TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CANTOR MİNİMAL SİSTEMLERİN TOPOLOJİK TAM GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Anıl ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ

AĞUSTOS 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilim Dalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142111001 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Anıl ÖZDEMİR**'in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"CANTOR MİNİMAL SİSTEMLERİN TOPOLOJİK TAM GRUPLARI"** başlıklı tezi **11.08.2017** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Eş Danışman:	**Yrd. Doç. Dr. Mustafa Gökhan BENLİ** Orta Doğu Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Emrah KILIÇ (Başkan)** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Zülfükar SAYGI TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Doç. Dr. İbrahim ÜNAL Orta Doğu Teknik Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Anıl ÖZDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CANTOR MİNİMAL SİSTEMLERİN TOPOLOJİK TAM GRUPLARI

Anıl ÖZDEMİR

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ

Tarih: AĞUSTOS 2017

Bu tezde Cantor Kümesi'nin minimal homeomorfizmalarının topolojik tam grubunun yapısı incelenmiştir. Bu grupların incelenmesi yakın zamanlarda başlamış olup, Gruplar Teorisi'ndeki önemi; sonsuz, sonlu üretilen, basit ve uyumlu grupların ilk örneklerinin bu sınıftan oluşturulması ile artmıştır. Bu grupların Dinamik Sistemler ile olan bağlantısı, Gruplar Teorisi ile Dinamik Sistemler Teorisi arasında köprü görevi görmektedir. Bu çalışmada bu bağlantı incelenip, topolojik tam grupların izomorfik olması ile iki dinamik sistemin eşlenik olması arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Ayrıca topolojik tam grubunun cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cantor uzayı, Topolojik tam grup, Basit grup, Uyumlu grup.

ABSTRACT

Master of Science

TOPOLOGICAL FULL GROUPS OF CANTOR MINIMAL SYSTEMS

Anıl ÖZDEMİR

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Çetin ÜRTİŞ

Date: AUGUST 2017

In this thesis, the structure of the topological full groups of minimal homeomorphisms of the Cantor space has been examined. Interest of these groups has recently increased, and the prominence in Group Theory has been enhanced by the construction of infinite, simple, finitely generated and amenable groups from this class. The connection of these groups with Dynamical Systems is a bridge between the Theory of Groups and the Theory of Dynamical Systems. In this study, this connection is examined and the relation between the isomorphism of topological full groups and the conjugation of two dynamic systems is revealed. Moreover, algebraic properties of the topological full group are also covered in detail.

Keywords: Cantor space, Topological full group, Simple group, Amenable group.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocalarım Yrd. Doç. Dr. Mustafa Gökhan BENLİ ve Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ'e, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca burs imkanı sağlayarak akademik hayatımın gelişmesine destek veren TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
C	Cantor kümesi (Cantor uzayı)
$2^{<\mathbb{N}}$	$\{0,1\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşan sonlu dizilerin ailesi
$2^{\mathbb{N}}$	$\{0,1\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşan sonsuz dizilerin ailesi
$2^{\mathbb{Z}}$	$\{0,1\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşan iki taraflı sonsuz dizilerin ailesi
A_s	A_s , $s \in 2^{<\mathbb{N}}$
0^i	(0...0) (i tane)
$s-0$	$s \in 2^{<\mathbb{N}}$ için, s nin sonuna 0 eklenmiş bir sonlu dizi
$s-1$	$s \in 2^{<\mathbb{N}}$ için, s nin sonuna 1 eklenmiş bir sonlu dizi
0^i10^j1	0...010...01 yani önce i tane 0, sonra 1, sonra da j tane 0, ardından tekrar 1
$d(A)$	A kümesinin çapı
$x\|_n$	$x \in 2^{\mathbb{N}}$ için, x in ilk n teriminden oluşan sonlu dizi
$x\|_{[-n,n]}$	$x \in 2^{\mathbb{Z}}$ için, x in $-n$. teriminden n. terimine kadarki parçası
$(A)^C$	A kümesinin tümleyeni

1. GİRİŞ

Bu tez, topolojik tam gruplar ve uyumlu gruplar hakkında yakın zamanda yapılmış bazı çalışmaların bir derlemesidir. Bu çalışma esnasında çok sayıda kitap, makale ve diğer akademik çalışmalardan destek alınmıştır.

Bilindiği üzere Cantor uzayı dikkat çekici topolojik yapısı sebebi ile birçok araştırmanın konusu olmuştur. Tezin ikinci bölümünde bu uzay tanımlanmış, bazı temel topolojik özelliklerine değinilmiştir. Ayrıca Cantor uzayını topolojik olarak tasvir eden Brouwer Teoremi'nin detaylı bir ispatına yer verilmiştir. Temel topolojik kavramlar ve bazı temel teoremlerin ispatları için bakınız: [12] [J.R.Munkres, Topology].

Cantor uzayının homeomorfizmaları üstünde tanımlanan topolojik tam gruplar da en az Cantor uzayı kadar ilginç cebirsel nitelikler taşımaktadır. İlk olarak dinamik sistemlerle ilgili problemleri çözmek amacı ile tanımlanan bu gruplar, kısa sürede gruplar teorisi bakımından da ilgi uyandırmıştır. Tezin üçüncü bölümünde dinamik sistemler ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve Cantor uzayının bir homeomorfizmasına karşılık gelen tam gruplar tanımlanmıştır. Bu bağlamda önemli rol oynayan "minimallik" kavramına ayrıntılı olarak yer verilmiştir. Topolojik tam grupların incelenmesinde önemli yeri olan temel teknikler ve gözlemler de bu kısımda gösterilmiştir. Topolojik tam gruplar ile igili temel konular için bakınız: [17], [14], [1], [11], [9], [5].

Tezin dördüncü bölümünde tam grupların izomorfizma ilişkisi ile dinamik sistemlerin eşleniklik ilişkisi arasındaki bağlantıya yer verilmiş ve ilgili teorem detaylı bir ispatla sunulmuştur.

Tezin son kısmı da tam grupların cebirsel yapısı ile ilgilidir. İlk olarak basitlik kavramı ele alınmıştır. Gruplar teorisinde basit gruplar çok önem arz etmektedir. 1983 yılında sonlu basit grupların sınıflandırılması sonuçlandırılmış ve sonsuz basit gruplar için benzer sorular gündeme gelmiştir. Bu bölümde ilk olarak topolojik tam grupların sonsuz basit gruplar inşa etme konusunda önemli bir rol oynadığı gözlemlenmiştir.

Ayrıntılı olarak, minimal bir homeomorfizmanın topolojik tam grubunun komütatör alt grubunun basit olduğu ispatlanmıştır. Bu ispat ilk defa 2006 yılında Matui [14] tarafından yapılmıştır. Fakat tezde 2008 yılında Bezugly ve Medynets [1] tarafından farklı bir teknikle yapılan ispata yer verilmiştir.

İkinci olarak, topolojik tam grupların komütatör alt gruplarının hangi durumda sonlu üretilen olduğu sorusu ele alınmıştır. Minimal bir homeomorfizmanın topolojik tam grubunun komütatör alt grubunun sonlu üretilmesinin ancak ve ancak ilgili homeomorfizmanın bir miniml alt öteleme ile eşlenik olması durumunda olacağı detaylı bir şekilde ispatlanmıştır. Yine basitlik ispatında olduğu gibi, ilk defa Matui [14] tarafından yapılan ispata değil farklı bir teknikle Bezugly ve Medynets [1] tarafından yapılan ispata yer verilmiştir.

Netice olarak, minimal alt ötelemelere denk gelen topolojik tam grupların komütatör alt grupları sonsuz, sonlu üretilen, basit gruplara örnek teşkil etmektedir ki, bu tip grupların incelenmesi gruplar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Son olarak uyumlu gruplar kavramı ele alınmıştır. Uyumlu gruplar 1929 yılında J.V. Neumann [15] tarafından Banach-Tarski Paradoksu'nun incelenmesi ile ilgili olarak tanımlanmıştr. (Banach-Tarski Paradoksu ile ilgili daha detaylı bilgi için bakınız: [19]). Tanımlandığından bu yana geçen süre içerisinde, uyumlu grupların cebirsel olarak tasvir edilmesi Gruplar Teorisi'nin önemli soruları arasında yer almıştır. V. Neumann problemi olarak adlandırılan bu problem Gruplar Teorisi'nde birçok yöntemin geliştirilmesine önayak olmuştur. Henüz tam olarak çözülemeyen bu problem bağlamında uyumlu olan ve değişik özellikler barındıran grupların oluşturulması önem arz etmektedir. Tezin son kısmında da, topolojik tam gruplar kullanılarak oluşurulan sonsuz, sonlu üretilen, basit ve uyumlu gruplar üzerinde durulmuştur. Bu kısımda ilgili teoremler ifade edilmiş fakat ispatlarına yer verilmemiştir. Gruplar teorisi ve uyumlu gruplar ile ilgili temel tanım ve teoremler için bakınız: [10], [13], [3].

2. TEMEL TOPOLOJİK KAVRAMLAR

Bu bölümde ihtiyacımız olan temel topolojik tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Topolojik Uzay

Tanım 2.1.1 (Topolojik Uzay)**.** *X bir küme ve T, X in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. $\emptyset, X \in T$ ve T keyfi birleşim ile sonlu kesişim işlemleri altında kapalı ise, T ye X üzerinde bir* topoloji *denir ve T nin elemanları* açık küme *olarak adlandırılır. Açık kümelerin tümleyenine* kapalı küme*, (X,T) ikilisine ise* topolojik uzay *denir.*

Tanım 2.1.2. *X,Y topolojik uzaylar ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y den alınan her açık kümenin ters görüntüsü de açık küme ise, f dönüşümüne* sürekli fonksiyon *denir.*

Tanım 2.1.3 (Metrik Uzay)**.** *$d : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z \in X$ için*

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde metrik*, (X,d) ikilisine de* metrik uzayı *adı verilir.*

Tanım 2.1.4. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın* çapı *$d(A)$ ile gösterilir ve*

$$d(A) = sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.5. (X,d) *bir metrik uzay ve* (x_n), *X uzayında bir dizi olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ *varsa* (x_n) *dizisine X uzayında* yakınsak, *x e de dizinin* limiti *denir ve* $(x_n)\longrightarrow x$ *ile gösterilir.*

Lemma 2.1.1. X,Y *metrik uzaylar,* $f:X\longrightarrow Y$ *bir fonksiyon ve* $x\in X$ *olsun. x e yakınsak her* (x_n) *dizisi için;* f, *x noktasında süreklidir gerek ve yeter koşul* $f((x_n))$ *dizisi* $f(x)$ *e yakınsar.*

Tanım 2.1.6. (X,d) *bir metrik uzay,* $x\in X$ *ve* $r>0$ *bir reel sayı olsun.*

a) $D(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$ *kümesine x merkezli ve r yarıçaplı* açık yuvar,

b) $\overline{D}(x,r)=\{y\in X: d(x,y)\leqslant r\}$ *kümesine x merkezli ve r yarıçaplı* kapalı yuvar,

c) $D^{'}(x,r)=\{y\in X: 0<d(x,y)<r\}$ *kümesine x merkezli ve r yarıçaplı* delik yuvar *denir.*

Tanım 2.1.7. (X,d) *bir metrik uzay ve* $A\subseteq X$ *olsun. Her* $x\in A$ *için* $D(x,r)\subseteq A$ *olacak şekilde bir r pozitif reel sayısı varsa, A ya d metriğine göre* açık küme, *A nın tümleyenine ise* kapalı küme *denir. Eğer bir küme hem açık hem de kapalı ise bu kümeye de* kapaçık (clopen) küme *denir.*

Tanım 2.1.8 (Metriklenebilme)**.** (X,T) *topolojik uzayı verilmiş olsun. d metriğine göre açık kümelerin ailesi T olacak şekilde X üzerinde bir d metriği tanımlanabilirse* (X,T) *topolojik uzayına* metriklenebilir *denir.*

Tanım 2.1.9. *X bir topolojik uzay ve* $A\subseteq X$ *olsun. A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine, A kümesinin* içi *denir ve* A^0 *ile gösterilir. A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin kesişimine ise, A kümesinin* kapanışı *denir ve* $\overline{A}$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.10. *X bir topolojik uzay ve* $A\subseteq X$ *olsun. A nın kapanışı X uzayına eşit, yani* $\overline{A}=X$ *ise, A, X uzayında* yoğundur *denir.*

Tanım 2.1.11. *X topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun. X in bir alt kümeler ailesi ise T olsun.*

a) *Eğer T deki kümelerin birleşimi A kümesini içeriyorsa T ailesine A* nın bir örtüsü *denir.*

b) *T ailesi A alt kümesini örtüyor ve T ailesindeki her küme açık küme ise T ailesine A nın bir* açık örtüsü *denir.*

c) *T ailesi A kümesinin örtüsü olsun. $T^{'}$, A kümesini örtecek şekilde T nin bir alt ailesi ise $T^{'}$ ailesine T nin bir* alt örtüsü *denir.*

Tanım 2.1.12 (Kompakt Uzay)**.** *X bir metrik uzay olsun.*

i) *X uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.*

ii) *X uzayında aldığımız her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Yukarıdaki iki şart X uzayı için denktir ve bu şartları sağlayan X uzayına kompakt uzay *denir.*

Tanım 2.1.13. *(X,d) bir metrik uzay olsun. X teki her Cauchy dizisi X te yakınsak ise X e* tam metrik uzay *denir.*

Lemma 2.1.2. *(X,d) bir metrik uzay olsun. X kompakt bir uzay ise tam metrik uzaydır.*

Tanım 2.1.14. *X bir topolojik uzay olsun. Eğer $X = A \sqcup B$ boş olmayan ayrık açıkların birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa X e* bağlantılı olmayan (bağlantısız) uzay *denir. A ve B ye de X in* ayıranları *denir. Eğer X uzayının ayıranları yoksa X uzayına* bağlantılı uzay *denir.*

Tanım 2.1.15. *(X,T) bir topolojik uzay olsun. X üzerindeki $\sim$ bağıntısı şöyle tanımlansın: Eğer x ve y yi aynı anda içeren, X in bağlantılı bir alt kümesi bulunabiliyorsa $x \sim y$ diyelim.*

$\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıflarına da X in bileşenleri *denir.*

Tanım 2.1.16 (Tamamen Bağlantısız Uzay)**.** *(X,T) bir topolojik uzay olsun. X in bileşenleri X in tek-noktalı alt kümeleri ise X e* tamamen bağlantısız *denir.*

Tanım 2.1.17. (X,T) *bir metrik uzay,* $A \subset X$ *ve* $x \in X$ *olsun.* x *in her delik komşuluğu* $D^{'}(x,r)$ *için*

$$A \cap D^{'}(x,r) \neq \emptyset$$

oluyorsa, x *noktasına* A *kümesinin bir* yığılma noktası *denir.*

Tanım 2.1.18. *Eğer* A *kümesine ait bir* x *noktası bu kümenin yığılma noktası değilse,* x *noktasına* A *kümesinin bir* tekil (izole) noktası *denir.*

Tanım 2.1.19 (Mükemmel Küme)**.** *Hiç bir izole noktası olmayan kapalı kümeye* mükemmel küme *denir.*

Tanım 2.1.20 (Topolojik Homeomorfizma (Tasvir))**.** X,Y *topolojik uzaylar ve* $f : X \longrightarrow Y$ *sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer* f^{-1} *var ve sürekli ise,* f *ye* X *ten* Y *ye bir* topolojik homeomorfizma (tasvir) *denir. Bu durumda* X *ve* Y *ye de topolojik olarak* eşdeğerdirler (homeomorfiktirler) *denir.*

Lemma 2.1.3. X *kompakt bir uzay,* Y *ise metrik uzay olsun.* $f : X \longrightarrow Y$ *fonksiyonu birebir, örten ve sürekli ise homeomorfizmadır.*

2.2 Cantor Uzayı

Tanım 2.2.1 (Cantor Kümesi)**.** $\mathrm{C}^0 = [0,1]$ *olarak tanımlansın.* $[0,1]$ *kapalı aralığını 3 eşit parçaya ayırdıktan sonra ortadaki* $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ *açık aralığını atalım. Geriye kalan kümeye* C^1 *adını verelim.*

$\mathrm{C}^1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$ *kümesinin her iki aralığına da aynı işlemleri yapalım ve elde ettiğimiz yeni kümeye de* C^2 *diyelim.*

$\mathrm{C}^2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$ *kümesine de aynı işlemleri tekrarlarsak n. adımda,*

$\mathrm{C}^n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$ *kümesini elde ederiz.*

Bu işlemi sonsuza kadar devam ettirip, elde ettiğimiz bu kümelerin kesişimini alırsak bu kümeye Cantor kümesi *denir.*

$$\mathrm{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}^{\mathrm{i}}$$

Tanım 2.2.2 (Cantor Uzayı). *Topolojik tasvir olarak* C *kümesine denk olan topolojik uzaya* Cantor uzayı *denir.*

$C^0 = [0,1]$ kümesinin elemanları onluk tabanda $0,...$ diye yazılan gerçel sayılar kümesidir; hatta 1'i bile $0,9999...$ olarak yazabiliriz. Bu elemanları aynı mantıkla üçlük tabanda da yazabiliriz. Örneğin;

$$1 = 0,2222... = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}$$

olur.

