TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL ESKİYEN SİSTEMLERİN YENİLEME POLİTİKASININ STOKASTİK SÜREÇLER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aynura POLADOVA

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN

ARALIK 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

………………………..
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

……………………….
Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU
Anabilim Dalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 141311013 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Aynura POLADOVA**' nın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"DOĞRUSAL ESKİYEN SİSTEMLERİN YENİLEME POLİTİKASININ STOKASTİK SÜREÇLER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ"** başlıklı tezi **7.12.2017** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç Dr. Salih TEKİN** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Eş Danışman : **Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Erdem ACAR (Başkan)** ………………….
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR ....
Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR ....
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Aynura POLADOVA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DOĞRUSAL ESKİYEN SİSTEMLERİN YENİLEME POLİTİKASININ

STOKASTİK SÜREÇLER YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Aynura POLADOVA

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniveritesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN

Tarih: Aralık 2017

Bu çalışmada doğrusal eskiyen ve mükemmel olmayan bakım politikası uygulanan bir sistem incelenmiştir. Başlangıç anında sistemin $z > 0$ kaynağa sahip olduğu, çalışır durumdayken bu kaynağın sürekli ve doğrusal biçimde rasgele miktarda $(c\xi_n)$ azaldığı ve ilk çevrimin sonunda sistemin kullanılabilir kaynağının $z - c\xi_0$ seviyesine ulaştığı varsayılmaktadır. Birinci çevrimin sonunda sisteme belli bir bakım politikası uygulanarak sistemin genel kaynağının rasgele bir miktar (ζ_1) arttığı varsayılmaktadır. Sistemin daha sonraki çevrimleri benzer şekilde devam edecek ve nihayetinde sistemin toplam kullanılabilir kaynağı sıfırın altına indiğinde veya bir önceki çevrimde sistem, kendine benzer yeni bir sistemle değiştirilecek ve sürecin işleyiş prensibi benzer şekilde devam edecektir. Çalışmada, kullanılabilir kaynağı yukarıdaki şekilde değişen bir sistemin herhangi bir t anındaki kaynak miktarı $X(t)$ stokastik süreci ile ifade edilmiştir. Ele alınan $X(t)$ süreci bağımlı bileşenli bir stokastik süreçtir. Çalışmanın amacı, $X(t)$ süreci ile ifade edilebilen bir sistemin ilk defa ne zaman kendine benzer yeni bir sistemle değiştirileceğini stokastik süreçler yöntemi ile belirlemektir. Bu amaçla, ilk olarak $X(t)$ süreci ve bu sürecin önemli sınır fonksiyonelleri olan $K_0(z)$, $N_0(z)$, $N(z)$, $S_{N_0(z)+1}$, $S_{N(z)+1}$, $X_{N_0(z)+1}$, $X_{N(z)+1}$, $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelleri matematiksel olarak inşa edilmiştir. Sürecin önemli sınır fonksiyoneli olan $N_0(z)$ sınır fonksiyonelini inceleyebilmek için $K_0(z)$ yardımcı sınır fonksiyoneli matematiksel olarak tanımlanmıştır. Yenileme kuramının yöntemleri kullanılarak $K_0(z)$'in beklenen değer ve varyansı için hem kesin, hem de asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra sürecin $N_0(z)$ ve $N(z)$ sınır fonksiyonellerinin beklenen değer ve varyansı için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca sistemin kullanılabilir kaynağının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde sisteme yapılacak bakım politikasını belirlemek için önem arz eden $X_{N_0(z)+1}$ ve $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonellerini incelemek amacıyla sürecin $S_{N_0(z)+1}$ ve $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelleri de matematiksel olarak tanımlanmış ve bu sınır fonksiyonellerin beklenen değeri, varyansı için iki terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan yararlanarak, $X_{N_0(z)+1}$ ve $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonellerinin beklenen değer ve varyansı için de asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara ilaveten, $X(t)$ sürecinin sıfırın altına inmeden bir önceki zamanı ifade eden $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin de beklenen değeri için hem kesin, hem de z'in büyük değerleri için yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen önemli sonuçlardan biri de yukarıda belittiğimiz şekilde davranan sistemlere, kaynaklarının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde yapılacak bakım politikasının önerilmesidir. Elde edilmiş asimptotik sonuçlar uygulama açısından kolaylık sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Mükemmel olmayan bakım, Doğrusal eskiyen sistemler, Yenileme politikası, Asimtotik yöntemler.

ABSTRACT

Master of Science

INVESTIGATING REPLACEMENT POLICY FOR SYSTEMS WITH LINEAR DEGRADATION USING STOCHASTIC PROCESSES

Aynura POLADOVA

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Industrial Engineering Science Programme

Supervisor: Asst. Prof. Salih TEKİN

Date: December 2017

In this study, a mechanical system with imperfect maintenance and gradual degradation is considered. It is assumed that at initial time the system has $z > 0$ available resource and when system is in operating time resource is decreasing consistently and gradually $(c\xi_n)$. The resource of the system will reach $z - c\xi_0$ level in the end of the first period. Also, at the end of the first period a certain maintenance policy is applied and general resource of the system is increasing by a random amount (ζ_1). The subsequent periods will proceed similarly and eventually when the total available resource reaches zero, the process will restart repeat in a similar manner. The total level of the mechanical system describe, is expressed by a stochastic process $X(t)$. The investigated $X(t)$ process is a stochastic process with dependent components. The main purpose of this study is to determine when the system expressed by $X(t)$ will replace a new and similar system for the first time by using method of stochastic processes. For this aim, the process $X(t)$ and certain boundary functional $K_0(z)$, $N_0(z)$, $N(z)$, $S_{N_0(z)+1}$, $S_{N(z)+1}$, $X_{N_0(z)+1}$, $X_{N(z)+1}$, $T_{N_0(z)}$ of the process are defined mathematically. On the purpose of investigating the significant boundary functional $N_0(z)$, the supplementary boundary functional $K_0(z)$ has been constructed mathematically and obtained both exact and asimptotic results for the expected value and variance by using mthods of renewal theory. Next, asymptotic expressions for the expected value, variance of the boundary functionals $N_0(z)$ and $N(z)$ have been obtained. Then boundary functionals $S_{N_0(z)+1}$ and $S_{N(z)+1}$ which are neccessary for investigating $X_{N_0(z)+1}$ and $X_{N(z)+1}$ have been analyzed. Thereafter $X_{N_0(z)+1}$ and $X_{N(z)+1}$ which are important for determining maintenance policy to the system on the previous period in which the process reaches to level zero was studed. In addition to them both the exact and approximate formulas have been derived for the boundary functional $T_{N_0(z)}$ which is the first time in which the process $X(t)$ reached to level zero. One of the important result obtained in this study is to suggest the maintenance policy for the previous period in which $X(t)$ process drops below zero. Obtained asymptotic results provide convenience in terms of implementation.

Keywords: Imperfect maintenance, Gradual degradation systems, Replacement policy, Asymptotic methods,

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Salih Tekin‘e, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu’na, tez savunma jürimde yer almayı kabul ettikleri için Prof Dr. Erdem Acar, Doç. Dr. Fikri Gökpınar, Doç. Dr. Ceren Vardar Acar’a, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Bölümü öğretim üyelerine, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Başak Gever’e ve destekleriyle her zaman yanımda olan anneme ve aileme çok teşekkür ederim. Ayrıca, Yüksek Lisans eğitimim süresince bana burs sağladığı için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
Ω	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
$\mathcal{F}$	Bir örnek uzayın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir σ cebir
$P(A)$	A olayının olasılığı
$(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$	Olasılık uzayı
$E(X)$	X rasgele değişkeninin beklenen değeri
$\mathrm{Var}(X)$	X rasgele değişkeninin varyansı
$g(x) = o\big(\varphi(x)\big)$	$\lim\limits_{x\to a}[g(x)/\varphi(x)] = 0$
$M_1(x) * M_2(x)$	$\int_0^x M_2(x-y)dM_1(y)$ 'e eşit olan konvolüsyon çarpım
$F^{*n}(x)$	F(x) fonksiyonunun kendisiyle *n* kat konvolüsyon çarpımı
$\widetilde{M}(s)$	M(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$M^{*}(s)$	M(t) fonksiyonunun Laplace – Stiltijes dönüşümü

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

1.1 Genel Bilgiler

Güvenirlilik, sistem veya makinenin belirlenen süre ve şartlar altında tasarlanmış fonksiyonları yerine yetirebilme olasılığı olarak tanımlanır.

