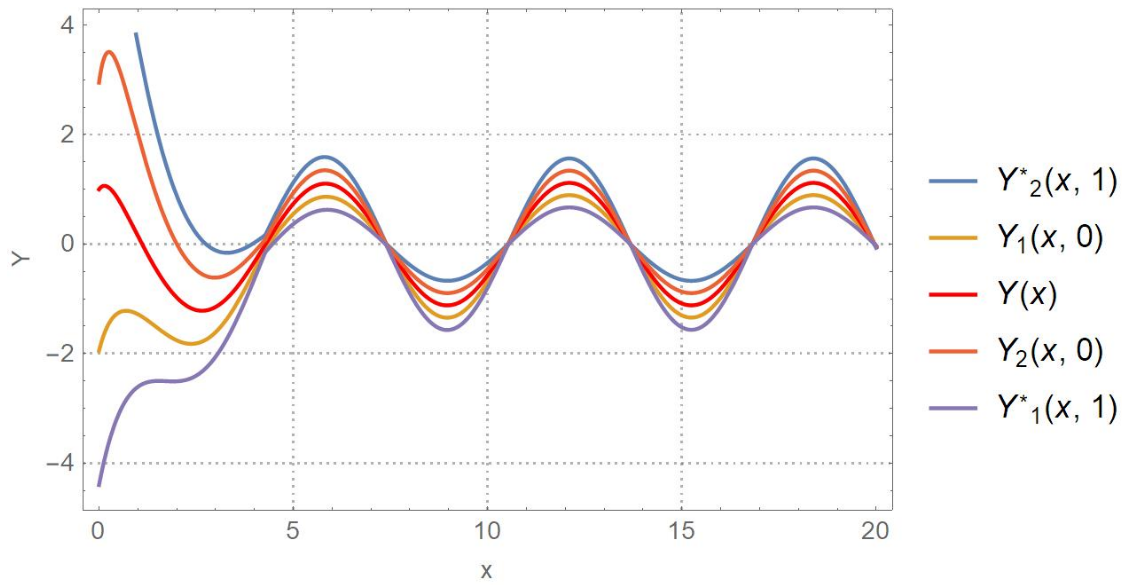
$$\begin{aligned}
Y_1^*(x,\beta) &= [1+2\beta-3\beta\theta(A_1(x)]A_1(x)+\\
&\quad [1+2\beta-4\beta\theta(A_2(x))]A_2(x)+\\
&\quad [-2+2\beta-4\beta\theta(B_1(x))]B_1(x)+\\
&\quad [-5+2\beta-4\beta\theta(B_2(x))]B_2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2^*(x,\beta) &= [1-2\beta+4\beta\theta(A_1(x)]A_1(x)+\\
&\quad [1-2\beta+4\beta)\theta(A_2(x))]A_2(x)+\\
&\quad [-2-2\beta+4\beta\theta(B_1(x))]B_1(x)+\\
&\quad [-5-2\beta+4\beta\theta(B_2(x))]B_2(x)
\end{aligned}$$

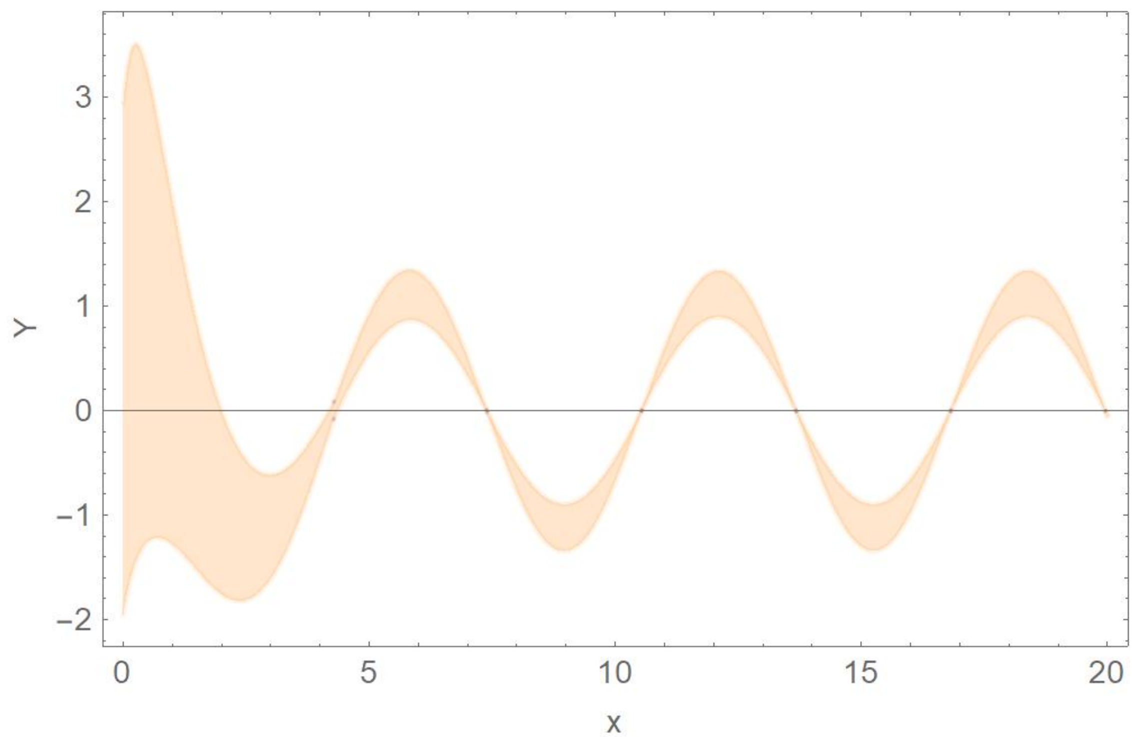
Çözümün α, β ve (α,β) kesitleri Şekil 6.32-Şekil 6.34'de gösterilmiştir.Ve sezgisel dereceli diferelnsiyel denkleminin çözümünün α ve β kesitlerinin uç noktaları

$$\begin{aligned}
Y_1(x,0) &= [2-2\theta(A_1(x)]A_1(x)+[2-2\theta(A_2(x))]A_2(x)\\
&\quad +[-1-2\theta(B_1(x))]B_1(x)+[-4-2\theta(B_2(x))]B_2(x)\\
Y_2(x,0) &= [2\theta(A_1(x)]A_1(x)+[2\theta(A_2(x))]A_2(x)+[-3+2\theta(B_1(x))]B_1(x)+\\
&\quad [-6+2\theta(B_2(x))]B_2(x)\\
Y_1(x,1) &= \cos x+\frac{1}{4}(e^{-3x}(-5+e^{2x}(5-4x))-2\sin x)\\
Y_1^*(x,1) &= [-1+4\beta\theta(A_1(x)]A_1(x)+[-1+4\theta(A_2(x))]A_2(x)\\
&\quad +[-4+4\theta(B_1(x))]B_1(x)\\
&\quad +[-7+4\theta(B_2(x))]B_2(x)\\
Y_2^*(x,1) &= [3+5\theta(A_1(x)]A_1(x)+[-1+4)\theta(A_2(x))]A_2(x)+\\
&\quad [2+4\theta(B_1(x))]B_1(x)\\
&\quad +[18+4\theta(B_2(x))]B_2(x)\\
Y_1^*(x,0) &= \cos x+\frac{1}{4}(e^{-3x}(-5+e^{2x}(5-4x))-2\sin x)(6.19)
\end{aligned}$$