Şimdi C^1 kümesinin elemanları, üçlük tabanda, $0,0...$ ya da $0,2...$ diye yazılan, yani virgülden sonraki ilk rakamı 1 olmayan gerçel sayılardır. $0,0...$ diye yazılanlar $\frac{1}{3}$'ten küçük eşit olanlar, $0,2...$ diye yazılanlar da $\frac{2}{3}$'ten büyük eşit olanlardır. C^2 kümesinin elemanları da, üçlük tabanda,

$$0,00...$$

$$0,02...$$

$$0,20...$$

$$0,22...$$

olarak yazılan gerçel sayılardır.

Bu şekilde C^n kümelerinin kesişimi alındığında, üçlük tabanda hiç 1 rakamı kullanılmadan, yani sadece 0 ve 2 rakamları kullanılarak yazılabilen gerçel sayılar bulunur. Örneğin $0,1$ sayısını da

$$0,1 = 0,02222...$$

diye yazarız.

Lemma 2.2.1. *Cantor kümesi; kompakt, metriklenebilir, tamamen bağlantısız ve mükemmel bir kümedir.*

Aşağıda bu özellikleri sağlayan boş olmayan uzayların topolojik tasvir olarak Cantor kümesi ile denk olduğunu ispatlayacağız. $\{0,1\}$ kümesinin elemanları kullanılarak elde edilen sonsuz dizilerin kümesini $2^{\mathbb{N}}$ ile, aynı kümenin elemanları kullanılarak elde edilen iki uçtan sonsuz dizilerin kümesini ise $2^{\mathbb{Z}}$ ile gösterelim. Bu kümeler de kompakt, metriklenebilir, tamamen bağlantısız ve mükemmel küme özelliklerini taşırlar. Üzerlerinde tanımlı olan metrikler ise sırasıyla $r = min\{n : x_n \neq y_n\}$ ve $u = u_1u_2...,\ \ v = v_1v_2... \in 2^{\mathbb{N}}$ için

$$d(u,v) = \frac{1}{2^r}$$

ve $r' = min\{|n| : u_n \neq v_n\}$ ve $u = ...u_{-2}u_{-1}u_0u_1u_2...,\ \ v = ...v_{-2}v_{-1}v_0v_1v_2... \in 2^{\mathbb{Z}}$ için

$$d'(u,v) = \frac{1}{2^{r'}}$$

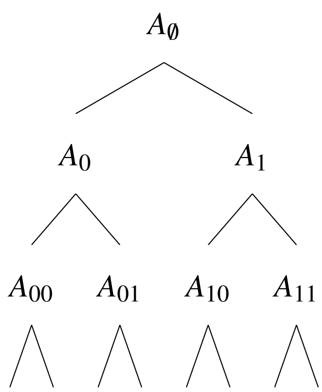
metrikleridir.

Tanım 2.2.3 (Cantor Şeması)**.** *Bir X kümesi ve onun alt kümelerinden oluşan $(A_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ ailesi verilsin.*

i) $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ *için,* $A_{s-0} \cap A_{s-1} = \emptyset$,

ii) $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ *ve* $i \in \{0,1\}$ *için,* $A_{s-i} \subseteq A_s$,

şartları sağlanıyorsa, $(A_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ *ailesine* Cantor Şeması *denir.*



(2.1)

Teorem 2.2.1 ([12] (7.4 Theorem) Brouwer)**.** *Herhangi boş olmayan, kompakt, metriklenebilir, tamamen bağlantısız ve mükemmel bir uzay topolojik tasvir olarak* $2^{\mathbb{N}}$ *ye denktir.*

İspat. Bu özellikleri sağlayan uzaya X ve metriğine de d diyelim. X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir Cantor Şeması oluşturalım;

i) $A_{\emptyset} = X$,

ii) A_s : Boş olmayan kapaçık küme,

iii) $A_s = A_{s-0} \sqcup A_{s-1}$,

iv) $x \in 2^{\mathbb{N}}$ için, $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_{x|n}) = 0$.

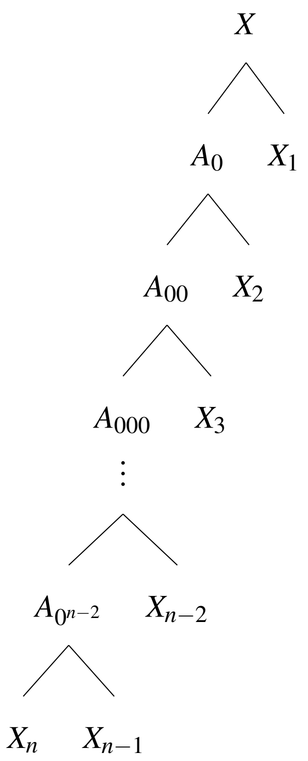
X kompakt ve tamamen bağlantısız olduğundan, sonlu sayıda kapaçık kümelerin ayrık birleşimi şeklinde yazabiliriz:

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_n$$

öyle ki, $i \in \{1, 2, ...n\}$ için $d(X_i) < \frac{1}{2}$ sağlansın.

$$\begin{aligned}
&A_{\emptyset} = X \\
&A_{0^{i}-1} = X_{i+1}, && 0 \leq i < n-1 \\
&A_{0^{i}} = X_{i+1} \sqcup \ldots \sqcup X_n, && 0 \leq i < n-1 \\
&A_{0^{n-1}} = X_n, && i = n-1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.3)



Aynı şeyi bu sefer de $d(X_{ij}) < \frac{1}{3}$ olacak şekilde her X_i için yaparsak tümevarımla parçalanışı tamamlarız. Yani

$$
\begin{aligned}
&X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_n, && d(X_i) < \frac{1}{2} \\
&X_{i_1} = X_{i_1,1} \sqcup X_{i_1,2} \sqcup \ldots \sqcup X_{i_1,n_{X_{i_1}}}, && d(X_{i_1,i_2}) < \frac{1}{3} \\
&\vdots && \vdots \\
&X_{i_1,i_2,\ldots i_{n-1}} = X_{i_1,\ldots,i_{n-1},1} \sqcup X_{i_1,\ldots,i_{n-1},n_{X_{i_1,i_2,\ldots i_{n-1}}}}, && d(X_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n}) < \frac{1}{n+1} \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

olur. Burada kompaktlık bize sadece sonlu sayıda ayrık kümelerin birleşimleri şeklinde yazabilmemizi garanti eder fakat bu sonlu sayıların ne olduğunu bilemeyiz. Dolayısıyla her parçalanış için parçalanma adedi değişkenlik gösterebileceğinden,
$i_j \in \{1, 2, \ldots, n_{X_{i_{j-1}}}\}$ olacak şekilde tanımlanır. Örneğin, A_{00100} yı

$$
\begin{aligned}
&X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3, && n = 3 \\
&\vdots && \vdots \\
&X_3 = X_{3,1} \sqcup X_{3,2} && n_{X_3} = 2 \\
&X_{3,1} = X_{3,1,1} \sqcup X_{3,1,2} \sqcup X_{3,1,3} \sqcup X_{3,1,4} && n_{X_{3,1}} = 4 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

parçalanışında $A_{00100} = X_{3,1,3} \sqcup X_{3,1,4}$ şeklinde,

$$
\begin{aligned}
&X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup X_4, && n = 4 \\
&\vdots && \vdots \\
&X_3 = X_{3,1} \sqcup X_{3,2} \sqcup X_{3,3} && n_{X_3} = 3 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

parçalanışında $A_{00100} = X_{3,3}$ şeklinde,

$$\begin{aligned}
&X = X_1 \sqcup X_2, && n = 2 \\
&\vdots && \vdots \\
&X_2 = X_{2,1} \sqcup X_{2,2} \sqcup X_{2,3} && n_{X_2} = 3 \\
&\vdots && \vdots \\
&X_{2,2} = X_{2,2,1} \sqcup X_{2,2,2} \sqcup X_{2,2,3} && n_{X_{2,2}} = 3 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

parçalanışında ise $A_{00100} = X_{2,2,3}$ şeklinde yazarız. Parçalanış **2.5**'e göre $d(A_{00100}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, Parçalanış **2.6**'ya göre $d(A_{00100}) = \frac{1}{3}$ ve Parçalanış **2.7**'ye göre $d(A_{00100}) = \frac{1}{4}$ olmuş olur.

Şimdi ise, $x \in 2^{\mathbb{N}}$ için $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{x|n}$ şeklinde tanımlayıp A nın tek elemandan oluştuğunu göstereceğiz. Önce A nın en fazla 1 elemanı olabileceğini gösterelim. $a, b \in A$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $a, b \in A_{x|n}$ olur. (iv)'ü kullanarak $d(a,b) = 0$ deriz ve $a = b$ gerçeklenir. Şimdi de A nın boş olamayacağını gösterelim. Her bir $A_{x|n}$ den eleman alarak oluşturduğumuz bir diziye (a_n) diyelim. Bu dizinin (iv)'ten dolayı Cauchy dizisi olduğu açıktır. Lemma 2.1.2'den X in tam metrik uzay olduğunu biliyoruz. X uzayımız tam olduğu için (a_n) dizisi X te yakınsaktır. Yakınsadığı elemana a dersek, $A_{x|n}$ ler kapalı olduğundan A da kapalıdır ve $a \in A$ gerçeklenir.

Bunu yaptıktan sonra $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ fonksiyonunu $\{f(x)\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{x|n}$ olacak şekilde tanımlayalım.

f **birebirdir :** $x \neq y$ olacak şekilde $2^{\mathbb{N}}$ den iki eleman alalım. Genelliği bozmaksızın; $i \leqslant m$ için $x_i = y_i$ ve $x_{m+1} \neq y_{m+1}$ dersek;

$$x = x_1 x_2 \ldots x_m x_{m+1} \cdots$$

$$y = x_1 x_2 \ldots x_m y_{m+1} \cdots$$

şeklinde yazabiliriz. (ii)'yi kullanarak $A_{x|m+1} \bigcap A_{y|m+1} = \emptyset$ olduğunu söyleyebiliriz. $f(x) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{x|n} = A_1$ ve $f(y) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{y|n} = A_2$ olsun. A_1 ve A_2 nin birer eleman içerdiğini bildiğimizden, $f(x) \neq f(y)$ diyebiliriz. Dolayısıyla f birebirdir.

f **örtendir :** Keyfi $a \in X$ verilsin. $x = x_1x_2x_3... \in 2^{\mathbb{N}}$ yi şu şekilde tanımlayalım:

i) $x_1 = \begin{cases} 0, & a \in A_0 \\ 1, & a \in A_1 \end{cases}$

$a \in A_s$ ve $|s| = i$ ise;

ii) $x_{i+1} = \begin{cases} 0, & a \in A_{s-0} \\ 1, & a \in A_{s-1} \end{cases}$

Parçalanış **2.2**'yi göz önünde bulundurursak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \in A_{x|n}$ olur. f nin tanımından $f(x) = a$ gerçeklenir ve f örten olur.

f **süreklidir :** $2^{\mathbb{N}}$ den elemanları da bir dizi olan keyfi yakınsak $x^{(n)}$ dizisini alalım ve yakınsadığı elemana da x diyelim.

$$x^{(1)} = x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}...$$

$$x^{(2)} = x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}...$$

$$x = x_1x_2x_3...$$

Lemma 2.1.1'den $f(x^{(n)})$ nin $f(x)$ e yakınsadığını göstermemiz yeterli olacaktır.
$x^{(n)} \longrightarrow x$ olduğundan öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $m > N_1$ için, $x^{(m)}|m = x|m$ ise $f(x^{(m)}) \in A_{x|m}$ olur. $f(x) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{x|n}$ olduğundan öyle bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $m > N_2$ için, $A_{x|m} \subseteq D(f(x), r)$ gerçeklenir. $f(x)$ merkezli bir keyfi $D(f(x), r)$ açık yuvarı verildiğinde; $n = max\{N_1, N_2\}$ olarak seçilirse, $f(x^{(n)}) \in A_{x|n} \subseteq D(f(x), r)$ gerçeklenir. Böylece $f(x^{(n)})$, $f(x)$ e yakınsamış olur.

$2^{\mathbb{N}}$ kompakt, X metrik uzayı ve f; 1-1, örten ve sürekli olduğu için, Lemma 2.1.3'ten $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ bir homeomorfizmadır. $\square$

Dolayısıyla teoremin hipotezlerini sağlayan her X uzayının $2^{\mathbb{N}}$ ye topolojik tasvir olarak denk olduğunu gösterdik. Lemma 2.2.1'den Cantor kümesi C nin de bu hipotezleri sağladığını bildiğimiz için, bu şekildeki her X uzayının topolojik tasvir olarak C ye denk olduğunu göstermiş olduk.

Bundan sonra, C ile Cantor uzayını göstereceğiz ve duruma göre $2^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{Z}}$, $A^{\mathbb{N}}$, $A^{\mathbb{Z}}$ (A: Sonlu küme) modellerinden uygun olanını kullanacağız.

.

3. MİNİMAL HOMEOMORFİZMA VE TOPOLOJİK TAM GRUBU

Bu bölümde Cantor uzayının minimal homeomorfizmalarının topolojik tam grubunun yapısı incelenecektir.

3.1 Minimal Homeomorfizmalar

$Homeo(\mathrm{C})$ Cantor uzayından Cantor uzayına tanımlı homeomorfizmaların ailesi olsun. Bu aile bileşke işlemi altında bir grup oluşturur.