Sistem verimliliğinde güvenirlilikle birlikte bakım yapılabilirliği de önemli bir yere sahiptir. Bakım yapılabilirliği arızalanmış sistemin arıza süresi içinde yeniden çalışır duruma getirilme olasılığını tanımlıyor. Güvenirlilik, araç ve gereçlerin bakım ve tamir politikası açısından önemli bir faktördür. Araç gerecin güvenirliliği ne kadar yüksek olursa bakım ve tamir ihtiyacı da ona orantılı olarak az olacaktır. Bu da maliyet bakımından oldukça önemlidir. "Her yıl Amerika Birleşik Devletleri endüstrisinde tesis işletme ve bakımı için 300 milyar doların üzerinde harcama yapılmaktadır. Ayrıca, endüstride yapılan harcamaların %80'nin sistem veya makinelerindeki kronik bozulmaların onarımına kullanıldığı tahmin edilmektedir. Etkili bakım ve tamir politikası ile bu harcamalar %40 ile %60'a indirgenebileceği ön görülmektedir" (Dhillon, (2002)).

"Güvenirliliğin esas tanımı ilk defa 1952 yılında San Diego şehri Convair' de düzenlenen güvenirlilik sempozyumunda Robert Lusser tarafından önerilmiştir. Güvenirliliğin gelişimi, 2.Dünya Savaşı sırasında ve savaş sonrasında birçok karmaşık sistemler için ortalama çalışabilirlik süresinin ve ortalama arıza süresinin hesaplanmasının ve ön görülmesinin gerekliliği ile kayda değer şekilde artmıştır" (Barlow, R., Proschan, F. (1996)). Ayrıca, güvenirlilik kuramı 1950 yıllarında Amerikan roketinde ve ticari jet uçağında baş veren arıza sonucunda bir bilim dalı olarak mühendislerin ilgisini çekmeye başlamıştır. Bu arızalar baş verdiği zaman Boeing 707 uçağı yapım aşamasındaydı. Kısmen de olsa bu arızalar nedeniyle Boeing Bilimsel Araştırma Laboratuvarı uçağın güvenirliliğinin incelenmesine başlamışlar. Bu laboratuvar ekibinin danışmanı Washington Üniversitesinden Birnbaum idi. Bu araştırmalar sonucunda Birnbaum ve diğ.'nin 1961 yılında yayımlanan "Çok Bileşenli

Sistemler, Onların Yapısı ve Güvenirliliği" isimli makalesi ile güvenirlilik bir bilim dalına dönüşmüştür (Barlow, R., (2002)).

Güvenirlilikte bakım ve onarım da ayrıca önem taşımaktadır. Bakım ve onarım, verilen şartlar altında sistem veya makineleri çalışır duruma getirmek için gerekli olan tüm eylemler topluluğudur. Bakım, bakım çalışmasının doğasına, amacına ve sıklığına göre kategorilere ayrılabilir. Genellikle, sıkça kullanılan dört bakım tipi vardır: önleyici (engelleyici), düzeltici, öngörücü ve hata bulan. Önleyici bakım araç gereçlerde arıza veya bozulmalar gerçekleşmeden onları önleyen, araç gereçlerin çalışır durumda kalmasını ve yaşam süresini uzatmağı amaçlayan önceden planlanmış bakım tipidir. Düzeltici bakım arızalanmış sistem veya makineleri çalışır duruma getirmek için arızaya sebep olan parçanın tamiri veya değiştirilmesini kapsayan bakımdır. Arızalar neredeyse hemen hemen hiçbir zaman önceden tahmin edilemediklerinden düzeltici bakım rastgele zaman aralıklarında gerçekleşir. Bu da maliyet açısından elverişli değildir. Öngörücü bakım araç gereçlerin durumu ve performansını periyodik veya sürekli izleme esasında toplanan yeterli sayıda verilerin değerlendirilmesi sonucunda önceden planlanmış zamanda yapılan bir bakım tipidir. Bu bakım tipi, performansını değerlendirebilmek için gerekli olan geçmiş verilerine ulaşılabilen veya arızaya sebep olan etkileri önceden bilinen makinalara uygulanır. Hata bulucu bakım tipi sistemin alt sistemlerine uygulanarak onların çalışır durumda olup olmadığını belirlemeye yönelik olan bir bakım tipidir. Bu da tüm sistemin çalışır durumda olması için oldukça önemlidir.

Bakım ve onarım ayrıca, araç gereçleri başlangıç durumlarıyla karşılaştırıldığında onarılma derecesine göre de gruplaştırıla bilir. Bu durumda aşağıdaki bakım tipleri gösterile bilinir:

a) Mükemmel Bakım: Bu bakım politikasında sistem veya makineler başlangıç durumuna en yakın şekilde, yeni bir makine gibi onarılır.
b) Mükemmel Olmayan Bakım: Bu bakım tipinde araç gereçler yeni bir makine kadar olmasa da arızalı durumuna göre en iyi şekilde tamir edilirler.
c) Minimal Bakım: Bu politika sonucunda araç gereçlerdeki bozulma onarılır, fakat genel durum aynı kalır.
d) Kötü Bakım: Bu bakımda kasıt olmadan arıza oranı artır, ancak araç gereçlerin çalışamaması ile sonuçlanmıyor.

e) En kötü bakım: Bu bakım farkında olmayarak araç gereçlerin çalışamaması durumu ile sonuçlanır.

