

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GEÇİKMELİ BİR YAPAY SİNİR AĞI MODELİ İLE GEÇİKMELİ BİR
AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK VE HOPF ÇATALLANMA
ANALİZLERİ**

DOKTORA TEZİ
Esra KARAOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Kasım 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

.....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 112117001 numaralı Doktora öğrencisi **Esra KARAOĞLU**'nun ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**GECİKMELİ BİR YAPAY SİNİR AĞI MODELİ İLE GECİKMELİ BİR AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK VE HOPF ÇATALLANMA ANALİZLERİ**” başlıklı tezi **14.11.2016** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Başkan)**
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Oktay DUMAN
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet TURAN
Atılım Üniversitesi

Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN
Yıldırım Beyazıt Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Esra KARAOĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

GECİKMELİ BİR YAPAY SİNİR AĞI MODELİ İLE GECİKMELİ BİR AV-AVCI
MODELİNİN KARARLILIK VE HOPF ÇATALLANMA ANALİZLERİ

Esra KARAOĞLU

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Kasım 2016

Bu tez çalışmasında temel amaç, gecikmeli diferensiyel denklem sistemlerinin kararlılık ve Hopf çatallanma analizlerini incelemektir. Bunun için, popülasyon dinamiği ve yapay sinir ağları alanlarında yer alan, farklı iki alana ait diferensiyel denklem sistemleri belirlenmiş, sistemlerde gerekli yerlere gecikme terimleri eklenerek sistemler iyileştirilmiş ve sistemlerin dinamik davranışları incelenmiştir.

Çatallanma teorisi, seçilen bir kontrol parametresine bağlı olarak sistemlerin dinamiğini inceleyen dinamik sistemlerin bir araştırma sahasıdır. Amaç, kontrol parametresine göre değişimini gözlemlemek istediğimiz sistemin uzun vadedeki davranışını incelemektir. Çatallanma ise, değişen parametre değerlerine karşılık dinamik sistemin kalitatif yapısında değişiklik olmasıdır. Fark denklemleri ve diferensiyel denklemlere göre farklı çeşitlerde birçok çatallanma tipi mevcuttur. Ayrıca, modelin boyutuna göre de çatallanma tipleri ve adları değişmektedir.

Dinamik sistemler teorisinde periyodik çözümler çok geniş bir yer tutmaktadır. Sürekli dinamik sistemlerde, bir parametreye bağlı lokal olarak periyodik çözümleri belirlemenin yolu ise Hopf çatallanma analizidir. Hopf çatallanması, en az iki boyutlu diferensiyel denklem sistemlerinde görülen, kritik parametre değerinden sonra denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği (bakılan eksene göre yön değişebilir) ve limit döngülerinin (periyodik çözümlerin) ortaya çıktığı çatallanma tipidir. Gecikmeli diferensiyel denklemlerde, gecikme parametresini çatallanma parametresi olarak

seçmek yaygındır.

Bir dinamik sistemde, geçmiş zamanın etkilerini sisteme yansıtmak için modellere gecikme terimi eklenir. Gecikme terimi eklenen denklemleri çalışmak biraz daha zor olsa da doğada gecikmeler daima mevcuttur. Popülasyon dinamiğinde, bir türün avlanabilmesi için olgunlaşma süreci veya avlanma için gerekli olan süre, bir bakterinin kuluçka süresi, bir sinir hücresinin uyarıldıktan sonra çıktının oluşabilmesi için geçmesi gereken süre gecikmelere örnek olarak verilebilir.

Bu tez çalışması, esas itibarıyla iki kısımdan oluşmaktadır:

Tezin ilk kısmında, popülasyon dinamiğinde zengin bir içeriğe sahip olan bir oran-bağımlı denklem sistemine kesikli gecikme terimleri eklenmiştir. Bu bölüm, kendi içerisinde eşit gecikmeli terimli ve farklı gecikmeli terimli olmak üzere iki farklı sistemin Hopf çatallanma ve kararlılık analizlerini içermektedir.

Tezin ikinci kısmında ise iki sinir hücreli geri beslemeli bir yapay sinir ağı sistemine hem kesikli hem dağılımlı gecikme terimi eklenmiş ve sistem yine iki farklı kategoride incelenmiştir. İki sistemde de, Hopf çatallanmanın varlığını garantileyebilmek için parametreler üzerine konacak gerekli şartlar belirlenmiş ve periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gösterilmiştir. Çalışılan dört sistem için elde edilen teorik bulgular, MATLAB programı kullanılarak nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hopf çatallanması, Zaman gecikmesi, Kararlılık, Periyodik çözümler.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

**HOPF BIFURCATION AND STABILITY ANALYSES OF A NEURAL NETWORK
MODEL WITH DELAY AND A PREDATOR-PREY MODEL WITH DELAY**

Esra KARAOĞLU

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: November 2016

In this thesis, the main aim is to investigate the stability and Hopf bifurcation analyses of delayed differential equation systems. For this, we take two different differential equation systems which belong to population dynamics and artificial neural networks areas. These systems are enhanced by incorporating delay terms where needed and their dynamical behaviours are studied.

Bifurcation theory is a research area that observes the changes of dynamical systems that depend on time according to a chosen control parameter. The goal is to study the large time behaviour of the system with respect to a control parameter that we want to observe. Bifurcation is the change of qualitative structure of dynamical systems associated with varying parameter values. There are many different bifurcation types in both difference and differential equations. Also, the names and types of bifurcations change according to the dimension of models.

In dynamical systems literature, periodic solutions have an extensive study area. In continuous time dynamical systems, the method of determination of local periodic solutions that depend on a control parameter is Hopf bifurcation analysis. Hopf bifurcation is a type of bifurcation that after a critical parameter value the stability of the equilibrium point changes (the direction may change according to axes which we look) and limit cycles (periodic solutions) occur. Hopf bifurcation can be seen in at least two dimensional differential equation systems. It is very common to choose the

delay parameter as a bifurcation parameter.

In order to reflect dynamical behaviour of models that depend on the past history of the system, we often incorporate time delays into models. Even it is more difficult to analyse systems with delays, delays always exist in nature. In population dynamics, maturation time to be a prey of a specie or time needed for predation, incubation period of a bacteria, time needed for a response after a neuron is fired can be given for examples.

This thesis mainly involves two parts:

In the first part, it has been incorporated a discrete delay term into a ratio-dependent differential equation system which has rich content in population dynamics. This part includes Hopf bifurcation and stability analyses of two different systems, that is, one is the system with equal time delays and the other one is the system with different two time delays.

In the second part, it has been incorporated a discrete and a distributed delay term into a recurrent neural network system with two neurons. Again, the system is considered in two categories. Both in two systems, the conditions on parameters are determined to guarantee that two systems have Hopf bifurcation and existence of periodic solutions is demonstrated. Theoretical results that have been obtained for four systems supported with numerical examples by using MATLAB program.

Keywords: Hopf bifurcation, Time delay, Stability, Periodic solutions.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam sırasında değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a en içten teşekkür ile saygılarımı sunarım. İyi bir bilim kadını olabilmem için öğrenmem gereken teknik bilgileri eksiksiz öğretmenin yanı sıra aldığım tek bir ders ile hayata ve matematiğe bakış açımı değiştirdiği için, bana sorgulamayı ve “öğrenmeyi öğrettiği” için, attığım her adımda arkamda olduğu için, bana harcadığı çabalar için ve benden maddi manevi hiçbir yardımını esirgemediği için kıymetli hocama müteşekkirim.

Doktora eğitimim boyunca tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve özellikle bu tezde çok yardımı bulunan sayın Prof. Dr. Oktay DUMAN ve sayın Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU'na ve jüri üyelerime teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, verdiği pozitif enerji ve destekleriyle bana yol gösteren sayın Prof. Dr. Songül KAYA MERDAN'a teşekkürlerimi sunarım. Birlikte çalışmaktan zevk aldığım asistan arkadaşlarıma ve yanımda olan diğer dostlarıma çok teşekkür ederim.

Beni bugünlere getiren, okumamı sağlayan canlarım, anneme ve babama destekleri için ne kadar teşekkür etsem azdır. Ayrıca, bitmeyen destekleri için ablama, abime ve eşimin ailesine çok teşekkür ederim.

Son olarak biricik oğlumuz Yağız Alp'in babası, kıymetli eşim, Naim KARAOĞLU'na teşekkür etmek istiyorum. Bu tezin ikinci yazarı sayılabilecek kadar bana destek olduğun için, benimle birlikte araştırmalarımıza, yorgunluklarıma, uykusuz gecelerime ortak olduğun için, bu tezi yazarken o kadar anlayışlı ve yüreklendirici olduğun için, ne zaman düşsem elimi tutup kaldırdığın için, hayatımın her saniyesinde yanımda olduğun için, kocaman yüreğini benimle paylaştığın için minnettarlığımı sözcüklerle ifade edemem. Bunun da ötesinde, bu kadar mükemmel bir eş, dost ve baba olduğun için çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimimi tam burslu statüde yapmamı sağlayan, ayrıca bir yıl özel başarı bursu ile destekleyen TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne çok teşekkür ederim.

Bir yıl Amerika'da eğitim görmemi sağlayan ve bütün doktora tez hayatım boyunca sağladığı maddi destekten ötürü TÜBİTAK'a ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
KISALTMALAR	xiv
SEMBOL LİSTESİ	xv
RESİM LİSTESİ	xvi
1. GİRİŞ	1
1.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemlere Giriş	4
1.1.1 Kesikli gecikme veya dağılımlı gecikme	6
1.2 Çatallanma Teorisine Genel Bakış	9
2. HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ	11
2.1 Hopf Çatallanma Teoremi	11
2.2 Hopf Çatallanmanın Önemi	15
2.3 Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerde Hopf Çatallanma Teorisi	16
3. ORAN-BAĞIMLI BİR AV-AVCI DENKLEMİNDE KESİKLİ GECİKMEYE BAĞLI HOPF ÇATALLANMA	23
3.1 Literatürde Oran-Bağımlı Denklem	23
3.2 Tez Probleminin İfadesi	25
3.3 Eşit Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi	27
3.3.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı	27
3.3.2 Yön analizi	31
3.3.3 Nümerik sonuçlar	39
3.4 İki Farklı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi	42
3.4.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı	42
3.4.2 Yön analizi	51
3.4.3 Nümerik sonuçlar	60
4. HEM KESİKLİ HEM DAĞILIMLI GECİKME İÇEREN BİR YAPAY SINIR AĞI SİSTEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ	63
4.1 Yapay Sinir Ağlarına Giriş ve Kısa Tarihçe	63
4.2 Bir Beyin Sinir Hücresinin Yapısı	64
4.3 Bir YSA Yapısı	65
4.4 Hopfield Modeli ve Kısa Tarihçe	67
4.5 Tez Probleminin İfadesi	74

4.6 Tek Dağılımlı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi . . .	75
4.6.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı . . .	75
4.6.2 Yön analizi	80
4.6.3 Nümerik sonuçlar	88
4.7 İki Dağılımlı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi . . .	89
4.7.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı . . .	90
4.7.2 Yön analizi	98
4.7.3 Nümerik sonuçlar	105
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	111
KAYNAKLAR	115
EKLER	125
ÖZGEÇMİŞ	127

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Gecikmeli diferensiyel denklemlerde tarihçe	5
Şekil 1.2: Gecikmeli diferensiyel denklemlerde başlangıç koşulu (El'sgol'ts ve Norkin, 1973)	5
Şekil 1.3: Kaplumbağa retinasındaki koni hücrelerinin voltajındaki değişim	8
Şekil 1.4: Bazı sinek türlerinin olgunlaşma süreci	8
Şekil 1.5: Metal bir çubuğun kararlılık yapısının değişmesi (Strogatz, 1994)	10
Şekil 2.1: Süperkritik Hopf çatallanmalar (Wiggins, 2003). Her iki durumda da periyodik çözümler kararlıdır. Sol tarafta orijin, kritik çatallanma değerinden önce kararlı iken sağ tarafta kritik değerden sonra kararlıdır	13
Şekil 2.2: Subkritik Hopf çatallanmalar (Wiggins, 2003). Periyodik çözümler kararsızdır. Soldaki şekilde orijin kritik çatallanma değerinden önce kararlı iken sağdaki şekilde kritik değerden sonra kararlıdır.	14
Şekil 2.3: Cheyne-Stokes solunumuna sahip 29 yaşındaki bir bireyin nefes alma spirogramı	15
Şekil 3.1: Üç tip fonksiyonel cevap (Leslie,1977)	25
Şekil 3.2: $\tau = 2 < \tau_0$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözümler grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau = 2 < \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	40
Şekil 3.3: $\tau = 2.066 = \tau_0$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözümler grafiklerinde görülen periyodik çözümler sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau = \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	41
Şekil 3.4: $\tau = 2.1 > \tau_0$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip kararsız av ve avcı çözümler grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau > \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	41
Şekil 3.5: τ değerleri $\tau = 2.063$ 'ten $\tau = 2.067$ 'ye kadar 0.001 artışla değişirken bazı limit döngüleri.	42
Şekil 3.6: $g(\omega)$ fonksiyonunun olası bir grafiği.	49
Şekil 3.7: $\tau_1 = \tau_{10} = 2.3034$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözümler grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_1 = \tau_{10} = 2.3034$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	61

Şekil 3.8: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 1.6 < \tau_{2*}$ iken $N_0 = 9$, $P_0 = 17$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 = \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	61
Şekil 3.9: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 2.24 \approx \tau_{2*}$ iken $N_0 = 9$, $P_0 = 17$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 \approx \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	62
Şekil 3.10: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 2.4 > \tau_{2*}$ iken $N_0 = 8$, $P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 > \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.	62
Şekil 3.11: τ_{2*} değerleri $\tau_{2*} = 2.2$ 'den $\tau_{2*} = 2.28$ 'e kadar 0.01 artışla değişirken bazı limit döngüleri.	62
Şekil 4.1: 6 birimli Hopfield ağı (Tavşanoğlu, 2009)	64
Şekil 4.2: Basit bir sinir hücresi yapısı	65
Şekil 4.3: Bazı aktivasyon fonksiyonları	66
Şekil 4.4: Yapay sinir hücresinin yapısı (Çayıroğlu, 2016)	66
Şekil 4.5: Yapay sinir ağı modeli	67
Şekil 4.6: Dört düğümlü geri beslemeli Hopfield modeli (Url-7)	68
Şekil 4.7: Sıralı bellek ve çağrışımlı bellek (Url-6)	69
Şekil 4.8: Basit bir elektrik devresi	69
Şekil 4.9: Hopfield modeli (Yılmaz, 2012)	71
Şekil 4.10: (4.12) modelinin mimari yapısı. İki nöron birbirlerine τ_j , $j = 1, 2$ kesikli gecikmeyle sinyal göndermektedir. Fakat kendisinden gelen sinyal dağılımlı gecikmeli (kesikli çizgi) haldedir.	74
Şekil 4.11: $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.15$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.25 < \tau_0$ iken (4.54) sisteminin çözümleri ve faz portresi. Orijin asimptotik kararlıdır.	88
Şekil 4.12: $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.3 > \tau_0$ iken orijinden çatallanan periyodik çözümler ve faz portresi.	89
Şekil 4.13: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.4 > \tau_0$ iken orijinden çatallanan periyodik çözümler ve faz portresi.	90
Şekil 4.14: τ değerleri $\tau = 0.3$ 'ten $\tau = 0.37$ 'ye kadar 0.01 artışla değişirken bazı limit döngüleri.	91
Şekil 4.15: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 0.7$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.2 < \tau_0$ iken çözümleri. Bu durumda, orijin asimptotik kararlıdır.	105
Şekil 4.16: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 0.7$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.2 < \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.	106
Şekil 4.17: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.75$, $\tau_2 = 0.75$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.5 > \tau_0$ iken periyodik çözümleri.	107
Şekil 4.18: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.75$, $\tau_2 = 0.75$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.5 > \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.	108

Şekil 4.19: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.9$, $\tau_2 = 0.9$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.8 > \tau_0$ iken periyodik çözümleri.	108
Şekil 4.20: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.9$, $\tau_2 = 0.9$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.8 > \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.	109
Şekil 4.21: τ değerleri $\tau = 1.5$ 'ten $\tau = 1.58$ 'e kadar 0.01 artışla değişirken bazı limit döngüleri.	109

KISALTMALAR

- EEG** : Elektroensefalografi
Y.M.T. : Yüksek mertebeden terimler
YSA : Yapay sinir ağları

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler Açıklama

$\lambda(\mu)$	Özdeğer
$\alpha(\mu)$	Özdeğerin reel kısmı
$\omega(\mu)$	Özdeğerin sanal kısmı
v^c	Çatallanma değeri
$c_1(0)$	Lyapunov katsayısı
$Re(c_1(0))$	Lyapunov katsayısının reel kısmı
L_μ	Bir parametrelili lineer operatörlerin ailesi
$\sigma(\mu)$	L_μ operatörünün spektrumu
$A(\mu)$	Sistemin çatallanma parametresine karşılık gelen Jakobiye matrisi
$C^k[-r, 0]$	$[-r, 0]$ üzerinde tanımlı n-boyutlu reel vektör değerli k-kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı
$A^*(\mu)$	$A(\mu)$ matrisinin adjointi
q	λ özdeğerine karşılık gelen özvektör
C_0	Merkez (center) çok katlı
$sign$	İşaret fonksiyonu
(z, w)	Merkez (center) çok katlı koordinatları

RESİM LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Resim 2.1: Ateşböcekleri (Url-1, Url-2)	16
Resim 3.1: Tavşan yakalamış bir çakal	26

1. GİRİŞ

Dinamik sistemler teorisi, genellikle durumu zamana bağılı olarak değişen fiziksel, kimyasal veya biyolojik sistemlerin davranışlarını anlamaya veya tarif etmeye çalışan matematiğin bir branşdır (Sistemler, zamandan başka konum, yaş vs. gibi değişkenlere de bağılı olabilir). Gezegenlerin hareketi ve güneş sistemi, hava durumu, buzun su içinde erimesi, bir gazın havada yayılması, kalp atışı, bir hastalığın bir popülasyonda yayılması, hisse senedi piyasası bu tarz sistemlere örnek olarak verilebilir. Dinamik sistemlerin uygulamaları günlük hayatta karşılaştığımız birçok teknik problemi çözebilmek, doğanın ve insanoğlunun kompleks yapısını bir nebze de olsa anlayabilmek için hemen hemen her alana yayılmıştır. Temeli H. Poincaré'nin 1890'lı yıllardaki çalışmalarına dayansa da özellikle son yüzyılda çok büyük ilerlemeler kaydeden bu çalışma sahası, biyoloji, fizik, kimya, klasik mekanik, kontrol sistemleri, yapay sinir ağları, popülasyon dinamiği, sinirbilim veya ekonomi gibi birçok disiplinde karşımıza çıkmaktadır.

Dinamik sistemlerin uygulamalarda yaygın olarak kullanılan belirgin özelliklerini üç başlıkta toplayabiliriz. Bunlardan birincisi "öngörücü" özelliğe sahip olmasıdır. Bir dinamik sistem modeli yardımıyla, herhangi bir sistemin geçmişteki veya şu andaki durumundan yola çıkarak, sistemin gelecekteki davranışının ne olacağı hakkında fikir sahibi olunabilir. Bir diğer özelliğini "tanılayıcı" olarak adlandırabiliriz. Bu özellik, ilgi duyulan sistemin şu anki durumuna gelmesini sağlayan geçmişte olabilecek olası durumları hakkında bilgi edinebilmemizi sağlar. Son olarak, bazı sistemlerde amaç geleceği tahmin etmek veya geçmişi açıklamak değil, fiziksel bir sistem için "teori oluşturmak" olabilir. Bu üç kategori de, nihayetinde fiziksel bir olayın açıklanması veya anlaşılabilmesi için ortak amaca hizmet ederler (Url-5).

Dinamik sistemlerde modelleme yapmak için yaygın olarak kullanılan denklemler diferensiyel denklemler, kısmi türevli denklemler ya da fark denklemleridir. Çalıştığımız probleme göre seçimimiz değişiklik gösterir. Modelde kullanılan zaman aralığı ayrık zaman dilimleri halinde ise fark denklemleri, değişim sürekli bir zamanda gerçekleşiyor ise diferensiyel denklemler kullanılabilir. Modelimiz zaman-yaş, zaman-konum gibi birden fazla değişkene bağılı ise kısmi türevli denklemler tercih edilir. Modeller başlangıçta oldukça basit tutulurken, daha sonra modeller geliştirilebilir. Örneğin, modelleri iyileştirmek için daha çok parametre ekleyebilir, modele başka fonksiyonlar ekleyebilir ya da modelin boyutunu artırmak gibi yöntemler kullanabiliriz. Diferensiyel denklem sistemleri kullanmak, sistemlere gecikme terimleri eklemek, kısmi türevli denklem sistemleri kullanmak veya difüzyon terimleri eklemek yine yapılan iyileştirmelerdendir.

Tez Planı

Tezin birinci bölümü gecikmeli diferensiyel denklemler ve çatallanma teorisi hakkında kısa bir özet içermektedir. Biyolojik olarak gecikme teriminin anlamı açıklanmaya çalışılmış ve kesikli ve dağılımlı gecikme arasındaki farklar belirtilmiştir. Daha sonra, çatallanma kavramı kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde, sürekli dinamik sistemlerde görülen Hopf çatallanması ele alınmıştır. Bir sistemde Hopf çatallanmasının oluşabilmesi için yeter koşullar Hopf çatallanma teoremi (Hassard ve diğ., 1981) ile verilmiştir. Hopf çatallanmanın önemi vurgulanmış, ardından gecikmeli diferensiyel denklemlerde Hopf çatallanma teorisi ve merkez çok katlına indirgeme yöntemi detaylı şekilde açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, aşağıdaki oran-bağımlı denklem üzerine iyileştirmeler yapılmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t)}{N(t)} \right).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Bu denklemde r_1 , r_2 , ε , θ pozitif parametreler olmak üzere, $N(t)$ ve $P(t)$ sırasıyla bir t anındaki av ve avcı popülasyonlarının yoğunluğunu göstermektedir. Modele, av popülasyonunda avların av olabilmesi için geçmesi gereken zamanı simgeleyen ve avcı popülasyonunda avcılarının olgunlaşma sürecini belirten sırasıyla τ_1 ve τ_2 gibi iki tane farklı kesikli gecikme terimi eklenmiş ve aşağıdaki sistem elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t - \tau_2)}{N(t - \tau_1)} \right).\end{aligned}\quad (1.2)$$

(1.2) sisteminin karakteristik denkleminin analizinin zor olmasından dolayı, birinci aşamada $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ gecikmeleri eşit alınarak aşağıdaki denklem sistemi göz önüne alınmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t - \tau)}{N(t - \tau)} \right).\end{aligned}\quad (1.3)$$

(1.3) sisteminin pozitif denge noktaları bulunmuş ve denge noktalarının kararlılık analizi yapılmıştır. Bu sistemde periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gösterilmiştir. Daha sonra, (1.2) sistemi aynı şekilde analiz edilmiş ve bu sistemde de Hopf çatallanma analizi yapılmıştır. Her iki sistem için teori, nümerik örneklerle desteklenmiştir. Özetle, yukarıdaki sistemlerde kritik çatallanma değerinin altındaki değerler için denge noktasının kararlılığı gösterilmiş ve bu kritik değerden sonra süperkritik Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı ispatlanmıştır (Karaoğlu ve Merdan,

2014a; Karaoğlu ve Merdan, 2014b).

Tez çalışmasının ikinci kısmı olan dördüncü bölümde ise bir yapay sinir ağı sisteminde Hopf çatallanması araştırılmıştır. İki boyutlu bir geri beslemeli yapay sinir ağı sisteminde nöronlar arasındaki iletme kesikli gecikme terimi ve kendine olan bağlantı kısmına da dağılımlı gecikme terimi eklenmiştir:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f_{12}(x_2(t-\tau_2)), \\x_2'(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t-\tau_1)) + a_{22}f_{22}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s)ds\right).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Burada $x_i'(t) = \frac{dx_i}{dt}$ olarak tanımlı olup, $x_i(t)$, i . nöronun t zamanındaki durumunu belirtmektedir. $F(\cdot)$ ise $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı, t anındaki dinamiğe geçmiş zamanın etkilerini yansıtan, negatif olmayan ve sınırlı gecikme çekirdeği olarak tanımlanmaktadır.

İlk olarak, (1.4) sisteminde karşımıza çıkan karakteristik denklemin analizinin zorluğundan dolayı aşağıdaki (1.5) sistemi incelenmiştir:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f_{12}(x_2(t-\tau_2)), \\x_2'(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t-\tau_1)) + a_{22}f_{22}(x_2(t)).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Her iki sistemde de gecikme parametreleri τ_1 ve τ_2 olup, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ çatallanma parametresi seçilerek sistemlerin dinamiği incelenmiştir.

(1.5) sistemi, lineer zincir değişken değiştirme metoduyla üç boyutlu kesikli gecikmeli bir sisteme denk olacak şekilde yeniden düzenlenmiştir. Hopf teoreminin şartlarının sağlandığı gösterildikten sonra Hopf çatallanmasının yönü, tipi ve kararlılığı belirlenmiştir. Nümerik örneklerle Hopf çatallanmasının varlığı desteklenmiştir.

(1.5) sisteminin analizi tamamlandıktan sonra, en genel durumu içeren (1.4) sisteminin Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. İlk olarak, (1.4) sistemi lineer zincir değişken değiştirme tekniğiyle dört boyutlu bir sisteme dönüştürülmüştür öyle ki bu yeni sistem (1.4) sistemine denktir. Bu sistemin karakteristik denklemi daha karışık bir üstel denklem formunda olduğundan denklemin daha detaylı kök analizi verilmiştir. Sırf sanal köklerin varlığını garantileyebilmek için, Hopf çatallanma koşullarını gerçekleyecek biçimde yeni bir lemma daha ortaya konmuştur. Daha sonra yine Hopf çatallanmanın yönü, tipi ve kararlılığı belirlenmiştir. Nümerik örneklerle Hopf çatallanmasının varlığı desteklenmiştir. Gecikme parametresinin değeri arttıkça periyodik çözümlerin periyotlarının arttığı gösterilmiştir (Karaoğlu ve diğ., 2015; Karaoğlu ve diğ., 2016).

1.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemlere Giriş

Herhangi bir dinamik sistemde bir bilginin iletilebilmesi için belirli bir zamana ihtiyaç vardır. Bu, biyolojik bir sistemde belki kimyasal taşıyıcılar ile, elektronik aygıtlarda elektronlarla ya da optikle ilgili bir deneyde ışık yardımıyla olabilir. Fakat bütün durumlarda, iletimin sağlanabilmesi için mutlaka zamana ihtiyaç vardır (Atay, 2010; Feng ve diğ., 2007). Bu yüzden, tüm matematiksel modellerde gecikme teriminin etkisi göz ardı edilemez (Kuang, 1993).

Peki modellere gecikme terimleri eklemek neden bir gerekliliktir? Gecikme eklenen denklemleri çalışmak matematiksel açıdan oldukça zor olsa da doğada gecikmeler daima mevcuttur. Doğadan bir örnek verecek olursak, bir ağacı kestiğimizi düşünelim. Ağacın tekrar meyve verecek kadar olgunlaşması için belirli bir zaman geçmesi gereklidir. Bu bir gecikme olarak düşünülebilir. Bu yüzden orman hasatı denkleminde mevcut durumu daha iyi anlayabilmek için gecikme terimini koymak bir gerekliliktir (Kuang, 1993). Benzer şekilde, bir bakterinin kuluçka süresi, bir popülasyonda dişilerin doğurganlığa erişebilmeleri için geçen süre, bir kanser hastasına ilaç verildikten sonra ilacın etki etmesine kadar geçen süre, bir kanser hücresinin çoğalırken bölünme esnasında geçirdiği süre gecikmelere örnek verilebilir (Bilazeroğlu, 2012; Günel, 2006). Küçük gecikmelerin bile sistem dinamiğinin yapısında büyük değişimlere yol açtığı bilinmektedir (Kuang, 1993). Özetle, gecikme ihtiva eden bir fiziksel olayı daha iyi anlamak için gecikme içeren denklemler ile modelleme yapmak kaçınılmazdır.

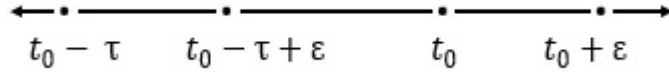
Daha önce belirttiğimiz gibi, matematiksel modelleme aslında adi diferensiyel denklemler teorisi ile başlamıştır. Fakat gün geçtikçe, çalışmalar hız kazandıkça bazı denklemlerin yetersiz kaldığı görülmüş ve gecikmeli diferensiyel denklemlerin diğer bir adıyla diferensiyel-fark denklemlerinin doğaya daha iyi bir yaklaşım verdiği gösterilmiştir. Ancak, tabii ki bu ilerlemenin yanı sıra denklemlerin analizleri de daha zor hale gelmiştir. Şimdi, gecikmeli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denklemlerden farklarını biraz özetlemeye çalışalım.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Kabul edelim, f fonksiyonu (t_0, x_0) noktasını içeren bir D bölgesi üzerinde sürekli ve x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın. O halde, bu başlangıç değer probleminin çözümü vardır ve tektir. Şimdi, $\tau > 0$ gecikme terimi olmak üzere aşağıdaki

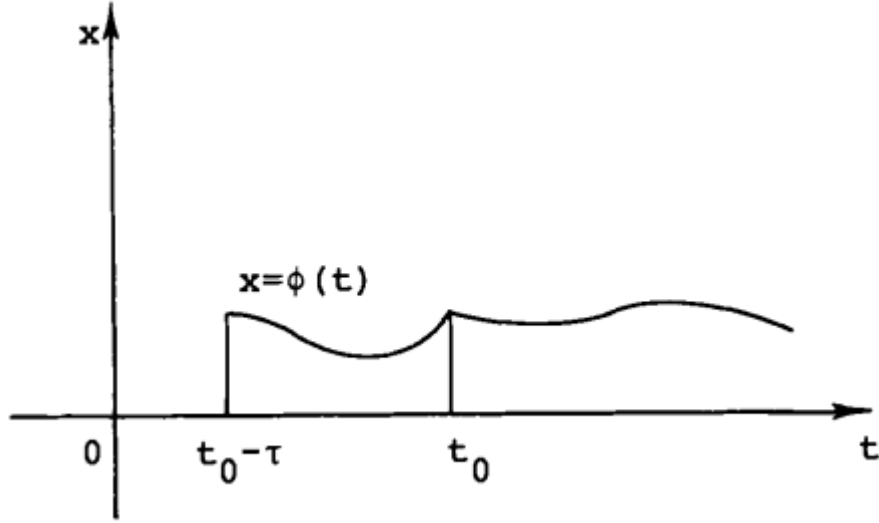
$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (1.7)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi düşünelim. Buradaki ilk fark, gecikmeli diferensiyel denklemlerdeki başlangıç değer probleminin adi diferensiyel denklemlerdeki başlangıç değer problemlerine göre daha çok bilgi gerektirmesidir. (1.6) adi diferensiyel denkleminde başlangıç koşulu Öklid uzayında bir nokta ile temsil edilirken gecikmeli diferensiyel denklemler için $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığındaki çözüm ile ilgili tüm bilgiye ihtiyaç vardır. Bu durumu şöyle açıklayabiliriz: (1.7) denkleminde t_0



Şekil 1.1: Gecikmeli diferensiyel denklemlerde tarihçe

başlangıç anından başlayan $x(t)$ çözümünü bulmaya çalışalım. Açıkça, belirli bir t_0 anında konumun zamana göre değişimi yani $x'(t_0)$ bulunmak istenirse $x(t_0)$ ve $x(t_0 - \tau)$ bilgilerine ihtiyacımız vardır. Zaman ilerledikçe pertürbe edilmiş $t_0 + \epsilon$ anı için ise $x(t_0 + \epsilon)$ ve $x(t_0 + \epsilon - \tau)$ bilgilerine ihtiyaç vardır (Bakınız Şekil 1.1). Bu yüzden bir başlangıç değer probleminin anlamlı olabilmesi için bir başlangıç fonksiyonuna ya da başlangıç noktası 0 olarak kabul edilirse $[-\tau, 0]$ aralığında $x(t)$ değerlerini veren bir başlangıç tarihçesine ihtiyacımız vardır. Yani, (1.7) sistemi için başlangıç koşulu $x(t) = \phi(t)$, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ olacak şekilde seçilmelidir (Şekil 1.2). Böyle bir başlangıç fonksiyonu ile birlikte (1.7) denklemi f ve ϕ sürekli olduğu ve f fonksiyonu bağımlı değişkene göre Lipschitz koşulunu sağladığı takdirde tek bir çözüme sahip olacaktır (El'sgol'ts ve Norkin, 1973). Başlangıç fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olarak alınırsa çözüm uzayı da $(C[t_0 - \tau, t], \mathbb{R})$ ile aynı boyutta olacaktır. Yani, gecikmeli diferensiyel denklemler sonsuz boyutludur (Daha detaylı bilgi için Forde (2005) referansına bakılabilir).



Şekil 1.2: Gecikmeli diferensiyel denklemlerde başlangıç koşulu (El'sgol'ts ve Norkin, 1973)

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denklem sistemlerinden bir diğer farkı da karakteristik denklemin artık polinom biçiminde olmamasıdır. Polinomdan ziyade, aşağıda verilen tipte denklem tipiyle karşılaşırız:

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (1.8)$$

Burada $P_0(\lambda)$ ve $P_1(\lambda)$, λ ya bağlı polinomlardır. Bu tip denklemler “transandantal

denklemler” ya da “üstel polinomlar” olarak adlandırılır. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin sonsuz boyutta oluşunu sistemlerin lineer kısımlarını çalışırken de açıkça görebiliriz. Genel olarak, bu tipteki bir denklemin sonsuz çoklukta çözümü olduğundan (El’sgol’ts ve Norkin, 1973), lineer denklem sistemine karşılık gelen sonsuz çoklukta lineer bağımsız çözüm vardır.

Karakteristik denklemlerin bu tipte karşımıza çıkması maalesef köklerinin bulunması hususunda işimizi çok zorlaştırmaktadır. Bu yüzden bu tip denklemler için lineer kararlılık analizi daha zordur. Literatürde, son 35 yılda üstel polinomların köklerinin bulunması konusunda bir çok araştırma yapılmıştır. Mevcut en güçlü kaynaklardan bir tanesi Bellman ve Cooke tarafından yazılmış “Differential-Difference Equations” kitabıdır (Bellman ve Cooke, 1963). Gecikmeli diferensiyel denklemler ve kararlılık analizleri hakkında daha detaylı araştırma yapmak isteyenler, temel kitaplar olarak nitelendirebileceğimiz Bellman ve Cooke (1963), Cushing (1977), El’sgol’ts ve Norkin (1973), Gopalsamy (1992), Hale (1977), Kuang (1993), MacDonald (1978a), MacDonald (1989), Smith (2011) kitaplarına bakabilirler.

1.1.1 Kesikli gecikme veya dağılımlı gecikme

Bir önceki bölümde de belirttiğimiz gibi, birçok biyolojik modelde değişkenlerin zamana bağlı değişimlerini incelerken sadece sistemin o anki durumunu göz önüne almak yerine sistemin geçmiş zamandaki durumunu da dikkate almamız gereklidir. Fakat “sistemin şimdiki zamandaki bilgisi” derken gerçekten neyi kastediyoruz, biraz matematiksel dille anlatmaya çalışalım. Aşağıdaki (1.9) denklemini ele alalım:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, z). \quad (1.9)$$

Bu denklemde $z = x$ alınırsa denklem

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, x) := g(x) \quad (1.10)$$

formatına gelir ve x in zamana bağlı değişimi anlık olup herhangi bir t_0 başlangıç değeri verildiğinde $t > t_0$ için $x(t)$ çözümü belirlenebilir. Yine (1.9) sisteminde $z = x(t - \tau)$ alınırsa

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, x(t - \tau)) \quad (1.11)$$

denklemini elde edilir ve bu gecikmeli diferensiyel denklemde $\tau > 0$ kesikli gecikme terimidir. Bu denklemini çözebilmek için $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığındaki her t için $x(t)$ değerlerini bilmemiz gerekir. Yani, her $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için $x(t)$ hakkında bilgiye sahip olmak gereklidir. Şimdi ise, ilk defa bahsedeceğimiz dağılımlı gecikmeye değinelim. Bazı sistemlerde, ayrı zamanlardaki geçmişin etkileri yerine tüm geçmişin birikimli etkisi görülebilir. Bu durumda (1.9) sisteminde $z = \int_{-\infty}^t x(\tau)G(t - \tau)d\tau$ alınırsa

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), \int_{-\infty}^t x(\tau)G(t-\tau)d\tau\right) \quad (1.12)$$

denklemi elde edilir. Bu sistemi çözmek için tüm negatif t ler için $x(t)$ lerin bilinmesi gereklidir. Bu gecikmeye “dağılımlı gecikme” ve denklem tipine de “integro-diferensiyel denklem” adı verilir. Kesikli gecikmeli veya dağılımlı gecikmeli denklemlere “fonksiyonel diferensiyel denklem” adı verilir (MacDonald, 1989).

(1.12) denklemindeki $G(u)$ “hafıza fonksiyonu” veya “gecikme çekirdeği” olarak adlandırılan ağırlık fonksiyonudur. Genellikle, ağırlık fonksiyonu normalleştirilir, yani

$$\int_0^{\infty} G(u)du = 1 \quad (1.13)$$

olarak alınır. Burada ilginç olan (1.12) denkleminde $G(t-\tau) = \delta(t-\tau-T)$ öyle ki δ Dirac Delta fonksiyonu olarak alındığında dağılımlı gecikmenin kesikli gecikmeye eşit olmasıdır. Bir bakıma dağılımlı gecikme, kesikli gecikmenin daha genel bir halidir.

Gecikme çekirdeğinin özelliklerinden bahsetmeden önce son bir tanım daha verelim:

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} uG(u)du \quad (1.14)$$

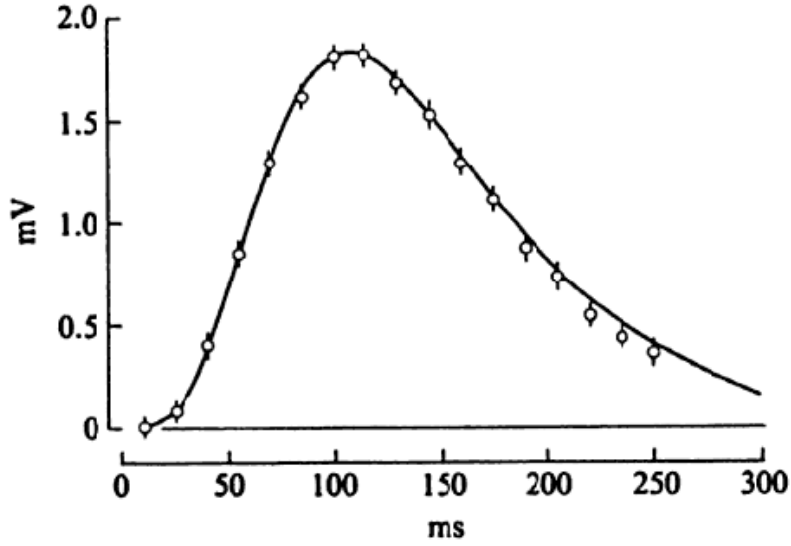
eşitliği “ortalama gecikme” olarak adlandırılır.

Genelde literatürde gecikme çekirdeğini aşağıda verilen “Gamma Dağılımı” olarak almak yaygındır:

$$G(u) = G_a^p(u) = \frac{a^{p+1}u^p}{p!} \exp(-au). \quad (1.15)$$

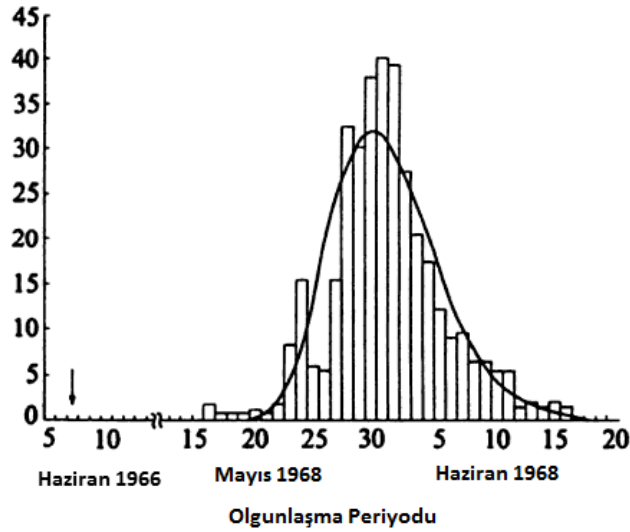
Gecikme çekirdeği Gamma Dağılımı olarak alındığında ortalama gecikme $\bar{T} = \frac{p}{a}$ olmaktadır. Özel olarak (1.15) denkleminde $p = 0$ alınırsa “zayıf çekirdek” ve $p = 1$ alınırsa “güçlü çekirdek” adı verilir. Aslında, genelde dağılımlı gecikmede neden Gamma dağılımının seçildiğinin birtakım biyolojik açıklamaları vardır. Bunu aşağıda verilen birkaç örnekle açıklamaya çalışalım. MacDonald’ın kitabında (MacDonald, 1989) bahsettiği örneğe bakalım (Bölüm 1.2.3, Örnek A). Bu örnek, bir kaplumbağanın gözüne 10 ms süreyle hafif bir ışık tutulduğunda, retinadaki hassas-kırmızı koni hücrelerinin verdiği tepkiyi araştırmaktadır (detaylı bilgi için kitaptaki referanslar incelenebilir). İlk sinyal verildiğinde, hücrelerde grafiği sivri ve hızlı bir akım beklenirken, aksine, yanıtın yaklaşık 100 ms civarlarında tepe noktası olan yaygın bir eğriye sahip olduğu gözlemlenmiştir (Bakınız Şekil 1.3). Diğer bir deyişle, çıktı dağılımlı gecikmeyle oluşmaktadır.