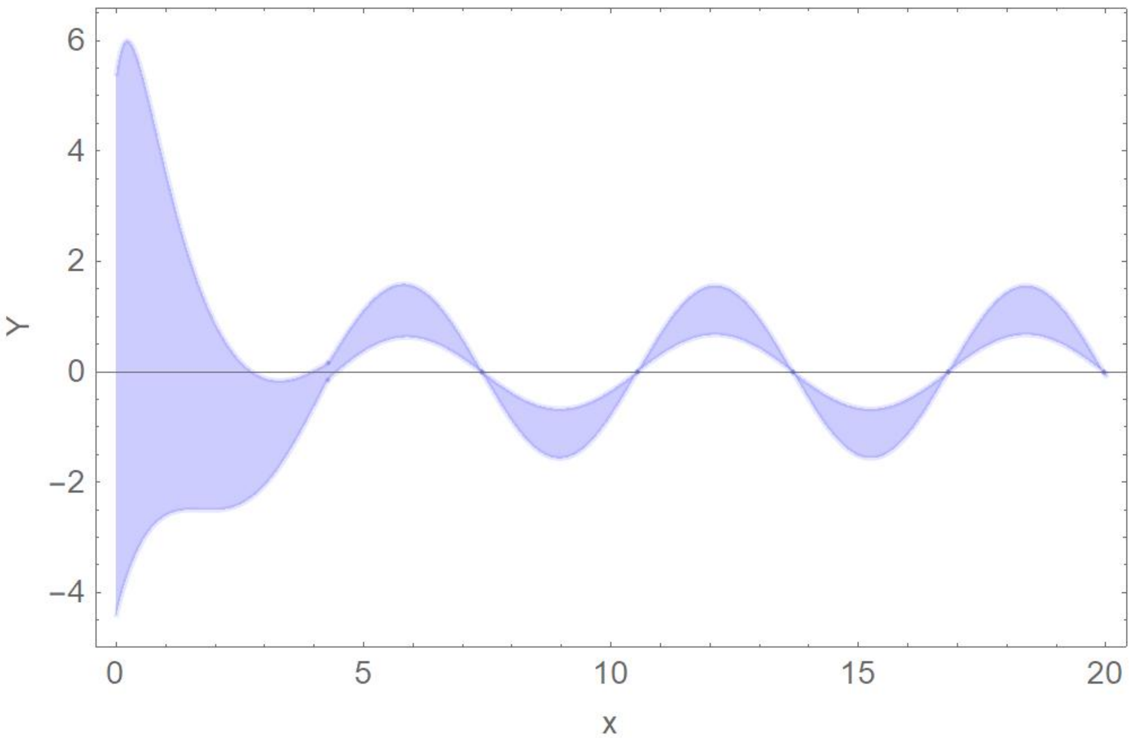
olarak bulunur (Şekil 6.31). Üye olma ve üye olmama fonksiyonları Şekil 6.35'te gösterilmiştir.



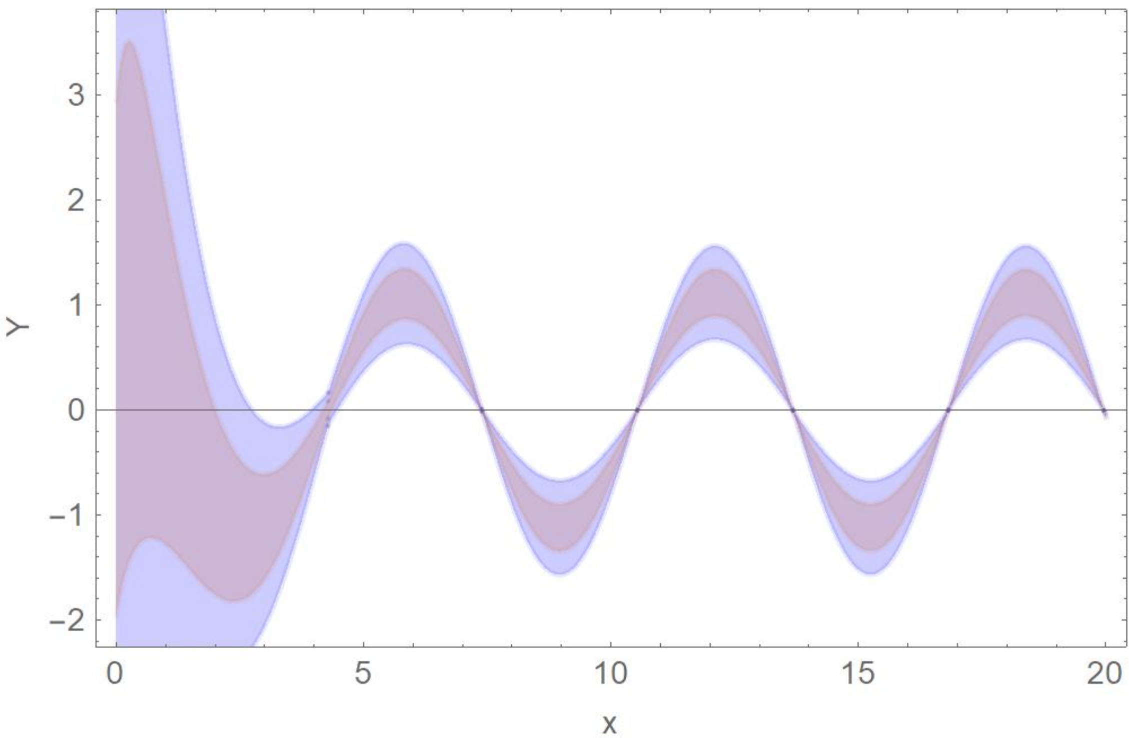
Şekil 6.31: $Y_1(x,0)$, $Y_2(x,0)$, $Y_1^*(x,1)$ ve $Y_2^*(x,1)$ fonksiyonları.