1.2. Literatür Araştırması

Güvenirlilik teorisi matematiksel metod ve modellerin yardımıyla sistemin veya makinenin çalışma süreci boyunca baş verebilecek teknik belirsizliklerin ve bozulma riskinin tahmin edilmesi, önlenmesi ve optimize edilmesi ile uğraşmaktadır. "Güvenirlilik teorisinin tarihi incelendiği zaman güvenirlilik teorisinin yükseliş devrinin 1960-1970 yılları arası olduğu görülmektedir. Güvenirlilik mühendisliğinin de ilerlemesine sebep olan güvenirlilik teorisinin temel ilkeleri 1960 yıllarında geliştirilmiştir. 1960-1970 yıllarında basılmış çok sayıda kitabın yarım asıra yakın bir süreden sonra yeniden yayınlanması tesadüfi değildir. Buna en bariz örnek Bazovsky'nin 1961 yılında yayınlanmış "Güvenirlilik Teorisi ve Uygulamaları" kitabının 2004 yılında yeniden basılmasıdır. Ayrıca, güvenirlilik teorisinde devrim niteliğinde olan Barlow ve Proschan'nın 1965 yılında basılmış "Güvenirliliğin Matematiksel Teorisi" monografisi 1996 yılında tekrar basılmıştır. Llyod ve diğ.' nin 1962 yılında basılmış "Güvenirlilik: Yönetim, Metotlar ve Matematik" kitabı güvenirlilik teorisindeki çok sayıda ilgi çekici problemler ve onların özgün çözümünü kapsamaktadır. Polovko'nun 1964 yılında yayımlanan "Güvenirlilik Teorisinin Temel Prensipleri" kitabı Güvenirlilik teorisi üzerine yazılan ilk monografidir. Fakat güvenirlilik teorisi alanındaki devrim Barlow ve Proschan'nın (1965) "Güvenirliliğin Matematiksel Teorisi" kitabı ile Gnedenko ve diğ.'nin (1965) "Güvenirlilik Teorisinde Matematiksel Yöntemler" monografileri vasıtasıyla gerçekleşmiştir" (Ushakov (2012)). İlk kitapta monoton sistemlere, monoton artan ve monoton azalan hata oranına sahip dağılımlara, aynı zamanda optimal bakım ve optimal yedekleme problemlerine yönelik yeni ve önemli düşünceler yer almaktadır. İkinci kitap ise tamir edilebilir yedekli sistemler, özel müdahaleli veri güvenirliliği ve birçok ilgi çekici endüstri problemlerinin çözümüne yönelik metot ve yöntemleri kapsamaktadır. Moskowitz ve diğ'nin 1956 yılında yayımlanan makaleleri yedek parçaların optimize edilmesi problemini ele alan ilk makale olmuştur. Bu makalede belli kısıtlar altında maliyeti en küçükleme yöntemi ile sistem güvenirliliğinin en iyileştirilmesi problemi incelenmiştir. Yedek parça problemlerinin Ushakov tarafından kapsamlı şekilde incelendiği ilk kitap 1969 yılında basılmıştır. Fakat yedek parça problemleri ile ilgili ilk çalışmalarda klasik optimizasyon metodları uygulanmıştır. Daha sonraki çalışmalarda "Monte Carlo Simülasyon", "Genetik Algoritma", "Evrensel Yaklaşım", " Karınca Kolonisi " metodları geliştirildi. Güvenirlilik mühendisliğinde bir diğer önemli konu bakım politikalarıdır. Gertsbakh (2000), Coria ve diğ., (2002), Dhillon (2006), Khatab (2013), Lin (2015) çalışmalarında optimal bakım problemleri incelenmişler. Carter (1997), Barlow (2002), Kuo ve diğ.,(2003), Raizer (2009), Ushakov (2009). çalışmalarında mekaniksel sistemlerin güvenirliliği kapsamlı biçimde araştırmış ve incelenmiştir. Güvenirlilik teorisinde olasılık kuramı ve stokastik süreçler önemli yere sahiptir. Güvenirlilikte karşılaşılan birçok bakım ve yedek parça problemleri yenileme kuramının yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. "Lotka (1939), Campbell (1941) güvenirlilik teorisinde karşılaşılan bazı yedek parça problemlerini yenileme teorisini uygulamakla çözmüşler. Weiss (1956) system sürdürülebilirliği problemlerini çözmek için yarı-Markov süreclerini kullanmıştır" (Barlow, R.E., Proschan, F. (1996)). Belyaev ve diğ. (1967) güvenirlilik teorisindeki bakım ve yedek parça problemlerine kuyruk teorisindeki düşünceleri uygulamışlar. Brown ve Solomon'nun (1975) "Ödüllü Yenileme Sürecinin Varyansı için İkinci mertabeden Yaklaşım" makalesi güvenirlilik teorisinde karşılaşılan bakım problemlerine uygulama açısından önemli bir yere sahiptir. 1990 yıllarına dek güvenirlilik teorisinde karşılaşılan bakım, tamir ve yedek parça problemlerini çözmek için daha sıklıkla olasılık kuramı uygulanmıştır. 1990 yıllardan sonra ise bu problemleri çözmek için stokastik süreçler de kullanılmaya başlandı. Güvenirlilik teorisinde bir sistemin ilk kez ne zaman kendine benzer yeni bir sistemle değiştirileceği önemli sorulardan biridir. Bu çalışmada bu sorunun cevabı araştırılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu amaçla, bağımlı bileşenli bir stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve incelenmiştir. Elde edilmiş sonuçlar gerçek hayat problemlerine uygulanabilme açısından da önemlidir.

Şimdi de sürecin işleyiş prensibini aşağıdaki model yardımı ile verelim.

1.3. Model

Bu çalışmada, başlangıç anda $z > 0$ kullanılabilir kaynağı olan bir sistem ele alınmıştır. Sistemi çalıştırmaya başladığımız andan itibaren sistemin kullanılabilir kaynağının doğrusal olarak $(-c\xi_0)$ azaldığı varsayılmaktadır. Sistem çalışmasını durduğunda sisteme bakım politikası uygulanarak sistemin kullanılabilir kaynağının rastgele bir miktar (ζ_1) arttığı varsayılmaktadır. $\xi_n, n \geq 0,$ rastgele değişkenleri ile sistemin çalışma süreleri, $\eta_n, n \geq 1,$ rastgele değişkenleri ile ise bakım veya tamir süreleri gösterilmiştir. Sistemin ilk çevrimi bir çalışma süresini, diğer çevrimler ise bir bakım veya tamir süresi ile bir çalışma süresini kapsamaktadır. Görüldüğü üzere sistemin ilk çevrimi diğer çevrimlerden farklı davranış sergilemektedir. Sistemin kullanılabilir kaynağı ilk kez sıfırın altına indiğinde veya bir önceki çevrimde sistem kendine benzer yeni bir sistemle değiştirilebilir. Sistemin t anındaki toplam kullanılabilir kaynağı $X(t)$ ile ifade edilmiştir. Şimdi de sürecin matematiksel yapısını inceleyelim.

2. X(t) SÜRECİNİN SINIR FONKSİYONELLERİNİN İNCELENMESİ

2.1. X(t) Sürecinin ve Onun Sınır Fonksiyonellerinin Matematiksel Kuruluşu

$\{(\xi_n, \eta_n, \zeta_n), n \geq 1\}$ dizisi bağımsız, aynı dağılıma sahip, pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca ξ_1, η_1, ζ_1 rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olup aşağıdaki dağılımlara sahip olsunlar:

$$\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \leq t\}; \;\; F(t) \equiv P\{\eta_1 \leq t\}$$

$$\pi(x) \equiv P\{\zeta_1 \leq x\}; \; t \geq 0, x \geq 0$$

Ayrıca, ξ_0 rasgele değişkeni ξ_1 rasgele değişkeni ile aynı dağılıma sahip olsun. Ele alınacak süreci inşa etmek için aşağıdaki rasgele değişkenleri tanımlayalım:

$$V_i \equiv c\xi_i - \zeta_i; \; U_i \equiv \eta_i + \xi_i; i = 1,2, \ldots; \; S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$\mathrm{T}_n \equiv \xi_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} U_i \text{ ; n=1,2,…; ; } S_0 = 0; \mathrm{T}_0 = \xi_0$$

Bunlara ek olarak aşağıdaki rastgele değişkenleri de tanımlayalım:

$$X_0 = z - c\xi_0; \; X_1 = X_0 + \zeta_1 - c\xi_1 = X_0 - S_1; \; \ldots \; ;$$

$$X_n = X_{n-1} + \zeta_n - c\xi_n = X_0 - S_n; \text{ n=1, 2, …}$$

Şimdi de ele aldığımız $X(t)$ sürecini matematiksel olarak inşa edelim:

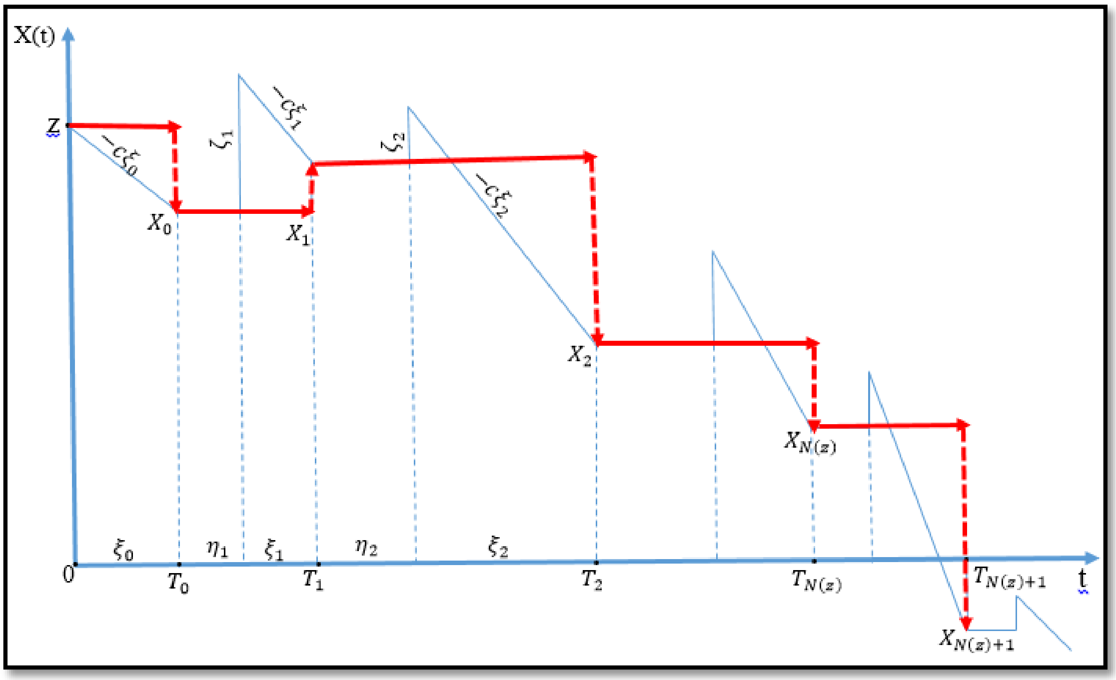
$$X(t) = \begin{cases} z - ct; & 0 < t \leq T_0 \\ z - c\xi_0; & T_0 < t \leq T_0 + \eta_1 \\ X_0 - S_{n-1}; & T_{n-1} < t \leq T_{n-1} + \eta_n \\ X_0 - S_n - c(t - T_n) & T_{n-1} + \eta_n < t \leq T_n \end{cases} \qquad n \geq 1$$

Bu dizinin yardımı ile aşağıdaki sınır fonksiyonelini tanımlayalım:

$$N(z) = \max\{n \geq 0: X_n > 0\} = \max\{n \geq 0: S_n < z - c\xi_0\}$$

Ayrıca, aşağıdaki sınır fonksiyonellerini de tanımlayalım:

$$S_{N(z)+1} \equiv \sum_{i=1}^{N(z)+1} V_i\,;\; X_{N(z)+1} \equiv X_0 - S_{N(z)+1};\;\; \mathrm{T}_{N(z)} \equiv \xi_0 + \sum_{i=1}^{N(z)} U_i$$



Şekil 2.1 : X(t) sürecinin örnek bir izdüşümü

Amacımız $X(t)$ sürecinin sınır fonksiyonellerini incelemektir. Yukarıda belirttiğimiz gibi $X(t)$ süreci $[0;\xi_0]$ aralığında diğer çevrimlerden farklı davranış sergilediğinden ilk olarak $\xi_0 = 0$ olduğu durumda $N(z)$ ile aynı davranış sergileyen $N_0(z)$ sınır fonksiyonelini incelememiz gerekmektedir. Bunun için öncelikle $N_0(z)$ sınır fonksiyonelini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$N_0(z) = \max\{n \geq 0: X_n > 0\} = \max\{n \geq 0: S_n < z\}$$

Fakat $N_0(z)$ sınır fonksiyonelini inceleye bilmemiz için önce aşağıdaki şekilde tanımlanacak yardımcı $K_0(z)$ sınır fonksiyonelini incelememiz gerekmektedir.

2.2. $K_0(z)$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değeri

İlk olarak $K_0(z)$ sınır fonksiyonelini matematiksel olarak tanımlamamız gerekmektedir. Bunun için $\{S_n\}$, $n \geq 0$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı (ν_1^+) ve birinci basamak yüksekliğini (χ_1^+) aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 \colon S_n > 0\}; \quad \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} V_i$$

(ν_n^+, χ_n^+) n=2, 3, ... dizisi (ν_1^+, χ_1^+) çifti ile aynı dağılıma sahip ikilileri olsun. Hatırlatalım ki, $\{(\nu_n^+, \chi_n^+)\}$ ikilileri bir birinden bağımsızdırlar (Feller, (1971)). $K_0(z)$ sınır fonksiyonelini tanımlamak için öncelikle, $\{\chi_n^+\}$ dizisinden yararlanarak, aşağıdaki yenileme sürecini inşa edelim:

$$H(z) = min\left\{n \geq 1 \colon \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\right\}$$

Dynkin prensibine göre aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$N_0(z) + 1 = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+$$

Şimdi de $N_0(z)$'i incelemek için gerekli olan $K_0(z)$ sınır fonksiyonelini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$K_0(z) \equiv \sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+ \tag{2.1}$$

Burada $\sum_{i=1}^{0} \nu_i^+ = 0$ kabul edilmiştir. Tanımdan görüldüğü gibi $N_0(z)$ sınır fonksiyoneli aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$N_0(z) \equiv K_0(z) + \nu_{H(z)}^+ - 1$$

Amacımız ilk olarak $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini incelemektir. Bunun için aşağıdaki notasyonları da tanımlayalım:

$$\mu_r = E(\chi_1^{+r}); \alpha_r = E(\nu_1^{+r}); n_{r_1 r_2} = E\left(\chi_1^{+r_1}\, \nu_1^{+r_2}\right);\; r = 1,2,\dots;\; r_1, r_2 = 1,2,\dots$$

$K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini hesaplamadan önce Brown ve Solomon'nun (1975) yönteminden yararlanarak aşağıdaki önermeyi ispat edelim.

Önerme 2.2.1: $\mu_2 = E(\chi_1^{+2}) < +\infty$, $n_{11} = E(\chi_1^{+}\, \nu_1^{+}) < +\infty$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz < \infty$$

Burada notasyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$G_0(z) \equiv a \int_{s=z}^{\infty} \left(1 - F_+(s)\right) ds - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+ / \chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)$$

$$F_+(s) \equiv P(\chi_1^+ \le s)$$

Ayrıca, a pozitif bir sayıdır.

İspat: $G_0(z)$ fonksiyonunun tanımına göre,

$$\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz = a \int_{z=0}^{\infty} \int_{s=z}^{\infty} \left(1 - F_+(s)\right) ds - \int_{z=0}^{\infty} \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+ / \chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)$$

olur. Kısaltmak için aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$I_0(z) \equiv \int_{s=z}^{\infty} \left(1 - F_+(s)\right) ds;\; I_1(z) \equiv \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+ / \chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)$$

Sırasıyla $\int_{z=0}^{\infty} I_0(z)\, dz$ ve $\int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\, dz$ integralini hesaplayalım:

$$\int_{z=0}^{\infty} I_0(z)\, dz = \int_{z=0}^{\infty} \int_{s=z}^{\infty} \left(1 - F_+(s)\right) ds\, dz = \int_{s=0}^{\infty} \int_{z=0}^{s} \left(1 - F_+(s)\right) dz\, ds$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} \left(1 - F_+(s)\right) ds \int_{z=0}^{s} dz = \int_{s=0}^{\infty} s\left(1 - F_+(s)\right) ds = \frac{E(\chi_1^{+2})}{2} = \frac{\mu_2}{2}$$

Önermenin şartına göre $\mu_2 < +\infty$ olduğu için $\int_{z=0}^{\infty} I_0(z)\, dz < +\infty$ olur. Şimdi de $\int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\, dz$ integralini hesaplayalım:

$$\int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\,dz = \int_{z=0}^{\infty}\int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\,dF_+(s)\,dz$$

$$= \int_{s=0}^{\infty}\int_{z=0}^{s} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}dz\,dF_+(s) = \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}dF_+(s)\int_{z=0}^{s} dz$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} sE\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}dF_+(s) = \int_{s=0}^{\infty} E\{s\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}dF_+(s)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} E\{\chi_1^+\,\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}dF_+(s) = E(\chi_1^+\,\nu_1^+) = n_{11}$$