Yine aynı kaynaktan sinek olgunlaşma sürelerini içeren başka bir örneği verebiliriz. Bazı popülasyonlarda sinekler yumurtladıktan sonra, yeni oluşan larvanın tekrar yumurtlayabilmesi için (popülasyonun zamana bağlı değişimini etkileyebilmesi için) belirli bir süre gerekmektedir. İşte bu olgunlaşma süreci yine dağılımlı gecikmeye



Şekil 1.3: Kaplumbağa retinasındaki koni hücrelerinin voltajındaki değişim

uymaktadır (Şekil 1.4).



Şekil 1.4: Bazı sinek türlerinin olgunlaşma süreci

Son örnek olarak klasik Lotka-Volterra denklemlerini ele alalım:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(1 - bx - cy), \\ \frac{dy}{dt} &= -Ay(1 - dx). \end{aligned}$$

Burada $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla, t anındaki av ve avcı popülasyonlarının yoğunluğunu gösterebilir. Biyolojik açıdan, av ve avcı karşılaştıkları anda av popülasyonu azalmakta ve avcı popülasyonu büyümektedir. Fakat, avcı popülasyonundaki artış daha önceki

zamanlarda varolmuş av sayısına bağlı olduğundan, önceki zamanlardaki avların birikimli bir etkisi vardır. Bu yüzden yukarıdaki denklemde $dx(t)y(t)$ karşılaşma terimini $d(\int_{-\infty}^t x(\tau)G(t-\tau)d\tau)y(t)$ olan dağılımlı gecikme ile değiştirmek doğaya daha iyi bir yaklaşım olacaktır.

1.2 Çatallanma Teorisine Genel Bakış

Matematiksel modellerin çoğunun ortak özelliği modeli daha iyi tanımlamaya yarayan parametreler içermesidir. Parametreler, genellikle zamana bağlı olmayan fakat modelin ayrıntılarını oluşturan sabit katsayılardır. Örneğin, popülasyonlar için üstel büyüme modelini

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

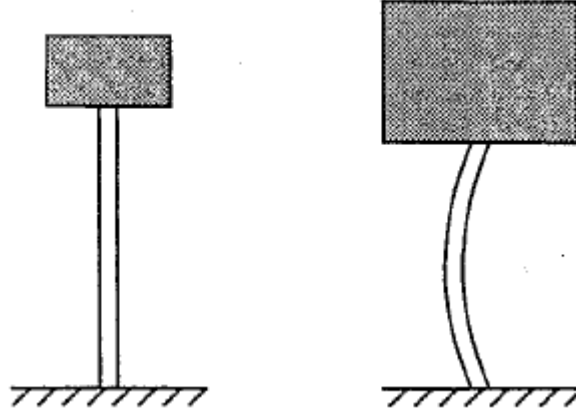
olarak ele alalım. Burada k bir parametredir. Bu modelde büyüme oranı $\frac{dP}{dt}$, toplam popülasyon yoğunluğunun sabit bir katı olarak kabul edilmektedir. Farklı popülasyonlara karşılık bu k değerinin farklı olmasını beklemek çok doğaldır. Örneğin, tavşanlar için kullanılan katsayının insanlar için kullanılan katsayıdan oldukça büyük olması çok normaldir.

İşte, parametreler değiştikçe çözümlerin yapısı nasıl değişir sorusunun yanıtını bulmak dinamik sistemlerin önemli bir çalışma sahası olmuştur. Bazı modeller için, belli bir aralıkta değişen parametrelerin sisteme olan etkisi araştırılır. Örneğin, bir köprünün zamana bağlı hareketini inceleyen bir modeli düşünelim. Köprünün üzerindeki toplam araba sayısı, köprünün rüzgara karşı davranışını doğrudan etkiler. Bu durumda modelimiz, köprü üzerindeki toplam araba kütlesi parametresini içermelidir. Belirli bir aralıkta değişen araba kütlelerine karşın sistemin çözümü köprünün davranışının nasıl değişeceği yönünde bize fikir verebilir (Blanchard ve diğ., 2011).

Birçok modelde parametrelerin kesin değerlerinden çok yaklaşık değerlerini biliriz. Bu yüzden, modelden çıkarımlar yapabilmek için, parametrelerdeki hafif değişikliklerin çözümün davranışını nasıl etkilediğini bilmemiz gerekir. Ayrıca, modelimizde yer almayan fakat parametrelerin değişimini etkileyen başka faktörler de bulunabilir. Bu da, parametrelerin seçimlerinin hassaslığını oldukça dramatik hale getirmektedir.

Şimdi, parametre değişirken sistem davranışının değişmesine bir örnek verelim. Eğilebilen metal bir çubuğun üzerine bir yük koyalım. Sol tarafta sistem dengede yani kararlı pozisyonda dururken, yükün ağırlığını artırdığımızda metal çubuk bükülmeye başlar ve sistemin dengesi bozulur (Bakınız Şekil 1.5).

Çatallanma, bir kontrol parametresine bağlı olarak dinamik sistemin kalitatif yapısında değişiklik olmasıdır (Strogatz, 1994). Diğer bir deyişle, parametredeki küçük bir değişikliğin çözümlerin uzun zamandaki davranışlarını etkilemesine çatallanma adı verilir (Blanchard ve diğ., 2011). Bu değişikliğin olduğu parametre değerine “**çatallanma noktası (değeri)**” adı verilir. Yukarıdaki örnekte, yükün ağırlığı kontrol parametresi iken çubuğun eğilmeye başladığı andaki yükün ağırlığı çatallanma değeridir.



Şekil 1.5: Metal bir çubuğun kararlılık yapısının değişmesi (Strogatz, 1994)

Çatallanmaların hem kesikli dinamik sistemlerde hem de sürekli dinamik sistemlerde farklı tipleri mevcuttur. Çatallanmalarda sadece kararlılık yapılarının değişmesi gerekmez. Parametreler değişirken denge noktalarının sayısının değişmesi, birdenbire periyodik çözümlerin ortaya çıkması da çatallanmalara örnek teşkil edebilir. Buradan da anlaşılacağı üzere, çatallanma konusu çok derin analiz gerektiren anlaşılması zor bir konudur. Bir sonraki bölümde sürekli dinamik sistemlerde çatallanma türlerinden biri olan Hopf çatallanmanın daha detaylı incelenmesi amaçlanmaktadır.

2. HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

Hopf çatallanma, bir dinamik sistemde, denge noktasının lokal komşuluğunda (bir çift sırf sanal özdeğer bulunmasıyla) limit döngülerinin ortaya çıktığı çatallanma tipidir. Bir sistemin kararlılık yapısının, lineerleştirilmiş sistemin özdeğerlerinin işaretiyle alakalı olduğunu daha önceki diferensiyel denklemler teorisi bilgilerimizden biliyoruz. Örneğin, bütün özdeğerler negatif reel kısma sahip ise sistemin denge noktası kararlı veya özdeğerlerden herhangi bir tanesi pozitif reel kısma sahip ise denge noktası kararsızdır diyoruz. Peki ya özdeğerlerden bir tanesi sırf sanal halde bulunuyorsa kararlılık yapısı nasıl olacaktır? İşte matematiğin büyüğü burada başlar ve çözümlerin içerisinde bazı salınımlı hareketler bekleriz. Hopf çatallanma konusundaki amacımız da, sistemimize parametreler eklediğimizde, seçilen parametreye karşılık parametrenin hangi değerleri için sistemin sırf sanal özdeğerleri olduğunu bulmaktır. Bu kritik parametre değerinde, bazı koşullar altında denge noktasından doğan limit döngüleri elde ederiz.

Çatallanma teorisinde periyodik çözümler ailesinin çıkması için yeterli koşullar Poincaré-Andronov-Hopf Çatallanma Teoremi veya kısa adıyla Hopf Çatallanma Teoremi ile verilir. Hopf Çatallanması iki veya daha fazla boyutta birinci mertebeden diferensiyel denklem içeren sistemlerde ortaya çıkabilir. Şimdi n boyutta teoremin ifadesini vereceğiz ve teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için iki boyutta şekillerle teoriyi pekiştireceğiz.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in I \subset \mathbb{R} \quad (2.1)$$

adi diferensiyel denklem sistemini düşünelim. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere $x^*(v)$, (2.1) sisteminin ayırık denge noktası ve $x = x^*(v)$ değerinde

$$A(v) = D_x f(x^*(v), v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*(v), v); i, j = 1, \dots, n \right)$$

sistemin Jakobiyen matrisi olsun. Ayrıca, bu Jakobiyen matrisinin bazı $v = v^c$ kritik çatallanma değerleri için

$$\omega(v^c) = \omega_0 > 0, \quad \alpha(v^c) = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(v^c) \neq 0 \quad (2.2)$$

koşullarını sağlayan $\lambda_1(v) = \alpha(v) + i\omega(v)$ ve $\bar{\lambda}_2(v)$ kompleks eşlenik özdeğerleri mevcut olsun. Burada, v^c kritik çatallanma değerimiz olacaktır.

$$X = x - x^*(v) \quad \mu = v - v^c$$

olacak şekilde yeni değişkenleri tanımlayabiliriz. Bu değişkenlerle, genelliği bozmadan, denge noktasını $0 \in \mathbb{R}^n$ ve çatallanma değeri v^c yi $\mu = 0$ kritik değerine taşımış oluruz. Buradaki amacımız, lineerleştirme yaparken Taylor açılımında işlemlerin daha kolay olmasını sağlamaktır. Bu değişkenler yardımıyla daima sıfırdan farklı denge noktası orijine ve sıfırdan farklı çatallanma değeri de sıfıra taşınabilir. Aşağıdaki teoremin ifadesi de bu dönüşümlerden sonra elde edilen sistem için verilmiştir. Şimdi,

$$F(X, \mu) = f(X + x^*(v^c + \mu), v^c + \mu)$$

olmak üzere, sistemimiz, (2.1) sistemine topolojik olarak denk olan

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu), \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

sistemine dönüşür. Aşağıda verilen teoremin ifadesi Hassard ve diğ. (1981) referansından alınmış olup, teoremin başka ifadelerine ve ispatına bu kitaptaki referanslardan ulaşılabilir.

Teorem 2.1 (E. Hopf).

1. Sıfırı içeren açık bir komşulukta her μ için $F(0, \mu) = 0$ ve $0 \in \mathbb{R}^n$, F nin ayrık bir denge noktası,
2. F fonksiyonu, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ deki $(0, 0)$ 'in bir komşuluğunda X ve μ ye göre analitik,
3. $A(\mu) = D_X F(0, \mu)$ Jakobiyen matrisi λ ve $\bar{\lambda}$ olacak şekilde bir tane kompleks özdeğer çiftine sahip öyle ki

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu),$$

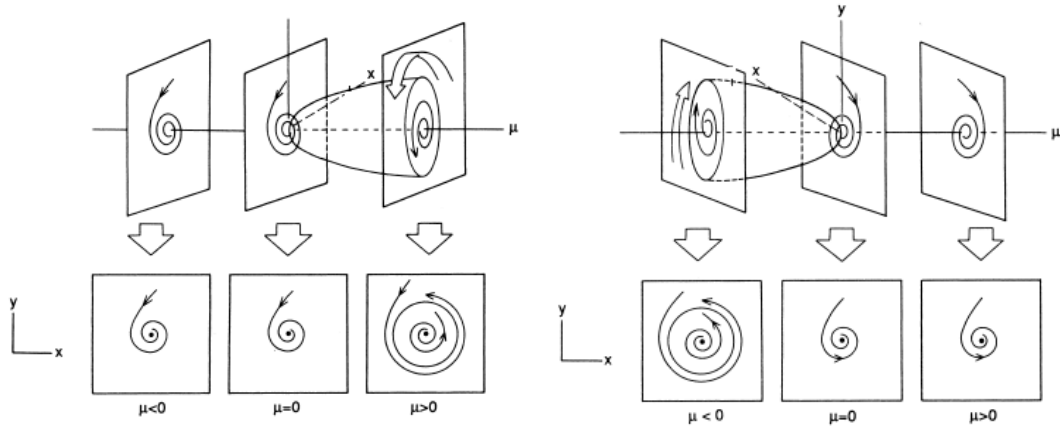
$$\omega(0) = \omega_0 > 0, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0 \quad (\text{transversalite (kesme) koşulu})$$

olsun,

4. $A(0)$ matrisinin geriye kalan $n - 2$ tane özdeğeri negatif reel kısma sahip olsun.

Bu takdirde sistem (2.3) periyodik çözümler ailesine sahiptir.

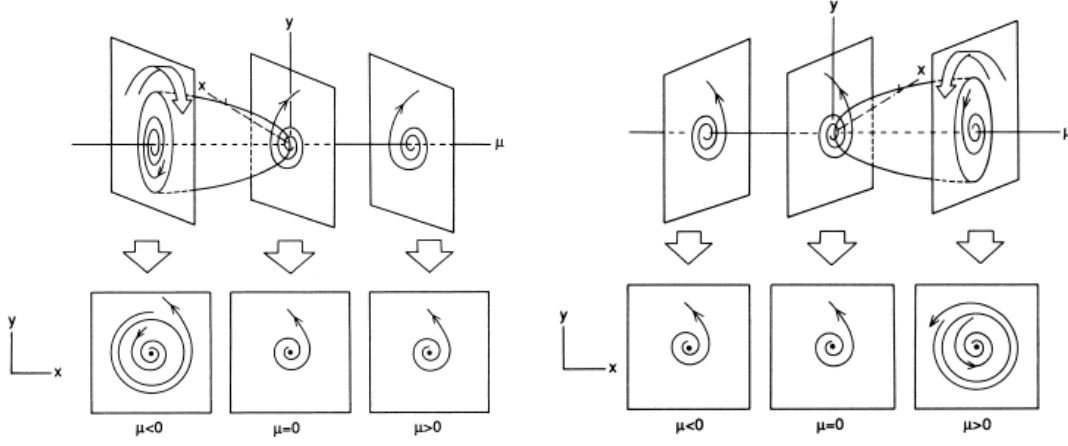
Çatallanma, limit döngülerinin kararlı ya da kararlız olmasına bağlı olarak Süperkritik ya da Subkritik Hopf Çatallanma olarak adlandırılır. Hopf çatallanmasında transversalite koşulunun işaretine göre denge noktasının kararlılığı değişir. Yukarıda bahsedilen transversalite koşulu için, $\alpha'(0) > 0$ ise μ arttıkça özdeğerler sol yarı-düzlemden sağ yarı-düzleme geçeceğinden denge noktası $\mu < 0$



Şekil 2.1: Süperkritik Hopf çatallanmalar (Wiggins, 2003). Her iki durumda da periyodik çözümler kararlıdır. Sol tarafta orijin, kritik çatallanma değerinden önce kararlı iken sağ tarafta kritik değerden sonra kararlıdır .

için kararlı ve $\mu > 0$ için kararsızdır. Aksine, $\alpha'(0) < 0$ ise μ arttıkça özdeğerler sağ yarı-düzlemden sol yarı-düzleme geçer ve denge noktası $\mu < 0$ için kararsız ve $\mu > 0$ için kararlıdır. Bu durumda dört farklı sonuç ortaya çıkabilir. Kritik çatallanma değerinden önceki değerler için sistemin denge noktası kararlı iken, çatallanma değerinden sonra denge noktası kararsız hale gelir ve kararlı periyodik çözümler elde edilirse veya kritik değerden önce denge noktası kararsız fakat kararlı periyodik çözümler var ise Süperkritik Hopf Çatallanma olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 2.1). Kritik çatallanma değerinden önceki değerler için sistemin denge noktası kararlı ve kararsız limit döngüleri mevcutken, çatallanma parametresinden sonra limit döngüleri yok olup denge noktası kararsız hale geliyorsa veya periyodik çözümler kritik değerden sonra kararsız bir şekilde ortaya çıkıyorsa Subkritik Çatallanma adı verilir (Bakınız Şekil 2.2). Dikkat edilirse, tüm şekillerde genelliği bozmadan denge noktası orijin ve kritik değer $\mu = 0$ olarak alınmıştır. Teorem 2.2'nin 3. hipotezinde de bu kritik değerden dolayı sıfır alınmıştır. Başka kaynaklarda kritik değer sıfıra taşınmadan teoremin ifadesinin verildiği görülebilir.

Burada Kuznetsov (1995) referansında verilen notlardan da bahsedelim. Bu kitapta, subkritik ve süperkritik isimlerinin sırasıyla periyodik çözümlerin ortaya çıkışının çatallanma noktasından önce ve sonra olmasına göre isimlendirildiği belirtilmektedir. Ancak, tabii seçilen yöne göre parametrenin artıp artmadığı değişeceğinden bu terimlerin biraz yanıltıcı olduğu vurgulanmıştır. Bir diğer not ise her iki çatallanma tipinde de denge noktasının kararlılığında bir kayıp olduğudur. Süperkritik çatallanmada kararlı bir denge noktası kararlılığını kaybetmekte fakat denge noktasının etrafında kararlı periyodik çözümler oluştuğu için kararlılık kaybı çok keskin değildir (noncatastrophic) ve bu yüzden sistem kontrol edilebilir bir sistemdir. Aksine, subkritik Hopf çatallanmada kararsız periyodik çözümler çatallanma parametresi kritik değere yaklaştıkça yok olmaya başlamakta ve denge noktası kararlı hale gelmektedir. Bu durumda kararlılık yapısında keskin (catastrophic) bir geçiş vardır. Bu keskin durumda, kararsız periyodik çözümler ortaya çıktıktan sonra parametreyi küçültsek bile sistemi eski kararlılığına getirmek mümkün olmayabilir (sistem çekim bölgesinden çıkmış olabilir), bu da sistemin kontrolünü zorlaştırmaktadır.



Şekil 2.2: Subkritik Hopf çatallanmalar (Wiggins, 2003). Periyodik çözümler kararsızdır. Soldaki şekilde orijin kritik çatallanma değerinden önce kararlı iken sağdaki şekilde kritik değerden sonra kararlıdır.

Bir sistemde, Hopf teoreminin hipotezlerini sağladıktan sonra çatallanma yönünün yani çatallanma çeşidinin süperkritik mi yoksa subkritik mi olduğunu belirleyebilmek için Lyapunov katsayısını hesaplamamız gereklidir. Aşağıda Lyapunov katsayısı bulunduğundan sonra periyodik çözümlerin yönünü, kararlılığını ve periyodunu veren teoremin ifadesi verilmiştir. Lyapunov katsayısının bulunması ise gecikmeli diferensiyel denklemler için 2.3 bölümünde detaylıca anlatılacaktır.

Teorem 2.2. $c_1(0)$ Lyapunov katsayısı olmak üzere,

1. $\mu_2 = -\frac{1}{\alpha'(0)}Re(c_1)(0) > 0$ ise, çatallanma süperkritik
2. $\mu_2 = -\frac{1}{\alpha'(0)}Re(c_1)(0) < 0$ ise, çatallanma subkritiktir.

$A(0)$ matrisinin geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatif ve

1. $\beta_2 = 2Re(c_1)(0) < 0$ ise, periyodik çözümler kararlı,
2. $\beta_2 = 2Re(c_1)(0) > 0$ ise, periyodik çözümler kararsızdır.

Ayrıca, μ_2 , Teorem 2.2'de tanımlı olduğu üzere

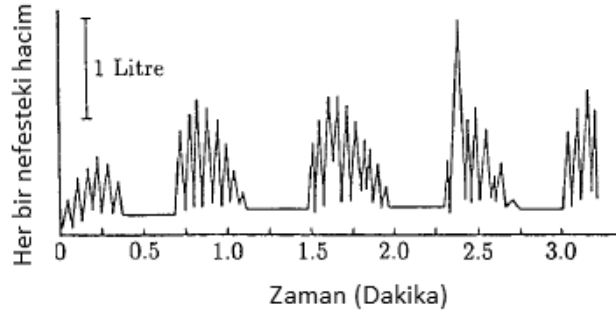
$$T_2 = -\frac{Im\{c_1(0)\} + \mu_2 Im\{\lambda'(\mu)\}}{\omega\mu} \quad (2.4)$$

eşitliğinden periyodik çözümlerin periyoduna karar verilir. $T_2 > 0$ ise, çatallanma değeri μ arttıkça periyodik çözümlerin periyodu artar, $T_2 < 0$ ise periyodik çözümlerin periyodu azalır.

2.2 Hopf Çatallanmanın Önemi

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, Hopf çatallanma bir sistemde lokal olarak periyodik çözüm var mı sorusunun cevabını vermektedir. Bir olgunun periyodik olması onun kontrol edilebileceği anlamını taşımaktadır. Periyodik çözümler, doğada hemen hemen her alanda görülmektedir. Kalbin ritminin periyodik olması, solunum olayı, gece-gündüz döngüsü, köprü ve uçak kanatlarındaki kendinden uyarmalı titreşimler, günlük vücut sıcaklığı ve hormon döngüsü, uyku döngüsü gibi günlük hayattan birçok örnek verilebilir (Strogatz, 1994). Popülasyon dinamiğinde de, av-avcı popülasyonlarının her ikisinin de yok olmadan hayatta kalması yine bir döngüdür. Kalbin kasılmasını sağlayan nöronlar da periyodik olarak aynı anda uyarılıp aynı anda sönmektedirler. Bir bakıma sinir ağları modellerinin de periyodik salınımlılık göstermesi şaşırtıcı değildir. Bilimsel açıdan da periyodik çözüm veren sistemler kendi kendine yetebilen (self-sustained) yani herhangi bir dış etki olmadan da salınımlılık gösteren sistemlerdir.

Fizyoloji açısından da örnekleri çoğaltabiliriz. Bunun için Glass ve Mackey (1988) referansında verilen hastalık örnekleri incelenebilir. Birçok hastalığın başlangıç semptomları periyodik olarak görülmektedir. Bu duruma, yine Glass ve Mackey (1988), Mackey ve Glass (1977) referanslarından alınan aşağıdaki Şekil 2.3 ile örnek verelim.



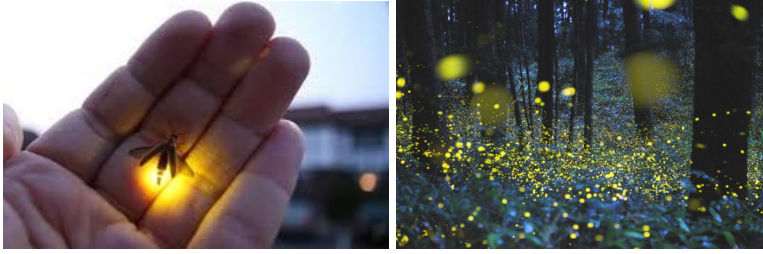
Şekil 2.3: Cheyne-Stokes solunumuna sahip 29 yaşındaki bir bireyin nefes alma spirogramı

Cheyne-Stokes solunumu adı verilen hafif bir rahatsızlığın başlangıç semptomu, düzenli solunum akışının değişmesiyle başlar. Hasta, düzenli solukların arasında nefes alıp verme sorunu yaşamaktadır. Grafikten de görüldüğü gibi, spirogramdan ölçülen sonuçlar periyodik bir davranış sergilemektedir.

Şimdi, sinir ağlarından bir örnekle devam edelim. Fizyolojik deneyler, beynimizin kaotik bir yapı sergilediğini göstermektedir (Das ve Kundu, 2014). Eğer bu kaotik yapı bozulursa, bilgi işleme için gerekli olan hızlı faz değişimlerinde aksaklıklar yaşanacaktır. İşte Alzaymır hastalığında da bu durum gerçekleşmektedir. Alzaymır hastalarının beyinleri, elektrofizyolojik açıdan aktif olmayan sinir hücreleri içermekte ve daha az kaotik yapı göstermektedirler. Aslında bir bakıma, kaotiklik sağlıklı olma durumunu yansıtmaktadır. Bu hastalığı modelleyen bir çalışmada periyodik çözüm çıkması, orada kaotik bir yapının var olamayacağı anlamına gelmektedir.

Başka bir örneği de epilepsi hastaları için verebiliriz. Epilepsi hastalarının EEG kayıtlarında, epilepsi ataklarından önce, kaotik beyin yapısı bozulmuş ve bir takım periyodik çözümler görülmüştür. Aslında, periyodik çözümün başlangıcı tahmin edilebilirse, bir sonraki atağın ne zaman olacağı hakkında bilgi sahibi olunabilir.

Bir diğer ilginç örneği de doğadan verelim. Geceleri belirli bir periyotta yanıp sönen ateşböcekleri de bir matematiksel model yardımıyla Hanson (1978) tarafından deneysel olarak çalışılmıştır. Ateşböceklerinin erkeklerinin dişilere kendilerini beğendirmek için ışıklarını yakıp söndürdükleri bilinmektedir. Başlangıçta farklı anlarda yanıp sönen bu böceklerin bir süre sonra belirli bir periyotta ve aynı anda yanıp söndükleri gözlemlenmiştir. Üstelik, dışarıdan periyodik (ateşböceğinin periyodu olan yaklaşık 0.9 saniyeye yakın) yapay bir ışık verildiğinde, ateşböceğinin periyodunu değiştirdiği ve uyum sağladığı da görülmüştür. Eğer kaynağın periyodu, ateşböceğinin periyoduna uzak ise bir değişim gözlenmemiştir.



Resim 2.1: Ateşböcekleri (Url-1, Url-2)

2.3 Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerde Hopf Çatallanma Teorisi

Adi diferensiyel denklem sistemlerinde olduğu gibi gecikmeli diferensiyel denklem sistemlerinde de, lineer sistemin özdeğerlerinin sistemin yapısı hakkında bir nebze bilgi verdiğini daha önce vurguladık. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin sonsuz boyutlu oluşundan dolayı da sistemin özdeğerlerinin reel kısımlarını incelemek ve dolayısıyla sistemin kararlılık yapısını belirlemek zorlaşmaktadır. Bu yüzden literatürde boyut indirgemek amacıyla birçok yöntem kullanılmıştır. Center Manifold (Merkez Çok Katlı) teorisi bu teorilerden en önemlisi ve yaygın olanı sayılabilir. Bir dinamik sistemde merkez çok katlısı, kararlı veya kararsız çok katlılar tarafından kontrol edilemeyen yörüngeleri içeren çok katlıdır (Url-4). Elimizdeki sisteme karşılık gelen lineer sistemde, negatif reel kısma sahip özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzaya kararlı öz uzay, pozitif reel kısma sahip özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzaya kararsız öz uzay, sıfır sanal özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzaya merkez (center) öz uzay adı verilir. Lineer olmayan sistemde ise bu öz uzaylara teğet olan aynı boyutta kararlı, kararsız ve merkez çok katlılar vardır.

Gecikmeli olsun veya olmasın, diferensiyel denklemlerde Hopf çatallanmasının yapısını çalışırken sıfır sanal özdeğerler elde ettiğimiz için bütün sistemin analizi yerine sistemi merkez çok katlısı üzerine izdüşüm yaparak analiz etmek daha kolaydır. Bu durumda, tek bir sıfır sanal özdeğer çiftimiz var ise sistem iki boyuta indirilir. Aşağıda oldukça uzun bir teori olan merkez çok katlısına indirgeme yöntemi ve normal form bulunuşu detaylı şekilde açıklanmıştır.

$C^k[-r, 0]$, $[-r, 0]$ aralığında tanımlı n -boyutlu reel vektör değerli ve k -kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı olsun. $x : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t + f(x_t, \mu), \quad t > 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

otonom sistemini düşünelim. Burada, $L_\mu : C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir parametrelili sürekli (sınırlı) lineer operatörlerin ailesi ve $f(\cdot, \mu) : C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ en az kuadratik terimler içeren ve $f(0, \mu) = 0$, $D_x f(0, \mu) = 0$ özelliklerini sağlayan bir operatördür. Teoriye uyması amacıyla $f(\cdot, \mu)$ nün analitik olduğunu ve çok küçük $|\mu|$ değerleri için f ve L_μ operatörlerinin μ çatallanma parametresine analitik olarak bağlı olduğunu kabul edelim.

Dikkat edilirse, sistem (2.5), $x(t)$ ve x_t ile gösterilen iki farklı bilinmeyen içermektedir. Bu yüzden ilk amacımız, sistemi tek bilinmeyeni x_t olan

$$x_t' = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (2.6)$$

sistemine dönüştürmektir. Bunun için, (2.5) sisteminin $x' = L_\mu x_t$ lineer kısmını Riesz Temsil Teoremini kullanılarak yeniden yazabiliriz. Riesz Temsil Teoreminden her bir bileşeni sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in C[-r, 0]$ için

$$L_\mu(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) \quad (2.7)$$

koşulunu sağlayan $\eta(\cdot, \mu) : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü vardır. Özel olarak,

$$L_\mu(x_t) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta, \mu)x(t + \theta) \quad (2.8)$$

sağlanır. $\eta(\cdot, \mu)$ dönüşümü denkleme göre değişiklik gösterir. Şimdi L_μ operatörünün

$$\sigma(\mu) = \{\lambda \mid \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda\theta}) = 0\} \quad (2.9)$$

spektrumunda Hopf çatallanma kabullerini verelim:

1. α ve ω reel olmak üzere $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$ ve $\alpha'(0) \neq 0$ koşullarını sağlayan $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ olacak şekilde $\sigma(\mu)$ de tek katlı (basit) $\lambda(\mu)$ ve $\bar{\lambda}(\mu)$ sanal özdeğerleri vardır.
2. $\sigma(0)$ kümesinin $\lambda(0)$ ve $\bar{\lambda}(0)$ haricindeki diğer tüm elemanlarının reel kısımları sıfırdan farklıdır.

Daha önce Teorem 2.1'de verilen koşullar gibi bu kabuller de Hopf çatallanmasının varlığını ve reel değerli periyodik çözümlerin ortaya çıktığını garantiler. Aşağıda

periyodik çözümlerin yönünü, kararlılığını ve Hopf çatallanmasının tipini veren adımlar anlatılmaktadır.

Yukarıda verilen $\eta(\cdot, \mu)$ fonksiyonu yardımıyla, $\phi \in C^1[-r, 0]$ olmak üzere

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) = L_\mu(\phi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.10)$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ f(\phi, \mu), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.11)$$

operatörlerini tanımlayabiliriz. Böylece (2.5) sistemini $x_t' = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t$ sistemine dönüştürmüş oluruz.

Yön analizi yapabilmek için, μ kritik çatallanma parametresinin yakın komşuluğunda araştırma yapmak yeterlidir. Bu yüzden, bu aşamadan sonra $\mu = 0$ alabiliriz. Şimdi, $A(0)$ operatörünün $\lambda(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q(\theta)$ özvektörünü hesaplayacağız. Ayrıca $A(0)$ operatörünün adjoint operatörü olan $A^*(\mu)$ operatörüne de ihtiyacımız vardır. η^T , η 'nin transpozu olmak üzere $A^*(\mu)$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A^*(\mu)\phi(s) = \begin{cases} -\frac{d\phi(s)}{ds}, & s \in (0, r] \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta^T(s, \mu)\phi(-s), & s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.12)$$

Bu tanımlardan $q(\theta)$ ve $\bar{\lambda}(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q^*(s)$ özvektörleri şu eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} A(0)q(\theta) &= i\omega_0 q(\theta) \\ A^*(0)q^*(s) &= -i\omega_0 q^*(s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sıfır denge noktası civarında C_0 merkez çok katlısını tanımlamak için ilk önce çok katlının koordinatlarının belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunun için ise özel bir iç çarpıma gereksinim duyulmaktadır. $\psi \in C[0, r]$ ve $\phi \in C[-r, 0]$ olmak üzere iç çarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta, \mu) \phi(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. A ve A^* adjoint operatörler oldukları için $(\phi, \psi) \in C[-r, 0] \times C[0, r]$ için $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle$ sağlanır. Yukarıda verilen q ve q^* bu iç çarpım altında normalleştirilir, yani bu özvektörler $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve

$\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Her bir $x \in C[-r, 0]$ için merkez çok katlısının koordinatlarını veren (z, w) ikilisinin oluşturulması gerekmektedir. Burada

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x \rangle \quad (2.15)$$

ve

$$w = x(\theta) - z(t)q(\theta) - \overline{z(t)q(\theta)} = x(\theta) - 2\text{Re}(z(t)q(\theta)) \quad (2.16)$$

eşitlikleri ile verilir. $\mu = 0$ iken (2.6) sisteminin x_t çözümleri için (2.15)

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x_t(\theta) \rangle \quad (2.17)$$

ve (2.16)

$$w(t, \theta) = x_t(\theta) - z(t)q(\theta) - \overline{z(t)q(\theta)} = x_t(\theta) - 2\text{Re}(z(t)q(\theta)) \quad (2.18)$$

olarak tanımlanır. C_0 çok katlısı üzerinde $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ olduğundan Taylor serisine açılabilir ve

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.19)$$

sağlanır. z ve \bar{z} sırasıyla q ve \bar{q}^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatlarıdır. x_t reel iken w da reel olacağından sadece reel çözümlerle ilgilenmekteyiz. Ayrıca $\langle q^*, w \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. (2.6) sisteminin $x_t \in C_0$ çözümleri için

$$z' = \langle q^*, x_t' \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \quad (2.20)$$

ya da $\mu = 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0 z + \overline{q^*(0)} f(w(z, \bar{z}, \theta) + 2\text{Re}(z(t)q(\theta))) \\ &= i\omega_0 z + \overline{q^*(0)} f_0(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu eşitlik kısaca

$$z' = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}) \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir.

Bir sonraki amacımız g fonksiyonunu z ve \bar{z} değişkenlerinin kuvvetleri cinsinden yazmak ve çatallanmanın yön analizi için gerekli olan Lyapunov katsayısını hesaplamaktır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretini tespit edebilmek için g fonksiyonunun $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 'da Taylor açılımındaki g_{ij} katsayılarının bulunması gerekmektedir. (2.21) ve (2.22)'den

$$g(z, \bar{z}) = \overline{q^*(0)} f_0(z, \bar{z}) \quad (2.23)$$

olduğu ve g_{ij} katsayılarının w_{ij} katsayılarına bağlı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $w_{ij}(\theta)$ katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. Bunun için, (2.18) denkleminde t değişkenine göre türev alınır

$$w' = x'_t - z'_t q - \bar{z}'_t \bar{q} \quad (2.24)$$

ve bu denklemde (2.6) ve (2.22) ifadeleri kullanılırsa

$$w' = \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\overline{q^*(0)} \cdot f_0\}q(\theta), & \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\overline{q^*(0)} \cdot f_0\}q(0) + f_0, & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.25)$$

elde edilir. Bu ifade ise

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.26)$$

olmak üzere

$$w' = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, orijin civarında C_0 çok katlısı üzerinde

$$w' = w_z z' + w_{\bar{z}} \bar{z}' \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.19) ve (2.22) ifadelerinden faydalanarak w_z , $w_{\bar{z}}$, z' ve \bar{z}' ifadeleri yerine yazılırsa w' için yeni bir eşitlik elde edilmiş olur. Elde edilen bu ifade ile (2.27) denkleminin sağ tarafı eşitlenirse

$$\begin{aligned} (2i\omega_0 I - A(0))w_{20}(\theta) &= H_{20}(\theta) \\ -A(0)w_{11}(\theta) &= H_{11}(\theta) \\ w_{02}(\theta) &= \bar{w}_{20}(\theta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

eşitlikleri bulunur. w_{ij} katsayıları hesaplandıktan sonra

$$z' = i\omega_0 z + g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (2.30)$$

eşitliğini yazabiliriz. $i + j \leq 3$ için g_{ij} katsayıları

$$\overline{q^*(0)} f_0 \left(zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \quad (2.31)$$

ifadesinin açılımından elde edilir. Sonuç olarak, Hopf çatallanmasının yönünün belirlenmesinde kullanılan ve g_{ij} katsayıları ile belirlenen Lyapunov katsayısı $c_1(0)$ ise:

$$c_1(0) = \frac{i}{\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21} \quad (2.32)$$

formülü ile hesaplanır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2'de verilen ifadelerle göre çatallanmanın yönünü ve kararlılığını belirleyebiliriz. Ayrıca yine Lyapunov katsayısının sanal kısmının işaretinden

yararlanılarak periyodik çözümlerin periyodu hesaplanabilir.

3. ORAN-BAĞIMLI BİR AV-AVCI DENKLEMİNDE KESİKLİ GECİKMEYE BAĞLI HOPF ÇATALLANMA

Son 50 yılın literatüründe av-avcı arasındaki dinamiği inceleyen çalışmalar hız kazanmıştır. Bu hızlı ilerleme matematikçiler açısından ekoloji için çok önemli adım olarak görülse de ekolojistler bu duruma karşı çıkmaktadırlar (Arditi ve Ginzburg, 1989; Beretta ve Kuang, 1998). Burada karşı çıktıkları durum modellerin analizlerinden değil modellerin kendisinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, av-avcı etkileşim modellerinin çoğu kimya, fizik ve matematiği birleştiren ve temel model kabul edilen Lotka-Volterra (Allen, 2007; Beretta ve Kuang, 1998) denklemlerinin bir benzeridir. Bu modelde kimyadan kütle etkisi kanunu, fizikten korunum yasası ve matematikten temel diferensiyel denklemler teorisi kullanılmıştır. Fakat karşı çıkılan durum, modelin biyolojik bakış açısıdır. Tabii ki tüm biyolojik durumları bir denkleme dönüştürerek problemlere yaklaşım yapmamız gereksinimlerimizi karşılayamaz. Ancak, mükemmel bir model bulunmadığı gibi en azından iyileştirilmiş modeller ile bazı durumlara çözüm bulunabilir. Bu denklemlerden sonra doğaya daha uygun olan oran-bağımlı denklemlerin biyolojik içerik olarak daha zengin olduğu anlaşılmıştır. Avlanmanın sadece avın sayısına bağlı olduğunu kabul eden Lotka-Volterra denklemlerinin aksine, oran-bağımlı denklemlerde avcının sayısı ava bağlı olarak değişirken aynı zamanda avdaki azalmadan dolayı avcılar arasında bir yarış olacağından avcılarının sayısına da bağlıdır.

3.1 Literatürde Oran-Bağımlı Denklem

Literatürde C.S. Holling'in çalışmaları (Holling, 1959; 1965; 1966), avcılarının kaynak kullanımını etkileyen faktörlerle ilgili en kapsamlı çalışmalar sayılmaktadır. Holling, çalışmalarında avcılarının beslenme oranını yiyecek (av) yoğunluğuna bağlı değişimlerin fonksiyonu olarak betimler. Holling, beslenme oranındaki bu değişimleri "fonksiyonel cevap" olarak adlandırmaktadır (Leslie, 1977). Başka bir deyişle, fonksiyonel cevap, avcı başına düşen av sayısına bağlı avlanma oranıdır. Fonksiyonel cevap terimini av bağımlı, avcı bağımlı ve türler arası bağımlı olacak şekilde üç sınıfa ayırabiliriz. Sırasıyla, av bağımlı, avcı bağımlı ve türler arası bağımlı fonksiyonel cevabın sadece av sayısına bağlı olduğunu, hem av hem avcı sayısına bağlı olduğunu ve odak noktası olan av ve avcıdan başka türlerin popülasyon yoğunluğuna bağlı olduğunu ifade edebiliriz (Abrams ve Ginzburg, 2000). 2000'li yıllarda avlanma teorisi av bağımlı modeller ve Holling'in üç tip sınıflaması üzerinde yoğunlaşsa da Arditi ve Ginzburg (1989) oran-bağımlı fonksiyonel cevap akımını başlatmışlardır. Daha sonra, bu çalışmaları biyolojik ve fizyolojik kanıtlar içeren çalışmalar takip etmiştir (Arditi ve Berryman, 1991; Arditi ve Saiah, 1992). Oran-bağımlı fonksiyonel cevap aslında avcı bağımlı fonksiyonel cevabın bir çeşidi olup avlanmanın sadece av ve avcı yoğunluklarının mutlak değerlerine bağlı değil, aynı zamanda av ve avcı

popülasyonunun oranına bağlı olduğunu ifade eder.