Tanım 3.1.1 (Orbit)**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ ve $x \in \mathrm{C}$ olsun. x in f ve f nin kuvvetleri altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye x in f altındaki* orbiti *denir ve*

$$Orb_f(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{..., f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), ...\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ olsun. f nin bütün orbitleri sonlu ise f ye* periyodik *denir. Eğer bütün orbitleri sonsuz ise* aperiyodik *denir. f nin bütün orbitleri n elemanlı ise de, f ye n*-periyotlu *denir ve her $x \in \mathrm{C}$ için $f^n(x) = x$ gerçeklenir.*

Tanım 3.1.3 (Geçişken)**.** *$f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$ bir homeomorfizma olsun. $\overline{Orb_f(x)} = \mathrm{C}$ olacak şekilde bir $x \in \mathrm{C}$ varsa f ye (topolojik olarak)* geçişken *denir.*

Tanım 3.1.4 (Minimal)**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ olsun. f nin her orbiti C uzayında yoğun ise, yani $\forall x \in \mathrm{C}$ için $\overline{Orb_f(x)} = \mathrm{C}$ ise f ye* minimal *denir.*

Teorem 3.1.1. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ ise aşağıdaki önermeler denktir:*

i) *f minimaldir.*

ii) *f nin her ileri orbiti C de yoğundur, yani $\forall x \in \mathrm{C}$ için $\overline{\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}} = \mathrm{C}$ sağlanır.*

iii) *$A \subseteq \mathrm{C}$ kapalı ve $f(A) = A$ ise $A = \emptyset$ veya $A = \mathrm{C}$ gerçeklenir.*

iv) *Herhangi boş olmayan kapaçık küme* $U \subseteq \mathrm{C}$ *için* $\mathrm{C} = \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U)$ *eşitliğini sağlayan bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır.*

İspat. $(i \Rightarrow iii)$: f minimal, $A \subseteq \mathrm{C}$ boş olmayan kapalı bir küme ve $f(A) = A$ olsun. $x \in A$ alalım. $f(A) = A$ olduğundan $Orb_f(x) \subseteq A$ olur. A kapalı olduğundan $\overline{Orb_f(x)} \subseteq A$ gerçeklenir. f nin minimalliğinden $\overline{Orb_f(x)} = \mathrm{C} \subseteq A$, dolayısıyla $\mathrm{C} = A$ olur.

$(iii \Rightarrow ii)$: $x \in \mathrm{C}$ alalım ve $B = \{\overline{f^{(n)}(x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. O halde $f(B) \subseteq B$ olur. Eğer $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{(n)}(B)$ ise $f(A) = \bigcap_{n\geq 1} f^{(n)}(B) = A$ olur. Böylece (iii)'ün hipotezinden $A = \mathrm{C}$, bu yüzden de $B = \mathrm{C}$ gerçeklenir.

$(ii \Rightarrow iv)$: U boş olmayan açık bir küme olsun. O halde $A = (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{(n)}(U))^C$ kapalı olur. $f(A) = f(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (f^{(n)}(U))^C) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f((f^{(n)}(U))^C) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (f^{(n+1)}(U))^C = A.$

[Burada önce (ii) hipotezinin (iii)'ü gerektirdiğini ispatlayacağız. $A \subseteq \mathrm{C}$ boş olmayan kapalı bir küme ve $f(A) = A$ olsun. $x \in A$ alalım. $f(A) = A$ olduğundan $Orb_f(x) \subseteq A$ dolayısıyla $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\} \subseteq A$. A kapalı olduğundan $\overline{\{f^n(x)\}}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gerçeklenir. (ii)'nin hipotezinden $\overline{\{f^n(x)\}}_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{C} \subseteq A$ dolayısıyla $\mathrm{C} = A$ olur.]

$A \cap U = \emptyset$ olduğundan $((ii) \Rightarrow (iii))$'ten $A = \emptyset$ olur. Yani $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{(n)}(U) = \mathrm{C}$ olur. C kompakt olduğundan $\exists M \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\bigcup_{|n|\leq M} f^{(n)}(U) = \mathrm{C}$ olsun. Buradan da

$$\mathrm{C} = f^{(M)}(\mathrm{C}) = \bigcup_{i=0}^{2M} f^i(U)$$

olur.

$(iv \Rightarrow i)$: Her $x \in \mathrm{C}$ için $U = (\overline{Orb_f(x)})^C$ kümesi açıktır. Kabul edelim ki $U \neq \emptyset$ olsun. O halde (iv)'ün hipotezinden $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\mathrm{C} = \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U)$ sağlanır. Fakat x, U nun içinde olmadığından $\mathrm{C} = \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U)$ nin içinde de olamaz durumu çıkar ki bu da bir çelişkidir. Yani $U = \emptyset$ ve $\overline{Orb_f(x)} = \mathrm{C}$ olur. □

Örnek 3.1.1. *(Sayaç Fonksiyonu)* $\mathbf{0} = 000...$, $\mathbf{1} = 111...$ *şeklinde gösterilsin. O halde* $\sigma : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ *yı şöyle tanımlayalım:*

$\sigma(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$, $x \in 2^{\mathbb{N}} - \{\mathbf{1}\}$ *için* x *in ilk terimi* n*. sırada ise*

$$\sigma(x)_i = \begin{cases} 0, & i < n \\ 1, & i = n \\ x_i, & i > n \end{cases}$$

olsun. Örneğin; $x = 1110x_5x_6...$ *ise* $\sigma(x) = 0001x_5x_6...$ *olur.*

Şimdi bu fonksiyonun bir homeomorfizma olduğunu gösterelim.

σ **süreklidir :** $min\{n : u_n \neq v_n\} = min\{n : \sigma(u)_n \neq \sigma(v)_n\}$ olduğu açıktır. O halde; verilen her $\varepsilon > 0$ için, $\delta = \varepsilon$ seçilirse; $\forall u, v \in 2^{\mathbb{N}}$ için, $d(u, v) < \delta$ ise $d(\sigma(u), \sigma(v)) < \varepsilon$ gerçeklenir.

σ **birebirdir :** $\sigma(u) = \sigma(v)$ olsun. O halde, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\sigma(u)_i = \sigma(v)_i$ olur. $\sigma(u)_n = \sigma(v)_n = 1$ eşitliğini sağlayan en küçük doğal sayıya n diyelim. σ nın tanımından $\sigma(u) = \sigma(v) = 0...01u_{n+1}u_{n+2}... = 0...01v_{n+1}v_{n+2}...$ ise $u = v = 1...10u_{n+1}u_{n+2}... = 1...10v_{n+1}v_{n+2}...$ gerçeklenir.

σ **örtendir :** Keyfi $v \in 2^{\mathbb{N}}$ alalım ve n, $v_n = 1$ eşitliğini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. $u = (1...10v_{n+1}v_{n+2}...) \in 2^{\mathbb{N}}$ ve $\sigma(u) = v$ olduğundan σ örtendir.

Dolayısıyla Lemma 2.1.3'ten σ bir homeomorfizmadır.

σ **minimaldir :** Keyfi $u \in 2^{\mathbb{N}}$ alalım. Amacımız $\overline{Orb_f(u)} = \mathrm{C}$ olduğunu göstermektir. Yine keyfi bir $v \in 2^{\mathbb{N}}$ alırsak; v nin baştan n uzunluğundaki sonlu α parçasını düşündüğümüzde, u nun sayaç fonksiyonu altında ileri ya da geri adımlarında öyle bir $\omega \in 2^{\mathbb{N}}$ vardır ki, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\sigma^k = \omega$ ve $\omega|_n = \alpha$ sağlansın. Dolayısıyla $v \in \overline{Orb_f(u)}$ olur.

Örnek 3.1.2. *(Öteleme Fonksiyonu)* $s : 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$, $s(x)_i = x_{i+1}$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu fonksiyonun sürekli, birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla yine Lemma 2.1.3'ten s de bir homeomorfizmadır.*

s **geçişkendir :** $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ şöyle tanımlansın:

i) $x_0 = 0$ olsun.

ii) Hem sağa, hem de sola doğru, birler basamağı solda olacak şekilde her seferinde

0'dan başlayarak artan doğal sayıların ikilik tabanda yazımları olan $(1),(00),(10),$ $(01),(11),(000),(100),$ $(010),(001)...$ yazılsın.

Yani $x = (...001-010-100-000-11-01-10-00-1-0-1-00-10-01-11-000-100-010-001...)$ olur. Keyfi bir $y \in 2^{\mathbb{Z}}$ alalım. y nin y_0 ortada olacak şekilde verilen her $2n+1$ uzunluğundaki sonlu α_n parçalarını düşünürsek; x in s altındaki yeteri kadar ötelemesi ile elde ettiğimiz $z \in Orb_s(x)$ için $z|_{[-n,n]} = \alpha_n$ sağlanır. Dolayısıyla $y \in \overline{Orb_s(x)}$ ve böylece $\overline{Orb_s(x)} = 2^{\mathbb{Z}}$ olur. Yani s geçişkendir.

Fakat $s(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ olduğundan s minimal değildir. Öteleme homeomorfizması minimal olmasa da birçok alt öteleme minimaldir.

Tanım 3.1.5 (Homojen)**.** *$x \in 2^{\mathbb{Z}}$ olsun. Eğer x in içinde geçen her sonlu dizi $\alpha \in 2^{<\mathbb{N}}$ için x in her $N(\alpha)$ uzunluğundaki parçasında α bulunacak şekilde bir $N(\alpha) \in \mathbb{N}$ varsa x e* homojen *denir.*

Teorem 3.1.2. *$x \in 2^{\mathbb{Z}}$ ve $Y = \overline{Orb_s(x)}$ olsun. $(Y, s|_Y)$ minimaldir gerek ve yeter koşul x homojendir.*

İspat. $(\Leftarrow)$: Kabul edelim ki, $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ homojen olsun ve $y \in Y = \overline{Orb_s(x)}$ alalım. Amacımız $(Y, s|_Y)$ nin minimal olduğunu, yani $Orb_s(y)$ nin Y de yoğun olduğunu göstermektir. Bunun için $x \in \overline{Orb_s(y)}$ olduğunu göstermemiz yeterli. x ten keyfi sonlu bir α parçası alalım. x homojen olduğundan öyle bir $N(\alpha)$ tam sayısı vardır ki, x in her $N(\alpha)$ lık parçasında α bulunur. Şimdi de y den $N(\alpha)$ uzunluğunda sonlu bir β parçası alalım. $y \in Y$ olduğundan β x te de bulunmak zorundadır. O halde; α da y nin içinde geçer bu da $x \in \overline{Orb_s(y)}$ demektir.

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki, x homojen olmasın. O halde, x in öyle bir α parçası vardır ki, sonsuz tane sonlu β_n parçaları uzunlukları büyütülse dahi α yı içeremez. β_n nin uzunluğunu $2n+1$ kabul edelim. $y^n|_{[-n,n]} = \beta_n$ ve α, y^n nin içinde bulunmayacak şekilde $y^n \in 2^{\mathbb{Z}}$ alalım. $2^{\mathbb{Z}}$ kompakt olduğundan, öyle bir $y \in 2^{\mathbb{Z}}$ ve $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vardır ki, $y^{n_k} \longrightarrow y$ olur. Bu durumda, $y \in \overline{Orb_s(x)}$ ve $x \notin \overline{Orb_s(y)}$ olur. Dolayısyla, $(Y, s|_Y)$ minimal değildir. □

Teorem 3.1.3. *Verilen her $f \in Homeo(\mathrm{C})$ için, öyle bir boş olmayan, kapalı $F_0 \subseteq \mathrm{C}$ vardır ki, $f(F_0) = F_0$ ve $(F_0, f|_{F_0})$ minimaldir.*

İspat. $\mathfrak{F} = \{F \subseteq \mathrm{C} | F$: kapalı, boş olmayan ve $f(F) = F\}$ iç içe alt kümelerin sıralı ailesi olsun. İç içe zincir oluşturan $F_i \in \mathfrak{F}$ lerin kesişimini alırsak, $\bigcap\limits_{i \in I} F_i = F \in \mathfrak{F}$ olur. Zorn Lemma'sı gereğince $\mathfrak{F}$ nin en küçük elemanı F_0 vardır ve Teorem 3.1.1'in (iii). maddesi gereğince $(F_0, f|_{F_0})$ minimaldir. □

3.2 Topolojik Tam Gruplar

Tanım 3.2.1 (Tam Grup)**.** $f \in Homeo(\mathrm{C})$ *olsun.*

$$[f] = \{g \in Homeo(\mathrm{C}) \mid \forall x \in \mathrm{C}, \exists n(x) \in \mathbb{Z} \quad g(x) = f^{n(x)}(x)\}$$

şeklinde tanımlanan küme bileşke işlemi ile birlikte gruptur ve bu gruba f nin tam grubu *denir.*

Her $g \in [f]$ için devir fonksiyonu $n = n_g : \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = f^{n(x)}(x)$ olacak şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2 (Topolojik Tam Grup)**.** *Tam grubun alt grubu olan, devir fonksiyonlarının sürekli olduğu*

$$[\![f]\!] = \{g \in [f] \mid n_g : \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{:sürekli}\}$$

grubuna f nin topolojik tam grubu *denir.*

Şimdi topolojik tam grubun grup olduğunu gösterelim:

i) Bileşke işleminin birleşmeli olduğu ve $id(x) \in [\![f]\!]$ olduğu açıktır.

ii) Keyfi $g, h \in [\![f]\!]$ alalım. O halde, sürekli n_g, n_h fonksiyonları $\forall x \in \mathrm{C}$ için

$g(x) = f^{n_g(x)}(x)$ ve $h(x) = f^{n_h(x)}(x)$ eşitliklerini sağlayacak şekilde mevcuttur.

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g(h(x)) = g(f^{n_h(x)}(x)) \\ &= f^{n_g(f^{n_h(x)}(x))}(f^{n_h(x)}(x)) \\ &= f^{n_g(f^{n_h(x)}(x)) + n_h(x)}(x)\end{aligned}$$

olur. n_g, n_h sürekli olduğundan $n_g(f^{n_h(x)}(x)) + n_h(x)$ de süreklidir dolayısıyla, $g \circ h \in [\![f]\!]$ gerçeklenir.

iii) Keyfi $g \in [\![f]\!]$ için, sürekli n_g fonksiyonu $\forall x \in \mathrm{C}$ için $g(x) = f^{n_g(x)}(x)$ eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. $g^{-1} \in Homeo(\mathrm{C})$ olduğunu biliyoruz. $n_{g^{-1}}(x) = -n_g(x)$ şeklinde tanımlanan $n_{g^{-1}}(x)$ fonksiyonu sürekli ve $g^{-1}(x) = f^{n_{g^{-1}}(x)}(x)$ sağlandığından dolayı $g^{-1} \in [\![f]\!]$ olur.

Teorem 3.2.1. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ olsun. $g \in Homeo(\mathrm{C})$, $[\![f]\!]$ nin içindedir gerek ve yeter koşul öyle $A_1,...,A_m$ kapaçık kümeleri ve $k_1,...,k_m \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır ki, $\mathrm{C} = A_1 \sqcup ... \sqcup A_m$ ve $g|_{A_i} = f^{k_i}|_{A_i}$ sağlanır.*

İspat. $(\Rightarrow): g \in [\![f]\!]$ ise devir fonksiyonu n_g sürekli ve C kompakt olduğundan $n_g(\mathrm{C}) = \{k_1,...,k_m\}$ sonlu olur. $A_i = n_g^{-1}(k_i)$ dersek $\mathrm{C} = A_1 \sqcup ... \sqcup A_m$ ve $g|_{A_i} = f^{k_i}|_{A_i}$ sağlanır.

$(\Leftarrow): \mathrm{C} = A_1 \sqcup ... \sqcup A_m$ olsun. $g|_{A_i} = f^{k_i}|_{A_i}$ ve $n_g|_{A_i} = k_i$ şeklinde oluşturulan g fonksiyonu, n_g sürekli olduğundan $[\![f]\!]$ nin içindedir. □

Tanım 3.2.3. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ için f nin* destek kümesi*, f altında sabit kalmayan $x \in \mathrm{C}$ lerin kapanışı olarak tanımlanmıştır:*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathrm{C} \mid f(x) \neq x\}}$$

Eğer f aperiyodikse $supp(f) = \mathrm{C}$ olduğu açıktır. Genel olarak bir homeomorfizmanın destek kümesi açık küme değildir. Aşağıdaki teorem minimal bir homeomorfizmanın topolojik tam grubunun ilginç bir özelliğini vurgulamaktadır.