Özetle, $\int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\,dz = n_{11}$ olur. Önermenin şartına göre $n_{11} < +\infty$ olduğu için $\int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\,dz < +\infty$ olur. Bu durumda, $\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\,dz$ integrali aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\,dz = a\int_{z=0}^{\infty} I_0(z)\,dz - \int_{z=0}^{\infty} I_1(z)\,dz = a\frac{\mu_2}{2} - n_{11} < \infty$$

Böylelikle Önerme 2.2.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de Brown ve Solomon'nun (1975) makalesindeki yöntemden yararlanarak aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 2.2.1: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun:

$$\alpha_1 \equiv E(\nu_1^+) < +\infty;\ \mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < +\infty;\ n_{11} \equiv E(\chi_1^+\,\nu_1^+) < +\infty$$

Bu takdirde, $z \to \infty$ iken $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımı yazabiliriz:

$$E\big(K_0(z)\big) = az + b + o(1)$$

Burada $a = \frac{\alpha_1}{\mu_1}$; $b = \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - \frac{n_{11}}{\mu_1}\right]$'dır.

İspat: (2.1) eşitliği ile tanımlanan $K_0(z)$, bir ödüllü yenileme sürecidir. $\{\chi_n^+\}$ ve $\{\nu_n^+\}$ dizileri bağımlı oldukları için $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini bulmak için Brown ve Solomon'nun (1975) makalesindeki yaklaşımdan yararlanacağız.

Öncelikle, $D_1(z) \equiv E\big(K_0(z)\big) = E\Big(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+\Big)$ olsun. Toplam olasılık formülünden yararlanarak $D_1(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$D_1(z) \equiv E\{K_0(z);\ \chi_1^+ > z\} + E\{K_0(z);\ \chi_1^+ \leq z\} \tag{2.2}$$

Burada $E(X; A)$ notasyonu ile aşağıdaki integral ifade edilmiştir:

$$E(X; A) = \int_A x dF_X$$

$K_0(z)$'in tanımına göre (2.2) eşitliğindeki birinci terim sıfıra eşittir. Yani $E\{K_0(z);\ \chi_1^+ > z\} = 0$ olur. Bu durumda (2.2) eşitliğini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$D_1(z) \equiv E\{K_0(z);\ \chi_1^+ \leq z\} = \int_{s=0}^{z} E\{K_0(z);\ \chi_1^+ \in ds\}$$

$$= \int_{s=0}^{z} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) + \int_{s=0}^{z} E\big(K_0(z-s)\big) dF_+(s)$$

$$= \int_{s=0}^{z} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) + \int_{s=0}^{z} D_1(z-s) dF_+(s) \tag{2.3}$$

Sadelik için aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$G_1(z) \equiv \int_{s=0}^{z} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)$$

$$D_1(z) * F_+(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s) dF_+(s)$$

Bu notasyonları (2.3)'de yerine yazdığımızda $D_1(z)$ için aşağıdaki yenileme denklemi elde edilir:

$$D_1(z) = G_1(z) + D_1(z) * F_+(z) \tag{2.4}$$

(2.4) denklemine ikinci tip Volterra integral denklemi de denir. Bu denklemin analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$D_1(z) = \int_{s=0}^{z} G_1(z-s)dU_+(s) = G_1(z) * U_+(z)$$

Burada $U_+(z)$ ile χ_1^+ rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonu gösterilmiştir, yani $U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*n}(z)$'dır. Bazı sade dağılımlardan başka (örneğin, Üstel, Erlang ve s.) diğer dağılımlar için $U_+(z)$ fonksiyonunun kesin şeklini bulmak kolay değildir. Bundan dolayı çalışmada $D_1(z)$ için asimptotik sonuç elde etmek amaçlanmıştır ve bu amaç için $\int_{s=0}^{z} G_1(z)ds$ integralinin sonlu olması gerekmektedir. $G_1(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} E(\nu_1^+) > 0$ olduğu için bu integral yakınsak değildir. Bu zorluğu aşmak için (2.6) eşitliğinin her iki tarafından az' i çıkartmakla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$D_1(z) - az = G_1(z) + D_1(z) * F_+(z) - az$$

Kısaltmak için $D_1(z) - az \equiv \widehat{D}_1(z)$ tanımlayalım ve $\widehat{D}_1(z)$' i hesaplayalım:

$$\widehat{D}_1(z) = G_1(z) + \int_{s=0}^{z} D_1(z-s)dF_+(s) - az$$

$$= G_1(z) + \int_{s=0}^{z} [D_1(z-s) - a(z-s)]dF_+(s) + a\int_{s=0}^{z} (z-s)dF_+(s) - az$$

$$= G_2(z) + \int_{s=0}^{z} \widehat{D}_1(z-s)dF_+(s) \qquad (2.5)$$

Burada $G_2(z) = G_1(z) + a\int_{s=0}^{z}(z-s)dF_+(s) - az'$dır. $G_1(z)$'i aşağıdaki şekilde göstermek mümkündür:

$$G_1(z) = \int_{s=0}^{z} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\,dF_+(s) = \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\,dF_+(s)$$

$$-\int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\,dF_+(s) = E(\nu_1^+) - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\,dF_+(s) \qquad (2.6)$$

(2.6) ifadesini kullanarak $G_2(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
G_2(z) &= E(\nu_1^+) - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) + a\int_{s=0}^{z} (z-s)dF_+(s) - a\int_{s=0}^{z} ds \\
&= E(\nu_1^+) - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) + a\int_{s=0}^{z} F_+(s)ds - a\int_{s=0}^{z} ds \\
&= E(\nu_1^+) - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) - a\int_{s=0}^{z} \big(1 - F_+(s)\big)ds \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

(2.7) eşitliğini sadeleştirmek amacıyla ilk olarak $\int_{s=0}^{z}\big(1 - F_+(s)\big)ds$ integralini hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\int_{s=0}^{z} \big(1 - F_+(s)\big)ds &= \int_{s=0}^{\infty} \big(1 - F_+(s)\big)ds - \int_{s=z}^{\infty} \big(1 - F_+(s)\big)ds \\
&= E(\chi_1^+) - \int_{s=z}^{\infty} \big(1 - F_+(s)\big)ds \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

(2.8) eşitliği (2.7) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
G_2(z) &= E(\nu_1^+) - aE(\chi_1^+) + a\int_{s=z}^{\infty} \big(1 - F_+(s)\big)ds - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s) \\
&= E(\nu_1^+) - aE(\chi_1^+) + G_0(z)
\end{aligned}
$$

Burada $G_0(z) \equiv a\int_{s=z}^{\infty}\big(1 - F_+(s)\big)ds - \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)$’dır.