Genel olarak, klasik bir Lotka-Volterra av-avcı sistemi

$$\begin{aligned}x' &= xf(x) - myg(x) \\y' &= y(cmg(x) - d)\end{aligned}\tag{3.1}$$

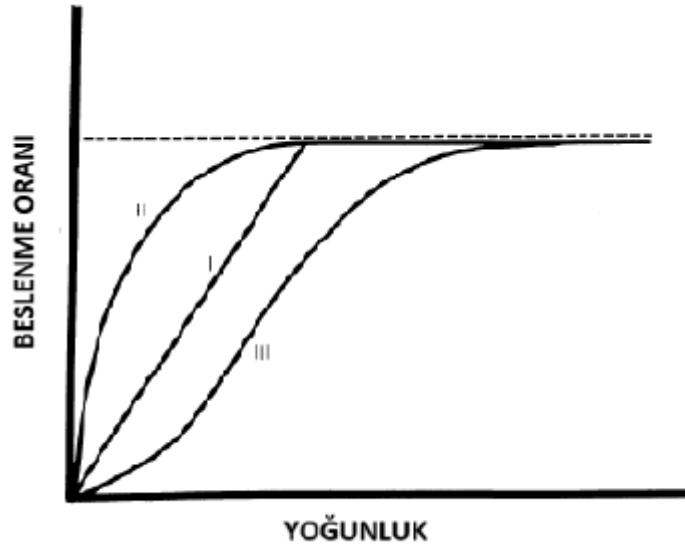
denklemlerini sağlarken, oran bağımlı denklemler aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned}x' &= xf(x) - myg(x,y) \\y' &= y(cmg(x,y) - d)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Burada, $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla t anındaki av ve avcı popülasyonlarının yoğunluklarını göstermektedir. $f(x)$, avlanmanın olmadığı durumda av başına düşen artış (büyüme) oranını, d , avcılarının ölüm oranını (yiyecekte bağımsız) simgelemektedir. $g(x,y)$, fonksiyonel cevap olarak adlandırılır ve ortalama bir avcı başına düşen av tüketim oranını belirtir. Açıkça, fonksiyonel cevap av tüketimi arttıkça artar ve avcı yoğunluğundan etkilenir. $mg(x,y)$, birim zamanda avcı başına tüketilen av miktarı ve $cmg(x,y)$ avlanma başına üretilen avcı üretimini göstermektedir. Denklemler, fonksiyonel cevabın tipine göre adlandırılır.

Genellikle, organizmalarda üç tip fonksiyonel cevap görülür (Bakınız Şekil 3.1). Birinci tip eğriler yiyeceklerle rastlantısal olarak karşılaşarak beslenen hayvanları içerir. Doyma değeriyle ilgili olarak av yoğunluğu artsa da beslenme oranı (avcı başına düşen ortalama tüketim) değişmez. Klasik Lotka-Volterra denkleminde $g(x) = ax$, $a > 0$ olmasından esinlenerek elde edilen bu tip fonksiyonel cevapta $g(x)$ sadece x e bağlıdır. İkinci tip eğrideki hayvanların avlanıp yiyeceklerini tüketmeleri için belirli bir zaman geçmesi gerekmektedir. Bu tip, çoğu asalak böcek türlerinde görülür ve “omurgasız eğri” olarak adlandırılır. Denklemlerde $g(x,y) = \frac{mx}{1+bx}$ olarak alınır. Bu tip fonksiyonel cevap “Michaelis-Menten Kinetiği” olarak da adlandırılır. Bu duruma kurtlar ve ren geyikleri ile ilgili bir örnek verebiliriz. Kurt sayısı sabit tutulurken ren geyiklerinin sayısı artırılırsa başlangıçta avlanma artacak fakat daha sonra doyma değerine ulaşacaktır. Bunun sebebi, ren geyiği popülasyonunun fazla olduğu durumda kurtların av aramak için vakit harcamaması ve sürekli beslendiği için avlanma gereksinimi olmamasıdır. Bu da, belirli bir zaman sonra kurtların doyma değerine ulaşmasına ve tüketimin sabit olmasına yol açmaktadır. Üçüncü tip organizmalarda ise bir bakıma öğrenme söz konusudur ve belirli bir kritik değerin altında bu canlılar avdan maksimum düzeyde yararlanamazlar. Kritik değer aşıldığında ise doyma değeri kadar beslenme oranı artar. Bunun için ise denklemlerde $g(x,y) = \frac{mx^2}{1+ax^2}$ alınır. Bu tip de “Hill fonksiyonu” olarak adlandırılır. Ayrıca, son yılların literatürüne yeni girmiş diyebileceğimiz Andrews (1968) tarafından ortaya atılan 4. Holling tipi fonksiyonel cevap mevcuttur. Bu çalışmada da $g(x,y) = \frac{mx}{1+bx+ax^2}$ seçilerek hareket edilmesi önerilmektedir (Pang ve Wang, 2004; Zhang ve diğ., 2008). 4. tip fonksiyonel cevap “Monod-Haldane tipi” olarak da

adlandırılmaktadır.



Şekil 3.1: Üç tip fonksiyonel cevap (Leslie,1977)

Biyolojik bilgilerimizden biliyoruz ki, av sayısı arttıkça, avcı tarafından avlanan av oranı sınırsız olarak artmaz. Bunun yerine, av popülasyonu avcı popülasyonuna göre çok büyük olsa da, bir süre sonra avlanma bir doygunluğa ulaşır. Aynı durum, kimyasal tepkimelerde de maddelerden biri veya birkaçı fazla olduğunda da gerçekleşir. Bu yüzden fonksiyonel cevap doğaya daha uygundur. Diğer yandan, oran-bağımlı denklemin neden daha uygun olduğu ile ilgili bir örnek verelim. Wiens ve arkadaşları (Arditi ve Ginzburg, 1989; Wiens ve diğ., 1986) çakallar ve Amerika tavşanları üzerine yapmış oldukları çalışmada şunları belirtmişlerdir: (3.1) denkleminde $g(x)$ sadece ava bağlı olsaydı çakal popülasyonunu iki katına çıkardığımızda avlanan tavşan sayısı yine sabit kalırdı. Fakat gerçekte, uzun periyotta avcı başına düşen av sayısı azalacağından, avcı bolluğu da dikkate alınmalıdır. Bu yüzden, avcı sayısı arttıkça, kişi başına düşen av azalacağından (3.1) denklemindeki $g(x)$ yerine $g(x/y)$ alınmalıdır. Aslında bu rasyonel ifade olma düşüncesi Rosenzweig ve MacArthur (1963) tarafından açıkça izah edilmiştir: “... Avcıların sayısı arttıkça, av yoğunluğu hızla azalacak; fakat hala avcı popülasyonundaki ani değişim oranı, av sayısındaki ani değişime bağlı öldürme oranına bağlı olacaktır.”

Oran bağımlı denklemlerde, ayrıca “zenginleştirme paradoksu” (Av-avcı sistemi zenginleştirildiğinde av-denge noktasını etkilemeden sadece avcı-denge noktasını artırması) ve “biyolojik kontrol paradoksu” (düşük ve kararlı bir av denge noktasının bulunamaması) da geçerli değildir (Beretta ve Kuang, 1998; Hairston ve diğ., 1960; Luck, 1990; Kuang ve Beretta, 1998; Rosenzweig, 1969). Bu tez çalışmasının ilk kısmında, oran-bağımlı denklem sistemi üzerine iyileştirmeler yapılacaktır.

3.2 Tez Probleminin İfadesi

Bu tez çalışmasının ilk kısmında, literatürde bulunan (Leslie, 1948) ve aşağıdaki (3.3) denklem sistemi ile tanımlanan oran-bağımlı av-avcı sisteminde, av ve avcı



Resim 3.1: Tavşan yakalamış bir çakal

popülasyonlarına iki farklı gecikme terimi eklenerek analiz yapılmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t)}{N(t)} \right).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Bu denklemde r_1 , r_2 , ε , θ pozitif parametreler olmak üzere, $N(t)$ ve $P(t)$ sırasıyla bir t anındaki av ve avcı popülasyonlarının yoğunluğunu göstermektedir. Bu denklemde av popülasyonu, r_1N gibi bir terimle üstel büyümeye sahip iken avlanmanın etkisiyle büyüme yavaşlamaktadır. Burada av popülasyonu ε oranı ile avcı tarafından yok edilmektedir. Avcı popülasyonu da başlangıçta lojistik bir büyümeye sahip iken (avın olmadığı düşünülürse), avcı popülasyonunun büyümesi av popülasyonuna bağlı olarak sınırlandırılmıştır. Yani, avcı popülasyonunun yoğunluğu, birey başına düşen av sayısına bağlı olarak değişmektedir.

İlk aşama olarak (3.3) sistemini doğaya daha uygun hale getirebilmek için τ_1 ve τ_2 (kesikli) gecikme parametreleri eklenmiş ve (3.4) sistemi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t - \tau_2)}{N(t - \tau_1)} \right).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Burada gecikme terimleri birer reel sayı olarak kabul edilmektedir. $N(t - \tau_1)$ ve $P(t - \tau_2)$ terimleri, sırasıyla $t - \tau_1$ ve $t - \tau_2$ zamanında doğmuş ve t zamanında

hayatta kalan av ve avcı popülasyonlarını göstermektedir. Biyolojik açıdan avcı popülasyonundaki gecikme terimi avcıların avlanabilmeleri için yeterli olgunluğa erişmelerini simgelemektedir. Av popülasyonundaki gecikme ise avların avcı tarafından avlanabilmeleri için geçmesi gereken süreyi göstermektedir. Yani, belirli olgunluktaki avlar avlanabilmektedir ve belirli bir yaşa ulaşmış avcılar avlanma yetisine ulaşmaktadır.

Literatürde, (3.4) sisteminin gecikmesiz hali, yani $\tau_1 = \tau_2 = 0$ durumu Zhou ve arkadaşları (Zhou ve diğ., 2005) tarafından incelenmiştir. Çalışmalarında ilk olarak, pozitif denge noktasının kararlılığı için gerekli koşulları incelemişler ve daha sonra denkleme Allee etkisi adı verilen terim ekleyerek analiz yapmışlardır. Daha sonra Çelik (2008; 2009), sırasıyla pay ve paydaya ayrı ayrı gecikme terimleri ekleyerek Hopf çatallanmasını çalışmıştır. Bizim bu çalışmamız, diğer çalışmaların tümünü kapsamaktadır.

3.3 Eşit Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi

Çalışmaların kolaylığı açısından, ilk aşamada av ve avcı gecikmeleri eşit tutulmuş ve aşağıdaki (3.5) sisteminin kararlılık analizi yapılmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t-\tau)}{N(t-\tau)} \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Bu bölümde, (3.5) sisteminde τ parametresi çatallanma parametresi alınarak Hopf çatallanması incelenmiş, periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gösterilmiş ve periyodik çözümlerin yönü, periyodu ve çatallanma tipi belirlenmiştir (Karaoglu ve Merdan, 2014a).

3.3.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı

Biyolojik açıdan anlamlı olabilmesi için, yalnızca pozitif denge noktası göz önüne alınmıştır. (3.5) sisteminde denge noktalarını bulmak için iki denklemi ayrı ayrı sıfıra eşitlersek $E^* = (N^*, P^*)$ olmak üzere $N^* = \frac{r_1\theta}{r_2\varepsilon}$ ve $P^* = \frac{r_1}{\varepsilon}$ koşullarını sağlayan tek pozitif denge noktası elde ederiz. Bu koşulları denge noktası koşulları olarak yeniden aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$r_1 - \varepsilon P^* = 0 \quad r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*} = 0.\quad (3.6)$$

Şimdi, $x(t) = N(t) - N^*$ ve $y(t) = P(t) - P^*$ lineer dönüşümlerini kullanarak $E^* = (N^*, P^*)$ denge noktasını, genelliği bozmadan $(0, 0)$ a taşıyabiliriz. Bu dönüşüm, Taylor açılımı yaparken işlemlerimizde kolaylık sağlayacaktır. Bu dönüşüm altında

(3.6) denklemlerini de kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= r_1(x(t) + N^*) - \varepsilon(y(t) + P^*)(x(t) + N^*) \\
&= -\varepsilon N^* y(t) - \varepsilon x(t)y(t), \\
\frac{dy(t)}{dt} &= (y(t) + P^*) \left(r_2 - \theta \frac{y(t - \tau) + P^*}{x(t - \tau) + N^*} \right) \\
&= r_2 P^* + r_2 y(t) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)} - \theta \frac{P^*}{N^*} y(t - \tau) - \theta \frac{P^*}{N^*} y(t) - \frac{\theta}{N^*} y(t)y(t - \tau) \\
&+ \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} x(t - \tau) + \theta \frac{(P^*)}{(N^*)^2} x(t - \tau)y(t - \tau) + \theta \frac{(P^*)}{(N^*)^2} x(t - \tau)y(t) \\
&- \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x^2(t - \tau) + Y.M.T.
\end{aligned}$$

Aşağıda bu dönüşüm altında (3.5) sisteminin lineerleştirilmiş hali verilmektedir:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= -\varepsilon N^* y(t) - \varepsilon x(t)y(t), \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} x(t - \tau) - \theta \frac{P^*}{N^*} y(t - \tau) - \frac{\theta}{N^*} y(t)y(t - \tau) \\
&+ \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \tau)y(t - \tau) \\
&+ \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \tau)y(t) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x^2(t - \tau) + Y.M.T.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada, Y.M.T. kısaltması yüksek mertebeden terimleri ifade etmektedir. Yani, (3.5) sistemi lineer olarak şu sisteme denktir:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= -\varepsilon N^* y(t), \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \theta \frac{P^*}{N^*} x(t - \tau) - \theta \frac{P^*}{N^*} y(t - \tau).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Bu sistemin karakteristik denklemini bulmak için $x(t) = Ae^{\lambda t}$ ve $y(t) = Be^{\lambda t}$ aday çözümleri yerine konursa aşağıdaki matris elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon N^* \\ -\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} e^{-\lambda \tau} & \lambda + \theta \frac{(P^*)}{(N^*)} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Buradan karakteristik denklem $r_2 = \theta \frac{P^*}{N^*}$ ve $b = r_2 P^* \varepsilon$ olmak üzere

$$\lambda^2 + r_2 \lambda e^{-\lambda \tau} + b e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

1. Durum: $\tau = 0$ olduğu durumda, yani gecikme yokken $E^* = (N^*, P^*)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Bunu daha önce Çelik (2008) ve Zhou ve diğ. (2005) makalelerinde verilen aşağıdaki lemma ile özetleyelim.

Lemma 3.1. (3.5) sisteminin $E^* = (N^*, P^*)$ denge noktası $\tau = 0$ iken lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau = 0$ iken (3.9) denklemi

$$\lambda^2 + r_2 \lambda + b = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri $\lambda_{1,2} = \frac{-r_2 \pm \sqrt{r_2^2 - 4b}}{2}$ olarak bulunur. r_2 ve b pozitif olduklarından, özdeğerlerin reel kısımları negatif olup, Routh-Hurwitz kriteri gereğince E^* denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. \square

2. Durum: Şimdi, kabul edelim $\tau \neq 0$ olsun. (3.8) lineer sisteminin $(0,0)$ denge noktasının kararlılığı için (3.9) transandantal denkleminin köklerinin durumunun analiz edilmesi gerekmektedir.

Lemma 3.2. (3.9) üstel polinomunun bir çift (kompleks eşlenik) sırf sanal kökü vardır.

İspat. Kabul edelim $i\omega$ sırf sanal bir kök ve $\omega \neq 0$ olsun. $i\omega$ kökünü üstel polinomda yerine koyup reel ve sanal kısımları ayırırsak

$$-\omega^2 + r_2 \omega \sin \omega \tau + b \cos \omega \tau = 0, \quad (3.11)$$

$$r_2 \omega \cos \omega \tau - b \sin \omega \tau = 0, \quad (3.12)$$

denklemlerini elde ederiz. (3.11) ve (3.12) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak

$$\omega^4 - r_2^2 \omega^2 - b^2 = 0 \quad (3.13)$$

denklemini buluruz. Buradan da

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{r_2^2 \pm \sqrt{r_2^4 + 4b^2}}{2}$$

olacak şekilde dört tane kök bulunur. Fakat ω^2 pozitif olması gerektiğinden

$$\omega_+^{(1)} = \sqrt{\frac{r_2^2 + \sqrt{r_2^4 + 4b^2}}{2}} \quad (3.14)$$

seçimi yapılır. Daha sonra, $\omega_+^{(1)}$ kökünü (3.11) veya (3.12) denklemlerinden birinde yerine koyarak bu köke karşılık gelen kritik τ değerlerini (dizisini) aşağıdaki gibi elde

etmiş oluruz:

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_+^{(1)}} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{b}{\omega_+^{(1)}} \right) \right\} + \frac{2k\pi}{\omega_+^{(1)}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Bu da ispatı tamamlar. \square

Kabul edelim $\lambda_k(\tau) = \alpha_k(\tau) + i\omega_k(\tau)$, (3.9) denkleminin $\tau = \tau_k$ civarında $\alpha_k(\tau_k) = 0$ ve $\omega_k(\tau_k) = \omega_0 := \omega_+^{(1)}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ koşulunu sağlayan kökü olsun. O halde aşağıdaki transversalite koşulu gerçekleşir:

Lemma 3.3.

$$\frac{dRe\lambda_k(\tau_k)}{d\tau} > 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

eşitsizliği sağlanır, yani (3.5) sistemi, (N^*, P^*) denge noktasında $\tau = \tau_0$ iken Hopf çatallanmasına sahiptir.

İspat. (3.9) denkleminde τ ya göre türev alıp düzenlersek

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{r_2\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + b\lambda e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + r_2 e^{-\lambda\tau} - r_2\lambda e^{-\lambda\tau} - b\tau e^{-\lambda\tau}}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Diğer yandan

$$\left[\frac{d\lambda}{d\tau} \right]^{-1} = \frac{2\lambda e^{\lambda\tau} + r_2 - r_2\lambda - b\tau}{r_2\lambda^2 + b\lambda}$$

olup, (3.9) karakteristik denkleminde $e^{\lambda\tau} = \frac{-r_2\lambda - b}{\lambda^2}$ eşitliği kullanılırsa

$$\left(Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right) = Re \left[\frac{2}{\omega_0^2} + \frac{r_2}{i\omega_0(r_2 i\omega_0 + b)} - \frac{\tau}{i\omega_0} \right]$$

$$\left(Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right)_{\lambda=i\omega_0} = \frac{\sqrt{r_2^4 + 4b^2}}{\omega_0^4} > 0$$

olduğu kolaylıkla görülür. \square

Not: Cooke ve Driessche'nin (1986) bir çalışmasından $\lambda = i\omega_0$ kökünün basit olduğunu söyleyebiliriz. Bu durum, Bölüm 3.4.1'de detaylıca anlatılacaktır.

O halde yukarıda bulduklarımızı özetleyen şu lemmayı verebiliriz:

Teorem 3.1. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

i) $\tau = 0$ iken (N^*, P^*) denge noktası lokal asimptotik karardır.

ii) $\tau_0 := \frac{1}{\omega_0} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{b}{\omega_0^2} \right) \right\}$ olmak üzere (N^*, P^*) denge noktası $\tau < \tau_0$ için asimptotik karardır, $\tau > \tau_0$ için kararsızdır. Üstelik, $\tau = \tau_0$ iken (3.5) sisteminde (N^*, P^*) denge noktası için Hopf çatallanması ortaya çıkar.

3.3.2 Yön analizi

Bu bölümde, Hopf çatallanmasının yönünü (çeşidini), kararlılığını ve periyodunu veren hesaplamalar ayrıntılı şekilde açıklanacaktır. Bunun için Bölüm 2.3'te verilen normal form teorisi ve merkez çok katlı teorisi (Hassard ve diğ., 1981) kullanılacaktır. C_0 merkez çok katlısının $\mu = 0$ daki koordinatları hesaplanacaktır.

İlk olarak gecikmeyi $t \rightarrow \tau t$ olarak normalleştirelim ve $x_1(t) = N(t) - N^*$, $x_2(t) = P(t) - P^*$, $\tau = \tau_k + \mu$ dönüşümlerini kullanarak (3.5) sistemini yeniden yazalım. Bu bize $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonel diferensiyel denklemini verecektir:

$$x'(t) = L_\mu(x_t) + f(\mu, x_t), \quad (3.16)$$

öyle ki, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ olup $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$ sırasıyla

$$L_\mu(\phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{bmatrix},$$

$$f(\mu, \phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklindedir.

Burada katsayılar $a_{12} = \varepsilon N^*$, $a_{21} = \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2}$, $a_{22} = \theta \frac{P^*}{N^*}$ olup, $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\varepsilon \phi_1(0) \phi_2(0), \\ f_{12} &= -\frac{\theta}{N^*} \phi_2(0) \phi_2(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \phi_1(-1) \phi_2(-1) \\ &\quad + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \phi_1(-1) \phi_2(0) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \phi_1^2(-1) \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

Riesz Temsil Teoreminden her bir bileşeni sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in C$ için

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta) \quad (3.18)$$

koşulunu sağlayan $\eta(\theta, \mu) : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü vardır. Özel olarak, δ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \delta(\theta + 1),$$

olarak seçilebilir. $\phi \in C$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ 0 \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

operatörlerini tanımlayabiliriz. O halde $\theta \in [-1, 0)$ için $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ olmak üzere, sistem (3.16)

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (3.19)$$

sistemine denktir. $\psi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ için ayrıca

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \text{ ise} \\ 0 \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(\mu, t)\psi(-t), & s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.20)$$

operatörü

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta)\phi(\xi)d\xi \quad (3.21)$$

ve bilinear iç çarpımı tanımlanabilir. Burada $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ olarak alınmıştır. $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörleri adjoint operatörlerdir.

Şimdi, $A(0)$ operatörünün $\lambda = i\omega_0$ ve $\bar{\lambda} = -i\omega_0$ özdeğerlerine karşılık gelen $q(\theta)$ ve

$q^*(s)$ özvektörlerini hesaplayacağız. Kabul edelim $q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} e^{i\omega_0\theta}$ olsun. $A(0)q(\theta) = i\omega_0q(\theta)$ olduğundan $A(0)$, $L_\mu\phi$ ve $\eta(\theta, \mu)$ tanımlarından kolayca α yı hesaplayabiliriz. O halde $\alpha = \frac{-i\omega_0}{a_{12}\tau_k}$ olmak üzere $q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} e^{i\omega_0\theta}$ bulunur. Benzer şekilde, $q^*(s) = D(\alpha^*, 1)e^{i\omega_0s}$ seçebiliriz. Şimdi D ve α^* belirlenmelidir. A^* tanımından, $\alpha^* = \frac{-\tau_0 a_{21} e^{i\omega_0}}{i\omega_0}$ olarak bulunur. D yi hesaplamak için ise $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ eşitliğini kullanabiliriz. (3.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{D}(\bar{\alpha}^*, 1)(1, \alpha)^T - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{D}(\bar{\alpha}^*, 1) e^{-i\omega_0(\xi-\theta)} d\eta(\theta)(1, \alpha)^T e^{i\omega_0\xi} d\xi \\ &= \bar{D} \left\{ \bar{\alpha}^* + \alpha - \int_{-1}^0 (\bar{\alpha}^*, 1) \theta e^{i\omega_0\theta} d\eta(\theta)(1, \alpha)^T \right\}. \end{aligned}$$

elde edilir. O halde \bar{D} , $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ve $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ eşitliklerini sağlayacak şekilde

$$\bar{D} = \frac{1}{\bar{\alpha}^* + \alpha + \tau_k e^{-i\omega_0}(a_{21} - a_{22}\alpha)}$$

olarak bulunmuş olur.

Şimdi, Hassard ve diğ. (1981)'deki notasyona benzer notasyonlarla, C_0 merkez çok katlısının $\mu = 0$ daki koordinatlarını hesaplamaya geçebiliriz. x_t (3.19) denkleminin $\mu = 0$ iken çözümü olsun.

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle \text{ ve } w(t, \theta) = x_t - 2Re\{z(t)q(\theta)\} \quad (3.22)$$

eşitliklerini tanımlayalım. Merkez çok katlı üzerinde, q ve q^* vektörleri yönünde z ve \bar{z} lokal koordinatlar olmak üzere

$$w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (3.23)$$

tanımlıdır. $x_t \in C_0$ için

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \\ &= i\omega_0 \langle q^*, x_t \rangle + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \equiv i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

ve $\mu = 0$ olduğundan,

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (3.24)$$

yazılabilir. Burada, $f_0(z, \bar{z})$, $\mu = 0$ daki $f(z, \bar{z})$ yi göstermektedir. $g(z, \bar{z})$ fonksiyonundaki katsayıları hesaplamak için, (3.17) denklemini yeniden yazmamız gereklidir. (3.22)'deki ikinci eşitlikten, $x_t(x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta)) = w(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}q(\theta)$ yazabiliriz. $q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{i\omega_0\theta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_{1t}(0) &= z + \bar{z} + w_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z, \bar{z}|^3), \\ x_{2t}(0) &= z\alpha + \bar{z}\bar{\alpha} + w_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z, \bar{z}|^3), \\ x_{1t}(-1) &= ze^{-i\omega_0} + \bar{z}e^{i\omega_0} + w_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-1) z\bar{z} \\ &\quad + w_{02}^{(1)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z, \bar{z}|^3), \\ x_{2t}(-1) &= z\alpha e^{-i\omega_0} + \bar{z}\bar{\alpha} e^{i\omega_0} + w_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-1) z\bar{z} \\ &\quad + w_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z, \bar{z}|^3) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.17) eşitliğinden de

$$f_{11}^0 = -\varepsilon x_{1t}(0)x_{2t}(0)$$

ve

$$\begin{aligned} f_{12}^0 &= -\frac{\theta}{N^*} x_{2t}(0)x_{2t}(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x_{1t}(-1)x_{2t}(-1) \\ &\quad + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x_{1t}(-1)x_{2t}(0) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x_{1t}^2(-1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = \bar{D} \tau_k(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{bmatrix} f_{11}^0 \\ f_{12}^0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) = & \bar{D}\tau_k z^2 \left[-\varepsilon \alpha \bar{\alpha}^* - \frac{\theta}{N^*} \alpha^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-2i\omega_0} \right. \\
& \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{-2i\omega_0} \right] \\
& + \bar{D}\tau_k z \bar{z} \left[-\varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* - \varepsilon \alpha \bar{\alpha}^* - \frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} \right. \\
& \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} \right. \\
& \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{i\omega_0} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \right] \\
& + \bar{D}\tau_k \bar{z}^2 \left[-\varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha}^2 e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{2i\omega_0} \right. \\
& \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{2i\omega_0} \right] \\
& + \bar{D}\tau_k z^2 \bar{z} \left[-\varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} - \varepsilon \bar{\alpha}^* \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} - \varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} \right. \\
& - \varepsilon \alpha \bar{\alpha}^* w_{11}^{(1)}(0) - \varepsilon \bar{\alpha}^* w_{11}^{(2)}(0) - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} \\
& - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} - \frac{\theta}{N^*} \alpha w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} \alpha w_{11}^{(2)}(-1) \\
& + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(1)}(-1)}{2} e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} e^{i\omega_0} \\
& + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha w_{11}^{(1)}(-1) e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(-1) e^{-i\omega_0} \\
& + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} \\
& + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha w_{11}^{(1)}(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} \\
& \left. - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} 2w_{11}^{(1)}(-1) e^{-i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} w_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega_0} \right] \\
& + Y.M.T.
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer (3.24) denkleminin katsayıları ile yukarıdaki eşitlik karşılaştırılırsa

$$g_{20} = 2\bar{D}\tau_k \left[-\varepsilon \alpha \bar{\alpha}^* - \frac{\theta}{N^*} \alpha^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-2i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{-2i\omega_0} \right],$$

$$g_{11} = \bar{D}\tau_k \left[-\varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* - \varepsilon \alpha \bar{\alpha}^* - \frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha \right. \\ \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{i\omega_0} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \right],$$

$$g_{02} = 2\bar{D}\tau_k \left[-\varepsilon \bar{\alpha} \alpha^* - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha}^2 e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{2i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{2i\omega_0} \right],$$

$$g_{21} = 2\bar{D}\tau_k \left[\begin{array}{l} -\varepsilon\bar{\alpha}\bar{\alpha}^* \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} - \varepsilon\bar{\alpha}^* \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} - \varepsilon\bar{\alpha}\bar{\alpha}^* \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} - \varepsilon\alpha\bar{\alpha}^* w_{11}^{(1)}(0) \\ -\varepsilon\bar{\alpha}^* w_{11}^{(2)}(0) - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} - \frac{\theta}{N^*} \alpha w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} \\ -\frac{\theta}{N^*} \alpha w_{11}^{(2)}(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(1)}(-1)}{2} e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} e^{i\omega_0} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha w_{11}^{(1)}(-1) e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(-1) e^{-i\omega_0} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha w_{11}^{(1)}(-1) \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} 2w_{11}^{(1)}(-1) e^{-i\omega_0} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} w_{20}^{(1)}(-1) e^{i\omega_0} \end{array} \right]$$

katsayıları bulunmuş olur. Fakat, hala g_{21} katsayısını belirlemek için, $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ nın belirlenmesine ihtiyaç vardır. (3.22)'den

$$\begin{aligned} \dot{w}(t, \theta) &= \dot{x}_t - 2\text{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\ &= \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \\ &:\equiv Aw + H(z, \bar{z}, \theta), \end{aligned}$$

olduğu görülebilir, öyle ki

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (3.25)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan, merkez çok katlısı üzerinde

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

olduğunu biliyoruz. O halde, katsayıların eşitliğinden

$$(A - 2i\omega_0)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \quad (3.26)$$

yazılabilir. $\theta \in [-1, 0)$ için

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -2\text{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\}$$

dir. (3.26) denkleminin katsayılarını (3.25) denkleminin katsayıları ile karşılaştırsak

aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} H_{20}(\theta) &= -(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}), \\ H_{11}(\theta) &= -(q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}), \\ H_{02}(\theta) &= -(q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}). \end{aligned}$$

(3.26)'dan ve A nın tanımından,

$$\dot{w}_{20}(\theta) - 2i\omega_0 w_{20}(\theta) = q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}$$

elde ederiz. Ayrıca, $q(\theta) = q(0)e^{i\omega_0\theta}$ olduğundan, $E_1 = \begin{bmatrix} E_1^{(1)} \\ E_1^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$w_{20}(\theta) = \frac{i}{\omega_0} g_{20} q(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{3\omega_0} \bar{g}_{02} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\theta}$$

bulunur. Benzer şekilde, $E_2 = \begin{bmatrix} E_2^{(1)} \\ E_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$w_{11}(\theta) = \frac{-i}{\omega_0} g_{11} q(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{\omega_0} \bar{g}_{11} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_2$$

elde edilir. Buradan E_1 ve E_2 kolayca hesaplanabilir. (3.26) denkleminde $\theta = 0$ alınırsa

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{20}(\theta) = 2i\omega_0 w_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (3.27)$$

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{11}(\theta) = -H_{11}(0) \quad (3.28)$$

eşitlikleri her zaman geçerlidir. Ayrıca, yine $\theta = 0$ için

$$n_1 = -\varepsilon\alpha, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} n_2 &= -\frac{\theta}{N^*} \alpha^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-2i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{-i\omega_0} \\ &\quad - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{-2i\omega_0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ve

$$s_1 = -2\varepsilon Re(\alpha), \quad (3.31)$$

$$s_2 = -\frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} \alpha \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} 2Re(\alpha) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \alpha e^{i\omega_0} \quad (3.32)$$

$$+ \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{\alpha} e^{-i\omega_0} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3}$$

olmak üzere

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau_k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_k \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

bulunur.

Diğer yandan, $A(0)q(0) = i\omega_0 q(0)$ ve $A(0)\bar{q}(0) = i\omega_0 \bar{q}(0)$ olduğundan

$$\left[i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{i\omega_0 \theta} d\eta(\theta) \right] q(0) = 0, \quad (3.35)$$

$$\left[-i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{-i\omega_0 \theta} d\eta(\theta) \right] \bar{q}(0) = 0 \quad (3.36)$$

eşitlikleri de her zaman geçerlidir. (3.33) denklemini (3.27) denkleminde yerine koyar ve (3.35) eşitliği kullanılırsa

$$\left[2i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega_0 \theta} d\eta(\theta) \right] E_1 = 2\tau_k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitlik de

$$\begin{bmatrix} 2i\omega_0 & \tau_k a_{12} \\ -\tau_k a_{21} e^{-2i\omega_0} & 2i\omega_0 + a_{22} e^{-2i\omega_0} \end{bmatrix}_{2 \times 2} E_1 = 2\tau_k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

eşitliğine denktir. Bu sistem E_1 için çözümlerse

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2i\omega_0 & \tau_k a_{12} \\ -\tau_k a_{21} e^{-2i\omega_0} & 2i\omega_0 + a_{22} e^{-2i\omega_0} \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

şeklinde tanımlı determinant olmak üzere

$$E_1^{(1)} = \frac{2\tau_k}{A_1} \begin{vmatrix} n_{11} & \tau_k a_{12} \\ n_{21} & 2i\omega_0 + a_{22}e^{-2i\omega_0} \end{vmatrix}_{2 \times 2},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{2\tau_k}{A_1} \begin{vmatrix} 2i\omega_0 & n_1 \\ -\tau_k a_{21}e^{-2i\omega_0} & n_2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, (3.34) denklemini (3.28) denkleminde yerine koyarak ve (3.36) eşitliğini de kullanarak

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} E_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

denklemini elde edilir. Buradan da

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

olmak üzere

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} s_1 & -a_{12} \\ s_2 & -a_{22} \end{vmatrix}_{2 \times 2},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} 0 & s_1 \\ a_{21} & s_2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

kolayca elde edilebilir.

Son olarak, $g(z, \bar{z})$ nin katsayılarının belirlenmesi için E_1 ve E_2 vektörleri $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ eşitliklerinde yerine yazılır. Katsayılardan yararlanılarak, (3.5) sisteminde (2.32) eşitliği ile verilen Lyapunov katsayısı hesaplanmış olur. Teorem 2.2'den çatallanmanın yönü ve kararlılığına karar verilebilir.

3.3.3 Nümerik sonuçlar

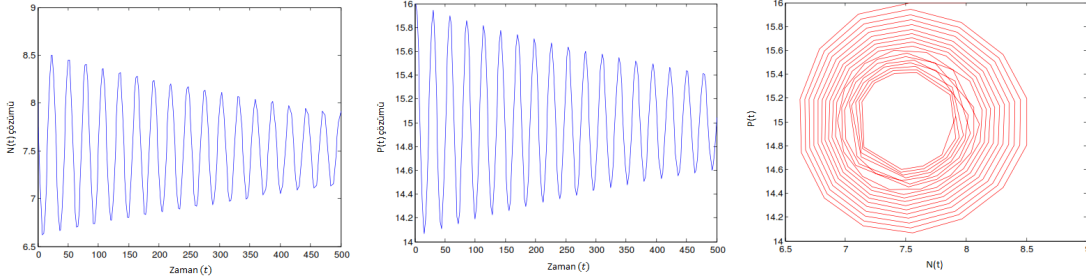
Bu bölümde, teorik sonuçlarımızı desteklemek üzere, MATLAB programını kullanarak nümerik bir örnek ele alacağız. Bu tez boyunca sergilenen tüm nümerik çalışmalar MATLAB programında (MATLAB DDE (Delay Differential Equations) paketi kullanılarak) yapılmıştır.

Şimdi, (3.5) sisteminde parametreleri $r_1 = 0.45$, $r_2 = 0.1$, $\varepsilon = 0.03$ ve $\theta = 0.05$ alalım. Yani, aşağıdaki denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 0.45N(t) - 0.03P(t)N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(0.1 - 0.05 \frac{P(t-\tau)}{N(t-\tau)} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sistemde eşitliklerin sağ tarafını sıfıra eşitlersek, sistemin tek bir pozitif denge noktasına sahip olduğunu görürüz. $E^* = (N^*, P^*) = (7.5, 15)$ sistemimizin tek denge noktasıdır. Sistemde gecikme terimi yokken, yani $\tau = 0$ olduğu durumda, $E^* = (7.5, 15)$ denge noktası Lemma 3.1'den dolayı karardır. Bölüm 3.3.1'den elde edilen sonuçlara göre ω_0 ve τ_0 aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r_2^2 + \sqrt{r_2^4 + 4b^2}}{2}} = 0.2242, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{b}{\omega_0^2} \right) \right\} = 2.066. \quad (3.38)$$



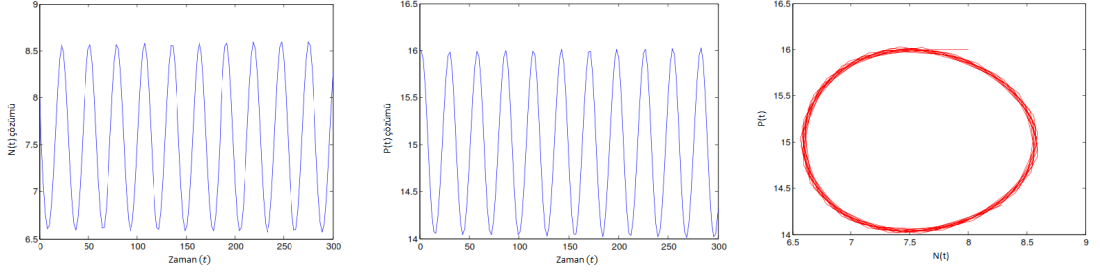
Şekil 3.2: $\tau = 2 < \tau_0$ iken $N_0 = 8$, $P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau = 2 < \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.

Lemma 3.3'ten, E^* denge noktasının $\tau \in [0, \tau_0)$ aralığında asimptotik karardır ve $\tau > 2.066$ iken kararsız olduğunu söyleyebiliriz. $\tau = \tau_0 = 2.066$ iken de sistem (3.37)'de Hopf çatallanması oluşur.

Şekil 3.2'den, açıkça E^* denge noktasının $\tau \in [0, 2.066)$ iken asimptotik karardır olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 3.2'de $\tau = 2 < \tau_0$ olarak seçilmiştir. Şekil 3.3'te ise $\tau = \tau_0$ olduğu durumda denge noktası civarında çatallanan periyodik çözümler görülmektedir. Bu kritik değeri aşan parametreler için ise, denge noktasının kararsız olduğunu görmekteyiz. Şekil 3.4'te de $\tau = 2.1 > \tau_0$ için kararsız çözümler sergilenmektedir.

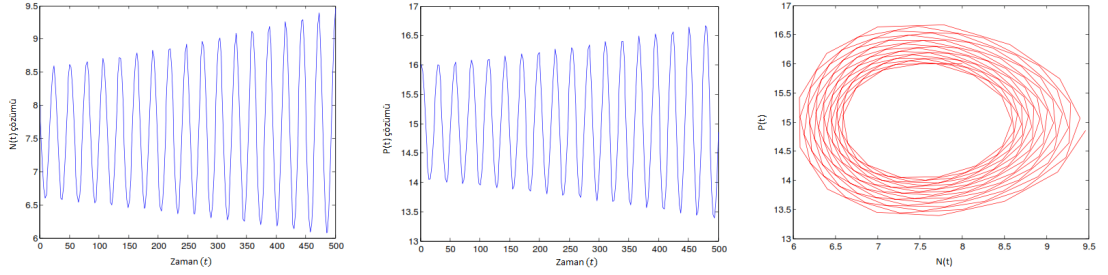
Ek olarak, Teorem 2.2 ve denklem (2.4)'te verilen formüllerden Hopf çatallanmasının yönünü, kararlılığını ve periyodunu veren değerler μ_2 , β_2 ve T_2 şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\mu_2 = 8.2473 > 0, \quad \beta_2 = -0.4602 < 0, \quad T_2 = 0.5163 > 0. \quad (3.39)$$

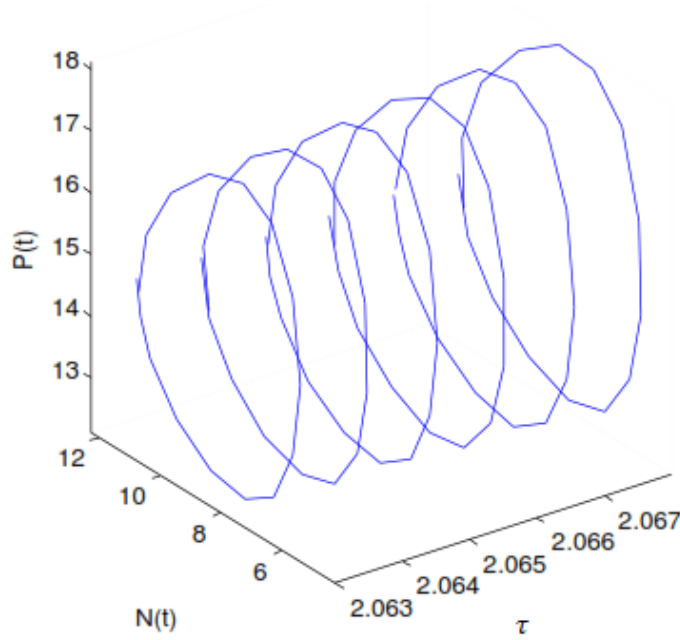


Şekil 3.3: $\tau = 2.066 = \tau_0$ iken $N_0 = 8$, $P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafiklerinde görülen periyodik çözümler sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau = \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.

$\mu_2 > 0$ olduğundan, Hopf çatallanmasının yönü süperkritiktir, yani periyodik çözümler τ çatallanma parametresi kritik bir τ_0 değerini geçtikten sonra ortaya çıkmıştır. $\beta_2 < 0$ ve $T_2 > 0$ olduğundan periyodik çözümler artan bir periyotla kararlıdır. Şekil 3.5'te de bazı τ değerleri için çatallanma diyagramı verilmiştir.



Şekil 3.4: $\tau = 2.1 > \tau_0$ iken $N_0 = 8$, $P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip kararsız av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau > \tau_0$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.



Şekil 3.5: τ değerleri $\tau = 2.063$ 'ten $\tau = 2.067$ 'ye kadar 0.001 artışıyla değişirken bazı limit döngüleri.

3.4 İki Farklı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde, iki kesikli gecikme terimi eklenen (3.4) sisteminin çatallanma analizi verilmiştir (Karaoğlu ve Merdan, 2014b).