Teorem 3.2.2. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. $g \in [\![f]\!]$ ise $supp(g)$ kapaçık kümedir.*

İspat. $g \in [\![f]\!]$ ise Teorem 3.2.1'den öyle $A_{k_1},...,A_{k_m}$ kapaçık kümeleri ve $k_1,...,k_m \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır ki, $\mathrm{C} = A_{k_1} \sqcup ... \sqcup A_{k_m}$ ve $g|_{A_i} = f^{k_i}|_{A_i}$ sağlanır.

İddia : $supp(g) = \bigcup_{k_i \in I \setminus \{0\}} A_{k_i}$

İddianın İspatı : $(\subseteq)$: $x \in supp(g)$ alalım. Kabul edelim ki, $x \notin \bigcup_{k_i \in I \setminus \{0\}} A_{k_i}$ olsun. O halde $x \in A_0$ ve $g(x) = f^0(x) = x$ olur. A_0 kapaçık bir küme olduğundan bu da bir çelişkidir.

$(\supseteq)$: $x \in \bigcup_{k_i \in I \setminus \{0\}} A_{k_i}$ alalım. O halde $k_i \in I \setminus \{0\}$ olacak şekilde, $x \in A_{k_i}$ ve $g(x) =$

$f^{k_i}(x)$ yazılabilir. f minimal olduğundan, $k_i \neq 0$ için $f^{k_i}(x) = x$ olamaz. Dolayısıyla $x \in supp(g)$ gerçeklenir.

Kapaçık kümelerin sonlu birleşimi de kapaçık olduğundan teoremin ispatı tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.2.3. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal ve $g \in [\![f]\!]$ olsun.*

$$Fix(g) = \{x \in \mathrm{C} \mid g(x) = x\}$$

şeklinde tanımlanan küme kapaçık bir kümedir.

İspat. $g \in [\![f]\!]$ olduğundan öyle $A_{k_1}, \dots, A_{k_m}$ kapaçık kümeleri ve $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır ki, $\mathrm{C} = A_{k_1} \sqcup \dots \sqcup A_{k_m}$ ve $g|_{A_i} = f^{k_i}|_{A_i}$ sağlanır. $x \in Fix(g)$ alalım. Bir tane $j \in \{1, \dots, m\}$ için $x \in A_j$ olduğundan $x = g(x) = f^{m_j}(x)$ gerçeklenir. f nin minimalliğinden $m_j = 0$ olur. Dolayısıyla her $x \in A_j$ için $g(x) = x$ olmak zorundadır. Herhangi bir $x \in Fix(g)$ için $x \in A_j \subseteq Fix(g)$ önermesini sağlayan açık bir A_j kümesi bulduğumuzdan $Fix(g)$ açık bir kümedir. Keyfi bir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in Fix(g)$ dizisi alalım ve $(x_k) \longrightarrow y$ olsun. g sürekli olduğundan $g(y) = y$, böylece de $y \in Fix(g)$ olur, yani $Fix(g)$ aynı zamanda kapalı bir kümedir. $\square$

Sonuç 3.2.1. Minimal bir $f \in Homeo(\mathrm{C})$ ve $g \in [\![f]\!]$ için, $\mathrm{C} = supp(g) \sqcup Fix(g)$ yazabilir ve $x \in supp(g) \Leftrightarrow g(x) \neq x$ denkliğine ulaşabiliriz.

Teorem 3.2.4. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Herhangi $g \in [\![f]\!]$ ve herhangi $n \in \mathbb{N}$ için,*

$$\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{C} \mid |Orb_g(x)| = n\}$$

kapaçık kümedir.

İspat. $g, g^2, \dots, g^n \in [\![f]\!]$ olduğundan

$$\mathrm{C}_n = (Fix(g))^C \cap (Fix(g^2))^C \cap \dots \cap (Fix(g^{n-1}))^C \cap Fix(g^n)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2.3'ten her $Fix(g^i)$ lerin kapaçık küme olduğu görülür. Kapaçık kümelerin tümleyenleri ve sonlu kesişimleri de kapaçık bir küme olduğundan C_n kapaçık bir kümedir. $\square$

Teorem 3.2.5. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$, n periyotlu bir homeomorfizma olsun. O halde $\mathrm{C} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} f^i(A)$ olacak şekilde $A \subseteq \mathrm{C}$ kapaçık kümesi vardır.*

İspat. Herhangi $x \in \mathrm{C}$ ve $1 \leqslant i < n$ için, $f^i(U_x) \cap U_x = \emptyset$ olacak şekilde x in kapaçık bir komşuluğu vardır. Ayrıca C kompakt olduğundan $\mathrm{C} = \bigcup_{j \leq N} U_{x_j}$ olacak şekilde sonlu sayıda $x_1, ..., x_N \in \mathrm{C}$ vardır. Şimdi de $A_1 = U_{x_1}$ olsun ve A_j leri de tümevarımsal olarak aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A_{j+1} = A_j \bigcup (U_{x_{j+1}} \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A_j))$$

A_N kapaçıktır ve $\mathrm{C} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} f^i(A_N)$ sağlanır. □

3.3 Kakutani-Rokhlin Parçalanışı

$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal ve $D \subseteq \mathrm{C}$ boş olmayan kapaçık bir küme olsun. $t_{D,f} = t_D : D \to \mathbb{N}$ *ilk geri dönüş* fonksiyonu

$$t_D(x) = \min\{n \geq 1 \mid f^n(x) \in D\}$$

şeklinde tanımlansın. f nin minimalliğinden, t_D iyi tanımlı ve süreklidir. Böylece $t_D|_{D_i} = k_i$ olacak şekilde N doğal sayısı, $k_1, ..., k_N$ pozitif tam sayıları ve $D = D_1 \sqcup ... \sqcup D_N$ parçalanışı bulabiliriz. Bu sayede

$$\mathrm{C} = D_1 \sqcup f(D_1) \sqcup ... \sqcup f^{k_1-1}(D_1) \sqcup D_2 \sqcup ... \sqcup f^{k_2-1}(D_2) \sqcup ... \sqcup D_N \sqcup ... \sqcup f^{k_N-1}(D_N)$$

yazılabilir ve bu parçalanışa *Kakutani-Rokhlin Parçalanışı* denir. $D_i, f(D_i), ..., f^{k_i-1}(D_i)$ ailelerine *kule* adı verilir. D_i ler kulelerin *temeli*, $f^{k_i-1}(D_i)$ ler ise kulelerin *tepesi* olur. Her bir kulenin *yüksekliği* ise k_i olmuş olur.

Örnek 3.3.1. *Örnek 3.1.1'deki sayaç fonksiyonunun silindirik küme $D = \{x \in 2^{\mathbb{N}} | x_i = 0,\ i \leq 2\}$ üzerindeki Kakutani-Rokhlin parçalanışını belirtelim.*

$D = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3 \sqcup D_4$ *ve* $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$ *olsun.*

$$D = \{00x_3x_4...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 3\}$$

$$D_1 = \{0000x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$D_2 = \{0001x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$D_3 = \{0010x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$D_4 = \{0011x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$\Rightarrow$

$$f(D_1) = \{1000x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$f^2(D_1) = \{0100x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$f^3(D_1) = \{1100x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

.

.

.

$$f(D_4) = \{1011x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$f^2(D_4) = \{0111x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$$f^3(D_4) = \{1111x_5x_6...|\ x_i \in \{0,1\},\ i \geq 5\}$$

$\Rightarrow \mathrm{C} = D_1 \sqcup f(D_1) \sqcup f^2(D_1) \sqcup f^3(D_1) \sqcup D_2 \sqcup f(D_2) \sqcup f^2(D_2) \sqcup f^3(D_2) \sqcup D_3 \sqcup f(D_3) \sqcup f^2(D_3) \sqcup f^3(D_3) \sqcup D_4 \sqcup f(D_4) \sqcup f^2(D_4) \sqcup f^3(D_4)$

.

4. TOPOLOJİK TAM GRUP VE TERS-EŞLENİKLİK İLİŞKİSİ

Bu bölümdeki amacımız aşağıdaki teoremi ispatlamaktır:

Teorem :[6](Corollary 4.4)] $f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. $[\![f_1]\!]$ ve $[\![f_2]\!]$ izomorfik gruplardır gerek ve yeter koşul f_1 ve f_2 ters-eşleniktir.

4.1 Ters-Eşleniklik

Tanım 4.1.1. *$f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ olsun.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathrm{C} \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathrm{C} \arrow[r, "f_2"] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\Phi \in Homeo(\mathrm{C})$ varsa f_1 ve f_2 eşleniktir *denir. Eğer $f_1 = \alpha f_2 \alpha^{-1}$ veya $f_1^{-1} = \alpha f_2 \alpha^{-1}$ eşitliklerinden birisi gerçekleniyorsa, yani f_1 ile f_2 eşlenik veya f_1^{-1} ile f_2 eşlenik ise f_1 ve f_2* ters-eşleniktir (flip conjugate) *denir.*

Kolayca görüleceği üzere ters-eşleniklik bir denklik bağıntısıdır.

Lemma 4.1.1. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Her boş olmayan, kapaçık $A \subseteq \mathrm{C}$ kümesi, her $x \in A$ ve her pozitif tam sayı n için, $supp(h) \subseteq A$, $x \in supp(h)$ ve $h|_{supp(h)}$ n-periyotlu olacak şekilde $h \in [\![f]\!]$ vardır.*

İspat. f nin minimalliğinden $f^{k_i} \in A$ olacak şekilde $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{n-1}$ tam sayılarını bulabiliriz. x in $i \neq j$ için $f^{k_i}(U) \cap f^{k_j}(U) = \emptyset$ koşulunu sağlayacak yeteri kadar küçük kapaçık komşuluğu U olsun.

$$0 \leq i \leq n-1 \;\text{ için }\; h|_{f^{k_i}(U)} = f^{k_{i+1}-k_i}|_{f^{k_i}(U)}$$

$$i = n \;\text{ için }\; h|_{f^{k_{i-1}}(U)} = f^{-(k_{i-1})}|_{f^{k_{i-1}}(U)}$$

şeklinde tanımlanan h homeomorfizması teoremin koşullarını sağlar. $\square$

Kapaçık A alt kümesi için

$$[\![f]\!]_A = \{g \in [\![f]\!] \mid supp(g) \subseteq A\}$$

şeklinde tanımlanan küme $[\![f]\!]$ nin bir alt grubudur.

Tanım 4.1.2. *A alt kümesi için*

$$C(A) = \{g \in [\![f]\!] \mid \forall h \in A,\ gh = hg\}$$

şeklinde tanımlanan alt gruba A nın merkezleyicisi *denir.*

$A \subseteq C(C(A)) = C^2(A)$ ve $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$ eşitlikleri açıktır.

Lemma 4.1.2. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal ve $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri* C *nin kapaçık alt kümeleri olsun.*

i) $[\![f]\!]_A = [\![f]\!]_B \Leftrightarrow A = B.$

ii) $C([\![f]\!]_{A_1} \cup \ldots \cup [\![f]\!]_{A_n}) = [\![f]\!]_{(\cup A_i)^C}$

iii) $[\![f]\!]_{A_1} \cap [\![f]\!]_{A_2} = [\![f]\!]_{A_1 \cap A_2}$

İspat. (i): Kabul edelim ki, $[\![f]\!]_A = [\![f]\!]_B$ ve $A \neq B$ olsun. Genelliği bozmadan $A \setminus B \neq \emptyset$ kabul edersek Lemma 4.1.1'den $\exists g \in [\![f]\!]$ öyle ki, $supp(g) \subseteq A \setminus B$ olur ve böylece $g \in [\![f]\!]_A \setminus [\![f]\!]_B$ olduğundan çelişki elde ederiz. Diğer yön açıktır.

(ii): $\subseteq$: Kabul edelim ki, $g \in C([\![f]\!]_{A_1} \cup \ldots \cup [\![f]\!]_{A_n})$ ve $g \notin [\![f]\!]_{(\cup A_i)^C}$ olsun. O halde $supp(g) \nsubseteq (\cup A_i)^C$ ve böylece en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için, $g(B) \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $B \subseteq A_i$ sağlanır. Yine Lemma 4.1.1'den $supp(h) \subseteq B$, $C \subseteq B$ ve $h(C) \cap C = \emptyset$ olacak şekilde $h \in [\![f]\!]_{A_i}$ bulabiliriz. Bu durumda $gh(C) \neq hg(C) = g(C)$ olur ki, $g \notin C([\![f]\!]_{A_i})$ çelişkisine ulaşırız.

$\supseteq$: $g \in [\![f]\!]_{(\cup A_i)^C} \ \Rightarrow\ \forall x \in \cup A_i,\ g(x) = x \ \Rightarrow\ g \in C([\![f]\!]_{A_1} \cup \ldots \cup [\![f]\!]_{A_n})$

(iii):

$$\begin{aligned} g \in [\![f]\!]_{A_1} \cap [\![f]\!]_{A_2} &\Leftrightarrow supp(g) \subseteq A_1 \text{ ve } supp(g) \subseteq A_2 \\ &\Leftrightarrow supp(g) \subseteq A_1 \cap A_2 \\ &\Leftrightarrow g \in [\![f]\!]_{A_1 \cap A_2}. \end{aligned}$$

□

Tanım 4.1.3. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal, $\pi \in [\![f]\!]$ bir involüsyon, yani $\pi^2 = 1$ olsun ve aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:*

$$\begin{aligned} C_\pi &= \{g \in [\![f]\!] \mid g\pi = \pi g\} \\ U_\pi &= \{g \in C_\pi \mid g^2 = 1 \textit{ ve } \forall h \in C_\pi \textit{ için, } g(hgh^{-1}) = (hgh^{-1})g\} \\ V_\pi &= \{g \in [\![f]\!] \mid gh = hg,\ \forall h \in U_\pi\} \\ S_\pi &= \{g^2 \mid g \in V_\pi\} \\ W_\pi &= \{g \in [\![f]\!] \mid gh = hg,\ \forall h \in S_\pi\} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.1 ([1] (Lemma 5.10))**.** *$W_\pi = [\![f]\!]_{supp(\pi)}$ dir.*

İspat. Bu teoremin ispatı aşağıdaki iddiaların ispatıyla tamamlanacaktır:

1) $g(supp(\pi)) = supp(\pi),\ \forall g \in C_\pi$ **:** $x \in supp(g\pi g^{-1}) \Leftrightarrow g\pi g^{-1}(x) \neq x$

$\Leftrightarrow \pi(g^{-1}(x)) \neq g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in supp(\pi) \Leftrightarrow x \in g(supp(\pi))$. Aynı zamanda $g \in C_\pi \Rightarrow g\pi g^{-1} = \pi$ olduğundan $g(supp(\pi)) = supp(g\pi g^{-1}) = supp(\pi)$ sağlanır.

2-i) $supp(g) \subseteq supp(\pi),\ \forall g \in U_\pi$ **:** Kabul edelim ki, g bu iddiayı sağlamasın ve $g(A) \cap A = \emptyset$ olacak şekilde kapaçık bir $A \subseteq (supp(\pi))^C$ kümesi alalım. Lemma 4.1.1'den $supp(h) \subseteq A$, $V \subseteq A$ ve $i = 1,2$ için, $h^i(V) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $h \in [\![f]\!]$ bulabiliriz. $[supp(h) \subseteq A \subseteq (supp(\pi))^C,\ \pi h = h\pi] \Rightarrow h \in C_\pi$ fakat $[g(hgh^{-1})(V) = g^2h^{-1}(V) = h^{-1}(V),\ (hgh^{-1})g(V) = hg^2(V) = h(V),\ h^{-1}(V) \neq h(V)] \Rightarrow g \notin U_\pi$ olur ve ispat tamamlanır.