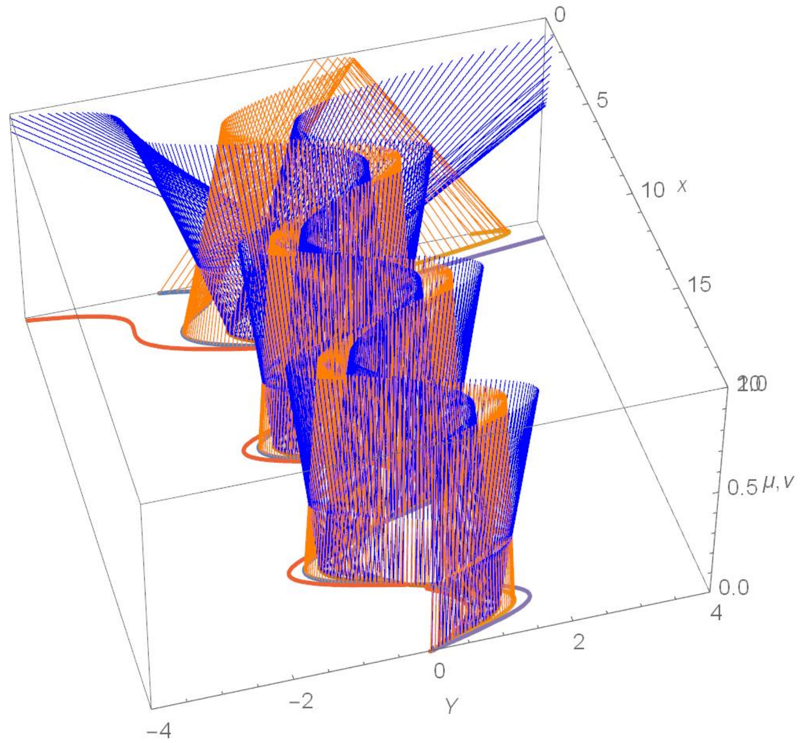
Şekil 6.32: Çözümün α-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



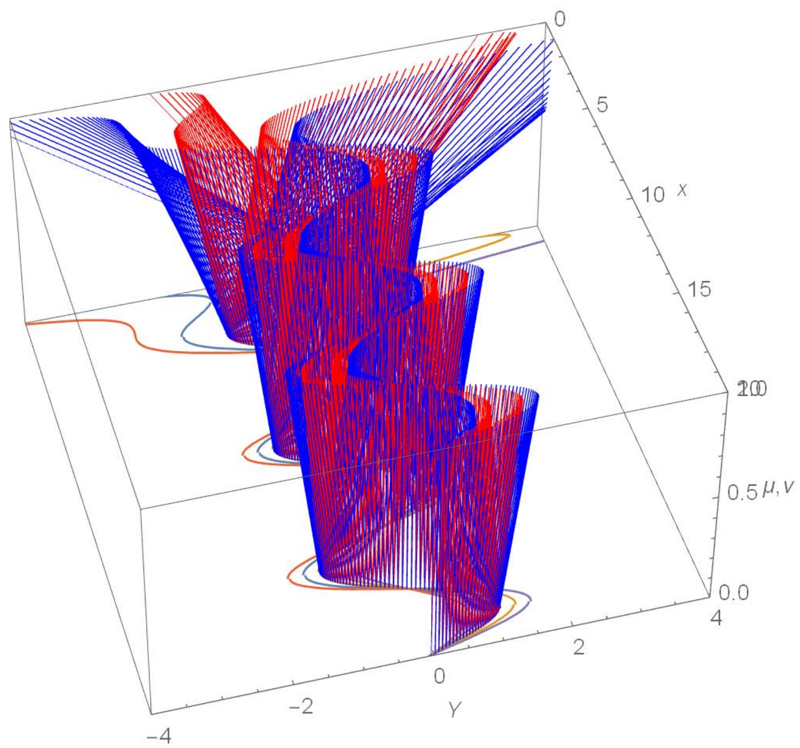
Şekil 6.33: Çözümün β-kesitlerinin oluşturduğu bölge.



Şekil 6.34: Kesişen bölge çözümün (α, β)-kesitlerinin oluşturduğu bölgedir.



Şekil 6.35: Çözümün μ üye olma ve ν üye olmama fonksiyonları.



Şekil 6.36: Mavi grafik, sezgisel dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur. Kırmızı grafik ise dereceli çözümün üye olmama fonksiyonudur.

Not: *Bu çalışmada, nümerik örneklerdeki tüm çözümler ve grafikler Wolfram Mathematica 11 programı kullanılarak elde edilmiştir.*

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmamızda öncelikle, dereceli kümeler teorisinde önemli bir yere sahip olan karakterizasyon teoremlerini, $\mathbb{R}^n$ deki sezgisel dereceli sayılara genişlettik. Bunun için $\mathbb{R}^n$ deki sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitlerinin Teorem 3.3.1'deki 1)-8) ifadelerini sağlayan kompakt ve konveks kümeler olduğunu ispatladık. Bu teorem yardımıyla $\mathbb{R}$ deki sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitlerinin uç noktalarının Teorem 3.3.2' deki 1)-6) ifadelerini sağladığını ispatladık. Teorem 3.3.3' te ise Teorem 3.3.1'deki 1)-8) ifadelerini sağlayan iki küme ailesinin sezgisel dereceli bir sayı tanımladığını gösterdik. Bu teoremden yararlanarak Teorem 3.3.1'deki 1)-8) ifadelerini sağlayan kapalı ve sınırlı aralıklar ailesinin $\mathbb{R}$ de sezgisel dereceli bir sayı tanımladığını gösterdik. Ardından sezgisel dereceli sayıların Minkowski toplamını ve skalerle çarpımını α ve β kesit kümeleri yardımıyla tanımladık ve $\mathbb{R}^n$ deki sezgisel dereceli sayılar kümesinin bu işlemler altında kapalı olduğunu ispatladık. Daha sonra bu sonuçlar yardımıyla Hukuhara ve genelleştirilmiş Hukuhara farklarının temel teoremlerini inceledik.