3.4.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı

Sistemimizi aşağıda yeniden hatırlayalım:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t - \tau_2)}{N(t - \tau_1)} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Yine, biyolojik bir sistem üzerine çalıştığımızdan dolayı, sadece pozitif denge noktalarını ele almaktayız. Sistemde gecikme olmadığı durumda, yani $\tau_1 = \tau_2 = 0$ iken, $N^* = \frac{r_1 \theta}{r_2 \varepsilon}$ ve $P^* = \frac{r_1}{\varepsilon}$ olmak üzere $E^* = (N^*, P^*)$ tek bir pozitif denge noktası mevcuttur. Bu denge noktası aynı zamanda (3.40) sisteminin de tek pozitif denge noktasıdır. Denge noktası koşullarını (3.6) denklemlerinden tekrar hatırlarsak

$$r_1 - \varepsilon P^* = 0 \quad r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*} = 0 \quad (3.41)$$

olarak yazabiliriz. $x(t) = N(t) - N^*$ ve $y(t) = P(t) - P^*$ lineer dönüşümlerini

kullanarak, $E^* = (N^*, P^*)$ denge noktasını $(0,0)$ a taşıyabiliriz. Bu dönüşümler altında Bölüm 3.3.1'dekine benzer yolla (3.40) sisteminin lineerleştirilmiş hali aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\varepsilon N^* y(t) - \varepsilon x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta \frac{P^*}{N^*} y(t - \tau_2) - \frac{\theta}{N^*} y(t)y(t - \tau_2) + \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} x(t - \tau_1) \\ &\quad + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) \\ &\quad + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \tau_1)y(t) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x^2(t - \tau_1) + Y.M.T.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Yani, sistem (3.40) lineer olarak aşağıdaki sisteme denktir:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\varepsilon N^* y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \theta \frac{P^{*2}}{N^{*2}} x(t - \tau_1) - \theta \frac{P^*}{N^*} y(t - \tau_2).\end{aligned}\quad (3.43)$$

(3.43) sistemine karşılık gelen karakteristik denklem aşağıda verilmiştir:

$$\lambda^2 + a\lambda e^{-\lambda\tau_2} + b e^{-\lambda\tau_1} = 0. \quad (3.44)$$

Burada $a = \theta \frac{P^*}{N^*}$ ve $b = aP^*\varepsilon$ olarak alınmıştır. Dikkat edilirse, karakteristik denkleminiz beklediğimiz üzere üstel denklem formunda fakat iki tane farklı parametre içermektedir. Bu denklemin sonsuz çoklukta kökü vardır ve literatürdeki çalışmalarda parametrelerin bir tanesi sabit kabul edilerek hareket edilmektedir. Bu amaçla, biz de denkleminin kök analizini farklı durumlara ayıracağız. Son durumda da bir parametrenin verdiği kararlılık bölgesi altında diğer parametrenin değişimini inceleyerek çatallanma analizi yapacağız.

1. Durum: $\tau_1 = \tau_2 = 0$ durumu

Gecikmenin olmadığı durumda Bölüm 3.3.1'de verilen Lemma 3.1 aynen geçerlidir.

2. Durum: $\tau_1 > 0$ ve $\tau_2 = 0$ durumu

Bu durumda (3.44) karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + a\lambda + b e^{-\lambda\tau_1} = 0 \quad (3.45)$$

halini alır. Kabul edelim ki, $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) (3.45) denkleminin bir kökü olsun. O halde,

$$-\omega^2 + ai\omega + b e^{-i\omega\tau_1} = 0$$

bulunur. Reel ve sanal kısımları ayırırsak,

$$-\omega^2 + b \cos \omega \tau_1 = 0, \quad (3.46)$$

$$a\omega - b \sin \omega \tau_1 = 0 \quad (3.47)$$

denklem çiftini elde ederiz ki buradan

$$\omega^4 + a^2 \omega^2 = b^2 \quad (3.48)$$

denkleme ulaşılır. (3.48) denkleminin tek bir $\omega := \omega_0$ pozitif kökü olduğunu görmek kolaydır:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4b^2}}{2}}. \quad (3.49)$$

(3.46) eşitliğinden ω_0 değerine karşılık gelen τ_1 değerlerini bulabiliriz:

$$\tau_{(0,n)}^{(1)} = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{\omega_0^2}{b} \right) \right\} + \frac{2n\pi}{\omega_0}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (3.50)$$

Buradan, $\pm i\omega_0$ değerlerinin $\tau_1 = \tau_{(0,n)}^{(1)}$ iken (3.45) denkleminin sırf sanal kökleri olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, $\tau_{10} := \tau_{(0,0)}^{(1)}$ olsun. $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, (3.45) denkleminin $\tau_1 = \tau_{10}$ iken $\alpha(\tau_{10}) = 0$ ve $\omega(\tau_{10}) = \omega_0$ koşullarını sağlayan kökleri olsun. O halde, aşağıdaki transversalite koşulu sağlanır:

Lemma 3.4. (3.45) karakteristik denklemi için aşağıdaki transversalite koşulu sağlanır:

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_{10})}{d \tau_1} > 0.$$

Yani, sistem (3.40)'da, $\tau_1 = \tau_{10}$ iken, (N^*, P^*) pozitif denge noktasında Hopf çatallanması oluşur.

Bu lemmanın ispatını vermeden önce, Cooke ve Driessche'nin (1986) makalesinde verilen bir sonucu yazıp açıklayalım:

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0 \quad (3.51)$$

üstel denklemini düşünelim. Burada P ve Q derecesi sırasıyla n ve m ve $n > m$ olan polinomlar olsun.

$$F(\omega) = |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2 \quad (3.52)$$

olarak tanımlansın. O halde $\left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega}$ ile $F'(\omega)$ nın işaretleri aynıdır. Yani,

$$s = \operatorname{sign} \left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega} = \operatorname{sign} F'(\omega) \quad (3.53)$$

sağlanır. Gerçekten, $\lambda = i\omega \neq 0$ ve $\omega > 0$ bir kök olsun. (3.51) denkleminde, açıkça

$$|P(i\omega)| = |Q(i\omega)| \quad (3.54)$$

dir. P ve Q polinomlar olduklarından

$$P(i\omega) = P_R(\omega) + iP_I(\omega) \quad Q(i\omega) = Q_R(\omega) + iQ_I(\omega) \quad (3.55)$$

olacak şekilde P ve Q polinomlarını reel ve sanal kısımlarına ayırabiliriz. Şimdi,

$$s = \operatorname{sign} \left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega} \right] = \operatorname{sign} \left[\frac{d}{d\tau}(\operatorname{Re}\lambda)_{\lambda=i\omega} \right] \quad (3.56)$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse, kompleks bir sayının çarpmaya göre tersinin reel kısmının işareti ile tersini almadan reel kısmının işaretini incelemek aynı şey olacaktır. (3.51) denkleminin sol tarafı λ ve τ ya göre analitik olduğundan, λ kökü, katlı kökler haricinde, τ ya göre diferensiyellenebilir. Çok katlı bir kökte ise

$$P'(\lambda) + [Q'(\lambda) - \tau Q(\lambda)]e^{-\tau\lambda} = 0 \quad (3.57)$$

denklemini sağlar. $e^{-\tau\lambda} = -\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ olduğundan

$$P'(\lambda)Q(\lambda) - P(\lambda)Q'(\lambda) + \tau P(\lambda)Q(\lambda) = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. P ve Q polinomlarının τ dan bağımsız olduğu göz önüne alınıp (3.51) denkleminde τ ya göre türev alınırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda Q(\lambda)}{P'(\lambda)e^{\tau\lambda} + Q'(\lambda) - \tau Q(\lambda)}.$$

Tekrar (3.51) denklemini kullanılırsa

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{P'(\lambda)}{\lambda P(\lambda)} + \frac{Q'(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda} \quad (3.59)$$

denklemini elde edilir. Basit bir kökte, (3.57) sağlanmayacağından $\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$ sıfırdan farklıdır. (3.51)'nin herhangi bir kökünde $P(\lambda) = 0$ olması $Q(\lambda) = 0$ olmasını gerektireceğinden, her ikisi de aynı anda sıfır olamaz. O halde (3.51)'nin herhangi bir $i\omega$ basit kökünde (3.59) sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} s &= \text{sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega} \right] = \text{sign} \text{Re} \left[-\frac{P'(i\omega)}{i\omega P(i\omega)} + \frac{Q'(i\omega)}{i\omega Q(i\omega)} - \frac{\tau}{i\omega} \right] \\ &= -\text{sign} \text{Im} \left[\frac{P'(i\omega)}{\omega P(i\omega)} - \frac{Q'(i\omega)}{\omega Q(i\omega)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.54)'den ve $\omega > 0$ olduğundan

$$s = -\text{sign} \text{Im} \left[P'(i\omega)\overline{P(i\omega)} - Q'(i\omega)\overline{Q(i\omega)} \right] \quad (3.60)$$

olduğu görülür. (3.55) denklemlerinden (3.60) denklemini daha uygun bir şekilde yazabiliriz:

$$P'(i\omega) = \frac{1}{i} \frac{dP(i\omega)}{d\omega} = -i \frac{d}{d\omega} [P_R(\omega) + iP_I(\omega)]. \quad (3.61)$$

Benzer şekilde $Q'(i\omega)$ da hesaplanabilir. Kısaca, $P'(i\omega) = P'_I(\omega) - iP'_R(\omega)$ ve $Q'(i\omega) = Q'_I(\omega) - iQ'_R(\omega)$ olarak yazılabilir. Sonuç olarak,

$$-\text{Im} \left[P'(i\omega)\overline{P(i\omega)} - Q'(i\omega)\overline{Q(i\omega)} \right] = P_R P'_R + P_I P'_I - Q_R Q'_R - Q_I Q'_I \quad (3.62)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$F(\omega) = |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2 = P_R^2(\omega) + P_I^2(\omega) - Q_R^2(\omega) - Q_I^2(\omega) \quad (3.63)$$

ve

$$F'(\omega) = 2(P_R P'_R + P_I P'_I - Q_R Q'_R - Q_I Q'_I) \quad (3.64)$$

olduğundan

$$s = \text{sign} F'(\omega) \quad (3.65)$$

elde edilir. Özetlemek gerekirse, transversalite koşulunun sağlandığının gösterilmesinin bir diğer yolu, $F(\omega)$ fonksiyonunun işaretini kontrol etmektir.

Şimdi Lemma 3.4'ün ispatını verebiliriz.

İspat. Yukarıda verilen tanımlara göre (3.45) denkleminde

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + a\lambda, \\ Q(\lambda) &= b, \\ F(\omega) &= |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yani,

$$F(\omega) = \omega^4 + a^2\omega^2 - b^2 \quad (3.66)$$

bulunur. Bu denklemin, daha önce $\lambda = i\omega$ öyle ki $\omega > 0$ seçilerek karakteristik denkleme yerine koymakla elde edilen denklem olduğuna dikkat ediniz. Türev alınrsa, $\omega > 0$ olduğundan,

$$F'(\omega) = (4\omega^2 + 2a^2)\omega > 0$$

olduğu kolayca görülür. O halde, $\left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega_0} > 0$ olup, transversalite koşulu sağlanmış olur. \square

Not: Transversalite koşulu sağlandığından $\lambda = i\omega_0$ kökü basit köktür.

3. Durum: $\tau_1 = 0$ ve $\tau_2 > 0$ durumu

Bu durumda, (3.44) karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + a\lambda e^{-\lambda\tau_2} + b = 0 \quad (3.67)$$

olarak bulunur. Tekrar, $\lambda = i\omega$, öyle ki $\omega > 0$ kök kabul edilip (3.67)'de yerine konulursa

$$-\omega^2 + ai\omega e^{-i\omega\tau_2} + b = 0$$

ve reel ve sanal kısımlardan

$$-\omega^2 + a\omega \sin\omega\tau_2 + b = 0, \quad (3.68)$$

$$a\omega \cos\omega\tau_2 = 0 \quad (3.69)$$

elde edilir. Buradan da

$$\omega^4 - (2b + a^2)\omega^2 + b^2 = 0 \quad (3.70)$$

denkleminde ulaşılır. $2b + a^2 > 0$ olduğundan, ω_1 ve ω_2 olacak şekilde iki tane farklı pozitif kök bulunur:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2b + a^2) + \sqrt{(2b + a^2)^2 - 4b^2}}{2}}, \quad (3.71)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(2b+a^2) - \sqrt{(2b+a^2)^2 - 4b^2}}{2}}. \quad (3.72)$$

ω_1 ve ω_2 ye karşılık gelen τ_2 değerlerini sırasıyla aşağıdaki diziler şeklinde belirtelim:

$$\tau_{(1,n)}^{(2)} = \frac{\pi}{2\omega_1} + \frac{2n\pi}{\omega_1}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.73)$$

$$\tau_{(2,n)}^{(2)} = \frac{\pi}{2\omega_2} + \frac{2n\pi}{\omega_2}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (3.74)$$

Sonuç olarak, $\pm i\omega_k$, ($k = 1, 2$) (3.67) denkleminin $\tau_2 = \tau_{(k,n)}^{(2)}$ iken sırf sanal kökleridir.

$$\tau_{20} := \tau_{(k,0)}^{(2)} = \min_{\{k \in \{1,2\}\}} \tau_{(k,0)}^{(2)}$$

olarak tanımlayalım. $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ (3.67) denkleminin $\tau_2 = \tau_{20}$ civarında $\alpha(\tau_{20}) = 0, \omega(\tau_{20}) = \omega_0$ şartını sağlayan bir kökü olsun. O halde, aşağıdaki transversalite koşulu sağlanır:

Lemma 3.5.

$$\omega > \sqrt{\frac{a^2 + 2b}{2}} \quad (3.75)$$

koşulu sağlandığı takdirde, transversalite koşulu sağlanır, yani

$$\frac{dRe\lambda(\tau_{20})}{d\tau_2} > 0 \quad (3.76)$$

dir. O halde, sistem (3.40), (N^, P^*) pozitif denge noktasında, $\tau_2 = \tau_{20}$ iken Hopf çatallanmasına sahiptir.*

İspat. (3.67) denkleminde, bir önceki lemmanın ispatına benzer yolla

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + b, \\ Q(\lambda) &= a\lambda, \\ F(\omega) &= |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2 \end{aligned}$$

denklemlerini tanımlayabiliriz. Buradan

$$F(\omega) = \omega^4 - (a^2 + 2b)\omega^2 + b^2 \quad (3.77)$$

olarak bulunur. (3.77) denkleminde türev alınırsa,

$$F'(\omega) = (4\omega^2 - 2(a^2 + 2b))\omega \quad (3.78)$$

olduğu görülür. (3.75) koşulu sağlandığı takdirde, transversalite koşulunun da sağlandığı görülür. \square

4. Durum: $\tau_1 > 0$ ve $\tau_2 > 0$ durumu

Daha önce de belirttiğimiz gibi (3.44) denkleminde τ_1 in kararlılık aralığında τ_2 yi parametre seçerek analiz yapacağız. Bu seçim tamamen keyfidir. Bu yüzden, analizimiz Durum 2 altında olacaktır. Yine, $\lambda = i\omega$, ($\omega > 0$), (3.44) denkleminin bir kökü olsun. τ_2 parametre olarak seçildiğinden

$$\omega^4 - a^2\omega^2 + b^2 = 2b\omega^2 \cos\omega\tau_1 \quad (3.79)$$

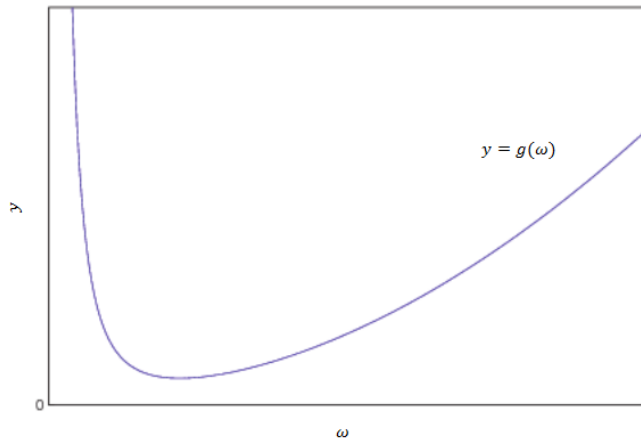
denklemini elde ederiz ki bu denklemi denk olarak aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$g(\omega) := \frac{\omega^4 - a^2\omega^2 + b^2}{2b\omega^2} = \cos\omega\tau_1. \quad (3.80)$$

Şimdi $g(\omega)$ fonksiyonunun bazı özelliklerini aşağıda sıralayabiliriz:

- i) $g'(\sqrt{b}) = 0$ dir,
- ii) $\omega \in (0, \sqrt{b})$ için $g(\omega)$ monoton azalan, $\omega \in (\sqrt{b}, \infty)$ için monoton artan bir fonksiyondur ve $g(\omega)$ minimum değerini $\omega = \sqrt{b}$ noktasında alır,
- iii) $g(\sqrt{b}) = 1 - \frac{a^2}{2b}$ ve $g(\sqrt{b}) < 1$ dir,
- iv) $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} g(\omega) = \infty$ ve $\lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) = \infty$ dir.

Özelliklerini sıraladığımız $g(\omega)$ fonksiyonunun olası bir grafiği Şekil 3.6'te verilmiştir.



Şekil 3.6: $g(\omega)$ fonksiyonunun olası bir grafiği.

Esas amacımız, pozitif bir ω sayısı bulmak olduğundan şimdi yapmamız gereken, (3.80) denkleminde $y = g(\omega)$ fonksiyonu ile $y = \cos\omega\tau_1$ fonksiyonlarının ortak kesim

noktalarını belirlemektir. $\tau_1 \geq 0$ yeterince küçük iken, $y = \cos\omega\tau_1$ ve $y = g(\omega)$ kesişmeyecektir (Kosinüs fonksiyonunun genişliği çok dar hale getirilebilir). Fakat, τ_1 yeterince büyük olduğunda, (3.80) denkleminin tek bir ω_0 çözümü bulunabilir. Bu noktada, $y = \cos\omega\tau_1$ ve $y = g(\omega)$ fonksiyonları aynı değere sahiptir ve fonksiyonların teğetlerinin o noktadaki eğimleri de eşittir. Bu noktalar nümerik olarak hesaplanabilir. Bu kesişmeyi garantileyen yeterli koşulları aşağıdaki lemmada ispatsız olarak verebiliriz:

Lemma 3.6.

- 1) $\sqrt{b} < \frac{\pi}{2\tau_1}$ ve $g(\frac{2\pi}{\tau_1}) \leq 1$ iken, $y = g(\omega)$ ve $y = \cos\omega\tau_1$ fonksiyonlarının en az bir pozitif çözümü vardır.
- 2) $\sqrt{b} > \frac{\pi}{2\tau_1}$ iken,
 - i) $g(\sqrt{b}) > 0$ ve $g(\frac{2\pi}{\tau_1}) \leq 1$ ise $y = g(\omega)$ ve $y = \cos\omega\tau_1$ fonksiyonlarının en az bir pozitif çözümü vardır,
 - ii) $g(\sqrt{b}) < 0$ ve $g(\frac{3\pi}{2\tau_1}) \leq 0$ ise $y = g(\omega)$ and $y = \cos\omega\tau_1$ fonksiyonlarının en az bir pozitif çözümü vardır.

Şimdi,

$$\tau_1^0 = \min\{\tau_1 \mid \cos\omega\tau_1 \text{ ve } g(\omega) \text{ kesişir}\}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $\tau_1 > \tau_1^0$ olduğunda $g(\omega) = \cos\omega\tau_1$ denkleminin en az iki çözümü vardır. Bu sonlu çokluktaki çözümler $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ olsun. Her bir sabit ω_i , $i = 1, 2, \dots, k$ için, $\{\tau_{2_i}^j \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$ dizileri vardır öyle ki (3.80) denklemini sağlar. $\tau_{2_*} = \min\{\tau_{2_i}^j \mid i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $\tau_2 = \tau_{2_*}$ iken, $\tau_1 \in [0, \tau_{10})$ aralığında (3.44) denkleminin $\pm i\omega_0$ olacak şekilde bir çift sırf sanal kökü vardır.

Diğer yandan

$$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right) \right]_{\lambda=i\omega_0} \neq 0 \quad (3.81)$$

kabul edebiliriz. Transversalite koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$m = \frac{2bcos(\omega\tau_1)+a^2}{2} \text{ olacak şekilde}$$

$$\omega > \sqrt{m} \text{ ve } m \geq 0,$$

olmasıdır. Gerçekten, Cooke ve Driessche (1986) referansından (Bölüm 5: Equations with several delays)

$$F'(\omega) = (4\omega^2 - 2(2bcos(\omega\tau_1) + a^2))\omega \quad (3.82)$$

olduğu bulunur. Bu koşullar altında $F'(\omega) > 0$ sağlanır.

Teorem 3.2. *Kabul edelim (3.40) sistemi için, (3.80) denkleminin sonlu çoklukta pozitif kökü olsun ve $\tau_1 \in [0, \tau_{10})$ iken, (3.81) transversalite koşulu sağlansın. O halde (3.40)*

sisteminin E^* denge noktası, $\tau_2 \in [0, \tau_{2*})$ iken asimptotik kararlıdır. Üstelik, (3.40) sistemi E^* pozitif denge noktasında $\tau_2 = \tau_{2*}$ iken Hopf çatallanmasına sahiptir.

3.4.2 Yön analizi

Bu bölümde, (3.40) sistemi için varlığı teorik olarak gösterilen Hopf çatallanmasının yönünü, kararlılığını ve periyodunu merkez çok katlına indirgeme yöntemi ile hesaplayacağız. Hesaplamalar, 4. durum için yapılacaktır.

Genellikle bir şey kaybetmeden $\tau_1^* \in (0, \tau_{10})$ kararlılık aralığında $\tau_1^* < \tau_{2*}$ olacak şekilde τ_1^* sabitleyebiliriz. $x(t) = N(t) - N^*$, $y(t) = P(t) - P^*$ değişken değiştirmelerini kullanabiliriz ve $t \rightarrow t/\tau_2$ zaman skalasını kullanarak gecikmeyi normalleştirebiliriz. $\tau_2 = \tau_{2*} + \mu$ eşitliği de kullanılarak, (3.40) sistemi yeniden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_2} \frac{dx(s)}{ds} &= -\varepsilon N^* y(s) - \varepsilon x(s) y(s), \\ \frac{1}{\tau_2} \frac{dy(s)}{ds} &= r_2 P^* + r_2 y(s) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} - \theta \frac{P^*}{N^*} y(s - \tau_2) - \theta \frac{P^*}{N^*} y(s) - \frac{\theta}{N^*} y(s) y(s - \tau_2) \\ &+ \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} x(s - \tau_1) + \theta \frac{(P^*)}{(N^*)^2} x(s - \tau_1) y(s - \tau_2) + \theta \frac{(P^*)}{(N^*)^2} x(s - \tau_1) y(s) \\ &- \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x^2(s - \tau_1) + Y.M.T., \end{aligned}$$

öyle ki $Y.M.T$ yüksek mertebeden terimleri göstermektedir. Şimdi, $s = t$ alınıp

$$\begin{aligned} N(t) &= N(\tau_2 s) = N^* + x(s), \\ N(t - \tau_1^*) &= N(\tau_2 s - \tau_1^*) = N(\tau_2(s - \frac{\tau_1^*}{\tau_2})) = N^* + x(s - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \\ P(t) &= P(\tau_2 s) = P^* + y(s), \\ P(t - \tau_2) &= P(\tau_2 s - \tau_2) = P(\tau_2(s - 1)) = P^* + y(s - 1) \end{aligned}$$

eşitlikleri düşünülürse matris formatında aşağıdaki (3.83) sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= (\tau_{2*} + \mu) A(\tau_2) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + (\tau_{2*} + \mu) B(\tau_2) \begin{bmatrix} x(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \\ y(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \end{bmatrix} \\ &+ (\tau_{2*} + \mu) C(\tau_2) \begin{bmatrix} x(t - 1) \\ y(t - 1) \end{bmatrix} + (\tau_{2*} + \mu) f(x, y). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Burada

$$A(\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon N^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\theta(P^*)^2}{(N^*)^2} & 0 \end{bmatrix}, C(\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta P^*}{N^*} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} x(t)y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[-\frac{\theta}{N^*} y(t)y(t - \tau_1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) y(t - 1) \right. \\ \left. + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} x(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) y(t) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} x^2(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \right] \quad (3.84)$$

şeklindedir. Yeniden $u(t) = (x(t), y(t))^T$ değişkenini tanımlayalım. (3.83) sisteminin orijin etrafındaki lineerleştirilmesi

$$u'(t) = (\tau_{2*} + \mu)A(\tau_2)u(t) + (\tau_{2*} + \mu)B(\tau_2)u(t - \frac{\tau_1^*}{\tau_2}) + (\tau_{2*} + \mu)C(\tau_2)u(t - 1)$$

olarak bulunur. $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ için $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L_\mu(\phi) = (\tau_{2*} + \mu)A(\tau_{2*} + \mu)\phi(0) + (\tau_{2*} + \mu)B(\tau_{2*} + \mu)\phi(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \\ + (\tau_{2*} + \mu)C(\tau_{2*} + \mu)\phi(-1). \quad (3.85)$$

O halde (3.40) sistemi C 'de aşağıdaki fonksiyonel diferensiyel denklemi olarak yazılabilir:

$$u'(t) = L_\mu(u_t) + f(\mu, u_t), \quad (3.86)$$

öyle ki $u_t(\theta) = u(t + \theta) = (x(t + \theta), y(t + \theta))^T$ ve $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_{11} = -\varepsilon \phi_1(0)\phi_2(0), \\ f_{12} = -\frac{\theta}{N^*} \phi_2(0)\phi_2(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \phi_1(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2})\phi_2(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \phi_1(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2})\phi_2(0) \\ - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \phi_1^2(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}) \quad (3.87)$$

olmak üzere

$$f(\mu, \phi) = (\tau_{2*} + \mu) \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

olarak yazılabilir.

Riesz Temsil Teoreminden her bir bileşeni sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in C$ ve $\theta \in [-1, 0]$ için

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) \quad (3.89)$$

koşulunu sağlayan $\eta(\theta, \mu)$ dönüşümü vardır. Özel olarak,

$$\eta(\theta, \mu) = \begin{cases} (\tau_{2*} + \mu)(A + B + C), & \theta = 0, \\ (\tau_{2*} + \mu)(B + C), & \theta \in \left(-\frac{\tau_1^*}{2}, 0\right), \\ (\tau_{2*} + \mu)C, & \theta \in \left(-1, -\frac{\tau_1^*}{2}\right), \\ 0, & \theta = -1. \end{cases} \quad (3.90)$$

alınabilir. $\phi \in C$ için, tekrar

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta(\xi, \mu)\phi(\xi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.91)$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.92)$$

operatörlerini tanımlayalım. O halde, (3.86) sistemi, $\theta \in [-1, 0)$ için $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ olmak üzere aşağıdaki soyut diferensiyel denkleme denktir:

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t. \quad (3.93)$$

$\psi \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(\xi, 0)\psi(-\xi), & s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.94)$$

operatörü ve

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta)\phi(\xi)d\xi \quad (3.95)$$

bilineer formu tanımlansın. $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörlerinin adjoint operatörler olduğunu biliyoruz. Şimdi, kabul edelim $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ sırasıyla $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörlerinin $\lambda = i\omega_0$ ve $\bar{\lambda} = -i\omega_0$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olsun.

$q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_0\theta}$ seçilirse, $A(0)q(\theta) = i\omega_0q(\theta)$ olduğundan, $a_2 = \frac{-i\omega_0}{\tau_{2*}\varepsilon N^*}$ kolayca

bulunur. Benzer şekilde, $q^*(s) = \frac{1}{D}(b_1, 1)e^{i\omega_0s}$ alınırsa, $b_1 = \frac{-\tau_{2*}\theta(P^*)^2}{i\omega_0(N^*)^2} e^{i\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*}\omega_0}$ olarak bulunur. D 'yi hesaplamak için ise $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ eşitliği kullanılır.

$\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ olduğundan

$$\bar{D} = \bar{b}_1 + \tau_{2*} e^{-i\omega_0\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*}} \frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} \frac{\theta(P^*)^2}{(N^*)^2} + a_1(1 + \tau_{2*} \frac{\theta P^*}{N^*} e^{-i\omega_0})$$

olarak bulunabilir.

Bölüm 3.3.2'deki tanımlar aynen kullanılırsa $\mu = 0$ daki C_0 merkez çok katlısı için

$$z(t) = \langle q^*, u_t \rangle \text{ ve } w(t, \theta) = u_t - 2Re\{z(t)q(\theta)\} \quad (3.96)$$

eşitlikleri tanımlanabilir. Diğer yandan, merkez çok katlısı üzerinde, q and q^* vektörleri yönündeki z ve \bar{z} merkez çok katlısının lokal koordinatları olmak üzere

$$w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (3.97)$$

yazılabilir. $u_t \in C_0$ için

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{u}_t \rangle = \langle q^*, Au_t + Ru_t \rangle \\ &= i\omega_0 \langle q^*, u_t \rangle + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \equiv i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

olup $\mu = 0$ 'da

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (3.98)$$

yazmanın bir sakıncası yoktur. Burada, $f_0(z, \bar{z})$, $\mu = 0$ 'daki $f(z, \bar{z})$ yi göstermektedir. $g(z, \bar{z})$ nin katsayılarını belirlemek için, (3.88) denklemini yeniden yazmamız gereklidir. (3.96) denkleminin sağdaki eşitliğinden, $u_t(u_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta)) = w(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$ olarak çekilebilir. Yukarıda bulduğumuz

$q(\theta) = (1, a_2)^T e^{i\omega_0\theta}$ göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned}
u_{1t}(0) &= z + \bar{z} + w_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
u_{2t}(0) &= za_2 + \overline{za_2} + w_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
u_{1t}(-1) &= ze^{-i\omega_0} + \bar{z}e^{i\omega_0} + w_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-1) z\bar{z} \\
&\quad + w_{02}^{(1)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
u_{2t}(-1) &= za_2 e^{-i\omega_0} + \overline{za_2} e^{i\omega_0} + w_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-1) z\bar{z} \\
&\quad + w_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
u_{1t}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) &= ze^{-i\omega_0\left(\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right)} + \bar{z}e^{i\omega_0\left(\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right)} + w_{20}^{(1)}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) z\bar{z} \\
&\quad + w_{02}^{(1)}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.88)'den

$$g(z, \bar{z}) = \overline{q^*}(0) f_0(z, \bar{z}) = \frac{1}{D} \tau_{2*}(\overline{b_1}, 1) \begin{bmatrix} f_{11}^0 \\ f_{12}^0 \end{bmatrix},$$

olarak da yazılabilir.

$$f_{11}^0 = -\varepsilon u_{1t}(0) u_{2t}(0)$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{12}^0 &= -\frac{\theta}{N^*} u_{2t}(0) u_{2t}(-1) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} u_{1t}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) u_{2t}(-1) \\
&\quad + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} u_{1t}\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right) u_{2t}(0) - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} u_{1t}^2\left(-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) = & \frac{1}{D} \tau_{2*} z^2 \left[\begin{array}{l} -\varepsilon a_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} a_2^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{i\omega_0 k} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{2i\omega_0 s} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{D} \tau_{2*} z \bar{z} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \varepsilon a_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{-i\omega_0} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 t} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 t} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{D} \tau_{2*} z^2 \bar{z} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2^2 e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{-i\omega_0 k} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{-i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{-2i\omega_0 s} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{D} \tau_{2*} z^2 \bar{z} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} - \varepsilon \bar{b}_1 \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} - \varepsilon a_2 \bar{b}_1 w_{11}^{(1)}(0) \\ - \varepsilon \bar{b}_1 w_{11}^{(2)}(0) - \frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} \\ - \frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} - \frac{\theta}{N^*} a_2 w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} a_2 w_{11}^{(2)}(-1) \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(1)}(s)}{2} e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} e^{-i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 w_{11}^{(1)}(s) e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(-1) e^{i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(1)}(s)}{2} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{-i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 w_{11}^{(1)}(s) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(0) e^{i\omega_0 s} \\ - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} 2w_{11}^{(1)}(s) e^{i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} w_{20}^{(1)}(s) e^{-i\omega_0 s} \end{array} \right] \\
& + Y.M.T.,
\end{aligned}$$

olup, işlem kolaylığı açısından $s = -\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*}$, $k = -\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} - 1$ ve $t = -\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} + 1$ yazılmıştır. Bulunan bu eşitlikteki katsayılar (3.98) denklemindekilerle karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
g_{20} = & 2 \frac{1}{D} \tau_{2*} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon a_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} a_2^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{i\omega_0 k} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{2i\omega_0 s} \end{array} \right], \\
g_{11} = & \frac{1}{D} \tau_{2*} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \varepsilon a_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{-i\omega_0} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 t} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 t} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} \end{array} \right], \\
g_{02} = & 2 \frac{1}{D} \tau_{2*} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2^2 e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{-i\omega_0 k} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{-i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{-2i\omega_0 s} \end{array} \right],
\end{aligned}$$

$$g_{21} = 2 \frac{1}{D} \tau_{2*} \left[\begin{array}{l} -\varepsilon \bar{a}_2 \bar{b}_1 \frac{w_{20}^{(1)}(0)}{2} - \varepsilon \bar{b}_1 \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} - \varepsilon a_2 \bar{b}_1 w_{11}^{(1)}(0) \\ -\varepsilon \bar{b}_1 w_{11}^{(2)}(0) - \frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega_0} \\ -\frac{\theta}{N^*} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} - \frac{\theta}{N^*} a_2 w_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} a_2 w_{11}^{(2)}(-1) \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(1)}(s)}{2} e^{i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(-1)}{2} e^{-i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 w_{11}^{(1)}(s) e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(-1) e^{i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 \frac{w_{20}^{(1)}(s)}{2} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \frac{w_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{-i\omega_0 s} \\ + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 w_{11}^{(1)}(s) + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} w_{11}^{(2)}(0) e^{i\omega_0 s} \\ - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} 2w_{11}^{(1)}(s) e^{i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} w_{20}^{(1)}(s) e^{-i\omega_0 s} \end{array} \right]$$

katsayıları elde edilir. g_{21} katsayısındaki bilinmeyenleri bulmak için, $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ hesaplayacağız. Bölüm 3.3.2'deki tanımların aynıları kullanılarak (3.96)'dan,

$$\begin{aligned} \dot{w}(t, \theta) &= \dot{x}_t - 2\text{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\ &= \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \\ &:\equiv Aw + H(z, \bar{z}, \theta), \end{aligned}$$

olduğu görülebilir, öyle ki

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (3.99)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan, merkez çok katlısı üzerinde

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

olduğunu biliyoruz. O halde, katsayıların eşitliğinden

$$(A - 2i\omega_0)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \quad (3.100)$$

yazılabilir. $\theta \in [-1, 0)$ için

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -2\text{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\}$$

dir. (3.100) denkleminin katsayılarını (3.99) denkleminin katsayıları ile

karşılaştırırsak, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} H_{20}(\theta) &= -(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}), \\ H_{11}(\theta) &= -(q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}), \\ H_{02}(\theta) &= -(q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}). \end{aligned}$$

(3.100) denklemini ve A 'nın tanımından,

$$w_{20}(\theta) - 2i\omega_0 w_{20}(\theta) = q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}$$

dir. $q(\theta) = q(0)e^{i\omega_0\theta}$ olduğundan,

$$w_{20}(\theta) = \frac{i}{\omega_0} g_{20} q(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{3\omega_0} \bar{g}_{02} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\theta},$$

olarak bulunur, öyle ki $E_1 = \begin{bmatrix} E_1^{(1)} \\ E_1^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ keyfi bir vektördür. Benzer şekilde,

$$w_{11}(\theta) = \frac{-i}{\omega_0} g_{11} q(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{\omega_0} \bar{g}_{11} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_2,$$

öyle ki, $E_2 = \begin{bmatrix} E_2^{(1)} \\ E_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ keyfi bir vektör olarak elde edilir. E_1 ve E_2 'yi hesaplamak için ise (3.96)'da $\theta = 0$ yerine yazılırsa:

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{20}(\theta) = 2i\omega_0 w_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (3.101)$$

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{11}(\theta) = -H_{11}(0) \quad (3.102)$$

elde edilir. Ayrıca, $\theta = 0$ için, $n_1 = -\varepsilon a_2$ ve $n_2 = -\frac{\theta}{N^*} a_2^2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{i\omega_0 k} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3} e^{2i\omega_0 s}$ olmak üzere

$$H_{20}(0) = -g_{20} q(0) - \bar{g}_{02} \bar{q}(0) + 2\tau_{2*} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

ve $s_1 = -2\varepsilon \text{Re}(a_2)$ ve $s_2 = -\frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{i\omega_0} - \frac{\theta}{N^*} a_2 \bar{a}_2 e^{-i\omega_0} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 t}$

$+ \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 t} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} \bar{a}_2 e^{i\omega_0 s} + \theta \frac{P^*}{(N^*)^2} a_2 e^{-i\omega_0 s} - 2\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^3}$ olmak üzere

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_{2*} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

bulunabilir.

Diğer yandan, $A(0)q(0) = iw_0q(0)$ ve $A(0)\bar{q}(0) = iw_0\bar{q}(0)$ olduğundan

$$\left[iw_0I - \int_{-1}^0 e^{iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] q(0) = 0, \quad (3.105)$$

$$\left[-iw_0I - \int_{-1}^0 e^{-iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] \bar{q}(0) = 0 \quad (3.106)$$

eşitlikleri her zaman geçerlidir. Son olarak (3.103) denklemini (3.101) denkleminde yerine yazarsak ve (3.105) eşitliği kullanılırsa,

$$\left[2iw_0I - \int_{-1}^0 e^{2iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] E_1 = 2\tau_{2*} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, denk olarak

$$\begin{bmatrix} 2iw_0 & -\tau_{2*}\epsilon N^* \\ -\tau_{2*}\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} e^{2iw_0s} & 2iw_0 + \tau_{2*}\theta \frac{P^*}{N^*} e^{-2iw_0} \end{bmatrix}_{2 \times 2} E_1 = 2\tau_{2*} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

yazılabilir. Bu sistemi E_1 için çözersek,

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2iw_0 & -\tau_{2*}\epsilon N^* \\ -\tau_{2*}\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} e^{2iw_0s} & 2iw_0 + \tau_{2*}\theta \frac{P^*}{N^*} e^{-2iw_0} \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

olmak üzere

$$E_1^{(1)} = \frac{2\tau_{2*}}{A_1} \begin{vmatrix} n_1 & -\tau_{2*}\epsilon N^* \\ n_2 & 2iw_0 + \tau_{2*}\theta \frac{P^*}{N^*} e^{-2iw_0} \end{vmatrix}_{2 \times 2},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{2\tau_{2*}}{A_1} \begin{vmatrix} 2iw_0 & n_1 \\ -\tau_{2*}\theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} e^{2iw_0s} & n_2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

hesaplanmış olur. Benzer şekilde, (3.104) denklemi (3.102)'de yerine konur ve (3.106) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon N^* \\ \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} & -\theta \frac{P^*}{N^*} \end{bmatrix}_{2 \times 2} E_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ -s_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

denklemi elde edilir ki

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon N^* \\ \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} & -\theta \frac{P^*}{N^*} \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

olmak üzere

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -s_1 & -\varepsilon N^* \\ -s_2 & -\theta \frac{P^*}{N^*} \end{vmatrix}_{2 \times 2},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} 0 & -s_1 \\ \theta \frac{(P^*)^2}{(N^*)^2} & -s_2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

olarak çözülür.

Bulunan E_1 ve E_2 , $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ da yerine koyularak Lyapunov katsayısındaki tüm bilinmeyenler hesaplanmış olur. Artık, Hopf çatallanmanın yönü ve kararlılığı Teorem 2.2'den hesaplanabilir.

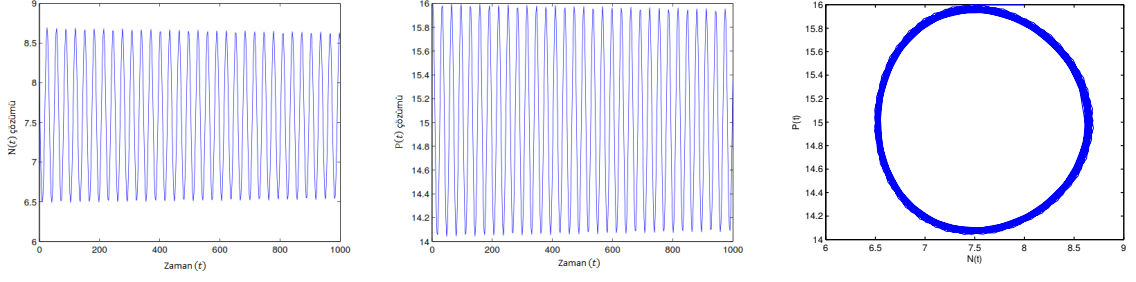
3.4.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde, örnek olarak (3.40) sisteminde katsayılar Çelik (2009) makalesindeki gibi seçilmiş ve bir önceki bölümdeki bulgular nümerik olarak desteklenmiştir.