2-ii) Kapaçık A kümesi $\pi-$invariyant ise $\pi_A \in U_\pi dir$ **:** π_A nın tanımı gereği $\pi_A^2 = 1$

ve $\pi_A \in C_\pi$ olduğu açıktır.

$$\pi_A(h\pi_A h^{-1})(x) = (h\pi_A h^{-1})\pi_A(x) = \begin{cases} x, & x \in [A^C \cap h(A^C)] \cup [A \cap h(A)] \\ \pi(x), & x \in [A^C \cap h(A)] \cup [A \cap h(A^C)] \end{cases}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

3-i) $V_\pi \subseteq C_\pi$ **:** $[\forall h \in C_\pi$ için, $\pi \in C_\pi,\ \pi^2 = 1,\ \pi(h\pi h^{-1}) = 1 = (h\pi h^{-1})\pi] \Rightarrow \pi \in U_\pi$ oluğundan V_π nin tanımından ispat biter.

3-ii) Her kapaçık $B \subseteq supp(\pi)$ kümesi için, $g \in V_\pi$ ise $g(B) \subseteq B \cup \pi(B)$ dir **:** Kabul edelim ki, önerme koşullarını sağlayan g ve B kümesi için $g(B) \nsubseteq B \cup \pi(B)$ olsun. $B_0 = B \cup \pi(B)$ ve $C = g(B_0) \setminus B_0$ diyelim. $\pi(B_0) = B_0$ ve $C \neq \emptyset$ olduğu açıktır. (3-i)'den $\pi g(B_0) = g\pi(B_0) = g(B_0)$ olduğunu biliyoruz böylece $\pi(C) = \pi(g(B_0) \setminus B_0) = \pi g(B_0) \setminus \pi(B_0) = g(B_0) \setminus B_0 = C$ olur. Yine (3-i)'den $g \in C_\pi$ ve (1)'den $g(supp(\pi)) = supp(\pi)$ olduğunu biliyoruz. $B \subseteq supp(\pi) \Rightarrow B_0 \subseteq supp(\pi)$. Bu yüzden $\pi(C_1) = C_2$ olacak şekilde $C = C_1 \sqcup C_2$ yazabiliriz. Yine g nin özelliklerinden $g(C) \cap C = \emptyset$ olur. (2-ii)'den $\pi_C \in U_\pi$ fakat $\pi_C g(C_1) = g(C_1) \neq g(C_2) = g\pi_C(C_1)$ olduğundan $g \notin V_\pi$ olur.

3-iii) Her kapaçık $B \subseteq supp(\pi)$ kümesi için, $g \in V_\pi$ ise $g^2(B) = B$ dir **:** Kabul edelim ki, önerme koşullarını sağlayan g ve B kümesi için $g^2(B) \neq B$ olsun. B yi yeteri kadar kaydırarak $g(B) \cap B = \emptyset = g^2(B) \cap B$ olduğunu kabul edebiliriz. (3-ii)'den $g(B) \subseteq B \cup \pi(B)$ ve (3-i)'den $g^2(B) \subseteq g(B) \cup g\pi(B) = g(B) \cup \pi g(B)$ olur. $g(B) \cap B = \emptyset$ olduğundan $g(B) \subseteq \pi(B)$ ve $g^2(B) \subseteq \pi g(B) \subseteq \pi^2(B) = B$ olur. Bu yüzden her $\mu \in \mathrm{M}(f)$ için $\mu(B \setminus g^2(B)) = 0$ olur. f minimal olduğundan Lemma 5.1.1'den $B \setminus g^2(B) = \emptyset$ olur ve ispat tamamlanır.

4-i) $g \in S_\pi \Rightarrow supp(g) \subseteq (supp(\pi))^C$ **:** $g \in S_\pi$ ise (3-iii)'ten her kapaçık $B \subseteq supp(\pi)$ kümesi için $g(B) = B$ olduğu açıktır.

4-ii) Her kapaçık $B \subseteq (supp(\pi))^C$ kümesi için, $supp(h) \in B$ ve $h \in S_\pi$ olacak şekilde bir involüsyon vardır **:** Lemma 4.1.1'den $supp(g) \subseteq B$ olacak şekilde 4-periyotlu bir $g \in Homeo(\mathrm{C})$ vardır. (2-i)'den $g \in V_\pi$ ve böylece $g^2 (= h) \in S_\pi$ olur.

5) $W_\pi = [\![f]\!]_{supp(\pi)}$ **:** (4-i)'den $[\![f]\!]_{supp(\pi)} \subseteq W_\pi$ olduğu açıktır. $W_\pi \subseteq [\![f]\!]_{supp(\pi)}$ olduğunu göstermek için $g \in W_\pi \setminus [\![f]\!]_{supp(\pi)}$ ve $g(B) \cap B = \emptyset$ olacak şekilde kapaçık $B \subseteq (supp(\pi))^C$ kümesini alalım. (4-ii)'den $supp(h) \in B$ ve $h \in S_\pi$ olacak şekilde bir involüsyon vardır. Yine $h(C) \cap C = \emptyset$ olacak şekilde bir kapaçık C kümesi bulabiliriz. $hg(C) = g(C) \neq gh(C)$ olduğundan $g \in W_\pi$ olamaz ve çelişki elde ederiz.

□

Lemma 4.1.3. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal ve $\pi_1, ..., \pi_n \in [\![f]\!]$ ve $\rho_1, ..., \rho_m \in [\![f]\!]$ involüsyonlar olsun.*

$$\bigcup_i supp(\pi_i) = \bigcup_j supp(\rho_j) \Leftrightarrow C(W_{\pi_1} \cup ... \cup W_{\pi_n}) = C(W_{\rho_1} \cup ... \cup W_{\rho_m}).$$

İspat. Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3'ten,

$$\bigcup_i supp(\pi_i) = \bigcup_j supp(\rho_j) \Leftrightarrow$$
$$[\![f]\!]_{(\bigcup_i supp(\pi_i))^C} = [\![f]\!]_{(\bigcup_j supp(\rho_i))^C} \Leftrightarrow$$
$$C([\![f]\!]_{supp(\pi_1)} \cup ... \cup [\![f]\!]_{supp(\pi_n)}) = C([\![f]\!]_{supp(\rho_1)} \cup ... \cup [\![f]\!]_{supp(\rho_m)}) \Leftrightarrow$$
$$C(W_{\pi_1} \cup ... \cup W_{\pi_n}) = C(W_{\rho_1} \cup ... \cup W_{\rho_m}).$$

□

Tanım 4.1.4. *E bir küme ve $\mathscr{B}$, $P(E)$ nin alt kümesi olan bir kümeler ailesi olsun. $\mathscr{B}$, $(\cup, \cap, {}^C)$ işlemleri altında kapalı ve $\emptyset, E \in \mathscr{B}$ ise $(\mathscr{B}, \cup, \cap, {}^C)$ dörtlüsüne* Boole cebiri *denir.*

Tanım 4.1.5. *$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ Boole cebiri olsun. $\Lambda : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ fonksiyonu her $A, B \subseteq \mathscr{B}_1$ için*

i) $\Lambda(\emptyset_{\mathscr{B}_1}) = \emptyset_{\mathscr{B}_2}$ *ve* $\Lambda(E_{\mathscr{B}_1}) = E_{\mathscr{B}_2}$,

ii) $\Lambda(A \cap B) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$,

iii) $\Lambda((A)^C) = (\Lambda(A))^C$,

şartlarını sağlıyorsa Λ ya Boole homomorfizması *denir. Λ aynı zamanda birebir ve örten ise de* Boole izomorfizması *adını alır.*

C nin tüm kapaçık kümelerini içeren küme bir Boole cebiridir. Bu kümenin otomorfizmalarını da $CO(\mathrm{C})$ ile göstereceğiz.

Lemma 4.1.4 ([18] (Theorem 4))**.** *Cantor uzayı homeomorfizmaları $Homeo(\mathrm{C})$ ile C nin kapaçık kümelerinin Boolean cebir otomorfizmaları $CO(\mathrm{C})$ arasında birebir ve örten bir ilişki vardır.*

Lemma 4.1.5. *$f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal, $\alpha : [\![f_1]\!] \to [\![f_2]\!]$ bir grup izomorfizması ve $\pi_1, \pi_2 \in [\![f_1]\!]$ involüsyonlar olsun.*

$$supp(\pi_1) = supp(\pi_2) \Leftrightarrow supp(\alpha(\pi_1)) = supp(\alpha(\pi_2))$$

gerçeklenir.

İspat. Basit cebirsel işlemlerle $\alpha(W_\pi) = W_{\alpha(\pi)}$ olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} supp(\pi_1) = supp(\pi_2) &\Leftrightarrow \pi_1 \in W_{\pi_2} \text{ ve } \pi_2 \in W_{\pi_1} \\ &\Leftrightarrow \alpha(\pi_1) \in W_{\alpha(\pi_2)} \text{ ve } \alpha(\pi_2) \in W_{\alpha(\pi_1)} \\ &\Leftrightarrow supp(\alpha(\pi_1)) = supp(\alpha(\pi_2)). \end{aligned}$$

olur ve ispat biter. □

Teorem 4.1.2 ([6] (Theorem 4.2))**.** *$f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Eğer $\alpha : [\![f_1]\!] \to [\![f_2]\!]$ bir grup izomorfizmasıysa $\forall g \in [\![f_1]\!]$ için $\alpha(g) = \Lambda g \Lambda^{-1}$ olacak şekilde bir homeomorfizma $\Lambda : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ vardır, yani $[\![f_1]\!]$ ve $[\![f_2]\!]$ eşleniktir.*

İspat. Lemma 4.1.4 sayesinde $\forall g \in [\![f_1]\!]$ için $\alpha(g) = \Lambda g \Lambda^{-1}$ olacak şekilde bir $\Lambda : CO(\mathrm{C}) \to CO(\mathrm{C})$ Boole izomorfizması tanımlayabilirsek ispat bitecektir. Keyfi kapaçık $A \subseteq \mathrm{C}$ kümesi alalım. Lemma 4.1.3'ten $\bigcup_i supp(\pi_i) = A^C$ olacak şekilde sonlu sayıda $\pi_1, ..., \pi_n \in [\![f_1]\!]$ involüsyonlarını bulabiliriz. f_1 minimal olduğundan $supp(\pi_i)$ lerin kapaçık olduğunu biliyoruz. Teorem 4.1.1'den

$$C(W_{\alpha(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\pi_n)}) = C([\![f_2]\!]_{supp(\alpha(\pi_1))} \cup ... \cup [\![f_2]\!]_{supp(\alpha(\pi_n))})$$

ve Lemma 4.1.2 (ii)'den

$$C([\![f_2]\!]_{supp(\alpha(\pi_1))} \cup ... \cup [\![f_2]\!]_{supp(\alpha(\pi_n))}) = [\![f_2]\!]_{(\bigcup_i supp(\alpha(\pi_i)))^C}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

İddia : $A = (\bigcup_i supp(\pi_i))^C$ için $\Lambda : CO(\mathrm{C}) \to CO(\mathrm{C})$ ve $\Lambda(A) = (\bigcup_i supp(\alpha(\pi_i)))^C$ olacak şekilde tanımlanan Λ bir Boole izomorfizmasıdır ve $\forall g \in [\![f_1]\!]$ için $\alpha(g) = \Lambda g \Lambda^{-1}$ şartını sağlar.

İddianın ispatı : α dan dolayı Λ nın anlamlı olduğu açıktır.

Λ iyi tanımlıdır : Lemma 4.1.5'dan $A_1 = A_2 \Rightarrow \Lambda(A_1) = \Lambda(A_2)$ sağlanır.

Λ bir Boole homomorfizmasıdır :

i) $\emptyset = supp(id)$ olduğundan $\Lambda(\emptyset) = \emptyset$ ve $\Lambda(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$ olur.

ii) Keyfi kapaçık $A_1, A_2 \in \mathrm{C}$ için, sonlu sayıda involüsyonlar $\pi_1, ..., \pi_n \in [\![f_1]\!]$ ve $\rho_1, ..., \rho_m \in [\![f_1]\!]$ olacak şekilde $(\bigcup_i supp(\pi_i))^C = A_1$ ve $(\bigcup_j supp(\rho_j))^C = A_2$ eşitliklerini yazabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
[\![f_2]\!]_{\Lambda(A_1 \cap A_2)} &= C(W_{\alpha(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\pi_n)} \cup W_{\alpha(\rho_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\rho_m)}) \\
&= C(W_{\alpha(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\pi_n)}) \cap C(W_{\alpha(\rho_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\rho_m)}) \\
&= [\![f_2]\!]_{\Lambda(A_1)} \cap [\![f_2]\!]_{\Lambda(A_2)} \\
&= [\![f_2]\!]_{\Lambda(A_1) \cap \Lambda(A_2)}
\end{aligned}$$

olduğundan $\Lambda(A_1 \cap A_2) = \Lambda(A_1) \cap \Lambda(A_2)$ eşitliği elde edilir.

iii) Keyfi kapaçık $A \in \mathrm{C}$, sonlu sayıda involüsyonlar $\pi_1, ..., \pi_n \in [\![f_1]\!]$ ve $\rho_1, ..., \rho_m \in [\![f_1]\!]$ için, $(\bigcup_i supp(\pi_i))^C = A$ ve $(\bigcup_j supp(\rho_j)) = A$ eşitliklerini yazabiliriz. $C([\![f_1]\!]_A) = [\![f_1]\!]_{A^C}$ bildiğimizden,

$$\begin{aligned}
&C^2(W_{\pi_1} \cup ... \cup W_{\pi_n}) = C(W_{\rho_1} \cup ... \cup W_{\rho_m}) \Rightarrow \\
&C^2(W_{\alpha(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\pi_n)}) = C(W_{\alpha(\rho_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\rho_m)}) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![f_2]\!]_{\Lambda(A^C)} &= C(W_{\alpha(\rho_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\rho_m)}) \\
&= C^2(W_{\alpha(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha(\pi_n)}) \\
&= C([\![f_2]\!]_{\Lambda(A)}) = [\![f_2]\!]_{(\Lambda(A))^C}
\end{aligned}$$

önermelerini yazar ve $\Lambda((A)^C) = (\Lambda(A))^C$ eşitliğini elde ederiz.

Λ **birebir ve örtendir :** Keyfi kapaçık $B \in \mathrm{C}$ ve sonlu sayıda involüsyonlar $\pi_1, ..., \pi_n \in [\![f_2]\!]$ için $B = (\bigcup\limits_i supp(\pi_i))^C$ yazabiliriz. α nın birebir ve örten olduğunu bildiğimizden, $\Lambda^{-1}(B)$ yi

$$[\![f_1]\!]_{\Lambda^{-1}(B)} = C(W_{\alpha^{-1}(\pi_1)} \cup ... \cup W_{\alpha^{-1}(\pi_n)})$$

olacak şekilde tanımlayabiliriz. Dolayısıyla Λ nın birebir ve örten olduğu açıktır.