Kesim 3.5'te destek fonksiyonu yardımıyla sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitlerinin bazı temel teoremlerini verdikten sonra sezgisel dereceli sayıların gH-farkının mevcut olması için gerek ve yeter şartı verdik. Teorem 4.0.3'te sezgisel dereceli sayılar uzayının D_∞ metriğine göre tam olduğunu gösterdik. Bu teorem yardımıyla sürekli sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonlar uzayının D_S metriği altında tam olduğunu Teorem 5.0.1'de ispatladık.

Çalışmamızın 5. Bölümünde ise 3. ve 4. Bölümlerde elde ettiğimiz sonuçlardan yararlanarak sezgisel dereceli sayı değerli fonksiyonların H-türevi ve GH-türevilerini inceledik. Daha sonra kompakt ve konveks küme değerli fonksiyonlar için tanımlanan Aumann integrali yardımıyla, dereceli küme teorisindeki Aumann integrali özelliklerini; sezgisel dereceli sayıların α ve β kesitlerini göz önüne alarak sezgisel dereceli sayılara genişlettik. Bu bölümde son olarak analizin temel teoremleri yardımıyla H-türevlenebilme ile Aumann integrallenebilme arasındaki ilişkiyi verdik.

Çalışmamızın 6.1 ve 6.2 Kesimlerinde, önceki bölümlerde elde ettiğimiz sonuçlar yardımıyla birinci mertebeden sezgisel başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık-teklik teoremlerini H-türevlenebilme ve GH-türevlenebilme altında verdik ve bunları Banach sabit nokta teoremi yardımıyla ispatladık. Kesim 6.3' te ise başlangıç koşulları ve zorlayıcı fonksiyon katsayıları sezgisel dereceli sayılar olan ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerini sezgisel dereceli kümeler için verilen Zadeh'in genişleme ilkesi ve Heaviside fonksiyonu yardım ile ifade ettik ve bazı nümerik örnekler verdik.

KAYNAKLAR

[1] **Akın, Ö., Khaniyev, T., Bayeğ, S., Türkşen, B.,** (2016). Solving a second order fuzzy initial value problem using the Heaviside function, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 4, 16–25.

[2] **Akın, Ö., Khaniyev, T., Oruç, Ö., Türkşen, B.,** (2013). An algorithm for the solution of second order fuzzy initial value problems, *Expert Systems with Applications,* 40, 3, 953–957.

[3] **Akın, Ö., Oruç, Ö.,** (2012). A prey predator model with fuzzy initial values, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 41, 3, 387–395.

[4] **Amiryousefi, M. R., Mohebbi, M., Golmohammadzadeh, S., Koocheki, A., Baghbani, F.,** (2017). Fuzzy logic application to model caffeine release from hydrogel colloidosomes, *Journal of Food Engineering,* 212, 181–189.

[5] **Atanassov, K., Gargov, G.,** (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 31, 3, 343–349.

[6] **Atanassov, K., Georgiev, C.,** (1993). Intuitionistic fuzzy prolog, *Fuzzy Sets and Systems,* 53, 2, 121–128.

[7] **Atanassov, K. T.,** (1986). Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems,* 20, 1, 87–96.

[8] **Atanassov, K. T.,** (1989). More on intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems,* 33, 1, 37-45.

[9] **Atanassov, K. T.,** (1994). Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems,* 64, 2, 159–174.

[10] **Atanassov, K. T.,** (1995). Remarks on the intuitionistic fuzzy sets III, *Fuzzy Sets and Systems,* 75, 3, 401–402.

[11] **Atanassov, K. T.,** (1998). Remark on the intuitionistic fuzzy logics, *Fuzzy Sets and Systems, 95, 1, 127–129.*

[12] **Atanassov, K. T.,** (1999). Intuitionistic fuzzy sets theory and applications, *Springer.*

[13] **Atanassov, K. T.,** (2000). Two theorems for intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems,* 110, 2, 267–269.

[14] **Atanassov, K. T., Kacprzyk, J., S:, Zmidt, E., Todorova, L. P.,** (2003). On separability of intuitionistic fuzzy sets, *In International Fuzzy Systems Association World Congress,* Springer, 285-292.

[15] **Atanassov, L.,** (2007). On intuitionistic fuzzy versions of L. Zadeh's extension principle, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets,* 13, 3, 33–36.

[16] **Atanassova, L., Atanassov, K.,** (1984). An example for a genuine intuitionistic fuzzy set, *In proc. of the Third Int. Symp. Automation and Sci. Instr., Varna, Part II*, 58–60.

[17] **Aumann, R., J.,** (1965). Integrals of set-valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12, 1, 1–12.

[18] **Balci, M.,** (2012). Reel Analiz, *Sürat Üniversite Yayınları.*

[19] **Barros, L., Bassanezi, R., Tonelli, P.,** (2000). Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling,* 128, 1, 27–33.

[20] **Bayraktar, M.,** (2017). Fonksiyonel Analiz, *Korza Yayıncılık.*

[21] **Bayraktar, M.,** (2017). Analiz, *Korza Yayıncılık.*

[22] **Bede, B.,** (2008). Note on numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor–corrector method, *Information Sciences*, 178, 7, 1917–1922.

[23] **Bede, B.,** (2013). Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer.*

[24] **Bede, B., Gal, S. G.,** (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems,* 151, 3, 581–599.

[25] **Bede, B., Rudas, I. J., Fodor, J.,** (2007). Generalizations of the differentiability of fuzzy number-valued functions with applications to fuzzy different.equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 3, 581–599.

[26] **Bede, B., Stefanini, L., (**2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, *Fuzzy Sets and Systems,* 230, 119–141.

[27] **Bergmann, M., (**2008). An introduction to many-valued and fuzzy logic: Semantics, algebras, and derivation systems, *Cambridge University Press.*

[28] **Biswas, S., Banerjee, S., Roy, T. K., (**2016). Solving intuitionistic fuzzy differential equations with linear differential operator by adomian decomposition method, *Notes on Intuition. Fuzzy Sets,* 22, 4, 25–41.

[29] **Buche, P., Dibie-Barthélemy, J., Haemmerlé, O., Thomopoulos, R.,** (2006). Fuzzy concepts applied to the design of a database in predictive microbiology, *Fuzzy Sets and Systems,* 157, 9, 1188–1200.

[30] **Buckley, J., J., Feuring, T., Hayashi, Y.,** (2002). Linear systems of fist order ordinary differential equations: fuzzy initial conditions, *Soft Computing,* 6, 6, 415–421.

[31] **Casasnovas, J., Rosselló, F.,** (2005). Averaging fuzzy biopolymers. *Fuzzy Sets and Systems,* 152, 1, 139–158.