$G_2(z)$’in integrallenebilir olması için $E(\nu_1^+) - aE(\chi_1^+) = 0$ olmalıdır. Buradan da $a \equiv \frac{E(\nu_1^+)}{E(\chi_1^+)}$ olduğu elde edilir ve bu durumdaki eşitliği elde etmiş oluyoruz:

$$
G_2(z) = G_0(z) \qquad (2.9)
$$

Önerme 2.2.1’ de ispat olunmuştur ki, $\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz < +\infty$’dır.Bu takdirde, $\int_{z=0}^{\infty} G_2(z)\, dz = \int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz < \infty$ olur. (2.9) eşitliği (2.5) eşitliğinde yerine yazıldığında $\widehat{D}_1(z)$ için aşağıdaki gibi ifade edilmiş bir yenileme denklemi elde edilir.

$$\widehat{D}_1(z) = G_0(z) + \int_{s=0}^{z} \widehat{D}_1(z-s)dF_+(s)$$

Anahtar Yenileme teoremine göre $\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz < \infty$ olduğu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur (Brown, M., Solomon, H., (1975)):

$$\lim_{z\to\infty} \widehat{D}_1(z) = \frac{1}{\mu_1}\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)dz \qquad (2.10)$$

Önerme 2.2.1'de ispat olunmuştur ki,

$$\int_{z=0}^{\infty} G_0(z)\, dz = a\frac{\mu_2}{2} - n_{11} < \infty \qquad (2.11)$$

(2.11) eşitliğini (2.10) eşitliğinde yerine yazarsak, $z \to \infty$ iken $\widehat{D}_1(z)$ için aşağıdaki asimptotik sonucunu elde ederiz.

$$\lim_{z\to\infty} \widehat{D}_1(z) = \frac{1}{\mu_1}\left[a\frac{\mu_2}{2} - n_{11}\right] = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - \frac{n_{11}}{\mu_1}$$

Kolaylık açısından $b \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - \frac{n_{11}}{\mu_1}$ tanımlayalım. Bu takdirde, $\lim_{z\to\infty} \widehat{D}_1(z) = b$ olur. Özetle, $z \to \infty$ iken $\widehat{D}_1(z)$ için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\widehat{D}_1(z) \equiv D_1(z) - az = b + o(1)$$

Buradan da

$$D_1(z) \equiv E\big(K_0(z)\big) = az + b + o(1)$$

açılımı elde edilir. Burada notasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1};\ b \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - \frac{n_{11}}{\mu_1};\ \alpha_1 \equiv E(\nu_1^+);\ \mu_k \equiv E\big(\chi_1^{+k}\big);\ \mathrm{k} = 1{,}2;\ n_{11} \equiv E(\chi_1^+\,\nu_1^+)$$

Bununla da Teorem 2.2.1'i ispatlanmış olur.

Şimdi ise $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını inceleyelim.

2.3. $K_0(z)$ Sınır Fonksiyonelinin Varyansı

Öncelikle aşağıdaki notasyonu tanımlayalım:

$$r(z) \equiv U_+(z) - \frac{z}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$$

Burada $U_+(z) \equiv E(H(z))$ 'dır. $H(z)$ süreci $\{\chi_n^+\}$ dizisinin oluşturduğu yenileme sürecidir. Ayrıca, $l \equiv \int_0^\infty r(z)\, dz$ integralını tanımlayalım.

Önerme 2.3.1: Varsayalım ki, $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ koşulu sağlanmıştır. Bu takdirde, $l \equiv \int_0^\infty r(z)\, dz$ integrali için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$l = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_3}{6\mu_1^2}$$

İspat: $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunu için aşağıdaki integral denklem yazılabilir:

$$U_+(z) = 1 + \int_{s=0}^{z} U_+(z-s)\, dF_+(s) \tag{2.12}$$

(2.12) eşitliğinin her iki tarafından $\frac{z}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ ifadesi çıkartılıp z ile çarpılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$zr(z) = z + z\int_{s=0}^{z} U_+(z-s)\, dF_+(s) - \frac{z^2}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z \tag{2.13}$$

$r(z)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak (2.13) eşitliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$zr(z) = z + z\int_{s=0}^{z} r\,(z-s) dF_+(s) + \frac{z}{\mu_1}\int_{s=0}^{z} (z-s) dF_+(s)$$

$$+ \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z \int_{s=0}^{z} dF_+(s) - \frac{z^2}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z \tag{2.14}$$

(2.14) eşitliği sadeleştirildikten sonra aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$zr(z) = \int_{s=0}^{z} (z-s)r\,(z-s)dF_+(s) + \int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s)$$

$$-\frac{z}{\mu_1}\int_{s=0}^{z} \big(1-F_+(s)\big)\,ds - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z\big(1-F_+(s)\big) + z$$

Kolaylık açısından, aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$C(z) \equiv \int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s) - \frac{z}{\mu_1}\int_{s=0}^{z} \big(1-F_+(s)\big)\,ds$$

$$-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z\big(1-F_+(s)\big) + z$$

Bu durumda,

$$zr(z) = C(z) + \int_{s=0}^{z} (z-s)r\,(z-s)dF_+(s) \tag{2.15}$$

olur. Şimdi de $C(z)$ fonksiyonunu sadeleştirelim:

$$C(z) \equiv \int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s) - \frac{z}{\mu_1}\int_{s=0}^{z} \big(1-F_+(s)\big)\,ds$$

$$-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z\big(1-F_+(s)\big) + z = \int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s)$$

$$+\frac{1}{\mu_1} z\int_{s=z}^{\infty} \big(1-F_+(s)\big)\,ds - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} z\big(1-F_+(s)\big)$$

(2.15) eşitliği $zr(z)$ fonksiyonu için yazılmış bir yenileme denklemidir. Bu denklem için asimptotik sonuç elde etmek için $\int_{z=0}^{\infty} C(z)\,dz < \infty$ olması gerekmektedir. Öncelikle $\int_{z=0}^{\infty} C(z)\,dz < \infty$ olduğunu gösterelim. Bu amaçla aşağıdaki integralleri tanımlayalım:

$$I_2(z) \equiv \int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s); I_3(z) \equiv z\int_{s=z}^{\infty} \big(1-F_+(s)\big)\,ds;$$

$$I_4(z) \equiv z\big(1-F_+(s)\big)$$

Bu takdirde, $C(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$C(z) = I_2(z) + \frac{1}{\mu_1} I_3(z) - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} I_4(z)$$

Sırasıyla $\int_{z=0}^{\infty} I_2(z)\,dz$; $\int_{z=0}^{\infty} I_3(z)\,dz$; $\int_{z=0}^{\infty} I_4(z)\,dz$ integralleri hesaplayalım:

$$\int_{z=0}^{\infty} I_2(z)\,dz = \int_{z=0}^{\infty}\int_{s=0}^{z} sr\,(z-s)dF_+(s)\,dz$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} sdF_+(s) \int_{z=s}^{\infty} r\,(z-s)\,dz = \mu_1 l;$$

$$\int_{z=0}^{\infty} I_3(z)\,dz = \int_{z=0}^{\infty}\int_{s=z}^{\infty} z\big(1-F_+(s)\big)\,ds\,dz$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} \big(1-F_+(s)\big)ds \int_{z=0}^{s} z\,dz = \frac{\mu_3}{6};$$

$$\int_{z=0}^{\infty} I_4(z)\,dz = \int_{z=0}^{\infty} z\big(1-F_+(s)\big)d\,z = \frac{\mu_2}{2}.$$

Şimdi de $\int_{z=0}^{\infty} C(z)\,dz$ integralini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_{z=0}^{\infty} C(z)\,dz = \int_{z=0}^{\infty} I_3(z)\,dz + \frac{1}{\mu_1}\int_{z=0}^{\infty} I_4(z)\,dz - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\int_{z=0}^{\infty} I_5(z)\,dz$$

$$= \mu_1 l + \frac{\mu_3}{6\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3}$$

Önermenin şartına göre $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ olduğu için $\int_{z=0}^{\infty} C(z)\,dz < +\infty$' dır. Bu durumda Anahtar Yenileme teoremine göre (2.3.5) yenileme denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur (Brown, M., Solomon, H., (1975)):

$$\lim_{z\to\infty} zr(z) = \frac{1}{\mu_1}\int_{z=0}^{\infty} K(z)\,dz = \mu_1 l + \frac{\mu_3}{6\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3}$$

Smith (1959) göstermiştir ki, $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ olduğunda aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\lim_{z\to\infty} zr(z) = 0$$

Bu takdirde, $\lim_{z\to\infty} zr(z) = \mu_1 l + \frac{\mu_3}{6\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3} = 0$ olur. Böylelikle aşağıdaki eşitliği elde etmiş oluyoruz:

$$l = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_3}{6\mu_1^2}$$

Bununla da Önerme 2.3.1' nin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise $r^*(z) \equiv D_1(z) - az - b$ notasyonunu tanımlayalım.