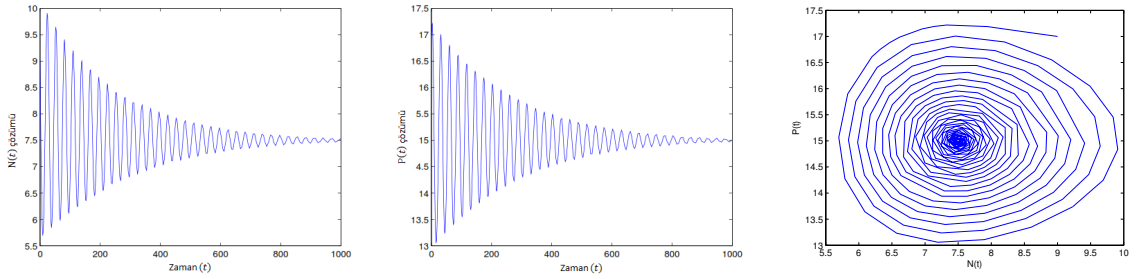
$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 0.45N(t) - 0.03P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(0.1 - 0.05 \frac{P(t - \tau_2)}{N(t - \tau_1)} \right) \end{aligned} \quad (3.107)$$

(3.107) sisteminin $E^* = (N^*, P^*) = (7.5, 15)$ olmak üzere tek bir pozitif denge noktası mevcuttur. (3.49) ve (3.50) denklemlerinden, $\omega_0 \approx 0.2$ ve $\tau_{10} \approx 2.30340$ elde edilir. Lemma 3.4'e göre $\tau_2 = 0$ iken transversalite koşulu da sağlanır. Sonuç olarak, $E^* = (7.5, 15)$ denge noktası $\tau_1 < \tau_{10} = 2.3034$ için asimptotik kararlı ve $\tau_1 > \tau_{10} = 2.3034$ için kararsızdır. $\tau_1 = \tau_{10}$ iken sistem (3.107)'de Hopf çatallanması görülür (Çelik, 2009). Oluşan periyodik çözümler Şekil 3.7'de gösterilmiştir.

Şimdi, $\tau_1 \in (0, 2.3034)$ kararlılık aralığında $\tau_1^* = 2$ olarak sabitleyelim ve τ_2 yi parametre seçelim. O halde, (3.80) denkleminin $\omega_1 \approx 0.18$ ve $\omega_2 \approx 0.23$ olmak üzere iki pozitif kökü vardır. $\tau_{2*} = \min\{\tau_{2_i}^j, i = 1, 2\}$ tanımından $\tau_{2*} = 2.2541$ olarak



Şekil 3.7: $\tau_1 = \tau_{10} = 2.3034$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_1 = \tau_{10} = 2.3034$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.



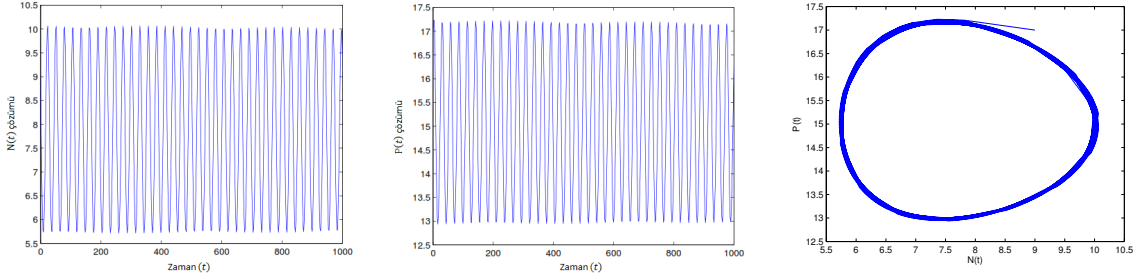
Şekil 3.8: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 1.6 < \tau_{2*}$ iken $N_0 = 9, P_0 = 17$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözüm grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 = \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.

hesaplanır. Dolayısıyla, $\tau_2 \in [0, \tau_{2*})$ için pozitif denge noktamız kararlı olacaktır. Şekil 3.8'den çözümler açıkça görülebilir.

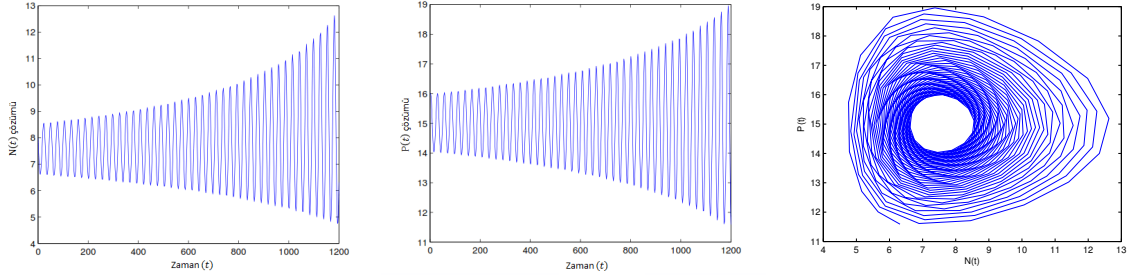
Şimdi ise, τ_2, τ_{2*} kritik değerini geçtiğinde periyodik çözümlerin oluşmasını beklemekteyiz. Bu değerden sonra da, çözümler yine kararsız olacaktır. Bu durumlar da Şekil 3.9 ve 3.10'da gösterilmiştir. Ayrıca, μ_2, β_2 ve T_2 aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\mu_2 = 0.0145 > 0, \beta_2 = -0.0002 < 0, T_2 = 0.0064 > 0. \quad (3.108)$$

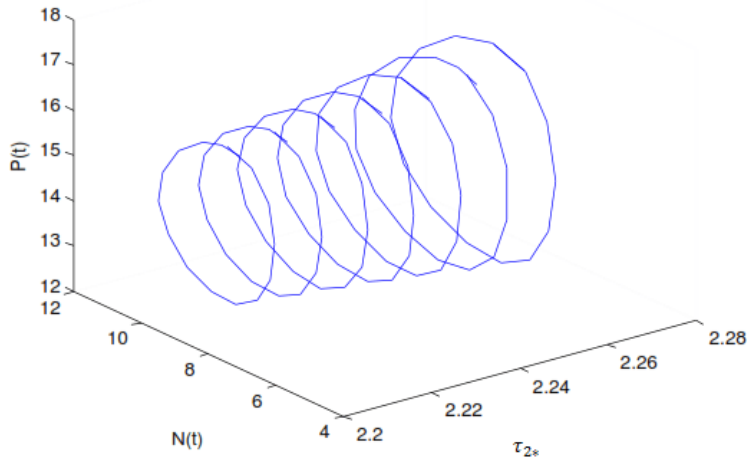
$\mu_2 > 0$ olduğundan, Hopf çatallanmasının yönü süperkritiktir. $\beta_2 < 0$ ve $T_2 > 0$ olduğundan periyodik çözümler artan bir periyotla kararlıdır. Şekil 3.5'te de bazı τ_{2*} değerleri için çatallanma diyagramı verilmiştir.



Şekil 3.9: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 2.24 \approx \tau_{2*}$ iken $N_0 = 9, P_0 = 17$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözümlerinin grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 \approx \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.



Şekil 3.10: $\tau_1 = 2 < \tau_{10}$ ve $\tau_2 = 2.4 > \tau_{2*}$ iken $N_0 = 8, P_0 = 16$ başlangıç koşullarına sahip av ve avcı çözümlerinin grafikleri sol ve ortadaki şekilde verilmiştir. Sağdaki resim ise aynı başlangıç değerleri için $\tau_2 > \tau_{2*}$ olduğu durumda av-avcı faz portresini göstermektedir.



Şekil 3.11: τ_{2*} değerleri $\tau_{2*} = 2.2$ 'den $\tau_{2*} = 2.28$ 'e kadar 0.01 artışla değişirken bazı limit döngüleri.

4. HEM KESİKLİ HEM DAĞILIMLI GECİKME İÇEREN BİR YAPAY SINIR AĞI SİSTEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

4.1 Yapay Sinir Ağlarına Giriş ve Kısa Tarihçe

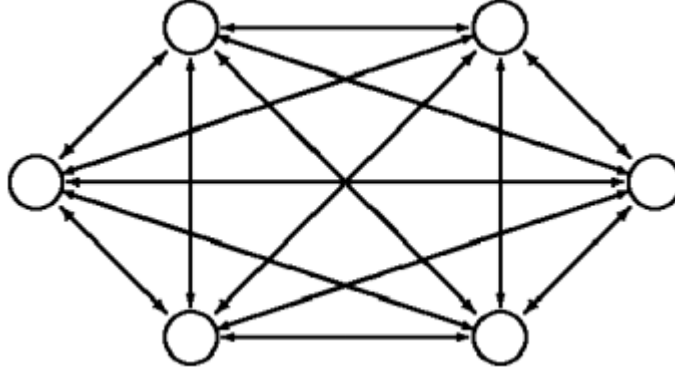
İnsanoğlu varolduğundan beri doğada karşılaştığı problemleri akıl, his ve düşünceleri yardımıyla çözmeye çalışmıştır. Bu uğurda, ihtiyaçlarını karşılamak için birçok makine üretmiş ve yöntemler geliştirmeye çalışmıştır. Kuşkusuz, beynimiz dünyadaki en karmaşık ve mükemmel sistemdir. Bu yüzden, beynin yapısını merak etmek ve beyin mekanizmasına benzer yapılar üretip sorunları çözmeye çalışmak oldukça doğaldır.

Geliştirilen son teknolojilerle birlikte bilgisayarlar ne kadar hızlı olsa da hala eksik bilgi ile işlem yapma veya idrak etme, edindiği deneyimlerden yararlanarak çıkarımlar yapma gibi konularda yetersizdirler. Öte yandan, insan beyni gürültülü ortamda görme, konuşma, hata düzeltme gibi yetilere sahiptir. İşte, yapay sinir ağları (YSA), beynin bu özelliklerinden feyz alınarak tasarlanmış, insan beynindeki sinir ağlarından esinlenerek geliştirilmiş bilgisayar programlarıdır. Diğer bir deyişle, ağırlıklandırılmış şekilde birbirlerine bağlanmış birçok işlem biriminden (nöronlar) oluşan matematiksel sistemlerdir (Url-8). Yapay sinir ağları öğrenebilen, bilgiler arasında ilişkiler kurarak çıkarım yapabilen mekanizmalardır. Genel olarak yapay sinir ağları sınıflandırma, desen, el yazısı ve ses tanıma, görüntü işleme, optimizasyon problemleri, sistem kontrolü gibi birçok alanda yoğun olarak kullanılmaktadır.

Yapay sinir ağlarına dair ilk modelin bir sinir hekimi olan McCulloch ve bir matematikçi olan Pitts tarafından 1943 yılında yapılan çalışma olduğu kabul edilmektedir (McCulloch ve Pitts, 1943). McCulloch ve Pitts çalışmalarında iki girdi ve bir çıktıya sahip olan sadece ikilik sistemi kullandıkları “Threshold Logic Unit” adı verilen model üzerinde çalışmışlardır. Daha sonra 1949’da Hebb “Organization of Behavior” isimli kitabında bir yapay sinir ağının öğrenme yeteneğine temel oluşturan Hebb Kuralı’nı ortaya atmıştır (Hebb, 1949). YSA’lar üzerine ikinci büyük adım olarak Rosenblatt’ın 1958’deki çalışması sayılmaktadır (Rosenblatt, 1958). Tekli doğrusal algılayıcı (perceptron) olarak da bilinen bu model tek katmanlı, öğrenebilen ve nöronlar arasındaki ağırlıkları rastgele değişen bir yapay sinir ağıdır.

1960’lı yıllarda tüm gazeteler düşünebilen robotların makaleleri ile doluyken bütün problemlerin tekli doğrusal algılayıcı ile çözülebileceği düşünülmekteydi (Smith, 1997). Fakat 1969’da Minsky ve Papert’ın yazmış olduğu “Perceptrons” (Minsky ve Papert, 1969) adlı kitap yapılan çalışmalara durgunluk getirmiştir. Bu kitapta, algılayıcıların sadece lineer ayrılabilir problemleri çözebileceği öne sürülmüş ve YSA’ların lineer olmayan problemleri çözemediği meşhur XOR problemi ile ispatlanmıştır. Bunun için gerekli çözüm ise, 1974 yılında Werbos tarafından geri yayılım algoritması sayesinde bulunmuştur (Werbos, 1974). 1980’li yıllara kadar

devam eden durgunluktan sonra, 1982 yılında, Hopfield'in lineer olmayan ağlarla ilgili enerji fonksiyonunu kullanarak yeni bir makale yayınlamasıyla çalışmalar yeniden hareketlenmiştir. Hopfield bu makalesinde nöronların birbirleriyle etkileşimi temeline dayanan yeni bir sinir ağı ortaya koymuştur. Bu model, belli bir enerji düzeyine yakınsayan birinci dereceden lineer olmayan diferensiyel denklem takımları ile ifade edilmektedir. Hopfield modelinde her birim diğer tüm birimlere bağlıdır. Ayrıca, bağlantılar çift yönlüdür (bilgi her iki yönde akar) ve simetrikdir (Bakınız Şekil 4.1). Hopfield modelinin daha detaylı bilgisi Bölüm 4.4'te verilecektir.



Şekil 4.1: 6 birimli Hopfield ağı (Tavşanoğlu, 2009)

Hopfield'in çalışmasından sonra gelişmeler inanılmaz bir hızla sürmüştür. Bugün YSA üzerine çalışmalar birçok disiplinlerarası bölümde devam etmekte ve uygulamaları her geçen gün artmaktadır.

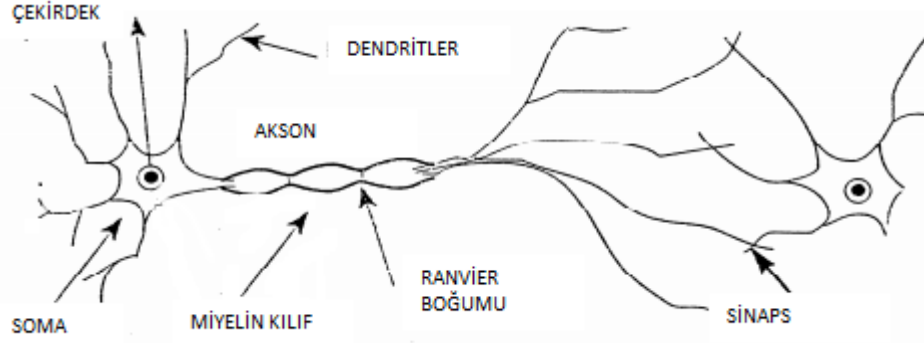
4.2 Bir Beyin Sinir Hücresinin Yapısı

İnsanlar doğduğu andan itibaren öğrenme sürecine girerler. Öğrenme olayı, etraftaki olaylardan deneyim kazanarak ve bilgileri tekrar ederek gerçekleşir. İnsanlarda bu yeteneği sağlayan temel yapı, sinir hücreleridir. Bir insanda yaklaşık 10^{10} - 10^{11} adet sinir hücresi (nöron) olup, bu hücreler tüm vücuda yayılmışlardır. Bir nöronun yaklaşık 10000 kadar komşu bağlantısı vardır. Sinir hücreleri dışardan gelen sinyalleri algılar ve aralarındaki sinaptik bağlantılar sayesinde elektrokimyasal sinyallerle beyine iletirler. Daha sonra gelen bilgiler beyinde işlendikten sonra bir çıktı oluşur ve ona göre yapılacak davranışa karar verilir.

Yukarıdaki durum YSA'lar için de geçerlidir. Öğrenme, eğitime yoluyla örnekler kullanarak olur. Başka bir deyişle, YSA örneklerdeki verileri kullanarak bağlantı ağırlıklarını değiştirir. YSA'lar için öğrenme, danışmanlı veya danışmansız olarak ikiye ayrılabilir. Gerçek sinir hücrelerinde öğrenme ise, yeni sinaptik bağlantıların ortaya çıkmasına veya bağlantıların yeniden ayarlanmasına tekabül eder.

Farklı sinir hücreleri çeşitleri olmakla birlikte, genelde bir sinir hücresinin dört temel bileşeni vardır. Bunlar, dendritler, soma, akson ve sinapstur. Dışarıdan bir sinyal geldiğinde dendritler alıcı görevi görerek sinyalleri somaya iletir (İletim, elektrik

potansiyel farkı sayesinde gerçekleşir). Soma, bir merkez işleme birimi görevi görerek bilgiyi işler. Uyarının belirli bir kritik değerin üstünde olup olmamasına göre bir çıktı üretir (Aksiyon potansiyeli oluşur). Gelen sinyaller belirli bir kritik değerin altındaysa hücre uyarılmayabilir. Daha sonra somada üretilen bu çıktı sinyali, aksonlar yardımıyla diğer sinir hücrelerine taşınır. İki nöron arasındaki bağlantı noktasına sinaps adı verilir.



Şekil 4.2: Basit bir sinir hücresi yapısı

4.3 Bir YSA Yapısı

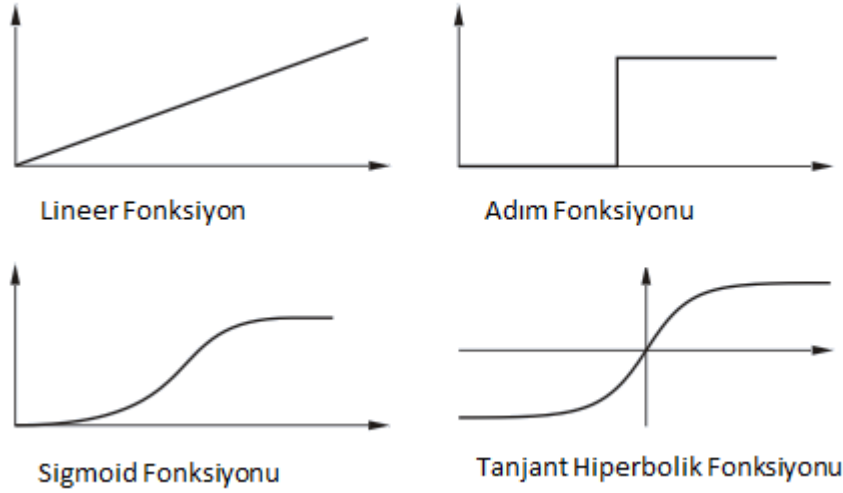
Daha önce de belirttiğimiz gibi YSA yapısı biyolojik nöronlardan esinlenerek oluşturulmuştur. YSA verilen girdilere karşı çıktılar üreten bilgi işleme sistemidir. YSA'da bilgiler paralel olarak işlenir. Bu prensipten dolayı sistem akışı çok hızlı bir şekilde olmaktadır. Yapay nöronlar da aralarında bağ kurarak yapay sinir ağlarını oluştururlar. Aynı biyolojik nöronlarda olduğu gibi yapay nöronların da giriş sinyallerini aldıkları, bu sinyalleri toplayıp işledikleri ve çıktıları ilettikleri bölümleri bulunmaktadır. Bir yapay sinir hücresi beş bölümden oluşmaktadır (Çayıroğlu, 2016):

- Girdiler
- Ağırlıklar
- Toplama Fonksiyonu (Birleştirme Fonksiyonu)
- Aktivasyon Fonksiyonu
- Çıktılar

Girdiler: Girdiler, diğer hücrelerden ya da dış ortamlardan hücreye gelen bilgilerdir.

Ağırlıklar: Yapay sinir hücresine gelen bilgiler, bağlantılar üzerindeki ağırlıklar üzerinden hücreye girer ve ağırlıklar, ilgili girişin hücre üzerindeki etkisini belirler. Bu sayede, hangi bağlantının çıktı üzerindeki etkisinin daha çok olacağı ayarlanabilmektedir. Bu ağırlıkların değerleri pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

Toplama Fonksiyonu (Birleştirme Fonksiyonu): Toplama fonksiyonu bir yapay sinir hücresine ağırlıklarla çarpılarak gelen girdileri toplayarak o hücrenin net



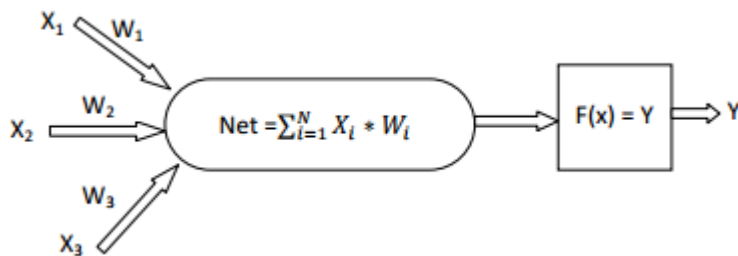
Şekil 4.3: Bazı aktivasyon fonksiyonları

girdisini hesaplayan bir fonksiyondur.

Aktivasyon Fonksiyonu: Bu fonksiyon, birleştirme fonksiyonundan hücreye gelen net girdiyi bir işlemde geçirerek hücrenin üreteceği çıktıyı belirleyen ve genellikle doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Aktivasyon fonksiyonu seçilirken dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise fonksiyonun türevinin kolay hesaplanabilir olmasıdır. Geri beslemeli ağlarda aktivasyon fonksiyonunun türevi de kullanıldığından hesaplamaların yavaşlamaması için türevi kolay hesaplanır bir fonksiyon seçilir. Şekil 4.3'te bazı aktivasyon fonksiyonları gösterilmektedir.

Hücrenin Çıktısı: Aktivasyon fonksiyonundan çıkan değer, hücrenin çıktı değeri olmaktadır. Bu değer, yapay sinir ağının çıktısı olarak dış dünyaya verilir veya tekrar yeni bir girdi olarak ağın içinde kullanılabilir. Her hücrenin birden fazla girdisi olmasına rağmen bir tek çıktısı olmaktadır. Bu çıktı istenilen sayıda hücreye bağlanabilir.

Şekil 4.4'te X_1 , X_2 , X_3 adı verilen üç tane girdi bulunmakta ve bu girdiler W_1 , W_2 , W_3 ağırlıklarıyla çarpılarak toplama fonksiyonu oluşturulmaktadır. Daha sonra, bu net girdi bir F aktivasyon fonksiyonu tarafından işlenip Y çıktısı oluşturulmaktadır.



Şekil 4.4: Yapay sinir hücresinin yapısı (Çayıroğlu, 2016)

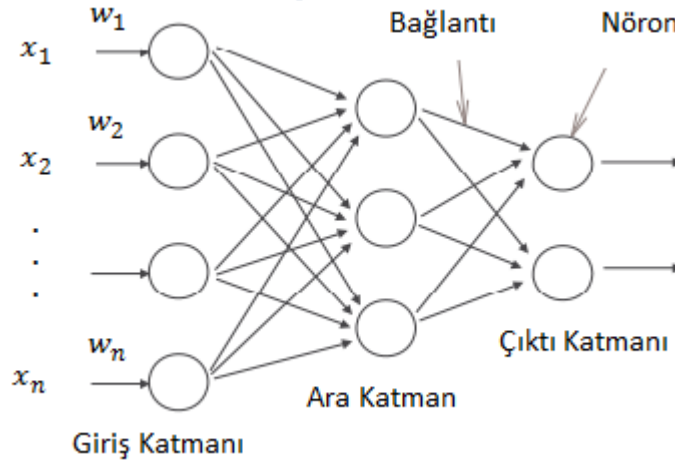
Yapay sinir ağları üç katmandan oluşur. Bu katmanlar sırasıyla şu şekildedir:

- Girdi Katmanı
- Ara (Gizli) Katman
- Çıktı Katmanı

Girdi Katmanı: Dış çevreden gelen sinyalleri toplayarak diğer katmanlara giriş olacak şekilde çıkış üretir.

Ara (Gizli) Katman: Girdi katmanından gelen bilgiler işlenerek çıktı katmanına gönderilirler. Bir ağ içinde birden fazla ara katman olabilir.

Çıktı Katmanı: Ara katmanlardan gelen işlenmiş bilgiyi çıktı olarak dış dünyaya gönderirler.



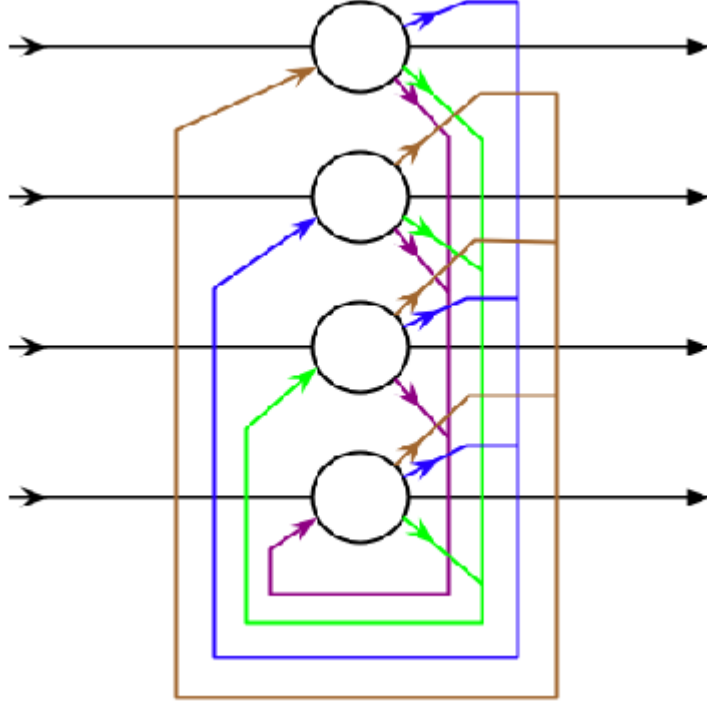
Şekil 4.5: Yapay sinir ağı modeli

Yapay sinir ağları, yapılarına göre ileri beslemeli (feedforward) ve geri beslemeli (feedback veya recurrent) ağlar olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. İleri beslemeli yapay sinir ağlarında, bir katmandaki çıkışlar bir sonraki katmanın girişi rolünü üstlenir. Bilgilerin iletim yönü daima girdi katmanından çıkış katmanına doğrudur. Bir geri beslemeli sinir ağında ise, çıkış ve gizli katmanlardaki çıkışlar, girdi katmanına veya önceki ara katmanlara tekrar giriş olarak geri gönderilebilir. Böylece, bilgiler hem ileri yönde hem de geri yönde işleme sokulabilir. Şekil 4.6'da geri beslemeli bir YSA örneği görülmektedir.

4.4 Hopfield Modeli ve Kısa Tarihçe

Hopfield modeli, John Hopfield tarafından 1982'de ortaya konan geri beslemeli bir yapay sinir ağı modelidir. Hopfield modelinin önemi, aslında nörobiyoloji ve fizyoloji bilimlerini birleştirerek insan hafızasını taklit edebilme yeteneğinden gelmektedir. Bu özellik çağrışımli bellek olarak da bilinir (Url-6).

Çağrışımli belleği, bir bilgisayar belleğinin sıralı belleği ile karşılaştırarak daha iyi anlayabiliriz. Bunu aşağıda Şekil 4.7 ile verilen örnekle anlatmaya çalışalım. Sıralı



Şekil 4.6: Dört düğümlü geri beslemeli Hopfield modeli (Url-7)

belleğimiz isimlere karşılık gelen adres ve telefon bilgileri olmak üzere iki adet bilgi içersin. Klasik telefon defteri gibi düşünersek, telefon numarası biliniyorken isime ulaşmak ya da adres bilinirken telefon numarasına ulaşmak oldukça zordur. Fakat, çağrışumlu bellekte bu işleyiş böyle değildir. Ayrıca bilgi sütunları yerine, çağrışumlu bellek bilgileri bir ağ şeklinde hafızasına kaydeder ve bir bilgi verildiğinde diğerlerini de elde etmek kolaydır.

İşte Hopfield modeli de bu şekilde çağrışumlu belleğe sahiptir.

Hopfield çalışmalarında ayrık ve sürekli model olmak üzere iki çeşit model tanımlamıştır. Ayrık ve sürekli model ayrıştırması denklemlerin zaman tiplerinden kaynaklanmaktadır. Bu tezde, sürekli sistemler incelendiğinden, sürekli sistemin modelinin yapısını daha iyi anlamak için basit elektrik devrelerinden bahsedelim.

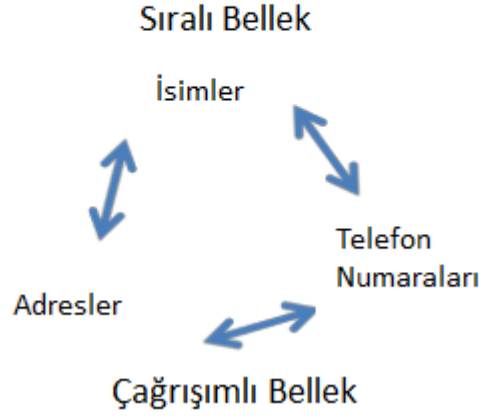
Gerçek sinir hücrelerinde uyarının iletiminin elektrik potansiyel farkı sayesinde olduğunu belirtmiştik. Bu sebeple, modelleme yaparken basit elektrik devrelerini düşünebiliriz (Bakınız Şekil 4.8). Elektrik devrelerinde voltaj ve akım arasındaki ilişkinin

$$V_R = IR \quad (4.1)$$

denklemi ile verildiğini fizik derslerimizden hatırlayabiliriz. Ohm yasası adı verilen bu denklemde, V_R birimi volt olan voltajı, I birimi amper olan akımı ve R birimi ohm olan direnci göstermektedir.

Diğer yandan, kapasitörler veya diğer adıyla kondansatörler, elektrik yüklerini kısa süreliğine depo edebilen temel elektronik devre elemanlarıdır. Kapasitör içeren bir

1. İsim	2. İsim	3. İsim
Adres - Telefon	Adres - Telefon	Adres - Telefon

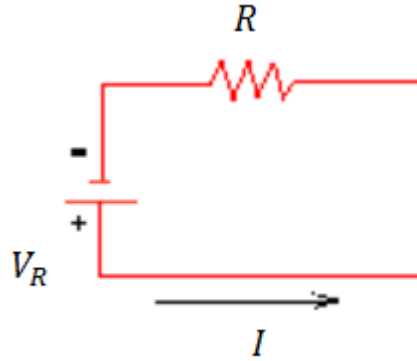


Şekil 4.7: Sıralı bellek ve çağrışimli bellek (Url-6)

devrede kapasitör üzerindeki voltaj değişimi

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{I}{C} \quad (4.2)$$

denklemleriyle verilir. Buradaki C sabiti kapasite katsayısı olup, birimi farattır.



Şekil 4.8: Basit bir elektrik devresi

Bilindiği gibi, elektrik devrelerinde Kirchhoff yasaları geçerlidir. Bu yasaları kısaca hatırlatalım:

- **Akım Yasası:** Herhangi bir noktaya gelen akımların toplamı, çıkan akımların toplamına eşittir.

- **Gerilim Yasası:** Kapalı bir çevrede harcanan gerilimlerin toplamı, sağlanan gerilimlerin toplamına eşittir.

Eklemeli (Hopfield) Model:

Şimdi, geri beslemeli yapay sinir ağları sınıfından olan eklemeli modelin (additive model) nasıl ortaya çıktığını anlamaya çalışalım. Şekil 4.9'daki devrede x_1, x_2, \dots, x_N olacak şekilde N tane girdi ve $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN}$ bu girdilerin iletkenliğini gösteren sinaptik ağırlıklar olsun. Devreye giren toplam akım

$$\sum_{i=1}^N w_{ji}x_i(t) + I_j \quad (4.3)$$

ifadesi ile verilir. Burada, I_j dışardan verilen akımı belirtmektedir. $v_j(t)$, lineer olmayan $f(\cdot)$ aktivasyon fonksiyonu girişindeki uyarılmış alan olmak üzere, devreden çıkan toplam akımı

$$\frac{v_j(t)}{R_j} + C_j \frac{dv_j(t)}{dt} \quad (4.4)$$

ifadesi ile verebiliriz. Kirchhoff'un akım yasası gereğince

$$\sum_{i=1}^N w_{ji}x_i(t) + I_j = \frac{v_j(t)}{R_j} + C_j \frac{dv_j(t)}{dt} \quad (4.5)$$

yazılabilir. Denklemi yeniden yazarsak

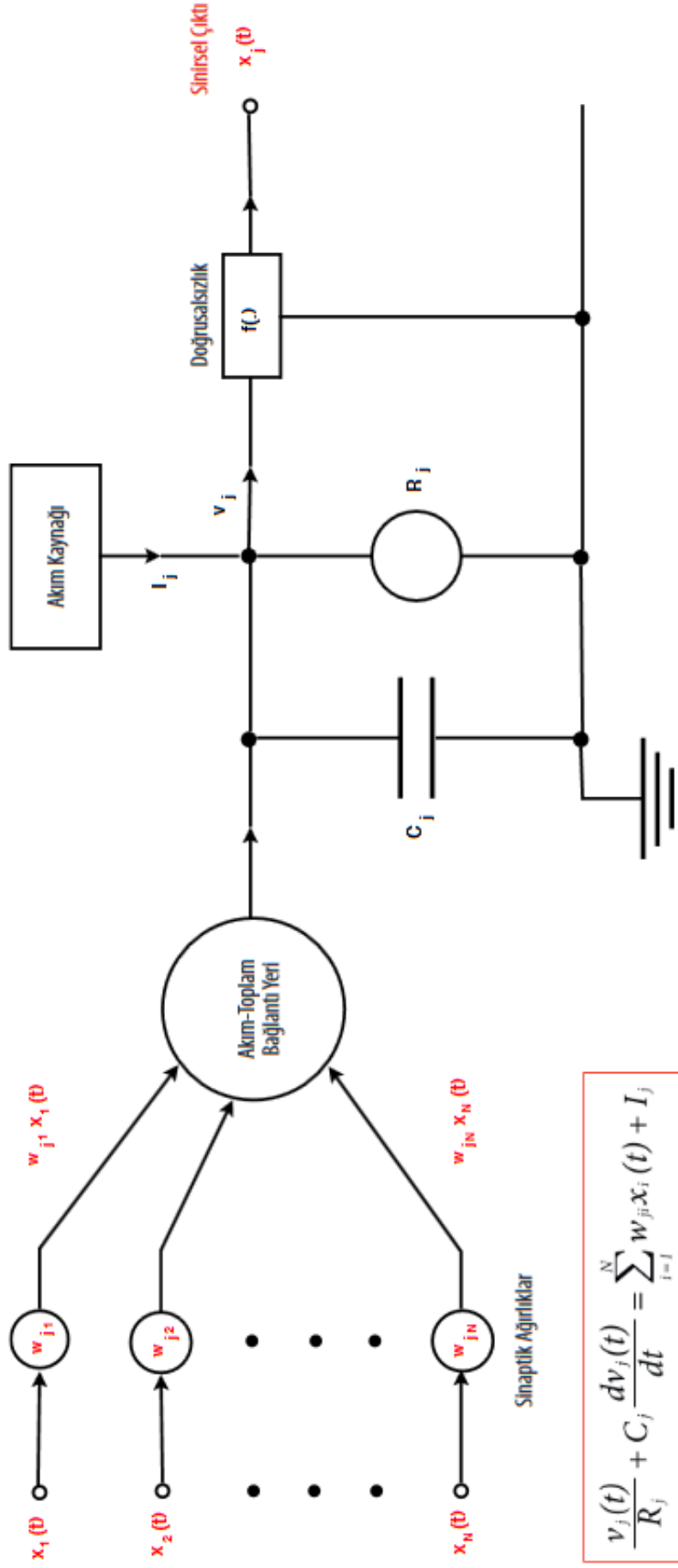
$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} = -\frac{v_j(t)}{R_j} + \sum_{i=1}^N w_{ji}x_i(t) + I_j \quad (4.6)$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Buradaki girdiler $x_i(t) = f(v_i(t))$ şeklindedir. Bu modele eklemeli model adı verilir (Akhmet ve Yılmaz, 2014). Ayrıca $f(\cdot)$ aktivasyon fonksiyonunun t değişkenine göre sürekli diferensiyellenebilir olduğu kabul edilmektedir. Kararlılık analizi için aşağıdaki kabullere ihtiyaç vardır:

- Bütün i ve j değerleri için sinaptik ağırlıklar simetriktir yani $w_{ij} = w_{ji}$ dir.
- Her bir nöronun kendine ait aktivasyon fonksiyonu vardır.
- Lineer olmayan aktivasyon fonksiyonunun tersi mevcuttur.

Hopfield (1984), makalesinde, enerji fonksiyonunu kullanarak, Hopfield ağının birinci Lyapunov teoremi gereğince Lyapunov anlamda global asimptotik kararlı olduğunu belirtmiştir.

1980'li yıllardan beri çok popüler olan Hopfield modelinin günümüzde yeni eklemeler yapılarak geliştirildiğini görmekteyiz. Esasında Cohen-Grossberg modelinin özel bir hali olan Hopfield modelinin özellikle gecikme terimleri eklenerek kararlılık analizi çalışmaları oldukça yaygındır. Gecikme terimi eklenmeksizin



Şekil 4.9: Hopfield modeli (Yılmaz, 2012)

simetrik YSA'ların salınım göstermeyeceği bilinmektedir (Zhang ve diğ., 2014). Elektriksel sinir ağlarında, zaman gecikmeleri yükselteçlerin sonlu açma-kapama hızına bağlı olarak oluşur (Zhang ve diğ., 2014; Baldi ve Atiya, 1994; Marcus ve Westervelt, 1989). Diğer bir deyişle, zaman gecikmesi, nörona sinyal verildiğinde sinyalin nöronlar arasındaki dağılma veya işleme zamanı olarak temsil edilir. Biyolojik sinir ağlarında zaman gecikmesinin periyodik çözümlere yol açtığı bilinmektedir. Bu sebeple, elektriksel sinir ağlarında da zaman gecikmesinin etkileri çok çalışılmıştır. Kesikli zaman gecikmesi veya dağılımlı gecikme eklenen denklemler ve nötral tip denklemlerin (gecikme teriminin türev içeren ifadeye yer alması) birçok farklı metotla global ve lokal kararlılık analizleri yapılmıştır (Ayrıntılı bir literatür taraması için Zhang ve diğ. (2014) makalesi okuyucuya tavsiye edilmektedir).

Literatürde (4.6) denklemi genelde aşağıdaki şekilde karşımıza çıkmaktadır:

$$u_i'(t) = -\gamma_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(u_j(t)) + U_i. \quad (4.7)$$

Yukarıdaki denklemde U_i , dışardan verilen girdiyi temsil etmekte ve $\gamma_i > 0$ dır.

İlk olarak Marcus ve Westervelt (1989) kesikli gecikmeyi ele almış ve aşağıdaki modelin salınım sergilediğini göstermişlerdir:

$$u_i'(t) = -u_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} g_j(u_j(t - \tau)). \quad (4.8)$$

Burada belirtmeliyiz ki (4.7) tipindeki denklemler ani sinyal değişimleri içindir. Gecikmeyle gelen sinyaller için ise aşağıdaki daha genel model düşünülmüştür:

$$u_i'(t) = -\gamma_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 g_j(u_j(t - \tau)) + U_i. \quad (4.9)$$

w_{ij}^1 gecikmeyle gelen sinyalin ağırlık katsayısıdır. Bazı durumlarda da ağın bağlantı yapısına göre farklı gecikmeler ardışık olarak etki etmektedir. Bu durumlarda da aşağıdaki gecikmeleri toplayan sistem kullanılmıştır:

$$u_i'(t) = -\gamma_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 g_j(u_j(t - \sum_{k=1}^m \tau_k)) + U_i. \quad (4.10)$$

Farklı gecikmelere sahip sistemlerin analizlerinin zorluğunu bir nebze azaltmak için ilk adım gecikme terimlerini aynı şekilde seçmek olmuştur. Bu tip çalışmalara örnek olarak Gopalsamy ve Leung (1996), Bélair ve diğ. (1996), Ye ve diğ. (1994) makaleleri verilebilir. Diğer bir yöntem ise ağın büyüklüğünü sınırlamak veya mimari yapısını basitleştirmektir. Babcock ve Westervelt (1987) makalelerinde çalışmaların basitliği açısından iki nöronlu sistemde gecikme düşünülmüştür. Mimari yapıyı

basitleştiren ve gecikmenin etkisini araştıran bir diğer makale de Baldi ve Atiya (1994) tarafından yayınlanmıştır. Baldi ve Atiya bu makalede farklı gecikmeler ele almış fakat her bir nörona sadece bir önceki nöronun gecikme gelmektedir. Olien ve Bélair (1997) tarafından yapılan bir çalışmada ise aşağıdaki iki nöronlu sistem incelenmiştir:

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= -u_1(t) + a_{11}f(u_1(t - \tau_1)) + a_{12}f(u_2(t - \tau_2)), \\u_2'(t) &= -u_2(t) + a_{21}f(u_1(t - \tau_1)) + a_{22}f(u_2(t - \tau_2)).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Yazarlar, (4.11) denkleminde $\tau_1 = \tau_2$ ve $a_{11} = a_{22}$ olarak inceleme yapmışlar ve (4.11) sisteminin bazı gecikme değerleri için Hopf çatallanma sergilediğini göstermişlerdir. Bu çalışmalarını takiben gecikmenin etkisini içeren çalışmalar artmıştır (Bakınız: Campbell, 1999; Li ve diğ., 1999; Guo ve diğ., 2004; Ruan ve Filfil, 2004; Shayer ve Campbell, 2000; Wei ve Ruan, 1999; Song ve Xu, 2013).