[32] **Celikyilmaz, A., Turksen, I. B.,** (2009). Modeling uncertainty with fuzzy logic. *Springer.*

[33] **Chang, S. S., Zadeh, L. A., (**1996). On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man. and Cybernetics SMC-2,* 1, 30–34.

[34] **De, S. K., Biswas, R., Roy, A. R., (**2001). An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis, *Fuzzy Sets and Systems,* 117, 2, 209–213.

[35] **Dengfeng, L., Chuntian, C., (**2002). New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions, *Pattern Recognition Letters,* 23, 1-3, 221–225.

[36] **Diamond, P., Kloeden, P.,** (1994). Metric spaces of fuzzy sets, *World Sci. Pub.*

[37] **El Naschie, M., (**2005). From experimental quantum optics to quantum gravity via a fuzzy kähler manifold. *Chaos, Solitons & Fractals*, 25, 5, 969–977.

[38] **Fard, O. S., (**2009). An iterative scheme for the solution of generalized system of linear fuzzy differential equations. *World Applied Sciences Journal, 7,* 12, 1597–1604.

[39] **Gasilov, N., Amrahov, ¸Ş. E., Fatullayev, A. G., (**2014). Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values. *Fuzzy Sets and Systems* 257, 16, 169–183.

[40] **Gasilov, N., Amrahov, Ş., E., Fatullayev, A. G.,** (2011). A geometric approach to solve fuzzy linear systems of differential equations, *Applied Mathematics and Information Sciences,* 5, 3, 484–499.

[41] **Goetschel Jr, R., Voxman, W., (**1986). Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems,* 18, 1, 31–43.

[42] **Goguen, J. A., (**1967). L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 18, 1, 145–174.

[43] **Gomes, L. T., De Barros, L. C., Bede, B., (**2015). Fuzzy differential equations in various approaches, *Springer.*

[44] **Hukuhara, M., (**1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, *Funkcialaj Ekvacioj,* 10, 3, 205–223.

[45] **Hüllermeier, E., (**1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems., *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 5, 2, 117–137.

[46] **Jafelice, R. M., De Barros, L. C., Bassanezi, R. C., Gomide, F., (**2004). Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population, *Bulletin of Mathematical Biology*, 66, 6, 1597–1620.

[47] **Kaleva, O., (**1997). Fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 24, 3, 301–317.

[48] **Kaleva, O.,** (2006). A note on fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 64, 5, 895–900.

[49] **Kharal, A.,** (2009). Homeopathic drug selection using intuitionistic fuzzy sets, *Homeopathy*, 98, 1, 35–39.

[50] **Klir, G. J., Folger, T. A., (**1988). Fuzzy sets, uncertainty, and information, *Prentice Hall Englewood Cliffs.*

[51] **König, S.,** (2018). Computational aspects of the hausdorff distance in unbounded dimension, *arXiv preprint arXiv:1401.1434*, 1–25.

[52] **Lee, K. H., (**2006). First course on fuzzy theory and applications, *Springer.*

[53] **Li, Z., (**2006). Fuzzy chaotic systems, *Springer.*

[54] **Marinov, E.,** (2014). On extension principle for intuitionistic fuzzy sets, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 20, 3, 34–41.

[55] **Mendel, J. M.,** (2007). Advances in type-2 fuzzy sets and systems, *Information Sciences*, 177, 1, 84–110.

[56] **Mondal, S. P., Roy, T. K., (**2014). First order homogeneous ordinary differential equation with initial value as triangular intuitionistic fuzzy number, *Journal of Uncertainty in Mathematics Science*, 2014, 1–17.

[57] **Mondal, S. P., Roy, T. K., (**2015). Second order linear differential equations with generalized trapezoidal intuitionistic fuzzy boundary value *Journal of Linear and Topological Algebra*, 4, 2, 115–129.

[58] **Mondal, S. P., Roy, T. K., (**2015). System of differential equation with initial value as triangular intuitionistic fuzzy number and its application, *International Journal of Applied and Computational Mathematics,* 1, 3, 449–474.

[59] **Moore, R. E., Kearfott, R. B., Cloud, M. J., (**2009). Introduction to interval analysis, *Siam.*

[60] **Naegoita, C. V., Ralescu, D. A.,** (1975). Application of fuzzy sets to system Analysis, *Birkhauser*.

[61] **Nirmala, V., Pandian, S. C.,** (2015). Numerical approach for solving intuitionistic fuzzy differential equation under generalized differentiability concept, *Applied Mathematical Sciences*, 9, 67, 3337–3346.

[62] **Oberguggenberger, M., Pittschmann, S., (**1999). Differential equations with fuzzy parameters, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5, 3, 181–202.

[63] **Puri, M. L., Ralescu, D., (**1983). Differentials of fuzzy functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 91, 552–558.

[64] **Remig, M. C., (**2015). Unraveling the veil of fuzziness: A thick description of sustainability economics, *Ecological Economics*, 109, 194–202.

[65] **Ross, T. J., (**2006). Fuzzy Logic with Engineering Applications, *Wiley*.

[66] **Seikh, M. R., Nayak, P. K., Pal, M., (**2012). Generalized triangular fuzzy numbers in intuitionistic fuzzy environment, *International Journal of Engineering Research and Development,* 5, 1, 8–13.

[67] **Shapique, M., Jesura, J., (**2017). Solutions to fuzzy differential equations using pentagonal intuitionistic fuzzy numbers, *MAYFEB Journal of Mathematics*, 2, 8–20.

[68] **Shu, M. H., Cheng, C. H., Chang, J. R., (**2006). Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly, *Microelectronics Reliability*, 46, 12, 2139–2148.

[69] **Stefanini, L.,** (2010). A generalization of hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems*, 161, 11, 1564–1584.

[70] **Stefanini, L., Bede, B.,** (2009). Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71, 3-4, 1311–1328.

[71] **Wang, Z., Li, K. W., Wang, W.,** (2009). An approach to multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights, *Information Sciences*, 179, 17, 3026–3040.

[72] **Zadeh, L. A.,** (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 3, 338–353.

[73] **Zarei, H., Kamyad, A. V., Heydari, A. A.,** (2012). Fuzzy modeling and control HIV infection, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2012, 1–17.

EKLER

EK 1 *: Metrik Uzaylardaki Temel Kavramlar*

EK 2 *: Reel Analizdeki Temel Kavramlar*

EK 1. METRİK UZAYLARDAKİ TEMEL KAVRAMLAR

***A1. Tanım** (Metrik ve metrik uzay). [20] X boş olmayan bir küme olsun.*

$d : X\times X = \{(x,y) : x,y \in X\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

***1)** $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,*

***2)** $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği) ve*

***3)** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)*

şartlar sağlanıyorsa d ye X de veya X üzerinde metrik denir. Bu durumda X e metrik uzay denir ve genellikle d metriğiyle birlikte (X,d) ile gösterilir.