Burada $D_1(z) \equiv E\big(K_0(z)\big)'$ dır. Ayrıca, $l^* \equiv \int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz$ olsun.

Brown ve Solomon'nun (1975) çalışmasındaki yöntemi kullanarak aşağıdaki önermeği ispat edebiliriz.

Önerme 2.3.2: Varsayalım ki, $\mu_3 < +\infty$; $\alpha_1 < +\infty$; $n_{21} < +\infty$ koşulları sağlanır. Bu takdirde $l^* \equiv \int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz$ integrali için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$l^* = \lambda_1 l + \frac{n_{21}}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} n_{11}$$

Burada $l = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_3}{6\mu_1^2}$' dır.

İspat: $K_0(z)$ sınır fonksiyoneli tanımından yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$K_0(z) = \sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+ = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ - \nu_{H(z)}^+$$

Ayrıca, $D_1(z) \equiv E\big(K_0(z)\big)$ tanımlandığı için aşağıdaki eşitlki yazılabilir:

$$D_1(z) \equiv E\left(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+\right) - E\big(\nu_{H(z)}^+\big) = E\big(H(z)\big)E(\nu_1^+) - E\big(\nu_{H(z)}^+\big)$$

$$= \alpha_1 U_+(z) - E\big(\nu_{H(z)}^+\big) \tag{2.16}$$

(2.16) eşitliğinin her iki tarafından $az - b$ ifadesini çıkarıp, sadeleştirme yaptıktan sonra aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$r^*(z) = \alpha_1 r(z) + \frac{n_{11}}{\mu_1} - E\big(\nu_{H(z)}^+\big)$$

Şimdi ise $\int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz$ integralini hesaplayalım:

$$\int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz = \alpha_1 \int_{z=0}^{\infty} r(z)\,dz + \int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right] dz \tag{2.17}$$

Önceden de tanımladığımız gibi $l \equiv \int_0^{\infty} r(z)\,dz$'dır. Bu durumda (2.17) eşitliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz = \alpha_1 l + \int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right] dz \tag{2.18}$$

(2.18) eşitliğinden de görüldüğü üzere $\int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\,dz$ integralini hesaplayabilmek için öncelikle $\int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right] dz$ integralini hesaplamamız gerekmektedir. Bunun için hesaplamalarımızı aşağıdaki şekilde devam ettirelim. n_{11}'in tanımına göre

$$\frac{n_{11}}{\mu_1} = \int_{s=0}^{\infty} \frac{s}{\mu_1} E\{\nu_1^{+}/\chi_1^{+} = s\}\,dF_{+}(s) \tag{2.19}$$

eşitliği yazılabilir. $g(z) \equiv E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)$ notasyonu tanımlayalım. Bu takdirde, kaydırma işleminin yardımıyla $g(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$g(z) = \int_{s=0}^{z} g(z-s)\,dF_{+}(s) + \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^{+}/\chi_1^{+} = s\} dF_{+}(s)$$

$$= \int_{s=0}^{z} g(z-s)\,dF_{+}(s) + I_1(z) \tag{2.20}$$

Burada $I_1(z) \equiv \int_{s=z}^{\infty} E\{\nu_1^{+}/\chi_1^{+} = s\}\,dF_{+}(s)'$ dır. (2.20) eşitliği bir Yenileme denklemidir ve bu denklemin analitik çözümü

$$g(z) = I_1(z) * U_{+}(z) = \int_{x=0}^{z} I_1(z-x)\,dU_{+}(x)$$

şeklindedir. Burada $U_{+}(x)$ ile χ_1^{+} rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonu gösterilmiştir. Şimdi ise $I_1(z)$fonksiyonunun tanımından yararlanarak $g(z)$ fonksiyonunu hesaplayalım:

$$g(z) = \int\limits_{x=0}^{z} \int_{s=z-x}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\}\, dF_+(s)\, dU_+(x)$$

$$= \int\limits_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \int_{x=z-s}^{z} dU_+(x)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} [U_+(z) - U_+(z-s)] E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

Özetle, $E\left(\nu_{H(z)}^+\right)$ için

$$g(z) \equiv E\left(\nu_{H(z)}^+\right) = \int_{s=0}^{\infty} [U_+(z) - U_+(z-s)] E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \qquad (2.21)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.19) ve (2.21) eşitliklerinin yararlanarak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} \left\{\frac{s}{\mu_1} - [U_+(z) - U_+(z-s)]\right\} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \qquad (2.22)$$

$r(z)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak (2.22) eşitliği aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right) = \int_{s=0}^{\infty} [r(z-s) - r(s)] E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

Şimdi de $\int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)\right] dz$ integralini hesaplayalım:

$$\int\limits_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)\right] dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} \int_{s=0}^{\infty} [r(z-s) - r(s)] E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)\, d$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \int_{z=0}^{\infty} [r(z-s) - r(s)]\, dz$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \int_{z=-s}^{0} r(z)\, dz$$

$$= \int_{z=-\infty}^{0} r(z)\, dz \int_{s=-z}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

$$= \int_{v=0}^{\infty} r(-v)\, dv \int_{s=v}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \int_{v=0}^{s} r(-v)\, dv \qquad (2.23)$$

$r(v)$ fonksiyonunun tanımına göre

$$r(-v) = \frac{v}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \qquad (2.24)$$

dır. (2.24) eşitliğini (2.23) eşitliğinde yerine yazdığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)\right] dz = \int_{s=0}^{\infty} E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) \int_{v=0}^{s} \left(\frac{v}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\right) dv$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} \left(\frac{s^2}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} s\right) E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) = \frac{1}{2\mu_1} \int_{s=0}^{\infty} s^2 E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

$$- \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \int_{s=0}^{\infty} s E\{\nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) = \frac{1}{2\mu_1} \int_{s=0}^{\infty} E\{s^2 \nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

$$- \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \int_{s=0}^{\infty} E\{s \nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) = \frac{1}{2\mu_1} \int_{s=0}^{\infty} E\{\chi_1^{+2} \nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s)$$

$$- \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \int_{s=0}^{\infty} E\{\chi_1^+ \, \nu_1^+/\chi_1^+ = s\} dF_+(s) = \frac{n_{21}}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} n_{11}$$

Özetle,

$$\int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)\right] dz = \frac{n_{21}}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} n_{11} \qquad (2.25)$$

elde edilir. Burada, $n_{21} \equiv E(\chi_1^{+2}\, \nu_1^+), n_{11} \equiv E(\chi_1^+\, \nu_1^+)$'dır. $\mu_2 < +\infty$ ve $n_{21} < +\infty$ olduğu durumunda (2.25) eşitliği sonludur. Bu da Önerme 2.3.2'nin şartlarına uygundur. (2.25) eşitliği (2.18) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$l^* \equiv \int_{z=0}^{\infty} r^*(z)\, dz = \alpha_1 l + \int_{z=0}^{\infty} \left[\frac{n_{11}}{\mu_1} - E\left(\nu_{H(z)}^+\right)\right] dz = \alpha_1 l + \frac{n_{21}}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} n_{11}$$

Burada $l = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_3}{6\mu_1^2}$‘dır. Bununla da Önerme 2.3.2’ i ispatlanmış oldu.

Yorum : $\mu_3 < +\infty$ ve $n_{21} < +\infty$ olduğu takdirde $l^* < \infty$ olur. Bu ise $D_0(z) \equiv E\big(K_0(z)\big) = az + b + o(1)$ açılımını $D_0(z) \equiv E\big(K_0(z)\big) = az + b + o\left(\frac{1}{z}\right)$ şeklinde yazabilmemizi sağlamaktadır. Bu bilgi bir sonraki bölümde $K_0(z)$ ödüllü yenileme sürecinin varyansı için asimptotik açılım elde ettiğimiz zaman gerekli olacaktır.