$\forall g \in [\![f_1]\!]$ **için** $\alpha(g) = \Lambda g \Lambda^{-1}$ **:**

$\pi \in [\![f_1]\!]$ involüsyon olduğundan

$$(\Lambda(supp(\pi)))^C = \Lambda((supp(\pi))^C) = (supp(\alpha(\pi)))^C$$

olur ve $\Lambda(supp(\pi)) = supp(\alpha(\pi))$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi kabul edelim ki, $\alpha(g)(B) = \Lambda g \Lambda^{-1}(B)$ eşitliğinin sağlanmadığı bir kapaçık $B \in \mathrm{C}$ ve $g \in [\![f_1]\!]$ var olsun. O halde en az bir tane boştan farklı kapaçık $V \in \mathrm{C}$ vardır ki,

$$V \cap \alpha(g^{-1}) \Lambda g \Lambda^{-1}(V) = \emptyset$$

sağlanır. $supp(\pi) \in V$ olacak şekilde bir $\pi \in [\![f_2]\!]$ alalım. $\Lambda(supp(\pi)) = supp(\alpha(\pi))$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&supp(\alpha^{-1}(\pi)) \subseteq \Lambda^{-1}(V) \Rightarrow \\
&supp(g\alpha^{-1}(\pi)g^{-1}) \subseteq g\Lambda^{-1}(V) \Rightarrow \\
&supp(\alpha(g\alpha^{-1}(\pi)g^{-1})) = supp(\alpha(g)\pi\alpha(g^{-1})) \subseteq \Lambda g \Lambda^{-1}(V)
\end{aligned}$$

olur. Fakat aynı zamanda $supp(\alpha(g)\pi\alpha(g^{-1})) \subseteq \alpha(g)(V)$ olduğundan $\alpha(g)(V) \cap \Lambda g \Lambda^{-1}(V) \neq \emptyset$ olmuş olur ve başlangıçtaki V nin seçimiyle çelişkiye düşmüş oluruz ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.3 ([2] (Lemma 2.6)). *$f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Eğer $[\![f_1]\!]$ ve $[\![f_2]\!]$ eşlenik gruplar ise, f_1 ve f_2 ters-eşleniktir.*

İspat. Hipotezimizden $[\![f_1]\!] \ni g \longmapsto \alpha g \alpha^{-1} \in [\![f_2]\!]$ olacak şekilde bir grup izomorfizması olduğunu biliyoruz. $\alpha^{-1}[\![f_1]\!]\alpha = [\![\alpha^{-1} f_1 \alpha]\!]$ olduğundan genelliği bozmaksızın $[\![f_1]\!]$ yerine $\alpha f_1 \alpha^{-1}$ yazarsak, $\alpha = id$ ve $[\![f_1]\!] = [\![f_2]\!]$ kabul edebiliriz. Şimdi de $n : C \to \mathbb{Z}$ ve $f_2(x) = f_1^{n(x)}(x)$ olan devir fonksiyonuna bağlı aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f(k,x) = \begin{cases} -(n(f_2^{-1}(x)) + ... + n(f_2^{k}(x)), & k < 0 \\ 0, & k = 0 \\ n(x) + ... + n(f_2^{k-1}(x)), & k > 0 \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ için $f_2^k(x) = f_1^{f(k,x)}(x)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır ve

$$f(l+k,x) = f(l, f_2^l(x)) + f(k,x) \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. $n(x)$ in sürekliliğinden $\forall x \in C$ için $|n(x)| \leq N$ koşulunu sağlayan sabit bir N sayısı seçebiliriz. O halde **4.1** eşitliğinde $l = 1$ alınırsa

$$|f(k \pm 1, x) - f(k,x)| \leq N \tag{4.2}$$

ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(k, f_2(x)) - f(k,x)| \leq |f(k+1,x) - f(k,x)| + |f(-1, f_2(x))| \leq 2N \tag{4.3}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$f_2^k(x) = f_1^{f(k,x)}(x)$ eşitliği ve f_2 nin minimalliğinden sabit bir $x_0 \in C$ ve tam sayı k lar için $k \longmapsto f(k,x_0)$ fonksiyonunun birebir olduğu açıktır. Benzer şekilde $f_2 \in [\![f_1]\!]$ olduğundan örten olduğu da görülebilir. Bu yüzden $\forall x_0 \in C$ için $\exists N'$ öyle ki,

$$([-N,N] \cap \mathbb{Z}) \subseteq \{f(k,x_0) \mid k \in ([-N',N'] \cap \mathbb{Z})\}$$

sağlanır. $n(x)$ in sürekliliğinden f fonksiyonu da sürekli ve yerel olarak sabittir. Bu yüzden her x_0 için öyle bir U_{x_0} komşuluğu vardır ki, her $y \in U_{x_0}$ için

$$([-N,N] \cap \mathbb{Z}) \subseteq \{f(k,y) \mid k \in ([-N',N'] \cap \mathbb{Z})\}$$

sağlanır. $\forall x \in \mathrm{C}$ için çalışmak amacıyla, C nin kompaktlığından sonlu sayıda U_{x_i} leri seçip bu eşitliği sağlayan N' lerin en büyüğüne $\overline{N}$ diyelim.

$\forall x \in \mathrm{C}$ için $f(\overline{N},x) \neq 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $k \longmapsto f(k,x_0)$ fonksiyonunun birebir ve örtenliğinden $\forall k \geq \overline{N}$ ve $\forall y \in \mathrm{C}$ için $|f(k,y)| > N$ olduğu görülür. Hem bunu hem de **4.2** eşitsizliğini göz önünde bulundurduğumuzda $\forall k \geq \overline{N}$ ve $\forall y \in \mathrm{C}$ için $f(k+1,y)$ ve $f(k,y)$ nin aynı işaretli olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{cases} f(\overline{N},x) > 0 \Leftrightarrow & \forall n \geq \overline{N} \text{ için } f(n,x) > 0 \text{ ve } f(-n,x) < 0 \\ f(\overline{N},x) < 0 \Leftrightarrow & \forall n \geq \overline{N} \text{ için } f(n,x) < 0 \text{ ve } f(-n,x) > 0 \end{cases}$$

olduğu görülebilir. Şimdi aşağıdaki iki kümeyi tanımlayalım:

$$A = \{x \in \mathrm{C} \mid f(\overline{N},x) > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathrm{C} \mid f(\overline{N},x) < 0\}$$

Bu kümeler f nin sürekliliğinden kapaçık ve $\mathrm{C} = A \sqcup B$ dir. Ayrıca **4.3** eşitsizliğinden A ve B, f_2-invariyanttır ve dolayısıyla f_2 nin minimalliğinden Teorem 3.1.1 gereği A ya da B boş küme olmak zorundadır. Eğer A boş küme ise f_2 yerine f_2^{-1} alıp genelliği bozmaksızın $A = \mathrm{C}$ kabul edebiliriz. Şimdi ise $c : \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} c(x) &= |\{[-N\overline{N},\infty) \cap \{f(i,x) \mid i \leq 0\}\}| \\ &= |\{[-N\overline{N},\infty) \cap \{f(i-1,f_2(x)) + n(x) \mid i \leq 0\}\}| \\ &= |\{[-N\overline{N},\infty) \cap \{f(i,f_2(x)) + n(x) \mid i \leq 0\}\}| - 1 \\ &= |\{[-N\overline{N} - n(x),\infty) \cap \{f(i,f_2(x)) \mid i \leq 0\}\}| - 1 \\ &= |\{[-N\overline{N},\infty) \cap \{f(i,f_2(x)) \mid i \leq 0\}\}| + n(x) - 1 \\ &= c(f_2(x)) + n(x) - 1 \end{aligned}$$

Böylece $1 + c(x) = c(f_2(x)) + n(x)$ eşitliğini elde ederiz. f ve n sürekli olduğundan c

de süreklidir. Artık g yi, $g(x) = f_1^{c(x)}(x)$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. Bu tanımdan

$$f_1 g(x) = f_1^{1+c(x)}(x) = f_1^{c(f_2(x))+n(x)}(x) = f_1^{c(x)} f_2(x) = g f_2(x)$$

elde edilir ve f_1 sürekli olduğundan g de süreklidir.

g örtendir : Kompakt bir kümenin sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de kompakt ve dolayısıyla kapalıdır. f_1 minimal ve $f_1(g(\mathrm{C})) = g(f_2(\mathrm{C})) = g(\mathrm{C})$ olduğundan yine Teorem 3.1.1 gereği g örtendir.

g birebirdir : $f_1 g(x) = g f_2(x)$ eşitliğinden $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $(f_1)^k g = g(f_2)^k$ eşitliğini elde edebiliriz. Şimdi de $x, y \in Orb_{f_2}(x)$ için $x \neq y$ ve $g(x) = g(y) = g(f_2^k(x))$ olsun. Buradan da $g(x) = f_1^k(g(x))$ eşitliğini elde ederiz ki bu f_1 in minimalliğiyle çelişir. Dolayısıyla g, f_2 nin her orbitinde birebirdir. $[\![f_1]\!] = [\![f_2]\!]$ olduğundan f_1 ve f_2 aynı orbitlere sahiptir. g nin tanımından

$$g(Orb_{f_2}(x)) = g(Orb_{f_1}(x)) = Orb_{f_1}(g(x)) = Orb_{f_1}(x) = Orb_{f_2}(x)$$

olur dolayısıyla g bütün C uzayında birebirdir. □

Teorem 4.1.4 ([6](Corollary 4.4))**.** *$f_1, f_2 \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. $[\![f_1]\!]$ ve $[\![f_2]\!]$ izomorfik gruplardır gerek ve yeter koşul f_1 ve f_2 ters-eşleniktir.*

İspat. $(\Rightarrow)$: Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'ün sonucu olarak gelir.

$(\Leftarrow)$: Açıkça görüldüğü gibi $[\![f]\!] = [\![f^{-1}]\!]$ dir. Dolayısıyla genelliği bozmaksızın ters-eşlenik olsa da eşlenik gibi düşünebiliriz. $[\![f_1]\!] = [\![\alpha^{-1} f_2 \alpha]\!] = \alpha^{-1}[\![f_2]\!]\alpha = [\![f_2]\!]$ olur ve ispat biter. □

5. TOPOLOJİK TAM GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Bu kısımda topolojik tam gupların cebirsel yapısından bahsedeceğiz. İlk olarak basitlik kavramını ele alacağız.

5.1 Basit Gruplar

Tanım 5.1.1. *Kendisinden ve aşikar gruptan başka normal alt grubu olmayan gruplara* basit grup *denir.*

Tanım 5.1.2. *G bir grup olsun.* $g,h \in G$ *için tanımlanan* $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ *elemanına G nin* komütatörü *denir. G nin komütatörlerinin ürettiği*

$$G' = \langle [g,h] \mid g,h \in G \rangle$$

alt grubuna da G nin komütatör alt grubu *denir. Ayrıca* G' *ve komütatör alt grubunun komütatör alt grubu* G''*, G de normal bir alt gruptur.*

Bu bölümde minimal bir homeomorfizmanın topolojik tam grubunun komütatör alt grubunun basit bir grup olduğunu göstereceğiz.

Tanım 5.1.3. $f \in Homeo(\mathrm{C})$ *için,*

$$\mathrm{M}(f) = \{\mu \mid \mu : \mathrm{C} \text{ üzerinde tanımlanmış } f\text{-invariyant Borel olasılık ölçüsü}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye f-invariyant ölçüler kümesi *denir ve bu küme boş olmayan kompakt bir kümedir.*

Lemma 5.1.1. $f \in Homeo(\mathrm{C})$ *minimal olsun. Her boş olmayan, kapaçık* $A \subseteq \mathrm{C}$ *kümesi için* $inf\{\mu(A) \mid \mu \in \mathrm{M}(f)\} > 0$ *olur.*

İspat. $inf\{\mu(A) \mid \mu \in \mathrm{M}(f)\} = 0$ kabul edelim. O halde $\mu_n(A) \leq \frac{1}{n}$ olacak şekilde $(\mu_n) \in \mathrm{M}(f)$ dizisi bulabiliriz. $\mathrm{M}(f)$ kompakt olduğundan $\mu(A) = 0$ olacak şekilde bir

$\mu \in \mathrm{M}(f)$ vardır. f minimal olduğundan Teorem 3.1.1'den $\mu(\bigcup_{i=0}^{N} f^i(A)) = \mu(\mathrm{C}) = 0$ olur bu da bir çelişkidir. $\square$

Lemma 5.1.2 ([7] (Lemma 2.5))**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun ve kapaçık $A, B \subseteq \mathrm{C}$ alt kümeleri, $\forall \mu \in \mathrm{M}(f)$ için $\mu(B) < \mu(A)$ şartını sağlasın. O halde öyle bir $g \in [\![f]\!]$ vardır ki, $g(B) \subseteq A$, $g^2 = id$ ve $g|_{(B \cup g(B))^C} = id$ şartları sağlanır.*

Lemma 5.1.3 ([1] (Lemma 3.2))**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Her $g \in [\![f]\!]$ ve her $\delta > 0$ için öyle $g_1, ..., g_m \in [\![f]\!]$ fonksiyonları vardır ki, $g = g_1...g_m$ ve $\forall \mu \in \mathrm{M}(f)$, $\forall g_i$ için $\mu(supp(g_i)) < \delta$ şartları sağlanır.*

İspat. $g \in [\![f]\!]$ olsun.

1. Durum : Kabul edelim ki, g periyodik olsun. $g \in [\![f]\!]$ olduğundan dolayı Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 gereğince, öyle sonlu sayıda boştan farklı kapaçık $\{A_k\}_{k \in I}$ kümeleri bulabiliriz ki, her $x \in A_k$ için $g^k(x) = x$ olacak şekilde, C yi

$$\mathrm{C} = \bigsqcup_{k \in I} \bigsqcup_{i=0}^{k-1} g^i(A_k)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca her A_k kompakt olduğundan, her bir k ve her bir $1 \leq j \leq n_k$ için, $\forall \mu \in \mathrm{M}(f)$, $\mu(B_j^{(k)}) < \frac{\delta}{k}$ olacak şekilde A_k ları

$$A_k = \bigsqcup_{j=1}^{n_k} B_j^{(k)}$$

şeklinde parçalayabiliriz. Şimdi de $C_{k,j}$ leri

$$C_{k,j} = \bigsqcup_{i=0}^{k-1} g^i(B_j^{(k)})$$

şeklinde tanımlayalım. Dışarıda sabit gibi $C_{k,j}$ üzerinde g gibi tanımlanan $g_{k,j} = g|_{C_{k,j}}$ fonksiyonlarının $g_{k,j} \in [\![f]\!]$ olduğu ve $g = \prod_{k,j} g_{k,j}$ eşitliğini sağladığı açıktır.

2. Durum : Kabul edelim ki, g periyodik olmasın. $\dfrac{1}{k} < \delta$ olacak şekilde sabit bir $k \in \mathbb{N}$ alıp

$$\mathrm{C}_{\geq k} = \{x \in \mathrm{C} \mid |Orb_g(x)| \leq k\}$$

kümesini tanımlayalım. $g \in [\![f]\!]$ olduğundan dolayı Teorem 3.2.5 gereğince $C_{\geq k}$ kümesi de kapaçık bir kümedir.