***A2. Tanım** (Yuvar). [20] (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.*

***1)** $D(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarı-çaplı açık yuvar,*

***2)** $\overline{D}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarı-çaplı kapalı yuvar,*

***3)** $D'(x_0;r) = \{x \in X : 0 < d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı delik yuvar ve*

***4)** $S(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.*

***A3. Tanım** (Süreklilik ve düzgün süreklilik). [20] $X = (X,d)$ ve $Y = (Y,\rho)$ metrik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.*

***1)** Her bir $\epsilon > 0$ sayısı ve $x \in X, d(x,x_0) < \delta = \delta(\epsilon,x_0)$ için*

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0$ sayısı varsa veya denk bir ifade ile

***2)** $f(x_0)$ merkezli her bir $D(f(x_0);\epsilon)$ açık yuvarı için*

$$f(D(x_0;\delta)) \subseteq D(f(x_0);\epsilon) \quad (X \cap D(x_0;\delta) = D(x_0;\delta))$$

olacak şekilde bir $D(x_0;\delta)$ açık yuvarı varsa f ye x_0 noktasında sürekli denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de sürekli veya $f : X \to Y$ süreklidir denir.

***3)** Verilmiş herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı ve $d(x,y) < \delta = \delta(\epsilon)$ için*

$$\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

olacak şekilde sadece ϵ'a bağlı fakat x'e bağlı olmayan bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa f ye X de düzgün sürekli denir.

***A4. Tanım** (Üst-yarı sürekli fonksiyon). [20] $X = (X,d)$ bir metrik uzay, $f : X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\epsilon > 0$ sayısı ve $x \in X, d(x,x_0) < \delta = \delta(\epsilon,x_0)$ için*

$$f(x) - f(x_0) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ *sayısı varsa f fonksiyonuna* x_0 *noktasında üst-yarı süreklidir denir.*

***A5. Teorem**. [20]* $X = (X,d)$ *bir metrik uzay,* $f : X \to \mathbb{R}$ *bir dönüşüm olsun.* f *fonksiyonunun üst-yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart her* $k \in \mathbb{R}$ *için*

$$\{x \in X : f(x) < k\}$$

kümesinin açık bir küme olmasıdır.

***A6. Tanım** (Alt-yarı sürekli fonksiyon). [20]* $X = (X,d)$ *bir metrik uzay,* $f : X \to \mathbb{R}$ *bir dönüşüm ve* $x_0 \in X$ *olsun. Her bir* $\epsilon > 0$ *sayısı ve* $x \in X, d(x,x_0) < \delta = \delta(\epsilon, x_0)$ *için*

$$f(x_0) - f(x) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ *sayısı varsa f fonksiyonuna* x_0 *noktasında alt-yarı süreklidir denir.*

***A7. Teorem**. [20]* $X = (X,d)$ *bir metrik uzay,* $f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.* f *fonksiyonunun alt-yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart her* $k \in \mathbb{R}$ *için*

$$\{x \in X : f(x) > k\}$$

kümesinin açık bir küme olmasıdır.

Eğer bir fonksiyon hem alt hem de üst yarı sürekli ise süreklidir.

***A8. Tanım (**Sağdan süreklilik). [20]* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir dönüşüm ve* $x_0 \in \mathbb{R}$ *olsun.*

Her bir $\epsilon > 0$ *sayısı ve* $x \in \mathbb{R}, x_0 < x < x_0 + \delta$ *için*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ *sayısı varsa f fonksiyonuna* x_0 *noktasında sağdan süreklidir denir.*

***A9. Tanım (**Soldan süreklilik). [20]* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir dönüşüm ve* $x_0 \in \mathbb{R}$ *olsun.*

Her bir $\epsilon > 0$ *sayısı ve* $x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0$ *için*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ *sayısı varsa f fonksiyonuna* x_0 *noktasında soldan süreklidir denir.*

Eğer bir fonksiyon hem sağdan hem de soldan sürekli ise süreklidir.

A10. Tanım *(Lipschitz şartı). [20]* $X = (X, d_1)$ *ve* $Y = (Y, d_2)$ *birer metrik uzay ve* $f : X \to Y$ *bir dönüşüm olsun. Eğer*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y)$$

olacak şekilde bir $L > 0$ *reel sayısı mevcut ise* f *fonksiyonuna Lipschitz fonksiyonudur denir.*

A11. Tanım (*Yoğun küme ve ayrılabilir uzay). [20]* (X, d) *bir metrik uzay ve* A, X *in bir alt kümesi olsun.* A *nın kapanışı* X *'e eşit ise yani* $\overline{A} = X$ *ise* A *ya* X *de yoğundur denir.* $A = \overline{A}$ *ise* A *kendinde yoğundur denir.* X *in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa* X *e ayrılabilir denir.*

Bu tanıma göre A, X *de yoğunsa yani* $\overline{A} = X$ *ise* X *in herbir noktası ya* A *nın bir noktasıdır veya* A *nın bir yığılma noktasıdır.*

A12. Tanım (*İki küme arasındaki uzaklık). [20]* (X, d) *bir metrik uzay,* A *ve* B, X *in boş olmayan iki alt kümesi olsun.* A *nın* B *ye olan uzaklığı* $d(A, B)$ *ile gösterilir ve*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A,\, b \in B\}$$

olarak tanımlanır. $d(a, b) = d(b, a)$ *olduğundan* $d(A, B) = d(B, A)$ *dır. Aynı zamanda tanımdan dolayı her* $a \in A$ *ve* $b \in B$ *için* $d(A, B) \leq d(a, b)$ *dir.*

$A = \{a\}$*, yani* A *tek noktadan ibaret ise* $d(A, B)$ *yerine* $d(a, B)$ *yazılır ve*

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b) : \ b \in B\}$$

ye a *noktasının* B *ye olan uzaklığı denir.*

A13. Tanım (*Metrik uzayda yakınsak dizi). [20]* (X, d) *bir metrik uzay;* (x_n)*,* X *de bir dizi ve* $x \in X$ *olsun. Her bir* $\epsilon > 0$ *ve* $n \geq n_0$ *için*

$$d(x_n, x) < \epsilon$$

olacak şekilde bir n_0 *sayısı varsa veye denk bir ifade ile*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

ise (x_n) *dizisine* (X, d) *de yakınsak ve* x *'e de dizinin limiti denir. Bu durumda* $(x_n), x$*'e yakınsar veya* x*'e yakınsıyor vb. ifadeler de kullanılır. Yakınsak olmayan diziye ıraksak denir.*