Akademik çalışmalar ilerledikçe, araştırmacılar, biyolojik ağlarda olduğu gibi geçmişin etkisinin tamamını kapsayan ve uzak geçmişin etkisinin daha az olduğu dağılımlı gecikmeyi sistemlere eklemeye başlamışlardır. 1.1.1 bölümünde de vurguladığımız gibi kesikli gecikme, dağılımlı gecikmenin özel bir hali olduğundan modeller daha genel hale getirilmiştir. Hatta, Ruan ve Filfil (2004) makalelerinde sinir ağlarının aksonlarının büyüklüğü ve çokluğu sebebiyle uzayı kaplayan uzantılarının olduğunu ve bu sebeple sinyalin yayılımının aniden değil zaman içerisinde yayıldığını ve kesikli gecikmeyle modellenemeyeceğini savunmuşlardır. Dağılımlı gecikme içeren sistemleri incelemeyi arzu edenler Bi ve Hu (2012), Li ve Hu (2011), Kwon ve diğ. (2013), Ruan ve Filfil (2004), Zhou ve diğ. (2009) referanslarına bakabilirler.

• Neden çatallanma analizi çalışılmalıdır?

Bazı biyolojik olayları modellemek için kararlı salınım sergileyen geri beslemeli YSA'lar kullanılmıştır (Townley ve diğ., 2000; Li ve Hopfield, 1989; Atiya ve Baldi, 1989). Kaotik yapı sergileyen YSA'lar ise beyin zarındaki salınımları modellemek ve kaotik dinamik yapıları kontrol etmek için kullanılmıştır (Babloyantz ve diğ., 1995; Sole ve de la Pride, 1995).

Fizyolojik deneyler sonucu beynin yapısının kaotik olduğu savunulmaktadır. Diğer bir deyişle, bilinenin aksine insan vücudunun sağlıklı olma durumu kaotik yapının korunmasıdır. Alzaymır hastalığındaki gibi bu kaotik durum bozulduğu anda beyin, bilgi işleme için gerekli faz değişimlerini hızlı yapamayabilir (Das ve Kundu, 2014). Epilepsi hastalarında da epilepsi ataklarından önce kaotik yapının bozulup periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, YSA'lar kaotik dinamik sistemleri kontrol etmek açısından çok önemlidir.

Bir dinamik sistemde lokal olarak periyodik çözümlerin varlığını gösterebilmek için Hopf çatallanma analizinin gerekli olduğunu vurgulamıştık. Yukarıda bahsedilen problemlerin matematiksel modellerinde de periyodik çözümlerin araştırılması bize hastalıkların yapısı hakkında bilgi vermeyi sağlayabilir. Örneğin periyodik çözümler önceden tahmin edilebilirse epilepsi atağının ne zaman geleceğini belki de tahmin etmek mümkün olabilecektir.

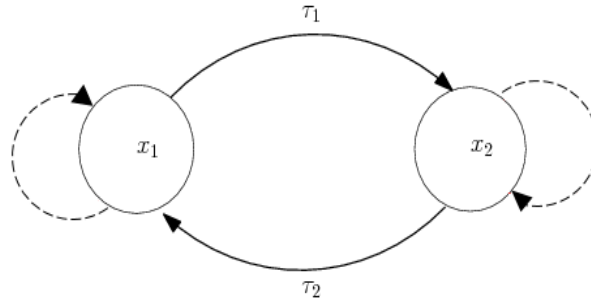
Periyodik çözümlerin bir diğeri faydalı yanı da YSA sisteminde öğrenebilmeyi garanti etmesidir. Yani, çözümünde periyodik çözüm çıkan bir YSA tekrarlanma ile öğrenebilmiş demektir (Townley ve diğ., 2000).

4.5 Tez Probleminin İfadesi

Tezin ikinci kısmında çalıştığımız geri beslemeli sinir ağı sistemini daha detaylı inceleyebiliriz. Bu kısımda aşağıdaki karışık gecikmeli sistemde (hem kesikli hem dağılımlı gecikmeli) kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f_{12}(x_2(t-\tau_2)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t-\tau_1)) + a_{22}f_{22}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s)ds\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Burada $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$ olarak tanımlı olup, $x_i(t)$, i . nöronun t zamanındaki durumunu belirtmektedir. a_{ij} ($i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$) katsayıları reel parametrelerdir. $F(\cdot)$ ise, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı, t anındaki dinamiğe geçmiş zamanın etkilerini yansıtan, negatif olmayan, sınırlı gecikme çekirdeğidir. Sistemin mimari yapısı Şekil 4.10'da verilmiştir:



Şekil 4.10: (4.12) modelinin mimari yapısı. İki nöron birbirlerine τ_j , $j = 1, 2$ kesikli gecikmeyle sinyal göndermektedir. Fakat kendisinden gelen sinyal dağılımlı gecikmeli (kesikli çizgi) halledir.

2011 yılında Li ve Hu (2011) aşağıdaki sistemi analiz etmişlerdir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + a_{11}f\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f(x_2(t-\tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + a_{21}f(x_1(t-\tau)) + a_{22}f\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s)ds\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.13) sisteminde τ gecikme parametresi seçilerek sıfır denge noktasının kararlılığı araştırılmıştır. Bu tezde yapılan çalışma, (4.12) denkleminde $\tau_1 = \tau_2$ ve $f_{ij} = f$, $i = 1, 2$

ve $j = 1, 2$ alınması halinde Li ve Hu (2011) makalesinin bir iyileştirmesidir. Aynı zamanda, (4.12) sisteminde $f_{ij} = \tanh$ ve gecikme çekirdeği Dirac delta fonksiyonu seçilirse yapılan çalışma (4.11) sistemini de kapsamaktadır.

İlk olarak, (4.12) sisteminde karşımıza çıkan karakteristik denklemin analizinin zorluğundan dolayı aşağıdaki (4.14) sistemi incelenmiştir (Karaoğlu ve diğ., 2015):

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f_{12}(x_2(t - \tau_2)), \\ x_2'(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t - \tau_1)) + a_{22}f_{22}(x_2(t)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.12) sisteminin analizi de Karaoğlu ve diğ. (2016) makalesinde detaylı olarak verilmiştir.

4.6 Tek Dağılımlı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde, tek dağılımlı gecikmeye sahip (4.14) sisteminin, kesikli gecikme parametrelerinin toplamını çatallanma parametresi seçerek detaylı Hopf çatallanmasını inceleyeceğiz. Yine bu sistemde, periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gösterilmiş ve periyodik çözümlerin yönü, periyodu ve çatallanma tipi belirlenmiştir.

4.6.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı

İlk etapta, denge noktalarını etkilememek için $\int_0^\infty F(s)ds = 1$ kabul edilerek çekirdek normalleştirilmiştir. Ayrıca, bu tez boyunca sadece zayıf çekirdek, yani

$$F(s) = \alpha e^{-\alpha s}, \quad \alpha > 0,$$

durumu ele alınmıştır. Burada ortalama gecikme $\frac{1}{\alpha}$ olmaktadır. Şimdi, analizlerimizi yapabilmek için gerekli olan kabullerimizi sıralayalım:

$$(H_1) \quad f_{ij} \in C^3, \quad f_{ij}(0) = 0, \quad (i = 1, 2 \text{ ve } j = 1, 2),$$

$$(H_2) \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 \text{ olsun.}$$

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds$$

yeni değişkenimiz olarak tanımlayalım. İntegral işareti altında türev alırsak

$$\begin{aligned}
x_3'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds \right) \\
&= F(0)x_1(t) + \int_{-\infty}^t x_1(\eta) \frac{d}{dt} F(t-\eta) d\eta \\
&= \alpha x_1(t) - \int_{-\infty}^t x_1(\eta) \alpha^2 e^{-\alpha(t-\eta)} d\eta \\
&= \alpha x_1(t) + \int_{\infty}^0 x_1(t-s) \alpha^2 e^{-\alpha s} ds \\
&= \alpha x_1(t) - \alpha \int_0^{\infty} x_1(t-s) \alpha e^{-\alpha s} ds \\
&= \alpha x_1(t) - \alpha x_3(t)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yöntemle lineer zincir değişken değiştirme yöntemi adı verilir. Bu yöntemle (4.14) denklemini aşığıdaki hali alacaktır:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}(x_3(t)) + a_{12}f_{12}(x_2(t - \tau_2)), \\
x_2'(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t - \tau_1)) + a_{22}f_{22}(x_2(t)), \\
x_3'(t) &= -\alpha x_3(t) + \alpha x_1(t).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Yukarıdaki birinci kabulümüz altında $(0, 0, 0)$ noktasının denge noktası olduğu açıktır. $u_1(t) = x_1(t - \tau_1)$, $u_2(t) = x_2(t)$, $u_3(t) = x_3(t - \tau_1)$ değişken değiştirmelerini tanımlayarak ikinci hipotezimiz altında aşığıdaki τ ya göre tek gecikmeli denk sistem elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -u_1(t) + a_{11}f_{11}(u_3(t)) + a_{12}f_{12}(u_2(t - \tau)), \\
u_2'(t) &= -u_2(t) + a_{21}f_{21}(u_1(t)) + a_{22}f_{22}(u_2(t)), \\
u_3'(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$\alpha_{ij} = a_{ij} \frac{df_{ij}}{du_i} \Big|_{u_i=0}$, $\beta_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} \frac{d^2 f_{ij}}{du_i^2} \Big|_{u_i=0}$ ve $\sigma_{ij} = \frac{1}{6} a_{ij} \frac{d^3 f_{ij}}{du_i^3} \Big|_{u_i=0}$ ($i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$) olmak üzere (4.16) sistemi $(0, 0, 0)$ noktasında Taylor serisine açılırsa:

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -u_1(t) + \alpha_{11}u_3(t) + \beta_{11}u_3^2(t) + \sigma_{11}u_3^3(t) \\
&\quad + \alpha_{12}u_2(t - \tau) + \beta_{12}u_2^2(t - \tau) + \sigma_{12}u_2^3(t - \tau) + Y.M.T., \\
u_2'(t) &= -u_2(t) + \alpha_{21}u_1(t) + \beta_{21}u_1^2(t) + \sigma_{21}u_1^3(t) + \alpha_{22}u_2(t) + \beta_{22}u_2^2(t) + \sigma_{22}u_2^3(t) \\
&\quad + Y.M.T., \\
u_3'(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t),
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin lineerleştirilmiş hali de aşağıdaki sistemi verecektir:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -u_1(t) + \alpha_{11}u_3(t) + \alpha_{12}u_2(t - \tau), \\ u_2'(t) &= -u_2(t) + \alpha_{21}u_1(t) + \alpha_{22}u_2(t), \\ u_3'(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bu sistemin karakteristik denklemini bulmak için $u_1(t) = Ae^{\lambda t}$, $u_2(t) = Be^{\lambda t}$ ve $u_3(t) = Ce^{\lambda t}$ aday çözümleri yerine konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -\alpha_{12}e^{-\lambda\tau} & -\alpha_{11} \\ -\alpha_{21} & \lambda + 1 - \alpha_{22} & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Şimdi,

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha - \alpha_{22} + 2 & b_1 &= -\alpha_{12}\alpha_{21} \\ a_1 &= 2\alpha - \alpha(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \alpha_{22} + 1 & b_0 &= -\alpha\alpha_{12}\alpha_{21}. \\ a_0 &= \alpha - \alpha(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \alpha\alpha_{11}\alpha_{22} \end{aligned} \quad (4.18)$$

değişkenleri tanımlanarak (4.17) sisteminin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4.19)$$

olarak kolayca bulunur.

$\tau = 0$ iken, yani gecikmelerin olmadığı durumda, (4.19) denklemi

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + (a_0 + b_0) = 0 \quad (4.20)$$

olacaktır. Kararlılık analizi için, önceki bölümlerde olduğu gibi köklerin kompleks düzlemde nasıl dağıldığını incelememiz gereklidir. Bunun için, $n = 3$ durumunda Routh-Hurwitz kriteri kullanırsak, (4.20) polinomunun bütün köklerinin negatif ya da negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şartın aşağıdaki üç koşul olduğu görülür:

1. $a_2 > 0$,
2. $a_0 + b_0 > 0$,
3. $a_2(a_1 + b_1) > a_0 + b_0$.

Şimdi $\tau \neq 0$ olduğu duruma geçebiliriz. Kabul edelim $\lambda = i\omega$ sırf sanal bir kök ve $\omega > 0$ olsun. $i\omega$ kökünü (4.19) üstel polinomunda yerine koyup reel ve sanal kısımları

ayırırsak

$$-a_2\omega^2 + a_0 + b_1\omega \sin \omega\tau + b_0 \cos \omega\tau = 0 \quad (4.21)$$

$$-\omega^3 + a_1\omega + b_1\omega \cos \omega\tau - b_0 \sin \omega\tau = 0 \quad (4.22)$$

denklemleri elde edilir. (4.21) ve (4.22) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak $p = a_2^2 - 2a_1$, $q = a_1^2 - 2a_0a_2 - b_1^2$ ve $r = a_0^2 - b_0^2$ olmak üzere

$$\omega^6 + p\omega^4 + q\omega^2 + r = 0 \quad (4.23)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denklemde $z = \omega^2$ olarak tanımlanırsa

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.24) denklemini

$$h(z) = z^3 + pz^2 + qz + r \quad (4.25)$$

olarak tanımlayalım. $r < 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$ olduğundan (4.25) denkleminin en az bir pozitif kökü vardır. Diğer yandan $r > 0$ olsun. (4.25) denkleminin türevi alınırsa:

$$\frac{dh(z)}{dz} = 3z^2 + 2pz + q \quad (4.26)$$

denkleminde ulaşılır. $\Delta = p^2 - 3q \leq 0$ ise (4.26) denkleminin hiç reel kökü yoktur. Bu bize $h(z)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ üzerinde monoton artan olduğunu söyler. O halde, $r \geq 0$ ve $\Delta \leq 0$ iken (4.25) denkleminin hiç pozitif kökü yoktur. $r \geq 0$ ve $\Delta > 0$ ise (4.26) denkleminin aşağıdaki gibi iki reel kökü vardır:

$$z_1^* = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3}, \quad z_2^* = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{3}.$$

Açıkça, $h''(z_1^*) = 2\sqrt{\Delta} > 0$ ve $h''(z_2^*) = -2\sqrt{\Delta} < 0$ dır. Bu durumda, sırasıyla z_1^* ve z_2^* da lokal minimum ve maksimum mevcuttur. Kabul edelim $h(z)$ fonksiyonunun pozitif bir kökü a olsun. Fonksiyonun bu kökteki eğimi negatif ise z_1^* , $h(z)$ fonksiyonunun lokal minimumu olduğundan ve $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$ olduğundan $z_1^* > a$ olmak zorundadır. a kökündeki eğim pozitif yönlü ise $h(0) = r > 0$ olduğundan $0 < z_1^* < a$ olmalıdır. Eğer eğim sıfır ise $a = z_1^*$ olup her durumda $z_1^* > 0$ ve $h(z_1^*) \leq 0$ dır. Aksine $z_1^* \leq 0$ veya $z_1^* > 0$ için $h(z_1^*) > 0$ olsun. $z_1^* \leq 0$ ise $z > z_1^*$ için $h(z)$ fonksiyonu artan olacağından ve $h(0) = r > 0$ olduğundan fonksiyonun hiç pozitif kökü olamaz. $z_1^* > 0$ için $h(z_1^*) > 0$ ise $z_2^* < z_1^*$ olduğundan yine $h(z)$ fonksiyonunun pozitif bir kökü bulunamaz. O halde burada yazdıklarımızı aşağıdaki lemma (Song ve Yuan, 2006; Zhou ve diğ., 2009) ile ispatsız olarak toparlayalım:

Lemma 4.1. (4.24) denkleminin için aşağıdakiler doğrudur:

1. Eğer $r < 0$ ise (4.24) denkleminin en az bir pozitif kökü vardır.
2. Eğer $r \geq 0$ ve $\Delta = p^2 - 3q \leq 0$ ise (4.24) denkleminin hiç pozitif kökü yoktur.
3. Eğer $r \geq 0$ ve $\Delta > 0$ ise (4.24) denkleminin pozitif köklerinin olması için gerek ve yeter şart $z_1^* = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3} > 0$ ve $h(z_1^*) \leq 0$ olmasıdır.

Kabul edelim (4.24) denkleminin pozitif kökleri olsun. Genelliği bozmadan, üç kökü olduğunu kabul edebiliriz. Bu kökler sırasıyla, z_1, z_2 ve z_3 olsun. Bu durumda (4.23) denkleminin de $\omega_1 = \sqrt{z_1}, \omega_2 = \sqrt{z_2}$ ve $\omega_3 = \sqrt{z_3}$ olacak şekilde üç kökü vardır. $k = 1, 2, 3$ için, (4.23) denklemini sağlayan $\{\tau_k^j | j = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisini (4.21) ve (4.22) denklemlerinden yararlanarak aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} \left\{ \arccos \left(\frac{b_0(a_2\omega^2 - a_0) + b_1(\omega^4 - a_1\omega^2)}{b_0^2 + b_1^2\omega^2} \right) + 2\pi j \right\}. \quad (4.27)$$

Sonuç olarak, (4.19) denkleminin $\tau = \tau_k^{(j)}$ olacak şekilde $\pm i\omega_k$ sırf sanal kökleri mevcuttur.

Şimdi $\tau_0 = \tau_{k_0}^{(0)} = \min\{\tau_k^{(0)} | k = 1, 2, 3\}$, $\omega_0 = \omega_{k_0}$ olsun. $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ (4.19) denkleminin $\tau = \tau_0$ civarında $\alpha(\tau_0) = 0$, $\omega(\tau_0) = \omega_0$ koşulunu sağlayan kökü olsun. Aşağıdaki transversalite koşulunu verebiliriz.

Lemma 4.2. $z_k = \omega_k^2$ ve $h(z)$ (4.25) denkleminin verilen fonksiyon olmak üzere $h'(z_k) \neq 0$ olsun. O halde,

$$\left[\frac{d(\operatorname{Re}\lambda(\tau))}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_k^{(j)}} \neq 0 \quad (4.28)$$

sağlanır ve $[(d(\operatorname{Re}\lambda(\tau))/d\tau)]_{\tau=\tau_k^{(j)}}$ ve $h'(z_k)$ aynı işarete sahiptir (İspat için Song ve Yuan (2006) makalesindeki Lemma 2.4'e bakılabilir).

Teorem 4.1. Aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

- i) Eğer $r \geq 0$ ve $\Delta = p^2 - 3q \leq 0$ ise (4.16) sisteminin $(0,0,0)$ denge noktası her $\tau \geq 0$ için asimptotik karardır.
- ii) Eğer $r < 0$ veya $r \geq 0$ ve $\Delta > 0$ için $z_1^* > 0$ ve $h(z_1^*) \leq 0$ ise, (4.16) sisteminin $(0,0,0)$ denge noktası $\tau \in [0, \tau_0)$ için asimptotik karardır.
- iii) Eğer (ii) şıkkının tüm koşulları gerçekleşir ve $h'(z_k) \neq 0$ sağlarsa $\tau = \tau_0$ iken (4.16) sisteminde orijinde Hopf çatallanması ortaya çıkar.

4.6.2 Yön analizi

Bir önceki bölümde (4.16) sisteminde $\tau = \tau_0$ kritik değerinde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını gösterdik. Bu bölümde, Hopf çatallanmasının yönünü (çeşidini), kararlılığını ve periyodunu veren hesaplamalar yapılacaktır.

Sabitlenmiş $k \in \{1, 2, 3\}$ için ve $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için $\mu = \tau - \tau_k^{(j)}$ olacak şekilde yeni değişken tanımlayarak gecikme parametremizi sıfıra taşıyabiliriz. $t \rightarrow t/\tau$ zaman skalasını kullanarak τ gecikmesini normalleştirilim ve (4.16) sistemini yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} &= (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau) \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{bmatrix} \\ &+ (\tau^{(j)} + \mu)f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\tau^{(j)} + \mu) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta_{11}x_3^2(t) + \sigma_{11}x_3^3(t) + \beta_{12}x_2^2(t-1) + \sigma_{12}x_2^3(t-1) + Y.M.T., \\ f_2 &= \beta_{21}x_1^2(t) + \sigma_{21}x_1^3(t) + \beta_{22}x_2^2(t) + \sigma_{22}x_2^3(t) + Y.M.T., \\ f_3 &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\beta_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}f_{ij}''(0)$ ve $\sigma_{ij} = \frac{1}{6}a_{ij}f_{ij}'''(0)$ ($i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$) daha önce belirtildiği üzere Taylor açılımından gelmektedir. $u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ olsun. (4.29) denkleminin orijin civarındaki lineerleştirilmesi

$$u'(t) = (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau)u(t) + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau)u(t-1)$$

şeklinde olacaktır. $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T \in \Omega = C([-1, 0], \mathbb{R}^3)$ için $L_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörünü

$$L_\mu(\phi) = (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau)\phi(0) + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau)\phi(-1) \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanımlamadan sonra, (4.16) sistemi $u_t(\theta) = u(t + \theta) =$

$(x_1(t + \theta), x_2(t + \theta), x_3(t + \theta))^T$ ve $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(\mu, \phi) = (\tau^{(j)} + \mu) \begin{bmatrix} \beta_{11}\phi_3^2(0) + \sigma_{11}\phi_3^3(0) + \beta_{12}\phi_2^2(-1) + \sigma_{12}\phi_2^3(-1) + Y.M.T. \\ \beta_{21}\phi_1^2(0) + \sigma_{21}\phi_1^3(0) + \beta_{22}\phi_2^2(0) + \sigma_{22}\phi_2^3(0) + Y.M.T. \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

olmak üzere

$$u'(t) = L_\mu(u_t) + f(\mu, u_t) \quad (4.32)$$

olarak yazılabilir.

Riesz Temsil Teoreminden her bir bileşeni sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in \Omega$ için $\theta \in [-1, 0]$ olmak üzere 3×3 tipinde $\eta(\theta, \mu)$ matrisi vardır, öyle ki

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta) \quad (4.33)$$

yazılabilir. Aslında, δ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau^{(j)} + \mu)A\delta(\theta) + (\tau^{(j)} + \mu)B\delta(\theta + 1) \quad (4.34)$$

seçilebilir. Daha önce de tanımlandığı gibi $\phi \in \Omega$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta(\xi, \mu)\phi(\xi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.35)$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.36)$$

operatörlerini tanımlayabiliriz. Bu durumda (4.32) fonksiyonel diferensiyel denklemi $\theta \in [-1, 0)$ için $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ olmak üzere

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t \quad (4.37)$$

denkleminde denk olacaktır. $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(\xi, 0)\psi(-\xi), & s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.38)$$

operatörünü ve

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi \quad (4.39)$$

bilineer formunu daha önceki bölümlerde tanımlamıştık. $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörlerinin adjoint operatörler olduğunu biliyoruz. Şimdi, kabul edelim $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ sırasıyla $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörlerinin $\lambda = i\omega_0$ ve $\bar{\lambda} = -i\omega_0$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olsun.

$q(\theta) = [1, q_1, q_2]^T e^{i\omega_0\theta}$ ve $q^*(s) = \frac{1}{D} [1, q_1^*, q_2^*]^T e^{i\omega_0 s}$ olarak seçelim. $A(0)q(\theta) = i\omega_0 q(\theta)$ ve $A^*(0)q^*(\theta) = -i\omega_0 q^*(\theta)$ olduğundan

$$q_1 = \frac{-\tau^{(j)} \alpha_{21}}{\tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) - i\omega_0}, \quad q_1^* = \frac{-\tau^{(j)} \alpha_{12} e^{i\omega_0}}{\tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) + i\omega_0},$$

$$q_2 = \frac{\tau^{(j)} \alpha}{\tau^{(j)} \alpha + i\omega_0}, \quad q_2^* = \frac{\tau^{(j)} \alpha_{11}}{\tau^{(j)} \alpha - i\omega_0}$$

değerleri bulunur. Diğer yandan, $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ bağıntısı kullanılarak \bar{D} yi aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$\bar{D} = 1 + q_1^* q_1 + q_2^* q_2 + \tau^{(j)} e^{-i\omega_0} \alpha_{12} q_1.$$

Şimdi, C_0 merkez çok katlısının $\mu = 0$ daki koordinatlarını hesaplamaya geçebiliriz. u_t , (4.37) denkleminin $\mu = 0$ iken çözümü olsun.

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle, \quad w(t, \theta) = x_t - 2Re\{z(t)q(\theta)\} \quad (4.40)$$

eşitliklerini önceki bölümlerde olduğu gibi tanımlayalım. Merkez çok katlısı üzerinde, q ve q^* vektörleri yönünde z ve \bar{z} lokal koordinatlar olmak üzere

$$w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.41)$$

tanımlıdır. $u_t \in C_0$ için

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{u}_t \rangle = \langle q^*, Au_t + Ru_t \rangle \\ &= i\omega_0 \langle q^*, u_t \rangle + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \equiv i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

ve $\mu = 0$ olduğundan,

$$g(z, \bar{z}) = \overline{q^*}(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (4.42)$$

yazılabilir. Burada, $f_0(z, \bar{z})$, $\mu = 0$ daki $f(z, \bar{z})$ yi göstermektedir. $u_t(u_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta), u_{3t}(\theta)) = w(t, \theta) + zq(\theta) + \overline{zq}(\theta)$ ve $q(\theta) = [1, q_1, q_2]^T e^{i\omega_0 \theta}$ olduğundan aşağıdaki katsayıları hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} u_{1t}(0) &= z + \bar{z} + w_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(0) z \bar{z} + w_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{2t}(0) &= zq_1 + \overline{zq_1} + w_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(0) z \bar{z} + w_{02}^{(2)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{3t}(0) &= zq_2 + \overline{zq_2} + w_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0) z \bar{z} + w_{02}^{(3)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{2t}(-1) &= zq_1 e^{-i\omega_0} + \overline{zq_1} e^{-i\omega_0} + w_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-1) z \bar{z} \\ &\quad + w_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3). \end{aligned}$$

(4.42) eşitliğinden ve $f(\mu, \phi)$ fonksiyonunun tanımından aşağıdaki çarpımı hesaplamamız gereklidir:

$$g(z, \bar{z}) = \overline{q^*}(0) f_0(z, \bar{z}) = \frac{\tau^{(j)}}{D} [1, \overline{q_1^*}, \overline{q_2^*}] \begin{bmatrix} f_1^0 \\ f_2^0 \\ f_3^0 \end{bmatrix},$$

öyle ki,

$$\begin{aligned} f_1^0 &= \beta_{11} u_{3t}^2(0) + \sigma_{11} u_{3t}^3(0) + \beta_{12} u_{2t}^2(-1) + \sigma_{12} u_{2t}^3(-1), \\ f_2^0 &= \beta_{21} u_{1t}^2(0) + \sigma_{21} u_{1t}^3(0) + \beta_{22} u_{2t}^2(0) + \sigma_{22} u_{2t}^3(0), \\ f_3^0 &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \\
&= \frac{\tau^{(j)}}{D} \left\{ [\beta_{11} q_2^2 + \beta_{12} q_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* q_1^2] z^2 \right. \\
&\quad + [2\beta_{11} q_2 \bar{q}_2 + 2\beta_{12} q_1 \bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* + 2\beta_{22} \bar{q}_1^* q_1 \bar{q}_1] z \bar{z} \\
&\quad + [\beta_{11} \bar{q}_2^2 + \beta_{12} \bar{q}_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* \bar{q}_1^2] \bar{z}^2 \\
&\quad + [2\beta_{11} q_2 w_{11}^3(0) + \beta_{11} \bar{q}_2 w_{20}^3(0) + 3\sigma_{11} q_2^2 \bar{q}_2 \\
&\quad + 2\beta_{12} q_1 e^{-i\omega_0} w_{11}^2(-1) + \beta_{12} \bar{q}_1 e^{-i\omega_0} w_{20}^2(-1) + 3\sigma_{12} q_1^2 \bar{q}_1 e^{-3i\omega_0} \\
&\quad + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* w_{11}^1(0) + \beta_{21} \bar{q}_1^* w_{20}^1(0) + 3\sigma_{21} \bar{q}_1^* \\
&\quad \left. + 2\beta_{22} q_1 \bar{q}_1^* w_{11}^2(0) + \beta_{22} \bar{q}_1 \bar{q}_1^* w_{20}^2(0) + 3\sigma_{22} \bar{q}_1 \bar{q}_1^* q_1^2] z^2 \bar{z} \right\} + Y.M.T.
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ki, (4.42) eşitliğinde katsayıları karşılaştırdıktan sonra aşağıdaki katsayılar bulunmuş olur:

$$\begin{aligned}
g_{20} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [\beta_{11} q_2^2 + \beta_{12} q_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* q_1^2], \\
g_{11} &= \frac{\tau^{(j)}}{D} [2\beta_{11} q_2 \bar{q}_2 + 2\beta_{12} q_1 \bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* + 2\beta_{22} \bar{q}_1^* q_1 \bar{q}_1], \\
g_{02} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [\beta_{11} \bar{q}_2^2 + \beta_{12} \bar{q}_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* \bar{q}_1^2], \\
g_{21} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [2\beta_{11} q_2 w_{11}^3(0) + \beta_{11} \bar{q}_2 w_{20}^3(0) + 3\sigma_{11} q_2^2 \bar{q}_2 \\
&\quad + 2\beta_{12} q_1 e^{-i\omega_0} w_{11}^2(-1) + \beta_{12} \bar{q}_1 e^{-i\omega_0} w_{20}^2(-1) + 3\sigma_{12} q_1^2 \bar{q}_1 e^{-3i\omega_0} \\
&\quad + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* w_{11}^1(0) + \beta_{21} \bar{q}_1^* w_{20}^1(0) + 3\sigma_{21} \bar{q}_1^* \\
&\quad + 2\beta_{22} q_1 \bar{q}_1^* w_{11}^2(0) + \beta_{22} \bar{q}_1 \bar{q}_1^* w_{20}^2(0) + 3\sigma_{22} \bar{q}_1 \bar{q}_1^* q_1^2].
\end{aligned}$$

Yine, birinci Lyapunov katsayısını hesaplayabilmek için $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ katsayılarını belirlemeliyiz. Daha önceki bölümlerde tanımlandığı gibi

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z \bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.43)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t, \theta) &= \dot{x}_t - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\
&= \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \\
&\equiv Aw + H(z, \bar{z}, \theta),
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Diğer yandan, merkez çok katlısı üzerinde

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

$$(A - 2i\omega_0)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \quad (4.44)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\theta \in [-1, 0)$ için

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -2Re\{\dot{z}(t)q(\theta)\}$$

dir. Her zaman geçerli olan

$$\begin{aligned} H_{20}(\theta) &= -(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}), \\ H_{11}(\theta) &= -(q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}), \\ H_{02}(\theta) &= -(q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$w_{20}(\theta) = \frac{i}{\omega_0}g_{20}q(0)e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{3\omega_0}\bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_1e^{2i\omega_0\theta}, \quad (4.46)$$

$$w_{11}(\theta) = \frac{-i}{\omega_0}g_{11}q(0)e^{i\omega_0\theta} + \frac{i}{\omega_0}\bar{g}_{11}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_2 \quad (4.47)$$

eşitliklerini de hatırlayalım. Geriye kalan son adım, $E_1 = \begin{bmatrix} E_1^{(1)} \\ E_1^{(2)} \\ E_1^{(3)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ve

$E_2 = \begin{bmatrix} E_2^{(1)} \\ E_2^{(2)} \\ E_2^{(3)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörlerini bulmak olacaktır. (4.44) denklemlerinde $\theta = 0$

alınırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)w_{20}(\theta) = 2i\omega_0w_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (4.48)$$

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)w_{11}(\theta) = -H_{11}(0). \quad (4.49)$$

Ayrıca, $\theta = 0$ için

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

ve

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau^{(j)} \begin{bmatrix} 2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 + 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1e^{-2i\omega_0} \\ 2\beta_{21} + 2\beta_{22}q_1\bar{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

elde edilir. $A(0)q(0) = iw_0q(0)$ ve $A(0)\bar{q}(0) = iw_0\bar{q}(0)$ eşitliklerinden de

$$\left[iw_0I - \int_{-1}^0 e^{iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] q(0) = 0, \quad (4.52)$$

$$\left[-iw_0I - \int_{-1}^0 e^{-iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] \bar{q}(0) = 0 \quad (4.53)$$

olduğunu biliyoruz. (4.50) denklemini (4.48) denkleminde yerine yazar ve (4.52) eşitliğini kullanırsak

$$\left[2iw_0I - \int_{-1}^0 e^{2iw_0\theta} d\eta(\theta) \right] E_1 = 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, bu eşitlik

$$\begin{bmatrix} 2iw_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2iw_0 - \tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2iw_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{bmatrix} E_1 = 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradan

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2iw_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2iw_0 - \tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2iw_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix}$$

olmak üzere, E_1 vektörü aşağıdaki şekilde bulunmuş olur:

$$E_1^{(1)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \begin{vmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2e^{-2i\omega_0} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 & 2iw_0 - \tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 2iw_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \begin{vmatrix} 2iw_0 + \tau^{(j)} & \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2iw_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(3)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \begin{vmatrix} 2iw_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2iw_0 - \tau^{(j)}(\alpha_{22} - 1) & \beta_{21} + \beta_{22}q_1^2 \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Benzer şekilde, (4.51) eşitliği (4.49) da yerine yazılır ve (4.53) formülü kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} \\ -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_1\bar{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistemi bulunur. Sistemin çözümünden

$$A_2 = \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix}$$

ve

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_1\bar{q}_1 & \alpha_{22} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -1 & -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_1\bar{q}_1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_2^{(3)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12} & -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - 1 & -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_1\bar{q}_1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

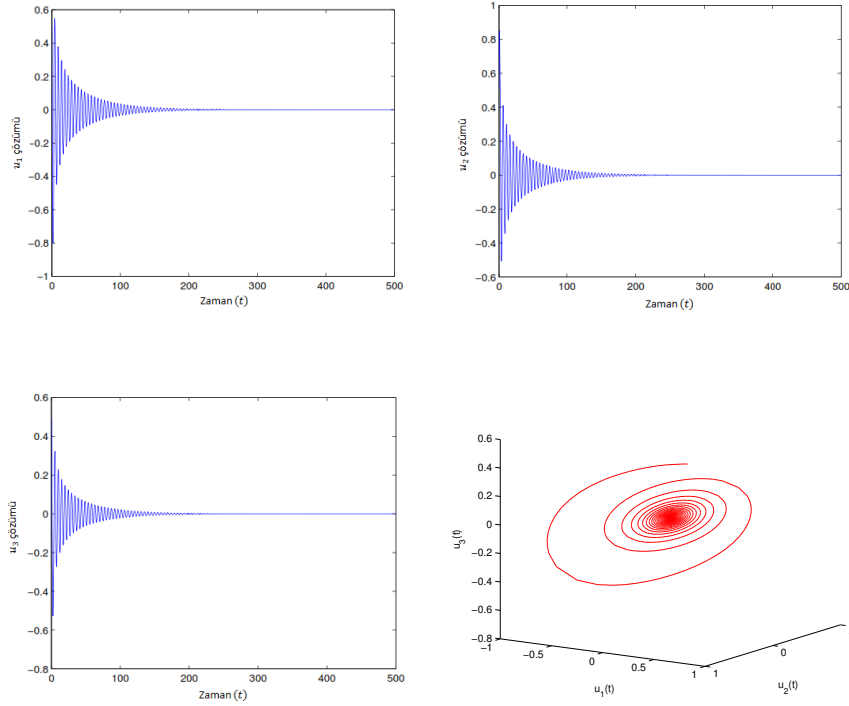
elde edilir.

Son olarak, E_1 ve E_2 , $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ katsayılarında yerine yazılırsa Lyapunov katsayısını hesaplamak için gerekli olan her şey bulunmuş olur. Bu aşamadan sonra, çatallanmanın yönü, kararlılığı ve periyodu Teorem (2.2)'den kolayca hesaplanabilir.

4.6.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.16) sisteminin sayısal çalışmaları yapılmıştır ve oluşan durumlara göre Teorem 4.1'in sonuçları grafiklerle desteklenmeye çalışılmıştır. Örnek olarak (4.16) sisteminde katsayıları $a_{11} = -0.5$, $a_{12} = -1.8$, $a_{21} = 1.3$, $a_{22} = 1.7$ ve $\alpha = 1$ seçelim, yani aşağıdaki sistemi düşünelim:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) - 0.5 \tanh(u_3(t)) - 1.8 \tanh(u_2(t - \tau)), \\ \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + 1.3 \tanh(u_1(t)) + 1.7 \tanh(u_2(t)), \\ \dot{u}_3(t) &= -u_3(t) + u_1(t). \end{aligned} \quad (4.54)$$



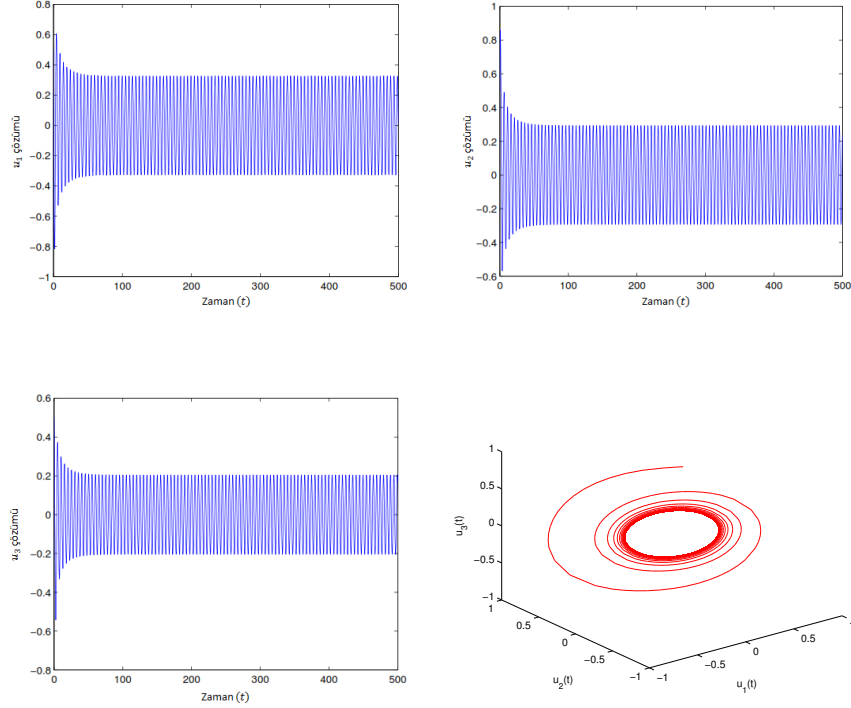
Şekil 4.11: $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.15$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.25 < \tau_0$ iken (4.54) sisteminin çözümleri ve faz portresi. Orijin asimptotik kararlıdır.

Burada $i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$ için bütün $f_{ij}(\cdot) = \tanh(\cdot)$ olarak seçilmiştir. (4.23) denkleminde p, q, r katsayıları hesaplanarak aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

$$w^6 + (1.49)w^4 - (2.7356)w^2 - 4.3731 = 0. \quad (4.55)$$

(4.55) denkleminin tek bir pozitif kökü vardır, öyle ki $w_0 \approx 1.2969$ dur. Elde edilen değerler (4.27) denkleminde yerine konursa $\tau_0 \approx 0.2692$ olarak hesaplanır. Ayrıca, Teorem 2.2'de verilen değerler aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\mu_2 = 0.1030, \quad \beta_2 = -0.2172, \quad T_2 = 0.2687. \quad (4.56)$$



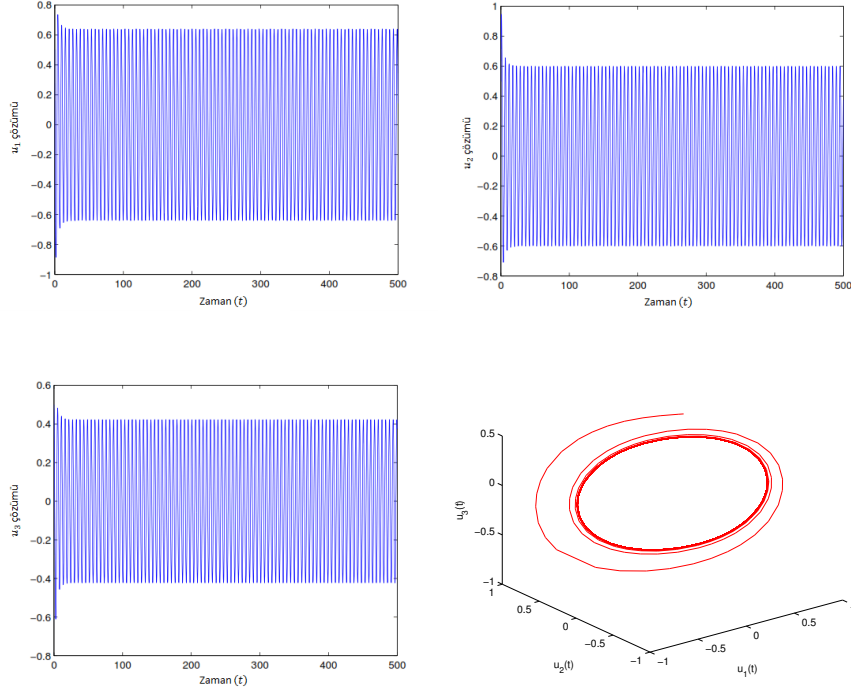
Şekil 4.12: $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.3 > \tau_0$ iken orijinden çatallanan periyodik çözümler ve faz portresi.