Keyfi $x \in C_{\geq k}$ ve $1 \leqslant i < k$ için, $g^i(U_x) \cap U_x = \emptyset$ olacak şekilde x in kapaçık bir komşuluğunu bulabiliriz. Ayrıca $C_{\geq k}$ kompakt olduğundan $C = \bigcup_{j \leq n} U_{x_j}$ olacak şekilde sonlu sayıda $x_1, ..., x_n \in C_{\geq k}$ vardır. Şimdi de Teorem 3.2.5'in ispatındakine benzer şekilde $B_1 = U_{x_1}$ ve B_l leri de tümevarımsal olarak aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$B_{l+1} = B_l \bigsqcup (U_{x_{l+1}} \setminus \bigcup_{i=-k+1}^{k-1} g^i(B_l)).$$

$B = B_n$ dersek, B kapaçık kümesi g nin $C_{\geq k}$ üzerindeki her orbitinden elemanlar içerir ve her $1 \leqslant i < k$ için $g^i(B) \cap U_B = \emptyset$ şartını sağlar. Dolayısıyla $\forall \mu \in M(f)$ için $\mu(B) \leq \frac{1}{k} < \delta$ sonucuna ulaşırız. Şimdi

$$g_B(x) = \begin{cases} g^k(x), & x \in B \text{ ve } k = min\{l \geq 1 \mid g^l(x) \in B\} \\ x, & x \notin B \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g_B \in [\![f]\!]$, $\mu(supp(g_B)) < \delta$ ve $g_B^{-1} \circ g$ nin periyodik olduğu açıktır. Artık ispatın kalan kısmını 1. durumdaki gibi bitirebiliriz. □

Lemma 5.1.4. *H, G nin normal bir alt grubu olsun.* $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$ *ve her bir* i, j *için,* $[g_i, h_j] \in H$ *ise* $[g_1...g_n, h_1...h_m] \in H$ *olur ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$[g_1...g_n, h_1...h_m] = \prod_{p=n}^{1} \prod_{q=1}^{m} g_1...g_{p-1}h_1...h_{q-1}[g_p, h_q]h_{q-1}^{-1}...h_1^{-1}g_{p-1}^{-1}...g_1^{-1}.$$

İspat. İstenen eşitlik aşağıdaki açık olan eşitliklerden kolayca görülür:

$$[g_1g_2, h_i] = g_1[g_2, h_i]g_1^{-1}[g_1, h_i]$$

$$[g_j, h_1h_2] = [g_j, h_1]h_1[g_j, h_2]h_1^{-1}.$$

□

Lemma 5.1.5 ([1] (Lemma 3.2)). $f \in Homeo(C)$ *minimal olsun. Her* $t \in [\![f]\!]'$ *ve her* $\delta > 0$ *için öyle* $g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_m \in [\![f]\!]$ *fonksiyonları vardır ki,* $t = [g_1, h_1]...[g_m, h_m]$ *ve* $\forall \mu \in M(f)$, $\forall i$ *için* $\mu(supp([g_i, h_i])) < \delta$ *şartları sağlanır.*

İspat. $[\![f]\!]'$ komütatörlerin ürettiği bir grup olduğundan dolayı tek bir komütatör $[g,h]$ için ispatlamamız yeterlidir. Sabit bir $\delta > 0$ alalım. Lemma 5.1.3 sayesinde, öyle $g_1,...,g_m \in [\![f]\!]$ ve $h_1,...,h_m \in [\![f]\!]$ fonksiyonları bulabiliriz ki, $g = g_1...g_m$, $h = h_1...h_m$ ve $\forall\mu \in \mathrm{M}(f)$, $\forall i$ için $\mu(supp(g_i)) < \frac{\delta}{2}$, $\mu(supp(h_i)) < \frac{\delta}{2}$ şartları sağlanır. Lemma 5.1.4'ten

$$[g,h] = [g_1...g_n,h_1...h_m] = \prod_{p=n}^{1}\prod_{q=1}^{m} g_1...g_{p-1}h_1...h_{q-1}[g_p,h_q]h_{q-1}^{-1}...h_1^{-1}g_{p-1}^{-1}...g_1^{-1}$$

olduğunu biliyoruz. $supp([g_i,h_j]) \subseteq supp(g_i) \cup supp(h_j)$ olduğundan dolayı $\mu(supp([g_i,h_j])) < \delta$ olur. $\forall\mu \in \mathrm{M}(f)$ için, her $t \in [\![f]\!]$ μ-invariyant ve

$$supp(t\alpha t^{-1}) = t(supp(\alpha))$$

olduğundan

$$\mu(supp([g_i,h_j])) = \mu(supp(g_1...g_{p-1}h_1...h_{q-1}[g_p,h_q]h_{q-1}^{-1}...h_1^{-1}g_{p-1}^{-1}...g_1^{-1})) < \delta$$

olur ve $[\![f]\!]'$, $[\![f]\!]$'de normal olduğundan

$$g_1...g_{p-1}h_1...h_{q-1}[g_p,h_q]h_{q-1}^{-1}...h_1^{-1}g_{p-1}^{-1}...g_1^{-1} \in [\![f]\!]'$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lemma 5.1.6. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun ve kapaçık $A,B \subseteq \mathrm{C}$ alt kümeleri, $\forall\mu \in \mathrm{M}(f)$ için $2\mu(B) < \mu(A)$ şartını sağlasın. O halde öyle bir $g \in [\![f]\!]'$ vardır ki, $g(B) \subseteq A$ şartı sağlanır.*

İspat. g yi $A \cap B$ üzerinde sabit tutup $A \cap B = \emptyset$ kabul edebiliriz. Lemma 5.1.2 gereğince $g_1(B) \subseteq A$, $g_2(g_1(B)) \subseteq A \setminus g_1(B)$, $supp(g_1) = B \cup g_1(B)$ ve $supp(g_2) = g_1(B) \cup g_2(g_1(B))$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in [\![f]\!]$ involüsyonları bulabiliriz. $g = g_1g_2$ dersek $g(B) = g_1(B) \subseteq A$ olur. $g_2 = gg_1^{-1}g^{-1}$ olduğundan $g = g_1g_2 = [g_{,1},g] \in [\![f]\!]'$ olur. □

Teorem 5.1.1 ([1] (Theorem 3.4))**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal ve Γ, $[\![f]\!]$ veya $[\![f]\!]'$ olsun. Γ nın aşikar olmayan bir normal alt grubu H için $\Gamma' \subseteq H$ gerçeklenir.*

İspat. $g,h \in \Gamma$ için $[g,h] \in H$ olduğunu göstermemiz yeterli. Boş olmayan kapaçık bir

E kümesi için $f(E)\cap E=\emptyset$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $f\in H$ alalım. $\mathrm{M}(f)$ nin kompaktlığından $2\delta = inf\{\mu(E)\mid \mu\in \mathrm{M}(f)\}>0$ alabiliriz. Lemma 5.1.3 ve Lemma 5.1.5 yardımıyla her $\mu\in\mathrm{M}(f)$ için $g=g_1...g_m$, $h=h_1...h_m$ ve $\mu(supp(g_i))<\frac{\delta}{2}$, $\mu(supp(h_i))<\frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $g_i,h_j\in\Gamma$ elemanlarını bulabiliriz. Lemma 5.1.4 sayesinde $[g_i,h_j]\in H$ olduğunu göstermemiz yeterli. Kolaylık olsun diye i,j indislerini kaldırıp g,h ile devam edeceğiz. $F=supp(g)\cup supp(h)$ diyelim. Lemma 5.1.6'ten $\alpha(F)\subseteq E$ olacak şekilde $\alpha\in[\![f]\!]'$ vardır. H, Γ nın normal bir alt grubu olduğundan $q=\alpha^{-1}f\alpha\in H$, $\widehat{h}=[h,q]=hqh^{-1}q^{-1}\in H$ ve dolayısıyla $[g,\widehat{h}]\in H$ olur. $q(F)\cap F=\emptyset$ olduğundan g^{-1} ve $qh^{-1}q^{-1}$ elemanları değişmelidir.

$$[g,h]=ghg^{-1}qh^{-1}q^{-1}qhq^{-1}h^{-1}=g(hqh^{-1}q^{-1})g^{-1}(qhq^{-1}h^{-1})=[g,\widehat{h}]\in H$$

dolayısıyla $\Gamma'\subseteq H$ dir. □

Sonuç 5.1.1 ([14] (Theorem 4.9))**.** *$f\in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. O halde $[\![f]\!]'$ basit bir gruptur.*

İspat. $[\![f]\!]''$, $[\![f]\!]$ nin normal bir alt grubu olduğundan, Teorem 5.1.1 gereğince $[\![f]\!]'\subseteq[\![f]\!]''$ olur ve $[\![f]\!]'=[\![f]\!]''$ eşitliğini elde ederiz. Eğer $H\lhd[\![f]\!]'$ ise yine (Teorem 5.1.1) gereğince $[\![f]\!]''\leqslant H$ olur dolayısıyla $[\![f]\!]'=[\![f]\!]''=H$ eşitliğini elde ederiz bu da $[\![f]\!]'$ nin basit bir grup olduğunu gösterir. □

5.2 Sonlu Üretilen Gruplar

Tanım 5.2.1. *G bir grup ve X sonlu bir küme olsun. Sonlu sayıda üreteçle üretilen $G=\langle X\rangle$ grubuna* sonlu üretilen grup *denir.*

$f\in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. $f^{-1}(U)$, U ve $f(U)$ ikişerli olarak ayrık olacak şekilde kapaçık bir $U\subseteq\mathrm{C}$ alalım. f ve U ya bağlı olarak aşağıdaki homeomorfizmayı tanımlayalım:

$$\beta_U(x)=\begin{cases} f(x), & x\in f^{-1}(U)\cup U\\ f^{-2}(x), & x\in f(U)\\ x, & (f^{-1}(U)\cup U\cup f(U))^C\end{cases}$$

Lemma 5.2.1. $\beta_U\in[\![f]\!]'$ *dir.*

İspat. $g \in [\![f]\!]$ involüsyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in f^{-1}(U) \\ f^{-1}(x), & x \in f(U) \\ x, & (f^{-1}(U) \cup U)^C \end{cases}$$

O halde $\beta_U = [g, \beta_U]$ eşitliğini elde ederiz ve ispat biter. Bu eşitlik simetrik gruplardaki aşağıdaki eşitliğe karşılık gelmektedir:

$$(01)(012)(01)(021) = (012).$$

□

$H = \{\beta_U \mid U :$ kapaçık küme ve $f^{-1}(U), U, f(U)$ kümeleri ikişerli ayrık$\}$ olsun. Şimdi H nin $[\![f]\!]'$ nin normal bir alt grubu olduğunu dolayısıyla da $H = [\![f]\!]'$ eşitliğini göstereceğiz.

Lemma 5.2.2. *$g \in [\![f]\!]$ elemanının mertebesi 3 ise, $g \in H$ dir.*

İspat. $g \in [\![f]\!]$ elemanının mertebesi 3 olsun. Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 gereğince $supp(g) = A \sqcup g(A) \sqcup g^2(A)$ olacak şekilde kapaçık bir $A \subseteq \mathrm{C}$ kümesi bulabiliriz. $g \in [\![f]\!]$ olduğundan $B_{k_1}, ..., B_{k_m}$ kapaçık kümeleri ve $I = \{k_1, ..., k_m\}$ tam sayıları vardır ki, $\mathrm{C} = B_{k_1} \sqcup ... \sqcup B_{k_m}$ ve $g|_{B_i} = f^{k_i}|_{B_i}$ sağlanır. Şimdi de $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ parçalanışlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mathrm{P}_0 = \{B_{k_i} \cap A\}_{k_i \in I}$$
$$\mathrm{P}_1 = \{g^{-1}(B_{k_i} \cap g(A))\}_{k_i \in I}$$
$$\mathrm{P}_2 = \{g^{-2}(B_{k_i} \cap g^2(A))\}_{k_i \in I}$$

Bu parçalanışların inceltilmiş parçalanışındaki kümelere $A_1, A_2, ...A_n$ diyelim öyle ki, $g|_{A_i} = f^{l_i}|_{A_i}$, $g|_{g(A_i)} = f^{t_i}|_{g(A_i)}$ ve $g|_{g^2(A_i)} = f^{-l_i - t_i}|_{g^2(A_i)}$ eşitliklerini sağlayan l_i ve t_i tam sayıları vardır. Şimdi de, $A_i \sqcup g(A_i) \sqcup g^2(A_i)$ üzerinde g gibi, tümleyeninde ise sabit fonksiyon gibi davranan g_i homeomorfizmalarını tanımlayalım. g_i lerin değişmeli olduğu ve $g = g_1 ... g_n$ olduğu açıktır.

Artık mertebesi 3 olan her $g \in [\![f]\!]$ için, $supp(g) = A \sqcup g(A) \sqcup g^2(A)$ ve $g|_A = f^l|_A$, $g|_{g(A)} = f^t|_{g(A)}$ olacak şekilde kapaçık bir A kümesi ve l,t tam sayıları olduğunu biliyoruz. Şimdi böyle bir g alalım. Her $x \in A$ için kapaçık bir $x \in U \subseteq A$ komşuluğu vardır öyle ki, her $0 \leq i, j \leq l+t$, $i \neq j$, için $f^i(U) \cap f^j(U) = \emptyset$ sağlanır. A nın kompaktlığından U_j lerin içinden sonlu sayıda seçip bunlar tarafından üretilen parçalanışı $U_1, \ldots, U_p$ ile gösterelim. Şimdi de, $U_i \sqcup g(U_i) \sqcup g^2(U_i)$ üzerinde g gibi, tümleyeninde ise sabit fonksiyon gibi davranan g_j homeomorfizmalarını tanımlayalım. g_j lerin değişmeli olduğu ve $g = g_1 \ldots g_p$ olduğu açıktır.

Bundan sonra mertebesi 3 olan her $g \in [\![f]\!]$ için, $supp(g) = A \sqcup g(A) \sqcup g^2(A)$ ve $g|_A = f^l|_A$, $g|_{g(A)} = f^t|_{g(A)}$ olacak şekilde kapaçık bir A kümesi ve l,t tam sayıları olduğunu ve her $0 \leq i, j \leq l+t$ ve $i \neq j$ için $f^i(A) \cap f^j(A) = \emptyset$ eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. Bu g elemanlarını S_{l+t+1} simetrik grubunda $(k \;\; l \;\; k+l)$ devirleri gibi düşünebilir her 3-devir $(i-1 \;\; i \;\; i+1)$ permütasyonunu da $\beta_{f^i(A)}$ ile gösterebiliriz. Ayrıca g, bütün 3-devir permütasyonlarını içeren alterne grup A_{l+t+1} in içindedir. Sonuç olarak g, H nin içindeki elemanların çarpımı olarak ifade edildiğinden $g \in H$ olur. □

Lemma 5.2.3. *$H \lhd [\![f]\!]'$ dolayısıyla $H = [\![f]\!]'$ gerçeklenir.*

İspat. Her $\beta_U \in H$ ve her $g \in [\![f]\!]$ için, $g\beta_U g^{-1}$ elemanının mertebesi 3'tür. Lemma 5.2.2 gereğince $g\beta_U g^{-1} \in H$ sağlanır. H, β_U lar tarafından üretildiğinden $H \lhd [\![f]\!]'$ olur.

$U \subseteq \mathrm{C}$ kapaçık bir küme ve $f^{-2}(U), f^{-1}(U), U, f(U), f^2(U)$ kümeleri ikişerli ayrık olsun. $\eta_U = \beta_{f^{-1}(U)}\beta_{f(U)}$ homeomorfizmasını tanımlayalım. Bu homeormorfizma da (01234) permütasyonuna karşılık gelir. □

Lemma 5.2.4. *$U, V \subseteq \mathrm{C}$ kapaçık alt kümeleri verilsin.*

i) $f^{-2}(V), f^{-1}(V), V, f(V), f^2(V)$ kümeleri ikişerli ayrık ve $U \subseteq V$ ise,

$$\eta_V \beta_U \eta_V^{-1} = \beta_{f(U)} \text{ ve } \eta_V^{-1} \beta_U \eta_V = \beta_{f^{-1}(U)}$$

olur.

ii) $f^{-1}(U), U, f(U), f^{-1}(V), V, f(V)$ kümeleri ikişerli ayrık ise,

$$[\beta_V, \beta_U^{-1}] = \beta_{f(U)\cap f^{-1}(V)}$$

olur.

İspat. (i): $\eta_V = \eta_U \eta_{V\setminus U}$ şeklinde yazabiliriz. $supp(\eta_{V\setminus U})$ diğer homeomorfizmaların destek kümleriyle ayrık olduğundan,

$$\eta_V \beta_U \eta_V^{-1} = \eta_U \beta_U \eta_U^{-1} = \beta_{f(U)}$$

sağlanır. Son eşitlik ise permütasyonlar olarak

$$(01234)(123)(04321) = (012)$$

eşitliğine karşılık gelir. $\eta_V^{-1}\beta_U\eta_V = \beta_{f^{-1}(U)}$ eşitliği de benzer şekilde kolayca görülür.