(x_n) *dizisi yakınsak ve limiti* x *ise bu husus*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim x_n = x, \quad \textit{veya} \quad x_n \to x$$

sembollerinden (simgelerinden) biriyle belirtilir. (x_n) *dizisi* x *e yakınsamıyorsa* $x_n \nrightarrow x$ *yazılır.*

A14. Tanım (*Dizisel süreklilik). [20]* (X,d_1) *ve* (Y,d_2) *iki metrik uzay ,* $f : X \to Y$ *ye bir dönüşüm ve* $x_0 \in X$ *olsun. X de* $x_n \to x_0$ *olan her* (x_n) *dizisi için* $f(x_n) \to f(x_0)$ *ise f ye* x_0 *noktasında dizisel sürekli denir.* f*, X in her noktasında dizisel sürekli ise f ye X de dizisel sürekli denir.*

A15. Tanım *(Çap, sınırlı küme). [20]* (X,d) *bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın çapı* $d(A)$ *ile gösterilir ve*

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

olarak tanımlanır. $d(A)$ *çapı sonlu ise yani* $d(A) = k \in \mathbb{R}$ *ise A ya sınırlı küme denir.*

A16. Teorem*. [20]* (X,d) *metrik uzay olsun. Bu takdirde,*

1) (X,d) *de yakınsak bir dizi sınırlı ve limiti tektir.*

2) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ *dir.*

3) $x_n \to x$ *ve* $y_n \to y$ *ise* $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$ *dir. Özellikle metrik fonksiyonu süreklidir.*

A17. Teorem (*Kapanışın dizisel karakterizasyonu). [20]* (X,d) *bir metrik uzay* A,X *in boş olmayan bir bir alt kümesi ve* $\overline{A}, A$ *nın kapanışı olsun.*

1) $x_0 \in \overline{A}$ *olması için gerek ve yeter şart* $x_n \to x_0$ *olacak şekilde A da bir* (x_n) *dizisinin olmasıdır.*

2) *A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart* $(y_n), A$ *da bir dizi ve* $y_n \to a$ *olması halinde* $a \in A$ *olmasıdır.*

A18. Tanım (*Cauchy dizisi ve tamlık).[20]* $X = (X,d)$ *bir metrik uzay ve* (x_n) *bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir* $\epsilon > 0$ *ve* $m,n \geq n_0$ *için*

$$d(x_m,x_n) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ *sayısı varsa* (x_n) *dizisine Cauchy dizisi (veya esas dizi) denir. X deki her* (x_n) *Cauchy dizisi yakınsaksa* (X,d) *metrik uzayına tam metrik uzay veya kısaca tam denir.*

A19. Teorem*. [20]* (X,d) *bir metrik uzay olsun. Bu takdirde*

1) (X,d) *de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.*

2) (X,d) *deki her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

3) (x_n) *ve* $(y_n), X$ *de Cauchy dizisi ise* $(d(x_n,y_n))$ *reel dizisi yakınsaktır.*

A20. Tanım (*Konveks küme). [20] V bir Vektör uzayı,* $A \subseteq V$ *ve* $x,y \in A$ *keyfi olmak üzere*

$$tx + (1-t)y \in A, \text{ yani } \{z \in V : z = tx + (1-t)y, \ \ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konvekstir denir.

A21. Tanım *(Örtü, açık örtü ve sonlu açık örtü). [20] X bir topolojik uzay ve X in alt kümelerinin bir ailesi $\{U_i\}$ olsun. X in her bir noktası en az bir U_i ye ait ise yani $X = \cup_i U_i$ ise $\{U_i\}$ ailesine X in bir örtüsü denir. Eğer U_i ler açık ise $\{U_i\}$ ye açık örtü denir. $\{U_i\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt ailesi yine X in bir örtü ise bu alt aileye sonlu açık örtü denir.*

A22. Tanım *(Metrik uzayda kompatlık). [20] Metrik uzaylar için birbirine denk üç kompaktlık tanımı vardır. X bir metrik uzay olsun.*

1) *X deki her bir dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa (ki buna dizisel kompakt da denir) X'e kompakttır denir.*

2) *X tam olarak sınırlı ve tam ise X 'e kompakttır denir.*

3) *X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X 'e kompakttır denir.*

A23. Tanım *(Daralma dönüşümü). [20] $X = (X,d)$ bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ için*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0,1)$ sayısı varsa f ye bir daralma dönüşümü denir.

A24. Teorem *(Banach sabit nokta teoremi). [20] $X = (X,d)$ bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer f fonksiyonu bir daralma dönüşümü ise*

$$f(x^*) = x^*$$

olacak şekilde bir tek $x^* \in X$ noktası mevcuttur.

A25. Tanım *(Süreklilik modülü). [22] (X,d) kompakt metrik uzay olsun ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. O halde $\omega(f,.) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)| u,v \in X \quad ve \quad d(u,v) \leqslant \delta\}$$

olacak şekilde fonksiyonun süreklilik modülü tanımlanır.

A26. Teorem*.[23] Süreklilik modülünün bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir.*

1) *Herhangi bir $u,v \in X$ için $|f(u) - f(v)| \leqslant \omega(f, d(u,v))$*

2) *$\omega(f,\delta)$, δ ya göre azalmayandır.*

3) *Herhangi bir $\delta \in [0,\infty)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\omega(f, k\delta) \leqslant k\omega(f,\delta)$$

4) *Herhangi bir* $\delta, k \in [0,\infty)$ *için*

$$\omega(f,\mu\delta) \leqslant (k+1)\omega(f,\delta)$$

5) *f fonksiyonu X üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f,\delta) = 0$$

dır.