İlk olarak $\tau_1 = 0.1$ ve $\tau_2 = 0.15$ seçelim. Bu durumda $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0.25 < \tau_0$ olacaktır. Teorem 4.1'e göre $(0,0,0)$ denge noktası $\tau < \tau_0$ iken karardır. Bu durum Şekil 4.11'de gösterilmiştir. $\mu_2 > 0$ olduğundan, τ , τ_0 kritik değerini geçtiğinde denge noktası kararlılığını yitirecek ve periyodik çözümler oluşacaktır. Oluşan periyodik çözümler $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0.3 \approx \tau_0$ iken Şekil 4.12'de verilmiştir. Diğer yandan $T_2 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğundan, periyodik çözümler kararlı ve çözümlerin periyodu τ arttıkça artmaktadır. Şekil 4.13'te $\tau_1 = 0.2$ ve $\tau_2 = 0.2$ iken, yani $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0.4 > \tau_0$ olduğu durumda periyodik çözümlerin periyodunun Şekil 4.12'ye göre daha büyük olduğu görülmektedir. Sistemimiz üç değişken içerdiğinden çatallanma parametresini göz ardı ederek çatallanma diyagramını çizdirebiliriz. τ değerlerinin 0.01 artışıyla ortaya çıkan limit döngüleri Şekil 4.14'te çizdirilmiştir.

4.7 İki Dağılımlı Gecikmeli Sistemde Hopf Çatallanma Analizi

Bu kısımda aşağıdaki karışık gecikmeli en genel sistemde (hem kesikli hem dağılımlı gecikmeli) kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır:

$$\begin{aligned}
 x_1'(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds\right) + a_{12}f_{12}(x_2(t - \tau_2)), \\
 x_2'(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t - \tau_1)) + a_{22}f_{22}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s)ds\right).
 \end{aligned} \tag{4.57}$$



Şekil 4.13: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_1 + \tau_2 = 0.4 > \tau_0$ iken orijinden çatallanan periyodik çözümler ve faz portresi.

4.7.1 Lineer kararlılık analizi ve Hopf çatallanmanın varlığı

Bu bölümde yine zayıf çekirdeği, yani

$$F(s) = \alpha e^{-\alpha s},$$

düşünerek hareket edeceğiz. Aşağıda bu bölüm boyunca yapılan kabulleri sıralayalım:

$$(K_1) f_{ij} \in C^3, \quad f_{ij}(0) = 0, \quad (i = 1, 2 \text{ and } j = 1, 2),$$

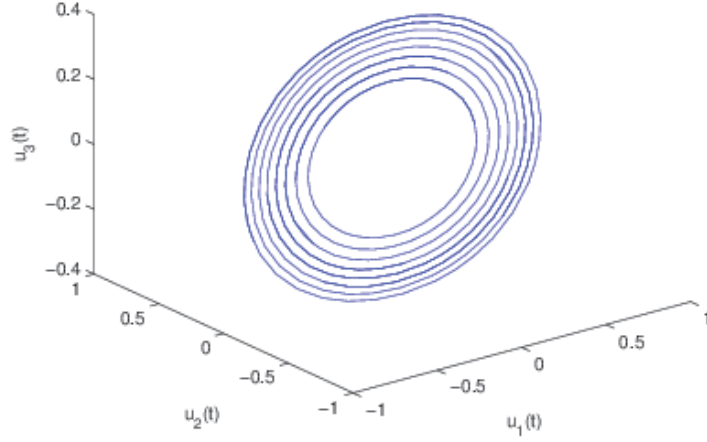
$$(K_2) \tau = \tau_1 + \tau_2.$$

Lineer zincir değişken tekniğini kullanabilmemiz için aşağıdaki değişkenleri tanımlayalım:

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s)ds,$$

$$x_4(t) = \int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s)ds.$$

O halde sistem (4.57), Bölüm 4.6.1'dekine benzer yöntemle (integral işareti altında



Şekil 4.14: τ değerleri $\tau = 0.3$ 'ten $\tau = 0.37$ 'ye kadar 0.01 artışla değişirken bazı limit döngüleri.

türev) aşağıdaki hali alacaktır:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + a_{11}f_{11}(x_3(t)) + a_{12}f_{12}(x_2(t - \tau_2)), \\
 \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + a_{21}f_{21}(x_1(t - \tau_1)) + a_{22}f_{22}(x_4(t)), \\
 \dot{x}_3(t) &= -\alpha x_3(t) + \alpha x_1(t), \\
 \dot{x}_4(t) &= -\alpha x_4(t) + \alpha x_2(t).
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

K_1 hipotezi gereğince, $(0,0,0,0)$, (4.58) sisteminin bir denge noktasıdır. Şimdi, $u_1(t) = x_1(t - \tau_1)$, $u_2(t) = x_2(t)$, $u_3(t) = x_3(t - \tau_1)$ ve $u_4(t) = x_4(t)$ olacak şekilde yeni değişkenler tanımlayalım. K_2 hipotezini de kullanarak, bu değişkenlerle (4.58) sistemi aşağıdaki sisteme denk olacaktır:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + a_{11}f_{11}(u_3(t)) + a_{12}f_{12}(u_2(t - \tau)), \\
 \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + a_{21}f_{21}(u_1(t)) + a_{22}f_{22}(u_4(t)), \\
 \dot{u}_3(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t), \\
 \dot{u}_4(t) &= -\alpha u_4(t) + \alpha u_2(t).
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\alpha_{ij} = a_{ij} \left. \frac{df_{ij}}{du_i} \right|_{u_i=0}, \beta_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} \left. \frac{d^2 f_{ij}}{du_i^2} \right|_{u_i=0} \text{ ve } \sigma_{ij} = \frac{1}{6} a_{ij} \left. \frac{d^3 f_{ij}}{du_i^3} \right|_{u_i=0} \quad (i = 1, 2 \text{ ve } j = 1, 2)$$

olmak üzere (4.59) sisteminin $(0, 0, 0, 0)$ noktasında Taylor serisine açılımı

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -u_1(t) + \alpha_{11}u_3(t) + \beta_{11}u_3^2(t) + \sigma_{11}u_3^3(t) \\
&\quad + \alpha_{12}u_2(t - \tau) + \beta_{12}u_2^2(t - \tau) + \sigma_{12}u_2^3(t - \tau) + Y.M.T., \\
u_2'(t) &= -u_2(t) + \alpha_{21}u_1(t) + \beta_{21}u_1^2(t) + \sigma_{21}u_1^3(t) + \alpha_{22}u_4(t) + \beta_{22}u_4^2(t) + \sigma_{22}u_4^3(t) \\
&\quad + Y.M.T., \\
u_3'(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t), \\
u_4'(t) &= -\alpha u_4(t) + \alpha u_2(t)
\end{aligned}$$

sistemini verecektir. Bu sistemin lineerleştirilmiş hali

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -u_1(t) + \alpha_{11}u_3(t) + \alpha_{12}u_2(t - \tau), \\
u_2'(t) &= -u_2(t) + \alpha_{21}u_1(t) + \alpha_{22}u_4(t), \\
u_3'(t) &= -\alpha u_3(t) + \alpha u_1(t), \\
u_4'(t) &= -\alpha u_4(t) + \alpha u_2(t)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

olarak elde edilir. Bu sistemin karakteristik denklemini bulmak için $u_1(t) = Ae^{\lambda t}$, $u_2(t) = Be^{\lambda t}$, $u_3(t) = Ce^{\lambda t}$ ve $u_4(t) = De^{\lambda t}$ aday çözümleri yerine konursa aşağıdaki matris eşitliği elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -\alpha_{12}e^{-\lambda\tau} & -\alpha_{11} & 0 \\ -\alpha_{21} & \lambda + 1 & 0 & -\alpha_{22} \\ -\alpha & 0 & \lambda + \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \lambda + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Buradan (4.60) sisteminin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{4.61}$$

öyle ki

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha^2 - \alpha^2(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \alpha^2\alpha_{11}\alpha_{22}, \\
a_1 &= 2\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \alpha^2(\alpha_{11} + \alpha_{22}), \\
a_2 &= \alpha^2 + 4\alpha + 1 - \alpha(\alpha_{11} + \alpha_{22}), \\
a_3 &= 2\alpha + 2, \\
b_0 &= -\alpha^2\alpha_{12}\alpha_{21}, \\
b_1 &= -2\alpha\alpha_{12}\alpha_{21}, \\
b_2 &= -\alpha_{12}\alpha_{21}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

olarak hesaplanır.

$\tau = 0$ iken, (4.61) denklemi

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + (a_2 + b_2)\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + (a_0 + b_0) = 0 \quad (4.63)$$

olup Routh-Hurwitz kriterleri gereğince aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde (4.63) denkleminin tüm kökleri negatiftir veya negatif reel kısma sahiptir:

1. $a_3 > 0$,
2. $a_0 + b_0 > 0$,
3. $a_1 + b_1 > 0$,
4. $a_3(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) > (a_1 + b_1)^2 + a_3^2(a_0 + b_0)$.

$\tau \neq 0$ olsun. (4.61) denkleminin sırf sanal köklerini araştıralım. Bunun için $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ (4.61) denkleminin bir kökü olsun. Denkleme yerine yazar ve reel ve sanal kısımları ayırırsak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0 + (b_0 - b_2\omega^2) \cos \omega\tau + b_1\omega \sin \omega\tau = 0, \quad (4.64)$$

$$-a_3\omega^3 + a_1\omega + b_1\omega \cos \omega\tau + (b_2\omega^2 - b_0) \sin \omega\tau = 0. \quad (4.65)$$

(4.64) ve (4.65) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak

$$\omega^8 + p\omega^6 + q\omega^4 + r\omega^2 + s = 0 \quad (4.66)$$

denklemi elde edilir, öyle ki, $p = -2a_2 + a_3^2$, $q = 2a_0 + a_2^2 - 2a_1a_3 - b_2^2$, $r = -2a_0a_2 + a_1^2 + 2b_0b_2 - b_1^2$ ve $s = a_0^2 - b_0^2$ dir. $z = \omega^2$ yeni değişkenini tanımlayalım. O halde (4.66) denklemi

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \quad (4.67)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin solundaki ifadeyi

$$g(z) = z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s \quad (4.68)$$

olarak tanımlayalım. Şimdi, bu polinomun pozitif köklerini araştırmamız gereklidir. İlk olarak, $s < 0$ olsun. $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ olduğundan (4.68) polinomunun en az bir tane pozitif kökü olmak zorundadır. Aksine, $s > 0$ olsun. Kritik noktaları belirleyebilmemiz için (4.68) polinomunun türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{dg(z)}{dz} = 4z^3 + 3pz^2 + 2qz + r. \quad (4.69)$$

Artık amacımız (4.69) denkleminin köklerini bulmaktır. Bunun için önce eşitliğin sağ

tarafını $h(z) = 4z^3 + 3pz^2 + 2qz + r$ olarak isimlendirelim. Burada, kritik noktaları, üçüncü dereceden bir polinomun köklerini veren Cardano formülü (Url-3) ile hesaplayacağız.

Teorem 4.2. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ polinomu verilsin. O halde

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3ac - b^2}{9a^2}, & R &= \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}, \\ S &= \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}}, & T &= \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

olmak üzere, bu polinomun çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x_1 &= S + T - \frac{b}{3a}, \\ x_2 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T), \\ x_3 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Burada

$$\Delta = Q^3 + R^2 \quad (4.72)$$

olarak tanımlıdır ve diskriminant olarak adlandırılır.

a, b, c, d reel sayılar olması koşulu ile:

- i) $\Delta > 0$ ise, bir kök reel ve diğer ikisi kompleks eşleniktir,
- ii) $\Delta = 0$ ise, en az ikisi eşit olmak üzere bütün kökler reeldir,
- iii) $\Delta < 0$ ise, bütün kökler birbirinden farklı ve reeldir.

Bu teoremin ispatı için Url-3 kaynağını referans olarak verebiliriz.

Yukarıda verilen teoremin algoritmasına göre, ilk olarak $y = z + \frac{p}{4}$ dönüşümünü tanımlayalım, Bu dönüşümden sonra

$$Q = \frac{8q - 3p^2}{48}, \quad R = \frac{4pq - 8r - p^3}{64} \quad (4.73)$$

olmak üzere, aşağıdaki depresif kübik polinom elde edilir:

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0. \quad (4.74)$$

Dikkat edilirse, bu polinomda kuadratik terim artık yok olmuştur. Şimdi, $uv = -Q$ olacak şekilde $y = u + v$ dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm sayesinde (4.74)

denklemini aşağıdaki denkleme dönüştür ki, bu denklem ikinci dereceden polinomlar için diskriminant metodu yardımıyla kolayca çözülebilir:

$$u^6 - 2Ru^3 - Q^3 = 0. \quad (4.75)$$

O halde, S ve T (4.70) denkleminde tanımlanan şekilde olmak üzere (4.74) denkleminin kökleri

$$y = \begin{cases} S + T, \\ -\frac{S+T}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T), \\ -\frac{S+T}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T), \end{cases} \quad (4.76)$$

olarak bulunur. $y = z + \frac{p}{4}$ olduğundan (4.69) polinomunun kökleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} z_1 &= S + T - \frac{p}{4}, \\ z_2 &= -\frac{S+T}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) - \frac{p}{4}, \\ z_3 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) - \frac{p}{4}. \end{aligned}$$

Kabul edelim $\Delta > 0$ olsun. Cardano formülünden $h(z) = 0$ denkleminin tek bir kökü olduğunu biliyoruz. Bu köke $z_1^* = z_1$ diyelim. $\Delta = 0$ için $h(z) = 0$ denkleminin z_1, z_2 ve z_3 köklerinin en az iki tanesi eşit olacak şekilde üç kökü olduğunu biliyoruz. z_2^* da $\max\{z_1, z_2, z_3\}$ olacak şekilde tanımlansın. $\Delta < 0$ iken de, yine $h(z) = 0$ denkleminin z_1, z_2 ve z_3 reel ve farklı kökleri olduğunu biliyoruz. Bu durumda da, $z_3^* = \max\{z_1, z_2, z_3\}$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 4.3 (Li ve Hu, 2011). (4.68) polinomu için aşağıdakiler doğrudur:

1. $s < 0$ iken, (4.68) polinomunun en az bir pozitif kökü vardır.
2. $s \geq 0$ iken, aşağıdaki koşullardan en az biri sağlandığı takdirde (4.68) polinomunun hiç pozitif kökü yoktur:
 - (a) $\Delta > 0$ ve $z_1^* \leq 0$;
 - (b) $\Delta = 0$ ve $z_2^* \leq 0$;
 - (c) $\Delta < 0$ ve $z_3^* \leq 0$.
3. $s \geq 0$ iken, aşağıdaki koşullardan en az biri sağlandığı takdirde (4.68) polinomunun en az bir pozitif kökü vardır:
 - (a) $\Delta > 0$, $z_1^* > 0$ ve $g(z_1^*) < 0$;
 - (b) $\Delta = 0$, $z_2^* > 0$ ve $g(z_2^*) < 0$;
 - (c) $\Delta < 0$, $z_3^* > 0$ ve $g(z_3^*) < 0$.

İspat. $s < 0$ iken $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ olduğundan (4.68) polinomunun en az bir tane pozitif kökü olmak zorunda olduğunu yukarıda belirtmiştik. Kabul edelim $s \geq 0$ olsun. z_1^*, z_2^* ve z_3^* kritik noktaların maksimumu olarak tanımlandığından ve $g(0) = s \geq 0$ ve $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ olduğundan polinomun grafiği x eksenini bir daha kesemez. Diğer

yandan (3) şartındaki koşullardan (a) şıkkını düşünelim. Reel bir kök olması durumunda, kritik noktaların maksimumu pozitif olsun. Eğer bu kritik noktada polinomun aldığı değer negatif ise yine $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ olduğundan polinom x eksenini en az bir kere kesmek zorundadır. Diğer şıklarda da aynı durum geçerlidir. İspat tamamlanır. \square

Şimdi, genelliği bozmadan (4.68) polinomunun dört tane pozitif kökü olduğunu kabul edebiliriz. Bu kökleri z_1, z_2, z_3 ve z_4 olarak adlandıralım. O halde, (4.66) denkleminin de $\omega_1 = \sqrt{z_1}, \omega_2 = \sqrt{z_2}, \omega_3 = \sqrt{z_3}$ ve $\omega_4 = \sqrt{z_4}$ olacak şekilde dört tane pozitif kökü vardır. Buradan $k = 1, 2, 3, 4$ için (4.61) denklemini sağlayan $\{\tau_k^j | j = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisi vardır. Bu değerleri (4.64)-(4.65) denklemlerinden kosinüslü terimleri çekerek kolayca aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} \left\{ \arccos \left(\frac{c_4 \omega^6 + c_3 \omega^4 + c_2 \omega^2 + c_1}{(b_2 \omega^2 - b_0)^2 + b_1^2 \omega^2} \right) + 2\pi j \right\}, \quad (4.77)$$

öyle ki,

$$\begin{aligned} c_1 &= -a_0 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1, \\ c_3 &= a_3 b_1 - a_2 b_2 - b_0, \\ c_4 &= b_2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Sonuç olarak, $\tau = \tau_k^{(j)}$ ile birlikte $\pm i\omega_k$ değerleri (4.61) denkleminin sıfır sanal kökleridir.

$\tau_0 = \tau_{k_0}^{(0)} = \min\{\tau_k^{(0)} | k = 1, 2, 3, 4\}$, $\omega_0 = \omega_{k_0}$ olarak tanımlansın ve $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, $\tau = \tau_0$ civarında tanımlı (4.61) denkleminin $\alpha(\tau_0) = 0$, $\omega(\tau_0) = \omega_0$ koşullarını sağlayan kökü olsun. Aşağıdaki transversalite koşulu gerçekleşir:

Lemma 4.4. $g(z)$, (4.68) ile verilen polinom olmak üzere $z_k = \omega_k^2$ ve $g'(z_k) \neq 0$ olsun. O halde

$$\left[\frac{d(\operatorname{Re}\lambda(\tau))}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_k^{(j)}} \neq 0 \quad (4.78)$$

sağlanır ve $[(d(\operatorname{Re}\lambda(\tau))/d\tau)]_{\tau=\tau_k^{(j)}}$ ve $g'(z_k)$ aynı işarete sahiptir.

İspat. (4.61) denklemine $\lambda(\tau)$ yazılıp τ ya göre türev alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left\{ 4\lambda^3 + 3a_3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 + [2b_2\lambda + b_1 - \tau(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)] e^{-\lambda\tau} \right\} \frac{d\lambda}{d\tau} \\ & = \lambda(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Buradan

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{4\lambda^3 + 3a_3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1}{\lambda(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} e^{\lambda\tau} + \frac{2b_2\lambda + b_1}{\lambda(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \quad (4.80)$$

yazılabilir. $\lambda = i\omega$ yukarıda yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\left[\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau))\right]^{-1} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(-3a_3\omega^2 + a_1)\cos\omega\tau + (4\omega^3 - 2a_2\omega)\sin\omega\tau}{\eta} + \frac{((-4\omega^3 + 2a_2\omega)\cos\omega\tau + (-3a_3\omega^2 + a_1)\sin\omega\tau)}{\eta} i + \frac{b_1 + 2b_2\omega i}{\eta} \right\}, \quad (4.81)$$

öyle ki, $\eta = -b_1\omega^2 + (-b_2\omega^3 + b_0\omega)i$ elde edilir. (4.81) eşitliğinde payda eşleniği ile çarpılır ve düzenlenir ise

$$\left[\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau))\right]^{-1} = \frac{1}{\eta} z(4z^3 + 3pz^2 + 2qz + r) \quad (4.82)$$

olması gerektiği görülür. Bu da $[(d(\operatorname{Re}\lambda(\tau))/d\tau)]_{\tau=\tau_k^{(j)}}$ ve $g'(z_k)$ nin aynı işarete sahip olduğunu göstermektedir. \square

Son adım olarak, bulduklarımızı toparlayan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3. (4.59) sistemi için aşağıdakiler doğrudur:

- i) $s \geq 0$ ve aşağıdaki koşullardan biri gerçekleşiyorsa $(0,0,0,0)$ denge noktası her $\tau \geq 0$ için asimptotik karardır:
 - (a) $\Delta > 0$ ve $z_1^* \leq 0$;
 - (b) $\Delta = 0$ ve $z_2^* \leq 0$;
 - (c) $\Delta < 0$ ve $z_3^* \leq 0$.
- ii) $s < 0$ için ya da $s \geq 0$ iken aşağıdaki koşullardan biri gerçekleşiyorsa $(0,0,0,0)$ denge noktası $\tau \in [0, \tau_0)$ aralığında asimptotik karardır:
 - (a) $\Delta > 0$, $z_1^* > 0$ ve $g(z_1^*) < 0$;
 - (b) $\Delta = 0$, $z_2^* > 0$ ve $g(z_2^*) < 0$;
 - (c) $\Delta < 0$, $z_3^* > 0$ ve $g(z_3^*) < 0$.
- iii) (ii) şıkkındaki koşullara ek olarak $g'(z_k) \neq 0$ ise (4.59) sisteminde $\tau = \tau_0$ iken orijinde Hopf çatallanması oluşur.

4.7.2 Yön analizi

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde olduğu gibi, (4.59) sisteminde $\tau = \tau_0$ kritik değerinde oluşan Hopf çatallanmasının yönünü (çeşidini), kararlılığını ve periyodunu veren hesaplamaları yapacağız ve sistemi normal formuna indirgeyeceğiz.

Sabitlenmiş $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için $\mu = \tau - \tau_k^{(j)}$ olmak üzere gecikme parametremizi sıfıra taşıyalım. $t \rightarrow t/\tau$ zaman skalasını kullanarak τ gecikmesini normalleştirelim ve işlem kolaylığı açısından $\tau_k^{(j)} = \tau^{(j)}$ olarak göstereyim. O halde (4.59) sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} &= (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau) \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \\ x_4(t-1) \end{bmatrix} \\ &+ (\tau^{(j)} + \mu)f(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned} \quad (4.83)$$

öyle ki,

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & -1 & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\tau^{(j)} + \mu) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix},$$

ve

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta_{11}x_3^2(t) + \sigma_{11}x_3^3(t) + \beta_{12}x_2^2(t-1) \\ &+ \sigma_{12}x_2^3(t-1) + Y.M.T., \\ f_2 &= \beta_{21}x_1^2(t) + \sigma_{21}x_1^3(t) + \beta_{22}x_4^2(t) + \sigma_{22}x_4^3(t) \\ &+ Y.M.T., \\ f_3 &= 0, \\ f_4 &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $\beta_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij} \frac{d^2 f_{ij}}{du_i^2} \Big|_{u_i=0}$, $\sigma_{ij} = \frac{1}{6}a_{ij} \frac{d^3 f_{ij}}{du_i^3} \Big|_{u_i=0}$ ($i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$) olarak alınmıştır. Dikkat edilirse, bütün α_{ij} , β_{ij} ve σ_{ij} katsayıları a_{ij} lere bağlıdır. Yeni değişkenimiz tekrar $u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ olsun. O halde, (4.83) sisteminin

orijin civarında lineerleştirmesi $u'(t) = (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau)u(t) + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau)u(t-1)$ olacaktır. $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \Omega = C([-1, 0], \mathbb{R}^4)$ için $L_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ operatörünü

$$L_\mu(\phi) = (\tau^{(j)} + \mu)A(\tau)\phi(0) + (\tau^{(j)} + \mu)B(\tau)\phi(-1) \quad (4.84)$$

şeklinde tanımlayalım. (4.59) sistemi $u_t(\theta) = u(t + \theta) = (x_1(t + \theta), x_2(t + \theta), x_3(t + \theta), x_4(t + \theta))^T$ ve $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$f(\mu, \phi) = (\tau^{(j)} + \mu) \times \begin{bmatrix} \beta_{11}\phi_3^2(0) + \sigma_{11}\phi_3^3(0) + \beta_{12}\phi_2^2(-1) + \sigma_{12}\phi_2^3(-1) + Y.M.T. \\ \beta_{21}\phi_1^2(0) + \sigma_{21}\phi_1^3(0) + \beta_{22}\phi_4^2(0) + \sigma_{22}\phi_4^3(0) + Y.M.T. \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

olmak üzere

$$u'(t) = L_\mu(u_t) + f(\mu, u_t) \quad (4.86)$$

olarak yazılabilir.

Riesz Temsil Teoreminden her bir bileşeni sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in \Omega$ için $\theta \in [-1, 0]$ olmak üzere 4×4 tipinde $\eta(\theta, \mu)$ matrisi vardır, öyle ki

$$L_\mu\phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) \quad (4.87)$$

yazılabilir. Aslında, δ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau^{(j)} + \mu)A\delta(\theta) + (\tau^{(j)} + \mu)B\delta(\theta + 1) \quad (4.88)$$

seçilebilir. Daha önce de tanımlandığı gibi $\phi \in \Omega$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta(\xi, \mu)\phi(\xi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.89)$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.90)$$

operatörleri aynıdır. Sonuç olarak (4.86) sistemi, yine bu sisteme denk olan

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t \quad (4.91)$$

sistemine dönüştürülmüştür. Şimdi, (4.38) eşitliğinde tanımlanan $A^* \psi(s)$ operatörü yardımıyla, sırasıyla $A(0)$ ve $A^*(0)$ operatörlerinin $\lambda = i\omega_0$ ve $\bar{\lambda} = -i\omega_0$ özdeğerlerine karşılık gelen $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ özvektörlerini bulalım. $q(\theta) = [1, q_1, q_2, q_3]^T e^{i\omega_0\theta}$ ve $q^*(s) = \frac{1}{\bar{D}} [1, q_1^*, q_2^*, q_3^*]^T e^{i\omega_0 s}$ olsun. $A(0)q(\theta) = i\omega_0 q(\theta)$ ve $A^*(0)q^*(\theta) = -i\omega_0 q^*(\theta)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{((\alpha - \alpha\alpha_{11})k^2 + (k\alpha + k)i\omega_0 - \omega_0^2)e^{i\omega_0}}{\alpha_{12}(k\alpha + i\omega_0)}, & q_1^* &= \frac{k + i\omega_0 - k\alpha q_2^*}{\alpha_{21}k}, \\ q_2 &= \frac{k\alpha}{k\alpha + i\omega_0}, & q_2^* &= \frac{k\alpha_{11}}{k\alpha + i\omega_0}, \\ q_3 &= \frac{(k + i\omega_0)q_1 - k\alpha_{21}}{\alpha_{22}k}, & q_3^* &= \frac{k\alpha_{22}q_1^*}{k\alpha + i\omega_0}, \end{aligned}$$

kolayca bulunabilir. Burada, görsellik açısından $k = \tau^{(j)}$ olarak yazılmıştır. İki vektörün $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ özelliğinden dolayı, \bar{D} aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{D} = 1 + q_1^* q_1 + q_2^* q_2 + q_3^* q_3 + \tau^{(j)} e^{-i\omega_0} \alpha_{12} q_1.$$

C_0 merkez çok katlısının $\mu = 0$ daki koordinatlarını hesaplamak için (4.40)-(4.42) ile verilen eşitlikleri kullanalım. Bunun için, u_t , (4.91) denkleminin $\mu = 0$ iken çözümü olmak üzere $u_t(u_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta), u_{3t}(\theta), u_{4t}(\theta)) = w(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$ bileşenlerini bulalım. Aynı zamanda $q(\theta) = [1, q_1, q_2, q_3]^T e^{i\omega_0\theta}$ olduğunu da hatırlayarak,

$$\begin{aligned} u_{1t}(0) &= z + \bar{z} + w_{20}^{(1)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{3t}(0) &= zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2 + w_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(3)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{4t}(0) &= zq_3 + \bar{z}\bar{q}_3 + w_{20}^{(4)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(4)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(4)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\ u_{2t}(-1) &= zq_1 e^{-i\omega_0} + \bar{z}\bar{q}_1 e^{-i\omega_0} + w_{20}^{(2)}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-1) z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} \\ &\quad + O(|z, \bar{z}|^3) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, $f(\mu, \phi)$ tanımından

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \\ &= \frac{\tau^{(j)}}{\bar{D}} [1, \bar{q}_1^*, \bar{q}_2^*, \bar{q}_3^*] \begin{bmatrix} \beta_{11} u_{3t}^2(0) + \sigma_{11} u_{3t}^3(0) + \beta_{12} u_{2t}^2(-1) + \sigma_{12} u_{2t}^3(-1) \\ \beta_{21} u_{1t}^2(0) + \sigma_{21} u_{1t}^3(0) + \beta_{22} u_{4t}^2(0) + \sigma_{22} u_{4t}^3(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \\
&= \frac{\tau^{(j)}}{D} \left\{ [\beta_{11} q_2^2 + \beta_{12} q_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* q_3^2] z^2 \right. \\
&\quad + [2\beta_{11} q_2 \bar{q}_2 + 2\beta_{12} q_1 \bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* + 2\beta_{22} \bar{q}_1^* q_3 \bar{q}_3] z \bar{z} \\
&\quad + [\beta_{11} \bar{q}_2^2 + \beta_{12} \bar{q}_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* \bar{q}_3^2] \bar{z}^2 \\
&\quad + [2\beta_{11} q_2 w_{11}^3(0) + \beta_{11} \bar{q}_2 w_{20}^3(0) + 3\sigma_{11} q_2^2 \bar{q}_2 \\
&\quad + 2\beta_{12} q_1 e^{-i\omega_0} w_{11}^2(-1) + \beta_{12} \bar{q}_1 e^{-i\omega_0} w_{20}^2(-1) \\
&\quad + 3\sigma_{12} q_1^2 \bar{q}_1 e^{-3i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* w_{11}^1(0) + \beta_{21} \bar{q}_1^* w_{20}^1(0) + 3\sigma_{21} \bar{q}_1^* \\
&\quad \left. + 2\beta_{22} q_3 \bar{q}_1^* w_{11}^4(0) + \beta_{22} \bar{q}_3 \bar{q}_1^* w_{20}^4(0) + 3\sigma_{22} \bar{q}_3 \bar{q}_1^* q_3^2] z^2 \bar{z} \right\} \\
&\quad + Y.M.T.
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O halde, Lyapunov katsayımız için gerekli olan katsayıları aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
g_{20} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [\beta_{11} q_2^2 + \beta_{12} q_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* q_3^2], \\
g_{11} &= \frac{\tau^{(j)}}{D} [2\beta_{11} q_2 \bar{q}_2 + 2\beta_{12} q_1 \bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* \\
&\quad + 2\beta_{22} \bar{q}_1^* q_3 \bar{q}_3], \\
g_{02} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [\beta_{11} \bar{q}_2^2 + \beta_{12} \bar{q}_1^2 e^{-2i\omega_0} + \beta_{21} \bar{q}_1^* + \beta_{22} \bar{q}_1^* \bar{q}_3^2], \\
g_{21} &= 2 \frac{\tau^{(j)}}{D} [2\beta_{11} q_2 w_{11}^3(0) + \beta_{11} \bar{q}_2 w_{20}^3(0) + 3\sigma_{11} q_2^2 \bar{q}_2 \\
&\quad + 2\beta_{12} q_1 e^{-i\omega_0} w_{11}^2(-1) + \beta_{12} \bar{q}_1 e^{-i\omega_0} w_{20}^2(-1) \\
&\quad + 3\sigma_{12} q_1^2 \bar{q}_1 e^{-3i\omega_0} + 2\beta_{21} \bar{q}_1^* w_{11}^1(0) + \beta_{21} \bar{q}_1^* w_{20}^1(0) \\
&\quad + 3\sigma_{21} \bar{q}_1^* + 2\beta_{22} q_3 \bar{q}_1^* w_{11}^4(0) + \beta_{22} \bar{q}_3 \bar{q}_1^* w_{20}^4(0) \\
&\quad + 3\sigma_{22} \bar{q}_3 \bar{q}_1^* q_3^2].
\end{aligned}$$

Biliyoruz ki, son adım olarak bu katsayılardaki bilinmeyen $w_{11}(\theta)$ ve $w_{20}(\theta)$ yı hesaplamamız gereklidir. Bu hesaplama algoritması için tekrar (4.43)-(4.47) eşitlikleri kullanılırsa geriye sadece $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)}, E_1^{(4)})^T \in \mathbb{R}^4$ ve $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}, E_2^{(3)}, E_2^{(4)})^T \in \mathbb{R}^4$ sabit vektörlerinin hesaplanması kalacaktır.

Ayrıca, $\theta = 0$ için

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

ve

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau^{(j)} \begin{bmatrix} 2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 + 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} \\ 2\beta_{21} + 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

olarak bulunur.

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{20}(\theta) = 2i\omega_0 w_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (4.94)$$

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) w_{11}(\theta) = -H_{11}(0), \quad (4.95)$$

$$\left[i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] q(0) = 0, \quad (4.96)$$

$$\left[-i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{-i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] \bar{q}(0) = 0 \quad (4.97)$$

eşitliklerini göz önüne alırsak, (4.92) denklemini (4.94) eşitliğinde yerine yazar ve (4.96) bağıntısını kullanırsak

$$\left[2i\omega_0 I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] E_1 = 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistemini elde ederiz. Daha detaylı olarak, sistem

$$\begin{bmatrix} 2i\omega_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2i\omega_0 - \tau^{(j)} & 0 & -\tau^{(j)}\alpha_{22} \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha & 0 \\ 0 & -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{bmatrix} E_1$$

$$= 2\tau^{(j)} \begin{bmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak açıkça yazılabilir. Bu sistem E_1 için çözümlerse

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2i\omega_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2i\omega_0 - \tau^{(j)} & 0 & -\tau^{(j)}\alpha_{22} \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha & 0 \\ 0 & -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$E_1^{(1)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \times \begin{vmatrix} \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} & 0 \\ \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 & 2i\omega_0 - \tau^{(j)} & 0 & -\tau^{(j)}\alpha_{22} \\ 0 & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha & 0 \\ 0 & -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \times \begin{vmatrix} 2i\omega_0 + \tau^{(j)} & \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 & 0 & -\tau^{(j)}\alpha_{22} \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(3)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \times \begin{vmatrix} 2i\omega_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} & 0 \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2i\omega_0 - \tau^{(j)} & \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 & -\tau^{(j)}\alpha_{22} \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(4)} = \frac{2\tau^{(j)}}{A_1} \times \begin{vmatrix} 2i\omega_0 + \tau^{(j)} & -\tau^{(j)}\alpha_{12} & -\tau^{(j)}\alpha_{11} & \beta_{11}q_2^2 + \beta_{12}q_1^2 e^{-2i\omega_0} \\ -\tau^{(j)}\alpha_{21} & 2i\omega_0 - \tau^{(j)} & 0 & \beta_{21} + \beta_{22}q_3^2 \\ -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 2i\omega_0 + \tau^{(j)}\alpha & 0 \\ 0 & -\tau^{(j)}\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

bilinmeyenleri bulunmuş olur. Benzer şekilde, (4.93) denklemi (4.95) denkleminde yerine konur ve (4.97) kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & -1 & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} \\ -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

sistemi elde edilir. Bu sistem E_2 için çözümlerse,

$$A_2 = \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & -1 & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 \\ -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 & -1 & 0 & \alpha_{22} \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

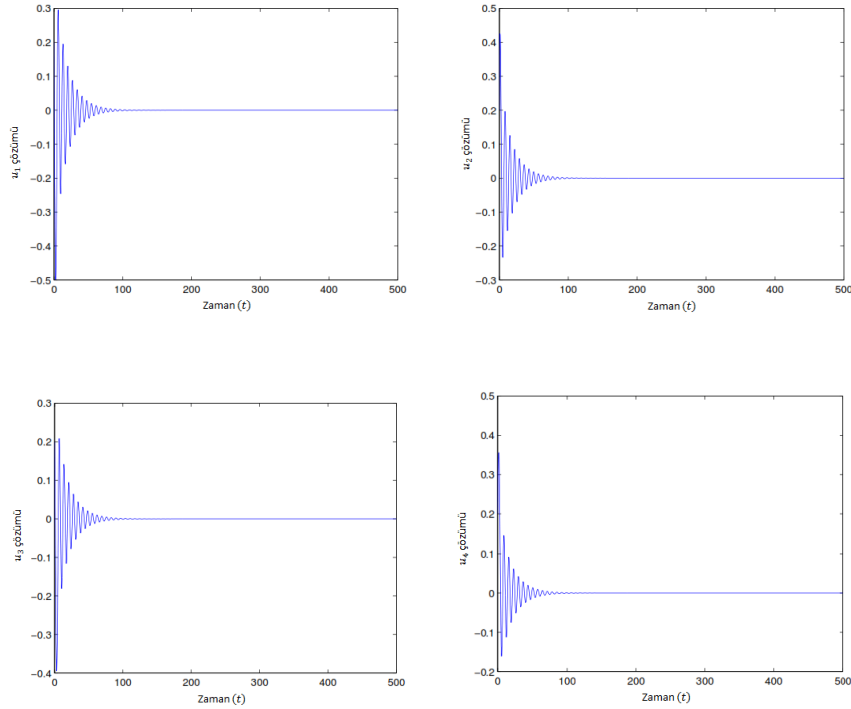
$$E_2^{(2)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -1 & -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 & 0 & \alpha_{22} \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

$$E_2^{(3)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12} & -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} & 0 \\ \alpha_{21} & -1 & -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 & \alpha_{22} \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

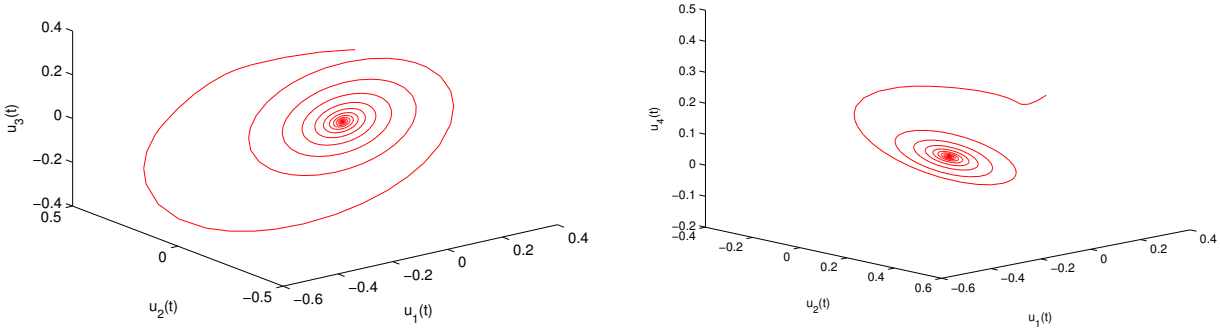
$$E_2^{(4)} = \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12} & \alpha_{11} & -2\beta_{11}q_2\bar{q}_2 - 2\beta_{12}q_1\bar{q}_1 e^{-2i\omega_0} \\ \alpha_{21} & -1 & 0 & -2\beta_{21} - 2\beta_{22}q_3\bar{q}_3 \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

bulunur. Bu sayede, birinci Lyapunov katsayısı hesaplanabilir ve çatallanmanın yönü, periyodu ve kararlılığı elde edilir.

4.7.3 Nümerik sonuçlar



Şekil 4.15: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 0.7$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.2 < \tau_0$ iken çözümleri. Bu durumda, orijin asimptotik kararlıdır.



Şekil 4.16: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 0.7$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.2 < \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.