(ii): $A = f(U) \cap f^{-1}(V)$ diyelim. İlk ispattaki gibi

$$\beta_U = \beta_{f^{-1}(C)}\beta_{U\setminus f^{-1}(C)} \text{ ve } \beta_V = \beta_{f^{-1}(C)}\beta_{V\setminus f^{-1}(C)}$$

yazabiliriz. Yine ilk ispattaki gibi destek kümelerin ayrıklığından

$$[\beta_V, \beta_U^{-1}] = [\beta_{f(C)}, \beta_{f^{-1}(C)}^{-1}] = \beta_{f(C)}\beta_{f^{-1}(C)}^{-1}\beta_{f(C)}^{-1}\beta_{f^{-1}(C)} = \beta_C$$

elde edilir. Buradaki son eşitlik ise permütasyonlar olarak

$$(234)(021)(243)(012) = (123)$$

eşitliğine karşılık gelir. □

Teorem 5.2.1 ([14] (Theorem 5.4)). *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. Komütatör alt grup $[\![f]\!]'$ sonlu üretilen bir gruptur gerek ve yeter koşul (C, f) minimal bir alt öteleme ile eşleniktir.*

İspat. $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki, $[\![f]\!]'$ sonlu üretilen bir grup, $g_1, ..., g_n \in [\![f]\!]'$ elemanları sonlu üreteç kümesi, n_i ler $g_i(x) = f^{n_i(x)}(x)$ eşitliğini sağlayan sürekli fonksiyonlar ve

$\mathrm{P} = \{\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_\mathrm{n}\}$, $\{n_i^{-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ nin inceltilmiş parçalanışı olsun. P sonlu bir küme olduğundan $\mathrm{P}^{\mathbb{Z}}$ ve C homeomorfiktirler. $s : \mathrm{P}^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{P}^{\mathbb{Z}}$ öteleme fonksiyonunu düşünelim. $f^k(x) \in \mathrm{P}_\mathrm{s}$ olduğunda $\pi(x)_k = \mathrm{P}_\mathrm{s}$ olacak şekilde sürekli $\pi : \mathrm{C} \to \mathrm{P}^{\mathbb{Z}}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Her $x \in \mathrm{C}$ için $s^k\pi(x) = \pi f^k(x)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. $z_0 \subseteq n_i^{-1}(k)$ olduğunda $h_i(z) = s^k(z)$ olacak şekilde $h_i \in Homeo(\pi(\mathrm{C}))$ homeomorfizmalarını tanımlayalım. $h_i \in [\![s]\!]$ ve $\pi g_i = f_i\pi$ olduğu görülür. π nin birebir olduğunu gösterirsek ispat tamamlanacaktır.

π birebirdir : Kabul edelim ki, $x \neq y$ ve $\pi(x) = \pi(y)$ olsun. $g(x) \neq x$ ve $g(y) = y$ olacak şekilde keyfi bir $g \in [\![f]\!]'$ alıp sabitleyelim. $g = g_{i_1}^{r_i}...g_{i_t}^{r_t}$ olsun. $\pi g_i = f_i\pi$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\pi g(x) &= \pi g_{i_1}^{r_i}...g_{i_t}^{r_t}(x) \\ &= f_{i_1}^{r_i}...f_{i_t}^{r_t}\pi(x) \\ &= f_{i_1}^{r_i}...f_{i_t}^{r_t}\pi(y) \\ &= \pi g_{i_1}^{r_i}...g_{i_t}^{r_t}(y) \\ &= \pi g(y) = \pi(y) = \pi(x)\end{aligned}$$

olur ve böylece $s^k\pi(x) = \pi f^k(x) = \pi g(x) = \pi(x)$ olur ki, bu da s nin minimalliğiyle bir çelişki oluşturur.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki, (C, f), minimal bir alt öteleme ile eşlenik olsun. Genelliği bozmaksızın C nin, sonlu bir A kümesi için $A^{\mathbb{Z}}$ nin kapalı bir alt kümesi altında invariyant kaldığını kabul edebiliriz. Ayrıca, her $x \in \mathrm{C}$ ve $|i-j| \leq 4$ eşitliğini sağlayan $i, j \in \mathbb{Z}$ için $x_i \neq x_j$ kabul edebiliriz. Şimdi $m, n \in \mathbb{N}$ ve $a_1 \in A$ için

$$\ll a_{-m}...a_{-1}\underline{a_0}a_1...a_n \gg = \{x \in \mathrm{C} \mid x_i = a_i, \;\; -m \leq i \leq n\}$$

silindirik kümesini tanımlayalım. $|i-j| \leq 4$ için $x_i \neq x_j$ ve f minimal bir alt öteleme ile eşlenik olduğundan, her silindirik kümesi U için, $f^{-2}(U), f^{-1}(U), U, f(U), f^2(U)$ kümelerinin ayrık olduğunu biliyoruz. H kümesi,

$$\{\beta_U \mid U = \ll a\underline{b}c \gg, \; a, b, c \in A\}$$

sonlu elemanlarından üretilen $[\![f]\!]'$ nin bir alt grubu olsun.

İddia : $H = [\![f]\!]'$ dur.

İddianın İspatı : Her silindirik küme U için, $\beta_U \in H$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\beta_{f(\ll \underline{a} \gg)} = \prod_{b\in A} \beta_{\ll a\underline{b} \gg}, \ \ \beta_{f^{-1}(\ll \underline{a} \gg)} = \prod_{b\in A} \beta_{\ll \underline{b}a \gg}$$

olduğundan, $\beta_{f(\ll \underline{a} \gg)}, \beta_{f^{-1}(\ll \underline{a} \gg)} \in H$ ve böylece $\eta_{\ll \underline{a} \gg} \in H$ olur. Silindirik küme

$$U = \ll a_{-m} ... a_{-1} \underline{a_0} a_1 ... a_n \gg \subseteq \ll \underline{a_0} \gg = V$$

alınarak Lemma 5.2.4-i'den,

$$\eta_{\ll \underline{a_0} \gg} \beta_U \eta^{-1}_{\ll \underline{a_0} \gg} = \beta_{f(U)}, \ \ \eta^{-1}_{\ll \underline{a_0} \gg} \beta_U \eta_{\ll \underline{a_0} \gg} = \beta_{f^{-1}(U)}$$

eşitlikleri elde edilir. Son olarak da $m+n$ üzerine tümevarım yaparak ve

$U = \ll a_{-m} ... a_{-1} \underline{a_0} a_1 \gg$ ile $V = \ll a_1 \underline{a_2} \gg$ kümelerine Lemma 5.2.4-ii'yi uygulayarak ispatı bitiririz. □

5.3 Uyumlu Gruplar

Bu bölümde de uyumlu grupların üstünde duracağız.

Tanım 5.3.1 ([15])**.** *G bir grup olsun.*

i) $\mu(G) = 1$,

ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\forall A, B \subset G$, $A \cap B = \emptyset$,

iii) $\mu(gA) = \mu(A)$, $\forall A \subset G$, $g \in G$,

şartlarını sağlayan G nin kuvvet kümesinden tanımlı bir $\mu : P(G) \longrightarrow [0,1]$ *olasılık fonksiyonu varsa G ye* uyumlu grup (amenable group) *denir.*

Uyumlu gruplar sınıfını AG ile gösterelim.

Teorem 5.3.1 ([15])**.** AG *şu işlemler altında kapalıdır:*

i) *alt grup ($G \in \mathsf{AG}$ ve $H \leq G$ ise $H \in \mathsf{AG}$)*

ii) *bölüm grubu ($G \in \mathsf{AG}$ ve $N \trianglelefteq G$ ise $G/N \in \mathsf{AG}$)*

iii) *genişleme ($N, G/N \in \mathsf{AG}$ ise $G \in \mathsf{AG}$)*

iv) *yönlü birleşim (Her i için $H_i \subset H_{i+1}$ ve $H_i \in \mathsf{AG}$ ise $\bigcup H_i \in \mathsf{AG}$)*

Sonlu gruplar, değişmeli gruplar, çözülebilir (solvable) gruplar; uyumlu gruplara örneklerdir. Aşağıda sonlu grupların uyumlu grup olduğunu göstereceğiz.

Örnek 5.3.1. *G sonlu bir grup olsun. $\mu : P(G) \longrightarrow [0,1]$ olasılık fonksiyonunu her $A \in P(G)$ için*

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|G|}$$

şeklinde tanımlarsak üç koşulun da sağlandığını görebiliriz.

Teorem 5.3.2 ([15])**.** *Serbest grup F_2 uyumlu değildir.*

F_2 grubunu içermeyen gruplar sınıfını NF ile gösterelim. Bir önceki teoremlerden $\mathsf{AG} \subseteq \mathsf{NF}$ olduğu görülür.

Soru 5.1 (Neumann)**.** $\mathsf{AG} = \mathsf{NF}$ *eşitliği doğru mudur?*

Cevap: Hayır! 1980 yılında ilk defa Olshanskii [16] F_2 içermeyen ve uyumlu olmayan gruplara örnek sunmuştur.

Soru 5.2. *Sonsuz, sonlu üretilen, basit ve uyumlu grup var mıdır?*

Cevap: Evet! 2013 yılına kadar açık problem olan bu problemi, Juschenko ve Monod aşağıdaki teoremle çözmüşlerdir.

Teorem 5.3.3 ([11] (Theorem 4.9))**.** *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal olsun. $[\![f]\!]$ uyumlu bir gruptur.*

Sonuç 5.3.1. *$f \in Homeo(\mathrm{C})$ minimal bir alt öteleme ile eşlenik olsun. $[\![f]\!]'$ sonsuz, sonlu üretilen, basit ve uyumlu bir gruptur.*

İspat. Sonuç 5.1.1, Teorem 5.2.1, Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.3.3'ün sonucu olarak gelir. □

Tanım 5.3.2. *Sonlu ve değişmeli grupları içeren ve alt grup, bölüm grubu, genişleme ve yönlü birleşim altında kapalı olan en küçük gruplar sınıfına* yalın uyumlu gruplar *(elementary amenable groups) denir.*

Yalın uyumlu gruplar sınıfını EA ile gösterelim. Teorem 5.3.1'den $\mathsf{EA} \subseteq \mathsf{AG}$ olduğu görülür.

Soru 5.3 ([4])**.** $\mathsf{EA} = \mathsf{AG}$ *eşitliği doğru mudur?*

Cevap: Hayır! 1983 yılında ilk defa Grigorchuk [8] yalın uyumlu olmayan uyumlu gruplara örnek sunmuştur.

Aşağıdaki teorem belli koşullar altında topolojik tam grupların da bu tip örneklerden olduğunu gösterir.

Teorem 5.3.4 ([9] (Proposition 2.4))**.** $f \in Homeo(\mathrm{C})$ *minimal bir alt öteleme ile eşlenik olsun.* $[\![f]\!]'$ *yalın uyumlu olmayan, uyumlu bir gruptur.*

Bir homeomorfizma alt grubunun topolojik tam grubunun genel hali olarak aşağıdaki tanımı ele alabiliriz.

Tanım 5.3.3. $H \leq Homeo(\mathrm{C})$ *bir alt grup olsun.*

$$[\![H]\!] = \{g \in Homeo(\mathrm{C}) \mid \exists A_1,\ldots,A_m \text{ ve } \exists h_1,\ldots h_n \in H \text{ öyle ki } \mathrm{C} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_m \text{ ve } g|_{A_i} = h_i|_{A_i}\}$$

şeklinde tanımlanan alt gruba H nin topolojik tam grubu *denir.*

Not: $f \in Homeo(\mathrm{C}) \Rightarrow [\![f]\!] = [\![\langle f \rangle]\!]$

Doğal olarak, H nin uyumlu olduğu durumda $[\![H]\!]$ nin uyumlu olup olmadığını sorabiliriz. Aşağıdaki teorem bu soruya cevap olmaktadır.

Teorem 5.3.5 ([5] (Theorem 1))**.** C *üstünde minimal etki eden,* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *ile izomorfik olan ve topolojik tam grubu* F_2 *içeren,* $G \leq Homeo(\mathrm{C})$ *vardır. Dolayısıyla Teorem 5.3.2 gereği* $[\![G]\!]$ *uyumlu değildir.*

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde topolojik tam grupların birtakım özelliklerini inceledik. Bu grupların hem dinamik sistemler açısından hem de gruplar teorisi açısından ilgi çekici yanlarından bahsettik. Sonsuz basit gruplar ve uyumlu gruplar yönüyle bu grupların çok önem arz ettiğini gözlemledik. Dinamik sistemler ve gruplar teorisi tekniklerinin bir arada kullanıldığı birçok teorem ve lemmanın ispatını açıkladık. Bu süreçte minimallik kavramı büyük rol oynadı. Son yıllarda araştırmacıların bu tür gruplara olan ilgisinin sebebini anlatabilmiş olmayı umuyoruz.

İleriye dönük olarak tezin son kısmında da bahsedilen genel olarak bir homeomorfizmalar grubunun topolojik tam grubuyla ilişkisi ile ilgili araştırmalar yapılması, bu tezde bahsedilen sonuçların genelleştirilmesi, doğal sorular olarak ortaya çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Bezuglyi, S., and Medynets, K.** Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems. *Colloq. Math. 110*, 2 (2008), 409–429.

[2] **Boyle, M., and Tomiyama, J.** Bounded topological orbit equivalence and C^*-algebras. *J. Math. Soc. Japan 50*, 2 (1998), 317–329.

[3] **Ceccherini-Silberstein, T., and Coornaert, M.** *Cellular automata and groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[4] **Day, M. M.** Amenable semigroups. *Illinois J. Math. 1* (1957), 509–544.

[5] **Elek, G., and Monod, N.** On the topological full group of a minimal Cantor $\mathbf{Z}^2$-system. *Proc. Amer. Math. Soc. 141*, 10 (2013), 3549–3552.

[6] **Giordano, T., Putnam, I. F., and Skau, C. F.** Full groups of Cantor minimal systems. *Israel J. Math. 111* (1999), 285–320.

[7] **Glasner, E., and Weiss, B.** Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems. *Internat. J. Math. 6*, 4 (1995), 559–579.

[8] **Grigorchuk, R. I.** Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48*, 5 (1984), 939–985.

[9] **Grigorchuk, R. I., and Medinets, K. S.** On the algebraic properties of topological full groups. *Mat. Sb. 205*, 6 (2014), 87–108.

[10] **Hungerford, T. W.** *Algebra*, vol. 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. Reprint of the 1974 original.

[11] **Juschenko, K., and Monod, N.** Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Ann. of Math. (2) 178*, 2 (2013), 775–787.

[12] **Kechris, A. S.** *Classical descriptive set theory*, vol. 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[13] **Lang, S.** *Algebra*, third ed., vol. 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] **Matui, H.** Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems. *Internat. J. Math. 17*, 2 (2006), 231–251.

[15] **Neumann, J.** Zur allgemeinen theorie des masses. *Fundamenta Mathematicae 13*, 1 (1929), 73–116.

[16] **Olshanskii, A. J.** On the question of the existence of an invariant mean on a group. *Uspekhi Mat. Nauk 35*, 4(214) (1980), 199–200.

[17] **Slutsky, K.** Lecture notes on topological full groups of cantor minimal systems, 2015.

[18] **Stone, M. H.** Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc. 41*, 3 (1937), 375–481.

[19] **Wagon, S.** *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993. With a foreword by Jan Mycielski, Corrected reprint of the 1985 original.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Anıl Özdemir

Uyruğu : T.C

Doğum Tarihi ve Yeri :07.03.1990 İstanbul

E-posta : anilozdemir90@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, ODTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yüksek Lisans** : 2017, TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2014-2017	TOBB ETÜ Matematik Bölümü	Burslu Y.L Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- A. Ozdemir, Topological Full Groups of Cantor Minimal Systems, "3rd International Intuitonistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference - IFSCOM 2016", Mersin, Turkey, August 29-September 31, 2016.