A27. Tanım *(İnfimum ve supremum).[20]* $(X,\preceq)$ *kısmî sıralı bir küme ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın X deki alt sınırlarının kümesini A_1 ile gösterelim. $\alpha \in A_1$ olmak üzere her $u \in A_1$ için $u \preceq \alpha$ ise α ya A nın en büyük alt sınırı veya A nın infimumu denir ve* $\inf A$ *ile gösterilir. A nın üst sınırlarının kümesini ise A_2 ile gösterelim. $\beta \in A_2$ olmak üzere her $v \in A_2$ için $\beta \preceq v$ ise β ya A nın en küçük üst sınırı veya A nın supremumu denir ve* $\sup A$ *ile gösterilir.* $\alpha = \inf A \in A$ *olması halinde α ya A nın minimumu veya minimum elemanı;* $\beta = \sup A \in A$ *olması halinde ise β ya A nın maksimumu veya maksimum elemanı denir ve sırasıyla* $\min A$ *ve* $\max A$ *ile gösterilir.*

A28. Teorem*.[20] $A, \mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi olsun.* $\sup A = \beta$ *(*$\inf A = \alpha$*) olması için gerek ve yeter şart*

1) *β, A nın bir üst sınırı (α, A nın bir alt sınırı) ve*

2) *Her n pozitif tam sayısı için $\beta - 1/n < x \leq \beta$ ($\alpha \leq x < \alpha + 1/n$) olacak şekilde bir $x \in A$ nın olmasıdır.*

A29.Örnek.*[73] $\mathbb{R}$ Öklid uzayı, $A \subset \mathbb{R}$ ve* $\alpha = \inf A$ *olsun. Bu takdirde $x_n \to \alpha$ olacak şekilde A da bir (x_n) dizisi vardır. Gerçekten her bir n için*

$$\alpha \leq x_n < \alpha + \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $x_n \in A$ vardır. Terimleri bu şekilde seçilen (x_n) dizisi alınırsa $x_n - \alpha < 1/n$ ve $1/n \to 0$ olduğundan $\lim x_n = \alpha$ *dır.*

EK 2. REEL ANALİZDEKİ TEMEL KAVRAMLAR

B1. Tanım *(Sınıf). [18] X kümesinin alt kümelerinin herhangi bir kümesine X 'in alt kümelerinin bir sınıfı denir.*

B2. Tanım *(Cebir). [18] X bir küme olsun. X in bir A sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu A sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:*

1) *$X \in A$,*

2) *Her $A \in A$ için $A^c \in A$,*

3) *$i = 1,2,...,n$ için $A_i \in A$ için $\cup_{i=1}^{n} A_i \in A$*

3. şartın yerine her $i \in \mathbb{N}$ için $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$ ise A cebirine σ-cebiri adı verilir.

B3. Tanım *(Borel Cebiri). [18] Bir K sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne K nın ürettiği σ-cebir denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün (a,b) aralıklarının doğurduğu σ-cebire Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına bir Borel kümesi denir.*

***B4. Teorem**. [18] $B(\mathbb{R})$ Borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafindan da üretilebilir.*

1) *$\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfi*

2) *$\mathbb{R}$ nin $(-\infty,b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfi*

3) *$\mathbb{R}$ nin $(a,b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfi*

B5. Teorem. *[18] $B(\mathbb{R}^n)$ Borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafindan da üretilebilir.*

1) *$\mathbb{R}^n$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfi,*

2) *$\mathbb{R}^n$ nin $\{(x_1, x_2,...,x_n) : x_i \leq b,\ i : 1,2,...,n\}$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfi,*

3) *$\mathbb{R}^n$ nin $\{(x_1, x_2,...,x_n) : a_i < x_i \leq b,\ i : 1,2,...,n\}$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfi.*

B6. Tanım *(Ölçülebilir küme). [18] X bir küme ve A da X üzerinde bir σ-cebir olsun. (X,A) ikilisine bir ölçülebilir uzay denir, A daki herbir kümeye de A- ölçülebilir küme adı verilir.*

B7. Tanım *(Ölçülebilir fonksiyon). [18] (X,A) ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

olmasıdır.

***B8. Teorem**. [18] (X,A) ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksyonu için aşağıdaki önermeler denktir.*

1) *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$*

2) *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in A$*

3) *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in A$*

4) *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in A$*

B9. Tanım *(Borel ölçülebilir fonksiyon). [18] $B(\mathbb{R}^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon veya Borel fonksiyonu denir.*

B10. Teorem *(İntegral hesabın temel teoremi-1).[21] f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a,b)$ için*

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dır.

B11.Teorem *(İntegral hesabın temel teoremi-2).[21] f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ üzerinde*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	**:** Selami BAYEĞ
Uyruğu	**:** Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri	**:** 25.06.1984, Ağrı
E-posta	**:** slmbyg@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2008, Abant İzzet Baysal Ünviversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek lisans** **:** 2012, Katolik Louvain Üniversitesi (UCL), Ecole Polytechnique, Malzeme Mühendisliği Bölümü.
- **Doktora** **:** 2018, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev/Ödüller**
2008	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	Y. Onur Lisans Diploması
2010-2011	Minho Üniversitesi (Portekiz)	Polimer Bilimi Ve Mühendisliği Bütünleşik Yüksek Lisans
2011-2012	Ljubljana Üniversitesi (Slovenya)	Makine Müh. Bütünleşik Yüksek Lisans
2009-2012	European Masters in Eng. Rheology	Erasmus Mundus Bursu

2011-2012	Ljubljana Üniversitesi (Slovenya)	Yabancı Öğrenci Yüksek Eğitim Bursu
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Ünv.	TÜBİTAK Araştırma Bursu
2014-2018	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Ünv.	Tam Burslu Öğrenci

YABANCI DİL: İngilizce (C2), Fransızca (B1), İspanyolca (A2), Arapça (A1)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Akın, Ö., Khaniyev, T., **Bayeğ, S.**, Türkşen, B., (2016). Solving a second order fuzzy initial value problem using the Heaviside function, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 4, 16-25.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2016). An indicator operator algorithm for solving a second order intuitionistic fuzzy initial value problem, *Proceedings of ICMME-16: International Conference On Mathematics And Mathematics Education*, May 12-14, Elazığ, Turkey.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2016). Solving second order intuitionistic fuzzy initial value problems with Heaviside function, *Proceedings of IFSCOM-16:Third International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference*, 29 August-01 September, Mersin, Turkey.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2017). Gen. Hukuhara differentiability in intuitionistic enviranment, *Proceedings of ICMME-17: International Conference On Mathematics And Mathematics Education*, May 11-13, Şanlıurfa, Turkey.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2017). Initial value problems in intuitionistic fuzzy environment, *Proceedings of FUZZYSS-17: The 5th International Fuzzy Systems Symposium*, October 14-15, Ankara, Turkey.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2018). Some results on H. metric for intuitionistic fuzzy sets, *Proceedings of ICMME-18: International Conference On Mathematics And Mathematics Education*, June 27-29, Ordu, Turkey.
- Akın, Ö., **Bayeğ, S.**, (2018). Intuitionistic Fuzzy Initial Value Problems-An Application, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Doi: 10.15672/HJMS.2018.598.