Bu bölümde, örnek olarak (4.59) sisteminde Hopf çatallanma çıktığını göstereceğiz. (4.59) sisteminde $a_{11} = -0.5$, $a_{12} = -1.8$, $a_{21} = 1.3$, $a_{22} = 1.7$ ve $\alpha = 1$ alalım. Yine $i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$ için $f_{ij}(\cdot) = \tanh(\cdot)$ seçelim, yani

$$\begin{aligned}
 u_1'(t) &= -u_1(t) - 0.5 \tanh(u_3(t)) - 1.8 \tanh(u_2(t - \tau)), \\
 u_2'(t) &= -u_2(t) + 1.3 \tanh(u_1(t)) + 1.7 \tanh(u_4(t)), \\
 u_3'(t) &= -u_3(t) + u_1(t), \\
 u_4'(t) &= -u_4(t) + u_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

sistemini göz önüne alalım. (4.66) denklemindeki katsayılar hesaplanırsa

$$\omega^8 + (6.4)\omega^6 + (2.6644)\omega^4 + (1.6888)\omega^2 - 4.3731 = 0 \tag{4.99}$$

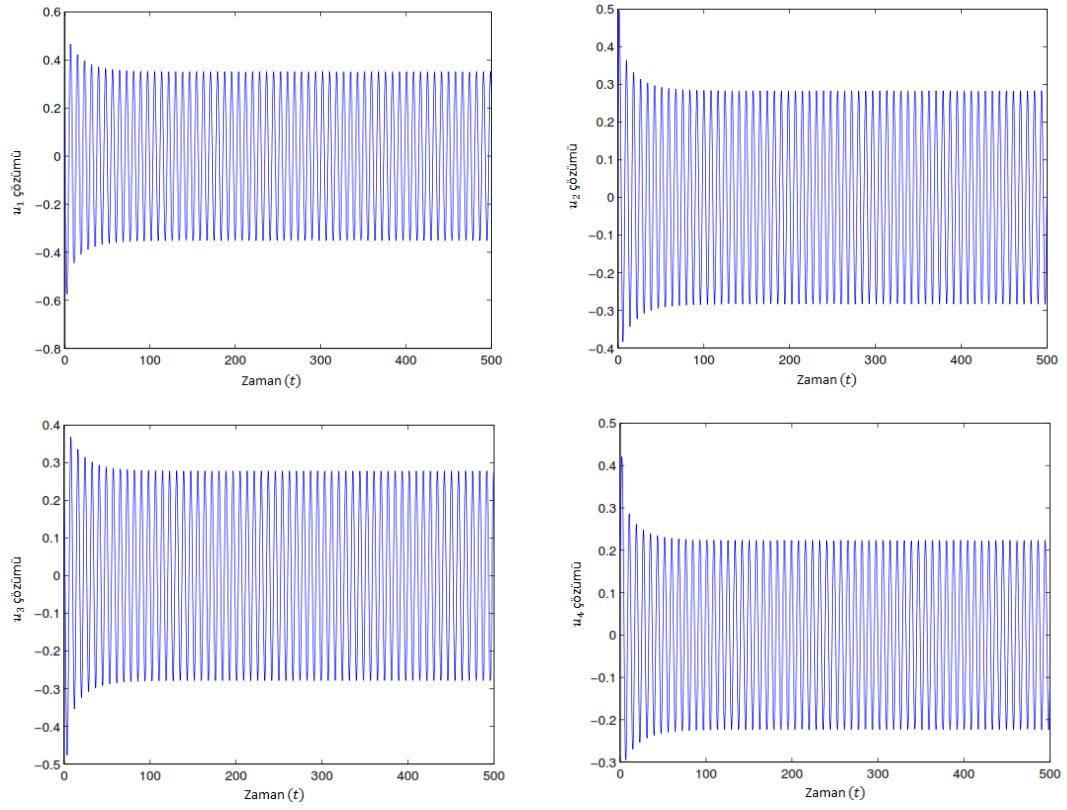
elde edilir. Bu polinomun $\omega_0 \approx 0.8152$ olmak üzere tek bir pozitif kökü vardır. (4.77) denkleminde de $\tau_0 \approx 1.4040$ hesaplanır. İlk olarak, benzetim için, $\tau_1 = 0.5$ ve $\tau_2 = 0.7$ seçelim, yani $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 1.2 < \tau_0$ olsun. O halde, Teorem 4.3 gereğince $(0, 0, 0, 0)$ denge noktası $\tau < \tau_0$ iken kararlıdır. Bu durum Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Sistemin boyutu dört olduğundan faz portresi için Şekil 4.16'da birkaç keyfi değişken çizdirilmiştir. $\mu_2 > 0$ olduğundan, τ , τ_0 kritik değerinden geçerken, denge noktası kararlılığını kaybeder ve Hopf çatallanması ortaya çıkar. Orijinden çatallanan periyodik çözümler $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 1.5 \approx \tau_0$ iken Şekil 4.17 ve 4.18'de gösterilmiştir. $T_2 > 0$ ve $\beta_2 < 0$ olduğundan, τ arttıkça periyodik çözümlerin periyodu artar ve periyodik çözümler kararlıdır.

Periyotların artmasına örnek teşkil etmesi için $\tau_1 = 0.9$ ve $\tau_2 = 0.9$ seçelim, yani $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 1.8 > \tau_0$ olsun. Bu durumda, periyodik çözümlerin periyodu Şekil 4.17'deki çözümlerin periyodundan daha fazla olacaktır. Bu durumun çözümleri ve faz portresi Şekil 4.19 ve 4.20'de sergilenmiştir. Ayrıca, Teorem 2.2'de verilen değerler aşağıdaki

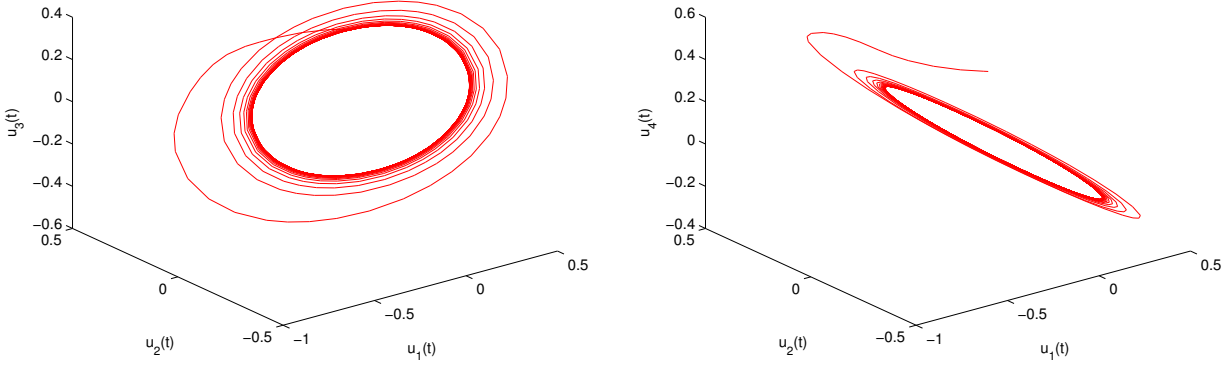
gibi bulunmuştur:

$$\mu_2 = 10.5588, \quad \beta_2 = -4.8824, \quad T_2 = 0.1983. \quad (4.100)$$

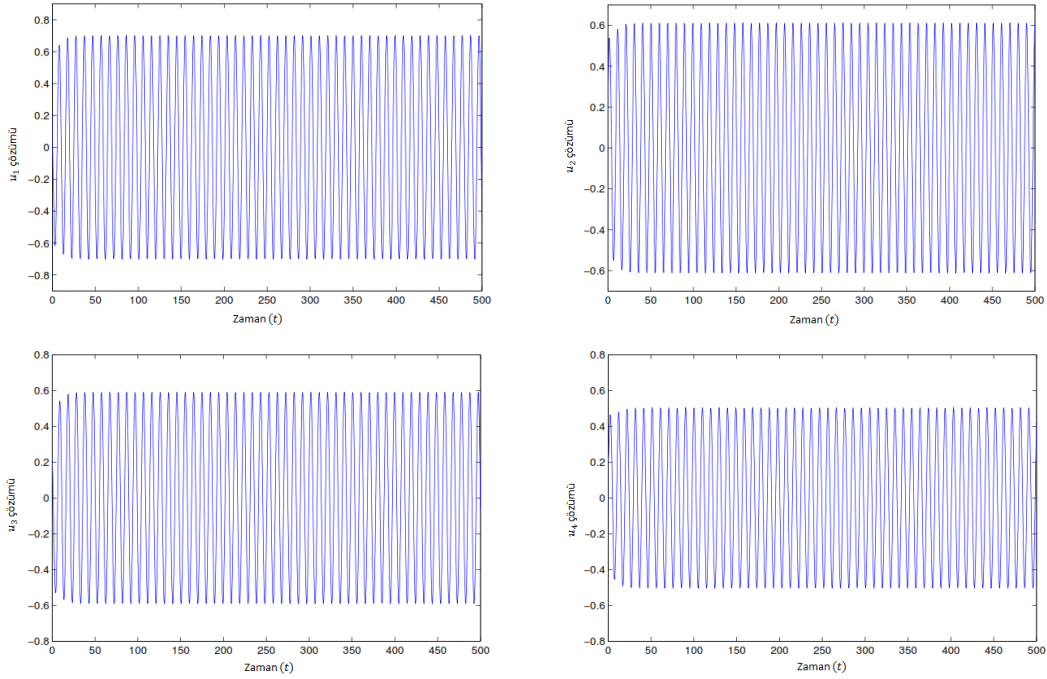
Sistemimiz dört değişken içerdiğinden, keyfi olarak üç değişken seçip kısmi olarak çatallanma diyagramını çizdirebiliriz. τ değerlerinin 0.01 artışıyla ortaya çıkan limit döngüleri Şekil 4.21’de çizdirilmiştir.



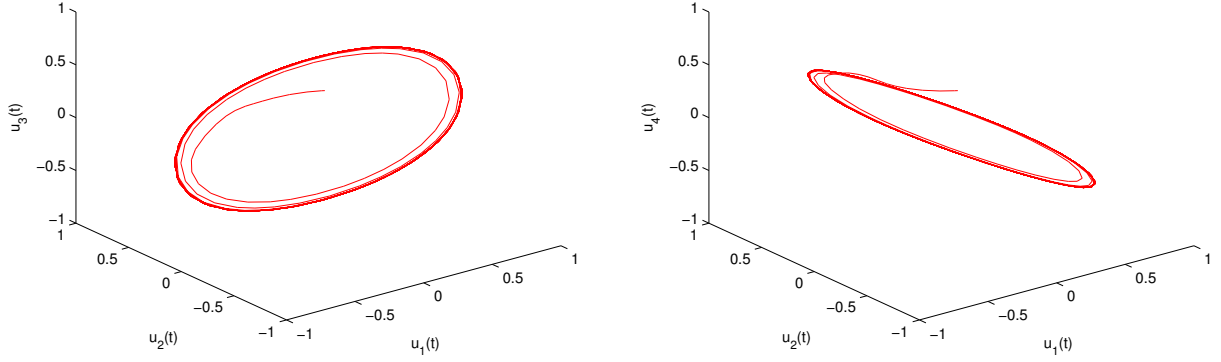
Şekil 4.17: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.75$, $\tau_2 = 0.75$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.5 > \tau_0$ iken periyodik çözümleri.



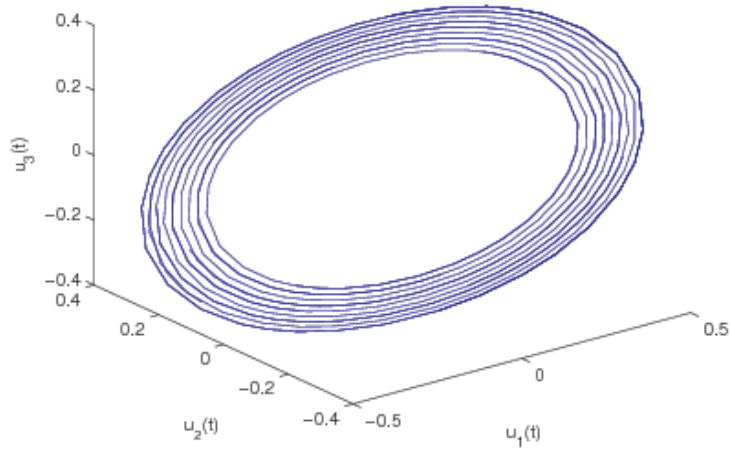
Şekil 4.18: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.75$, $\tau_2 = 0.75$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.5 > \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.



Şekil 4.19: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.9$, $\tau_2 = 0.9$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.8 > \tau_0$ iken periyodik çözümleri.



Şekil 4.20: (4.98) sisteminin $\tau_1 = 0.9$, $\tau_2 = 0.9$, $\tau_1 + \tau_2 = 1.8 > \tau_0$ iken faz portrelerinden bazıları.



Şekil 4.21: τ değerleri $\tau = 1.5$ 'ten $\tau = 1.58$ 'e kadar 0.01 artışıyla değişirken bazı limit döngüleri.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Son yıllarda, dinamik sistemlerin kararlılık analizleri oldukça sık çalışılan konulardandır. Uygulama olarak çok geniş bir yelpazeye yayılan matematiksel modeller, günlük hayatımızda karşılaştığımız bazı problemleri çözmeye, hayatımızı kolaylaştırma ve sistemlerin geleceği hakkında tahminler yapma konusunda bize yardımcı olmaktadır. Bu modellerin kalitatif analizi uzun zaman aralığında yörüngelerin nasıl davrandığı hakkında bize ipucu verir. Yörüngelerin kararlı olması ise sistemin kontrol edilebileceği, kaotik yapının var olamayacağını gösterir. Genel anlamda kararlılık, başlangıç koşullarında meydana gelen ufak bir değişikliğe karşın sisteminin durumunun çok değişmemesidir. Matematiksel olarak bunu, küçük tedirgemelere maruz bırakılan yörüngelerin davranışının pek değişmemesi olarak yorumlayabiliriz. Mesela, kısmi türevli denklemlerde ısı denkleminin kararlıdır. Çünkü başlangıç verisindeki ufak bir değişiklik sistemin sıcaklığında çok büyük bir etki yaratmaz. Günlük hayattan kararlılığını incelediğimiz problemlere bir geminin fırtınalı bir denizdeki hareketi, borsadaki hisse senedi fiyatlarının iniş çıkışları, sınır sistemimizin stresli uyarıcılara karşı davranışı örnek verilebilir.

Çatallanma teorisi, dinamik sistemlerin bir araştırma sahası olup seçilen bir kontrol parametresine bağlı olarak sistemin durumundaki değişimleri incelemektedir. Amaç, kontrol parametresine göre değişimini gözlemlemek istediğimiz sistemin uzun vadedeki davranışını incelemektir. Fark denklemleri ve diferensiyel denklemlere göre farklı çeşitlerde birçok çatallanma tipi mevcuttur. Ayrıca, modelin boyutuna göre de çatallanma tipleri ve adları değişmektedir. Hopf çatallanma, en az iki boyutlu diferensiyel denklem sistemlerinde görülen, kritik değerden sonra denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği (bakılan eksene göre yön değişebilir) ve limit döngülerinin ortaya çıktığı çatallanma tipidir. Yani, çözümler periyodik hale dönüşür. Periyodik çözümlerin önemi daha önceki bölümlerde vurgulanmıştır.

Esas itibarıyla, farklı alanlara ait iki modelin Hopf çatallanma analizini ele alan bu tez çalışmasında dört bölüm mevcuttur. Giriş niteliğindeki birinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler ve çatallanma hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde Hassard (1981) kitabı referans tutularak Hopf Çatallanma Teoreminin ifadesine yer verilmiştir. Ek olarak, süperkritik ve subkritik Hopf çatallanma tipleri detaylı olarak incelenmiş ve Hopf çatallanma ve periyodik çözümlerin öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca gecikmeli otonom bir sistem için Hassard (1981) referansı takip edilerek normal form bulma ve merkez çok katlına indirgeme basamakları verilmiştir.

Üçüncü bölüm, oran-bağımlı gecikmeli bir diferensiyel denklem sisteminin analizine ayrılmıştır. Bu sistem, popülasyon dinamiğinde bir av-avcı sistemini temsil etmektedir. Sistemde, av popülasyonu üstel büyümeye sahip iken avlanmanın etkisiyle büyüme yavaşlamaktadır. Avın olmadığı durumda avcı popülasyonu da başlangıçta lojistik bir büyümeye sahip iken avcı popülasyonunun büyümesi av popülasyonuna bağlı olarak sınırlandırılmıştır. Yani, avcı popülasyonunun yoğunluğu, birey başına düşen av

sayısına bağılı olarak değişmektedir. Bu tip bir sistemin içeriğinin klasik Lotka-Volterra denkleminde çok daha zengin olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada, popülasyonlarda bireylerin doğurgan olabilmesi için gereken olgunlaşma süreci veya bireylerin avlanması için yeterli bir olgunluğa erişme süreci gibi doğada mevcut olan gecikmelerin de etkisi düşünülerek sistem daha gerçekçi hale getirilmiştir. Ele alınan sisteme iki farklı ayrıık zaman gecikmeleri diğer adıyla kesikli gecikme terimleri eklenmiştir. Biyolojik açıdan avcı popülasyonundaki gecikme terimi avcılarının avlanabilmeleri için yeterli olgunluğa erişmelerini simgelemektedir. Av popülasyonundaki gecikme ise avların avcı tarafından avlanabilmeleri için geçmesi gereken süreyi göstermektedir. Yani, belirli olgunluktaki avlar avlanabilmektedir ve belirli bir yaşa ulaşmış avcılar avlanma yetisine ulaşmaktadır. Sistem belirlendikten sonra lineer kararlılık analizi çalışılmıştır. Bilindiği gibi, karakteristik denklem gecikmeli diferensiyel denklemlerde sıradan bir polinom yerine üstel polinom haline almaktadır. Elde edilen sistemde de ilk aşamada bu karakteristik denklemin köklerinin bulunmasının zorluğundan dolayı iki farklı gecikme terimi eşit tutulmuştur. Bu sebeple, eşit gecikmeli sistem ve iki farklı gecikmeli sistem olarak iki farklı sistemin analizi yapılmıştır. Eşit gecikmeli sistemin yapısı anlaşıldıktan sonra iki gecikmeli sisteme geçilmiştir. Her iki sistemde de pozitif denge noktasının komşuluğunda gecikme parametresi belirli bir kritik değeri geçtiğinde süperkritik Hopf çatallanması elde edilmiştir. Eşit gecikmeli sistemde tek parametre mevcut olduğundan bu kritik değer τ_0 olarak gösterilmiştir. Burada esas zorluk, iki gecikme içeren sistemde parametrelerden birini diğerine göre sabitmiş gibi tutarak analiz yapmaktır. Ele alınan (3.40) sisteminde de τ_1 in kararlılık aralığında τ_2 parametre seçilerek analiz yapılmıştır. Bulunan sonuçlar, iki sistem için de nümerik olarak örneklerle desteklenmiştir. Sistemlerin özümüleri, faz portreleri ve çatallanma diyagramları MATLAB programı kullanılarak çizdirilmiştir. Bu bölümde elde edilen bulgular elik (2008), elik (2009) ve Zhou ve diğ. (2005) referanslarında yapılan çalışmaları kapsamaktadır.

Dördüncü bölümde ise geri beslemeli bir yapay sinir ağı ele alınmıştır. Sistemin analizine geçmeden önce yapay sinir ağlarının yapısından, uygulama alanları ve kısa tarihçesinden bahsedilmiştir. YSA'lar biyolojik sinir hücrelerinin çalışma mekanizmasını taklit ettiklerinden biyolojik sinir hücresinin işleme mekanizması kısaca özetlenmiştir. Ele alınan sistemin temeli Hopfield sinir ağı yapısına benzediğinden Hopfield sisteminin fiziksel açıklamasına ve literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Neden atallanma analizine ihtiyaç duyulduğu ve dağılımlı gecikmenin gerekli olduğu konularına değinilmiştir. Bu bölümde de üçüncü bölümde olduğu gibi karakteristik denklemin dördüncü dereceden üstel bir polinom olmasından dolayı iki farklı sistem analizi yapılmıştır. İlk kısımda, karakteristik denklemi daha kolay analiz edebilmek amacıyla (üçüncü dereceden üstel polinom) simetrik dağılımlı gecikmelerin bir tanesi ihmal edilmiştir. Bu durumda, lineer zincir değişken değiştirme metoduyla (4.14) sistemi sadece kesikli gecikmeleri içeren üç değişkenli sisteme indirgenmiştir. Elde edilen (4.15) sisteminde $\tau = \tau_1 + \tau_2$ değişkeni tanımlanarak τ parametresine göre Hopf atallanma analizi çalışılmıştır. Her iki sistemde de gecikme çekirdeği zayıf çekirdek alınarak hareket edilmiştir. İkinci kısımda hem kesikli hem dağılımlı gecikme içeren (4.57) sistemi ele alınmıştır. Bu sistem lineer zincir değişken değiştirme metoduyla dört boyutlu (4.58) sistemine dönüştürülmüştür. Yine, gecikme terimlerini tek parametre haline getirmek amacıyla

$\tau = \tau_1 + \tau_2$ değişkeni kullanılmıştır. Bu bölümde karakteristik denklemin sırf sanal köklerini bulabilmek için Cardano formülüne de yer verilmiştir. Her iki sistem için karakteristik denklemin en az bir tane sırf sanal kökünün olduğunu garantileyen ve transversalite koşulunun sağlandığını gösteren lemmalar verilmiştir. Daha sonra yön analizleriyle birlikte süperkritik Hopf çatallanmaların varlığı gösterilmiştir. Teorik olarak bulunan sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir. Bu tezde yapılan çalışma, (4.12) denkleminde $\tau_1 = \tau_2$ ve $f_{ij} = f$, $i = 1, 2$ ve $j = 1, 2$ alınması halinde Li ve Hu (2011) makalesinin bir iyileştirmesidir. Aynı zamanda, (4.12) sisteminde $f_{ij} = \tanh$ ve gecikme çekirdeği Dirac delta fonksiyonu seçilirse yapılan çalışma (4.11) sistemini de kapsamaktadır.

KAYNAKLAR

- Abrams, P.A., Ginzburg, L.R.**, (2000). The nature of predation: prey dependent, ratio-dependent or neither?, *Trends in Ecology & Evolution*, 15(8), 337-341.
- Akhmet, M., Yilmaz, E.**, *Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations*, Springer, New York, (2014).
- Allen, L.J.S.**, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, (2007).
- Andrews, J.F.**, (1968). A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates, *Biot. Bioe.*, 10, 707-723.
- Arditi, R., Ginzburg, L.R.**, (1989). Coupling in predator prey dynamics: ratio-dependence, *J. Theor. Biol.*, 139, 311-326.
- Arditi, R., Berryman, A.A.**, (1991). The biological control paradox, *Trends in Ecology and Evolution*, 6-1, 32, doi: 10.1016/0169-5347(91)90148-Q.
- Arditi, R., Saiah, H.**, (1992). Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio-dependent consumption, *Ecology*, 73, 1544-1551.
- Atay, F.M.**, *Complex Time-Delay Systems: Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, (2010).
- Atiya, A., Baldi, P.**, (1989). Oscillations and synchronizations in neural networks: An exploration of the labeling hypothesis, *Int. J. Neural Syst.*, 1, 103-124.
- Babcock, K.L., Westervelt, R.M.** (1987). Dynamics of simple electronic neural networks, *Physica D*, 28, 305-316.
- Babloyantz, A., Lourenco, C., Sepulchre, A.J.**, (1995). Control of chaos in delay differential equations in a network of oscillators and in model cortex, *Physica D*, 86, 274-283.
- Balachandran, B., Kalmar-Nagy, T., Gilsinn, D.E.**, *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, Springer, New York, (2009).
- Baldi, P., Atiya, A.**, (1994). How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Trans. Neural Networks*, 5, 612-621.
- Bélair, J., Campbell, S., van den Driessche, P.**, (1996). Frustration, stability and delay-induced oscillations in a neural network model, *SIAM J. Appl. Math.*, 56(1), 245-255.

- Bellman, R., Cooke, K.L.,** *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, (1963).
- Beretta, E., Kuang, Y.,** (1998) Global analyses in some delayed ratio-dependent predator-prey systems, *Nonlinear Analysis*, 32(3), 381-408.
- Bi, P., Hu, Z.,** (2012). Hopf bifurcation and stability for a neural network model with mixed delays, *Applied Mathematics and Computation* 218, 6748-6761, doi:10.1016/j.amc.2011.12.042.
- Blanchard, P., Devaney, R.L., Hall, G.R.,** *Differential Equations*, Brooks/Cole Publishing, (2011).
- Bilazeroğlu, Ş.,** (2012). *Gecikmeli reaksiyon-difüzyon Lengyel-Epstein modelinin Hopf çatallanma analizi* (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Campbell, S.A.,** (1999). Stability and bifurcation of a simple neural network with multiple time delays, *Fields Inst Commun*, 21, 65-79.
- Cao, J., Xiao, M.,** (2007). Stability and Hopf bifurcation in a simplified BAM neural network with two time delays, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 18, 416-430, doi:10.1109/TNN.2006.886358.
- Cooke, K.L., van den Driessche, P.,** (1986). On zeros of some transcendental equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 29, 77-90.
- Cooke, K.L., Grossman, Z.,** (1982). Discrete delay, distributed delay and stability switches, *J. Math. Anal. Appl.*, 86, 92-627, doi:10.1016/0022-247X(82)90243-8.
- Cushing, J.M.,** *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, Springer, Berlin, (1977).
- Çayıroğlu, İ.,** İleri Algoritma Analizi-5, Ders Notları, <http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/IleriAlgoritmaAnalizi/IleriAlgoritmaAnalizi-5.Hafta-YapaySinirAglari.pdf>, alındığı tarih: 15 Ocak 2016.
- Çelik, C.,** (2008). The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, 37, 87-99, doi:10.1016/j.chaos.2007.10.045.
- Çelik, C.,** (2009). Hopf bifurcation of a ratio-dependent predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 1474-1484, doi:10.1016/j.chaos.2009.03.071.

- Das, P., Kundu, A.,** (2014). Bifurcation and chaos in delayed cellular neural network model, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2, 219-224, doi:10.4236/jamp.2014.25027.
- Du, Y., Xu, R., Liu, Q.,** (2013). Stability and bifurcation analysis for a neural network model with discrete and distributed delays, *Math.Meth. Appl. Sci*, 36, 49-59, doi: 10.1002/mma.2568.
- Du, Y., Xu, R., Liu, Q.,** (2013). Stability and bifurcation analysis for a discrete time bidirectional ring neural network model with delay, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, 1-12.
- Elmas, Ç.,** *Yapay Sinir Ağları*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, (2003).
- El'sgol'ts, L.E., Norkin, S.B.,** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, (1973).
- Feng, J., Jost, J., Qian, M.,** *Networks: From Biology to Theory*, Springer-Verlag, London, (2007).
- Forde, J.E.,** (2005). *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology* (Doktora Tezi), University of Michigan, Department of Mathematics, Michigan.
- Glass, L., Mackey, M.C.,** *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*, Princeton University Press, NJ, Princeton, (1988).
- Gopalsamy, K.,** *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, (1992).
- Gopalsamy, K. and Leung, I.,** (1996). Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition, *Physica D*, 89, 395-426.
- Guckenheimer, J., Holmes, P.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Berlin, New York: Springer-Verlag, (1997).
- Guo, S., Huang, L., Wang, L.,** (2004). Linear stability and Hopf bifurcation in a two-neuron network with three delays, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14, 2799-2810.
- Günel, K.,** (2006). *Zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve uygulamaları* (Yüksek Lisans Tezi), Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.
- Hairston, N.G., Smith, F., Slobodkin, L.,** (1960). Community structure, population control and competition, *American Naturalist*, 94, 421-425.

- Hale, J.K.**, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1977).
- Hanson, F.E.**, (1978). Comparative studies of firefly pacemakers, *Federation Proceedings*, 37(8), 2158-2164.
- Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., Wan, Y.H.**, *Theory and Application of Hopf Bifurcation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1981).
- Haykin, S.**, *Neural Networks: A comprehensive Foundations*, 2nd Edition, Prentice Hall, (1999).
- Hebb, D.**, *The Organization of Behavior*, John Wiley, New York, (1949).
- Holling, C.S.**, (1959). The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly, *Can. Entomol.*, 91, 293-320.
- Holling, C.S.**, (1965). The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation, *Mem. Entomol. Soc. Can.*, 45, 5-60.
- Holling, C.S.**, (1966). The functional response of invertebrate predators to prey density, *Mem. Entomol. Soc. Can.*, 48, 1-86.
- Hopfield, J.**, (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.
- Hopfield, J.**, (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.
- Izhikevich, E.**, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT Press, Cambridge, MA, (2006).
- Karaoğlu, E., Merdan, H.**, (2014). Hopf bifurcation analysis for a ratio-dependent predator-prey system involving two delays, *ANZIAM J* 55, 214-231, doi:10.1017/S1446181114000054.
- Karaoğlu, E., Merdan, H.**, (2014). Hopf bifurcations of a ratio-dependent predator-prey model involving two discrete maturation time delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, 68, 159-168, doi:10.1016/j.chaos.2014.07.011.
- Karaoğlu, E., Yılmaz, E., Merdan, H.**, (2015). Stability and bifurcation analysis of a two-neuron network system with discrete and distributed delays, *Neurocomputing*, 182, 102-110, doi: 10.1016/j.neucom.2015.12.006.

- Karaoğlu, E., Yılmaz, E., Merdan, H.,** (2016). Hopf bifurcation analysis of two-neuron network with discrete and distributed delays, *Nonlinear Dynamics*, 85, 1039-1051, doi: 10.1007/s11071-016-2742-0.
- Kuang, Y.,** *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*, Academic Press, (1993).
- Kuang, Y., Beretta E.,** (1998). Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system, *Journal of Mathematical Biology*, 36, 389-406.
- Kuznetsov, Y.A.,** *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1995).
- Kwon, O., Park, M., Lee, S., Park, J., Cha, E.,** (2013). Stability for neural networks with time-varying delays via some new approaches, *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst*, 24, 181-193.
- Leslie, A.R.,** (1977). The kinetics of functional response, *The American Naturalist*, 111(978), 289-300.
- Leslie, P.H.,** (1948). Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika*, 35, 213-245.
- Li, K., Wei, J.,** (2009). Stability and Hopf bifurcation analysis of a prey-predator system with two delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 2606-2613, doi: 10.1016/j.chaos.2009.04.001.
- Li, T., Fei, S.,** (2008). Stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with time-varying and distributed delays, *Neurocomputing*, 71, 1069-1081, doi: 10.1016/j.neucom.2007.09.006.
- Li, X., Hu, G.,** (2011). Stability and Hopf bifurcation on a neuron network with discrete and distributed delays, *Applied Mathematical Sciences*, 5, 2077-2084.
- Li, X., Ruan, S., Wei, J.,** (1999). Stability and bifurcation in delay-differential equations with two delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 236, 254-280, doi: 10.1006/jmaa.1999.6418.
- Li, Z., Hopfield, J.J.,** (1989). Modeling the olfactory bulb and its neural oscillatory processings, *Biol. Cybern.*, 61, 379-392.
- Luck, R.F.,** (1990). Evaluation of natural enemies for biological control: a behavior approach, *Trends in Ecology and Evolution*, 5, 196-199.
- MacDonald, N.,** *Time Lags in Biological Models*, Springer, Berlin, (1978a).

- MacDonald, N.**, *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- Mackey, M.C., Glass, L.**, (1977). Oscillations and chaos in physiological control systems, *Science*, 197, 287-289.
- Marcus, C., Westervelt, R.**, (1989). Stability of analog neural networks with delay, *Psychological Review*, A 39, 347-359.
- Marcus, C., Waugh, F., Westervelt, R.**, (1991). Nonlinear dynamics and stability of analog neural networks, *Phys D, Nonlinear Phenomena*, 51, 234-247.
- McCulloch, W.S., Pitts, W.**, (1943). A logical calculus of ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.
- Minsky, M., Papert, S.**, *Perceptrons*, MIT Press, Cambridge, MA, (1969).
- Murray, J.D.**, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, (2002).
- Olien, L., Bélair, J.**, (1997). Bifurcations, stability, and monotonicity properties of a delayed neural network model, *Physica D*, 102, 349-363.
- Pang, P.Y.H., Wang, M.X.**, (2004). Non-constant positive steady states of a predator-prey system with non-monotonic functional response and diffusion, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 88, 135-157.
- Rojas, R.**, *Neural Networks: A Systematic Introduction*, Springer-Verlag, (1996).
- Rosenblatt, F.**, (1958). The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain, *Psychological Review*, 65, 386-408.
- Rosenzweig, M.L., MacArthur, R.H.**, (1963). Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions, *American Naturalist*, 97, 217-223.
- Rosenzweig, M.L.**, (1969). Paradox of enrichment: destabilization of exploitation systems in ecological time, *Science*, 171, 385-387.
- Ruan, S., Filfil, R.S.**, (2004). Dynamics of a two-neuron system with discrete and distributed delays, *Physica D*, 191, 323-342.
- Ruan, S., Wei J.**, (2003). On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 10, 863-874.

- Ruiz, A, Owens, D.H., Townley, S.,** (1998). Existence, learning, and replication of periodic motions in recurrent neural networks, *IEEE Trans Neural Networks*, 9, 651-661.
- Shayer, L.P., Campbell, S.A.,** (2000). Stability, bifurcation and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays, *SIAM J. Appl. Math.*, 61, 673-700.
- Sole, R.V., de la Pride, L.M.,** (1995). Controlling chaos in discrete neural networks, *Phys. Lett. A*, 199, 65-69.
- Smith, B.R.,** (1997). *Neural network enhancement of closed-loop controllers for Ill-modeled systems with unknown nonlinearities* (Doktora Tezi), Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Mechanical Engineering, Virginia.
- Smith, H.,** *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, *Texts in Applied Math*, 57, (2011).
- Song, Q., Cao, J.,** (2006). Stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with both time-varying and continuously distributed delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 197, 188-203, doi:10.1016/j.cam.2005.10.029.
- Song, Y., Yuan, S.,** (2006). Bifurcation analysis in a predator-prey system with time delay, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 7, 265- 284, doi:10.1016/j.nonrwa.2005.03.002.
- Song, Z., Xu, J.,** (2013). Stability switches and double Hopf bifurcation in a two neural network system with multiple delays, *Cogn Neurodyn*, 7, 505-521, doi:10.1007/s11571-013-9254-0.
- Strogatz, S.,** *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, (1994).
- Şen, Z.,** *Yapay Sinir Ağları İlkeleri*, Su Vakfi Yayınları, İstanbul, (2004).
- Tavşanoğlu, V.,** *Hücresel Sinir Ağları*, Ders Notları, İstanbul, (2009).
- Tiba, A.K.O., Araujo, A.F.R., Rabelo, M.N.,** (2015). Hopf bifurcation in a chaotic associative memory, *Neurocomputing*, 152, 109-120, doi:10.1016/j.neucom.2014.11.013.
- Townley, S., Ilchmann, A., Weib, M.G., McClements, W., Ruiz, A.C., Owens, D.H., Pratzel-Wolters, D.,** (2000). Existence and learning of oscillations in recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, 205-214, doi:10.1109/72.822523.

- Wei, J., Ruan, S.,** (1999). Stability and bifurcation in a neural network model with two delays, *Physica D*, 130, 255-272, doi:10.1016/S0167-2789(99)00009-3.
- Werbos, P.,** (1974). *Beyond regression - new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences* (Doktora Tezi), Harvard University, Massachusetts.
- Wiens, J.A., Addicott, J.F., Case, T.J., Diamond, J.,** (1986). Overview: The importance of spatial and temporal scale in ecological investigations, *In: Community Ecology*, Diamond, J. & Case, T. J. eds, 145-153, New York: Harper and Row.
- Wiggins, S.,** *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*, Springer Verlag, (2003).
- Xiang, H., Cao, J.,** (2009) Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71, 6097-6108, doi:10.1016/j.na.2009.05.079.
- Yan, X., Chu Y.,** (2006). Stability and bifurcation analysis for a delayed Lotka-Volterra predator-prey system, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196, 198-210.
- Ye, H., Michel, A.N., Wang, K.,** (1994). Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays, *Psychological Review*, E 50(5), 4206-4213.
- Yilmaz, E.,** (2011). *Neural networks with piecewise constant argument and impact activation*, (Doktora Tezi), Middle East Technical University, The Graduate School of Applied Mathematics, Ankara.
- Yilmaz, E.,** (2012). Sınırlarda Gizlenen Matematik, *Bilim ve Teknik*, http://vizyon21yy.com/documan/genel_konular/bilim_teknoloji/tip/Sinirlerde%20Gizlenen%20Matematik.pdf, alındığı tarih: 15 Mayıs 2016.
- Zhang, H., Wang, Y., Liu, D.,** (2014). A comprehensive review of stability analysis of continuous-time recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25, 1229-1262, doi:10.1109/TNNLS.2014.2317880.
- Zhang, L., Wang, W., Xue, Y., Jin, Z.,** (2008). Complex dynamics of a Holling-type IV predator-prey model, <http://arxiv.org/pdf/0801.4365.pdf>.

- Zhou, S.R., Liu, Y.F., Wang, G.,** (2005). The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theor Populat Biol*, 67, 23-31.
- Zhou, X., Wu, Y., Li, Y., Yao, X.,** (2009). Stability and Hopf bifurcation analysis on a two-neuron network with discrete and distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40, 1493-1505, doi:10.1016/j.chaos.2007.09.034.
- Url-1** <http://kitap.radikal.com.tr/makale/haber/atesbocekleri-ve-agaclar-396079>, alındığı tarih: 04 Ocak 2016.
- Url-2** <http://www.bilgiufku.com/ates-bocegi-nedir-ozellikleri-nelerdir.html>, alındığı tarih: 04 Ocak 2016.
- Url-3** https://proofwiki.org/wiki/Cardano's_Formula, alındığı tarih: 18 Mayıs 2016.
- Url-4** https://en.wikipedia.org/wiki/Center_manifold, alındığı tarih: 19 Aralık 2015.
- Url-5** <http://cs.brown.edu/research/ai/dynamics/tutorial/Documents/DynamicalSystems.html>, alındığı tarih: 3 Aralık 2015.
- Url-6** http://14.139.172.204/nptel/CSE/Web/102106023/ch7_Hopfield%20Networkv5.pdf, alındığı tarih: 15 Ocak 2016.
- Url-7** https://en.wikipedia.org/wiki/Hopfield_network, alındığı tarih: 15 Mayıs 2016.
- Url-8** https://tr.wikipedia.org/wiki/Yapay_sinir_ağları, alındığı tarih: 12 Ocak 2016.

EKLER

EK 1 : Terim Sözlüğü

EK 1 Terim Sözlüğü

Türkçe terim

İngilizce Terim

Çatallanma	Bifurcation
Dağılımlı Gecikme	Distributed Delay
Denge noktası	Equilibrium Point
Değişim	Variation
Depresif Polinom	Depressed Polynomial
Düzgün	Smooth
Eklemeli Model	Additive Model
Fonksiyonel Cevap	Functional Response
Gecikme	Delay
Gecikme Çekirdeği	Delay Kernel
Geri Beslemeli Ağlar	Feedback Networks
Güçlü Çekirdek	Strong Kernel
İleri Beslemeli Ağlar	Feedforward Networks
Kararlılık	Stability
Karakteristik	Characteristic
Kesikli Gecikme	Discrete Delay
Koni Hücreleri	Cone Cells
Lineer	Linear
Lineer Zincir Değişken	Linear Chain Trick Technique
Değiştirme Yöntemi	
Merkez Çok Katlı	Center Manifold
Normalizasyon	Normalization
Oran-Bağımlı Denklem	Ratio-Dependent Equation
Ortalama Gecikme	Average (Mean) Lag
Özdeğer	Eigenvalue
Özvektör	Eigenvector
Salınım	Oscillation
Subkritik	Subcritic
Süperkritik	Supercritic
Tek Katlı (basit) kök	Simple Root
Tekli Doğrusal Algılayıcı	Perceptron
Transandantal Denklem	Transcendental Equation
Transversalite (Kesme)	Transversality Condition
Koşulu	
Yön	Direction
Zayıf Çekirdek	Weak Kernel

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Esra KARAOĞLU
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 23.06.1987 ANKARA
E-posta : esrakaraoglu9@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2009, Ankara Üniversitesi, Fen Fakóltesi, Matematik Bölümü
- **Lisans** : 2013, Anadolu Üniversitesi, İktisat Fakóltesi, İktisat Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2011, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Özel Başarı Burslu Doktora Öğrencisi
2014-2015	TUBITAK 2214/A Yurtdışı Araştırma Burs Programı, University of Pittsburgh, Department of Mathematics	Ziyaretçi Araştırmacı
2009-2015	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Doktora Öğrencisi
2011-2016	TUBITAK 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı	
2009-2011	TUBITAK 2210-A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı	

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Karaoğlu E., Merdan H., 2014. Hopf bifurcation analysis for a ratio-dependent predator-prey system involving two delays, ANZIAM Journal, 55, 214-231, doi:10.1017/S1446181114000054.
- Karaoğlu E., Merdan H., 2014. Hopf bifurcations of a ratio-dependent predator-prey model involving two discrete maturation time delays, Chaos, Solitons & Fractals, 68, 159-168, doi:10.1016/j.chaos.2014.07.011.
- Karaoğlu E., Yılmaz E., and Merdan H., 2015. Stability and bifurcation analysis of two-neuron network with discrete and distributed delays, Neurocomputing, 182, 102-110, doi:10.1016/j.neucom.2015.12.006.
- Karaoğlu E., Yılmaz E., and Merdan H., 2016. Hopf bifurcation analysis of coupled two-neuron system with discrete and distributed delays, Nonlinear Dynamics, 85, 1039-1051, doi: 10.1007/s11071-016-2742-0.
- Karaoğlu E., Merdan H., 2012. Gecikmeli Av-Avcı Modelinin Hopf Çatallanma Analizi, Birinci Ulusal Karmaşık Dinamik Sistemler ve Uygulamaları Çalıştayı, 12-13 Ekim, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Karaoğlu E., Merdan H., 2015. İki Gecikmeli Bir Av-Avcı Modelinin Kararlılık Analizi, 11-12 Haziran, 10. Ankara Matematik Günleri, ODTÜ, Ankara, Türkiye.
- Karaoğlu E., Merdan H., 2015. Hopf Bifurcations of a Ratio-Dependent Predator-Prey Model Involving Two Discrete Maturation Time Delays, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015), 26-28 August, Yuzuncu Yil University, Van, Turkey.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Merdan H. and Karaoglu E., 2012. Consequences of Allee Effects on Stability Analysis of the Population Model $x_{t+1} = \lambda x_t f(x_{t-3})$, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41(5), 751-765.
- Merdan H. and Karaoglu E., 2011. $x_{t+1} = \lambda x_t f(x_{t-3})$ Tipindeki Fark Denklemlerinde Allee Etkileri, 6. Ankara Matematik Günleri, Hacettepe Üniversitesi, Haziran, Ankara, Türkiye.
- Merdan H. and Karaoglu E., 2011. $x_{t+1} = \lambda x_t f(x_{t-3})$ Tipindeki Fark Denklemlerinde Allee Etkileri, Dinamik Sistemler Calistayi, TUBITAK-TUSSIDE, Ekim, Gebze, Türkiye.