Burada $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1}$; $\alpha_1 \equiv E(\nu_1^+)$; $\mu_k \equiv E\big(\chi_1^{+k}\big)$; k=1,2; $n_{11} \equiv E(\chi_1^+ \, \nu_1^+)$’dır.

Şimdi de aşağıdaki Yardımcı Teorem’ i ispat edelim. Bunun için ilk olarak aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$D_1^{*2}(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s) dD_1\,(s) = D_1(z) * D_1(z)$$

Yardımcı Teorem 2.3.1: $\forall z > 0$ için $D_1^{*2}(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik doğrudur (Brown, M., Solomon, H., (1975)):

$$D_1^{*2}(z) = E\left\{\sum\nolimits_{1 \le i < j \le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\}$$

Burada $D_1^{*2}(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s) dD_1\,(s) = D_1(z) * D_1(z)$’dır.

İspat: İlk olarak aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f_{+k}(s) \equiv \frac{dF_+^{*k}(s)}{dU_+(s)} \tag{2.26}$$

Burada $F_+^{*k}(s)$ fonksiyonu $F_+(s)$ fonksiyonunun *k*.konvolüsyon çarpımıdır. Ayrıca $U_+(s)$ fonksiyonu da aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$U_+(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*n}(s)$$

$D_1(z)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$D_1(z) \equiv E\left\{\sum_{i=1}^{N_0(z)-1} \nu_i^+\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^+ I_{\{S_i \le z\}}(z)\right\} \tag{2.27}$$

Burada $I_A(z) \equiv \begin{cases} 1, eğer\ z \in A \\ 0, eğer\ z \notin A \end{cases}$ bir indikatör fonksiyondur.

Koşullu beklenen değerin özelliğinden yararlanarak (2.27) eşitliğini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$D_1(z) = E\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^+ I_{\{S_i \le z\}}(z)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} E\{\nu_i^+ / S_i = s\}\, dF_+^{*i}(s)$$

$$= \int_{s=0}^{z} \sum_{i=1}^{\infty} E\{\nu_i^+ / S_i = s\}\, dF_+^{*i}(s) \tag{2.28}$$

(2.26) eşitliğinden

$$dF_+^{*k}(s) = f_{+k}(s) dU_+(s) \tag{2.29}$$

olduğunu görmek mümkündür. (2.29) eşitliği (2.28) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$D_1(z) = \int_{s=0}^{z} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\{\nu_i^+ \,/\, S_i = s\} f_{+i}(s)\right\} dU_+(s) \tag{2.30}$$

eşitliği elde edilir. (2.30) eşitliği $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerinin kesin şeklidir. Şimdi de $E\{\sum_{1 \le i < j \le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\}$'i aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$E\left\{\sum\nolimits_{1 \le i < j \le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\} = E\left\{\sum\nolimits_{1 \le i < j < \infty} \nu_i^+ \nu_j^+ I_{\{S_i \le z\}}(z)\right\}$$

$$= \sum\nolimits_{1 \le i < j < \infty} \int_{s=0}^{z} \int_{w=s}^{z} E\{\nu_i^+ / S_i = s\} E\{\nu_{j-i}^+ / S_{j-i} = w - s\}$$

$$\times\, dF_+^{*i}(s) dF_+^{*j-i}(w - s) \tag{2.31}$$

(2.29) eşitliğinden yararlanarak (2.31) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left\{\sum_{1\le i<j\le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\}$$

$$= \sum_{1\le i<j<\infty} \int_{s=0}^{z} \int_{w=s}^{z} E\{\nu_i^+/S_i = s\} E\{\nu_{j-i}^+/S_{j-i} = w-s\}$$

$$\times f_{+i}(s)dU_+(s) f_{+(j-i)}(w-s)dU_+(w-s)$$

$$= \sum_{1\le i<j<\infty} \int_{s=0}^{z} E\{\nu_i^+/S_i = s\} f_{+i}(s)dU_+(s)$$

$$\times \int_{w=s}^{z} E\{\nu_{j-i}^+/S_{j-i} = w-s\} f_{+(j-i)}(w-s)dU_+(w-s)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} E\{\nu_i^+/S_i = s\} f_{+i}(s)dU_+(s)$$

$$\times \int_{w=s}^{z} E\{\nu_{j-i}^+/S_{j-i} = w-s\} f_{+(j-i)}(w-s)dU_+(w-s)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} E\{\nu_i^+/S_i = s\} f_{+i}(s)dU_+(s)$$

$$\times \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_{w=s}^{z} E\{\nu_{j-i}^+/S_{j-i} = w-s\} f_{+(j-i)}(w-s)dU_+(w-s)$$

$$= \int_{s=0}^{z} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\{\nu_i^+/S_i = s\} f_{+i}(s)\right\} dU_+(s)$$

$$\times \int_{w=s}^{z} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} E\{\nu_k^+/S_k = w-s\} f_{+k}(w-s)\right\}$$

$$= \int_{s=0}^{z} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\{\nu_i^+/S_i = s\} f_{+i}(s)\right\} dU_+(s)$$

$$\times \int_{v=0}^{z-s} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} E\{\nu_k^+/S_k = v\} f_{+k}(v)\right\} \tag{2.32}$$

(2.30) eşitliğinin her iki tarafını diferansiyelini alarak aşağıdaki denklemi elde etmek mümkündür:

$$dD_1(z) = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\{v_i^+ \,/\, S_i = s\} f_{+i}(s)\right\} dU_+(s) \tag{2.33}$$

(2.30) ve (2.33) denklemlerini göz önünde bulundurduğumuz takdirde (2.32) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le H(z)-1} v_i^+ v_j^+\right\} = \int_{s=0}^{z} dD_1(z)\, D_1(z-s) = \int_{s=0}^{z} D_1(z-s)\, dD_1(z)$$

Özetle,

$$D_1^{*2}(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s)\, dD_1(z) = E\left\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le H(z)-1} v_i^+ v_j^+\right\}$$

elde edilir. Bununla da Yardımcı teorem 2.3.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de $K_0(z)$ ödüllü yenileme sürecinin varyansının kesin şeklini ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3.1: $\forall z > 0$ için $K_0(z)$ ödüllü yenileme sürecinin varyansının kesin şekli aşağıdaki gibidir:

$$Var\big(K_0(z)\big) = D_2(z) + 2D_1^{*2}(z) - \big(D_1(z)\big)^2$$

Burada notasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D_1(z) \equiv E\left\{\sum_{i=1}^{H(z)-1} v_i^+\right\};\; D_2(z) \equiv E\left\{\sum_{i=1}^{H(z)-1} v_i^{+2}\right\}$$

$$D_1^{*2}(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s) dD_1\,(s) = D_1(z) * D_1(z)$$

İspat: Varyansın tanımına göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$Var\big(K_0(z)\big) = E\big(K_0^2(z)\big) - \Big(E\big(K_0(z)\big)\Big)^2 \tag{2.34}$$

Diğer taraftan $E\left(K_0^2(z)\right)$ için

$$E\left(K_0^2(z)\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+\right)^2\right]$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^{+2}\right) + 2E\left\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\} \qquad (2.35)$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.35) eşitliğini (2.34) eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$Var\left(K_0(z)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^{+2}\right)$$

$$+2E\left\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\} - \left(E\left(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+\right)\right)^2 \qquad (2.36)$$

eşitliğini elde ederiz. Yardımcı Teorem 2.3.1'de ispat edilmiştir ki,

$$D_1(z) * D_1(z) = E\left\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le H(z)-1} \nu_i^+ \nu_j^+\right\}$$

eşitliği doğrudur. Bu durumda (2.36) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$Var\left(K_0(z)\right) = D_2(z) + 2D_1(z) * D_1(z) - \left(D_1(z)\right)^2$$

$$= D_2(z) + 2D_1^{*2}(z) - \left(D_1(z)\right)^2 \qquad (2.37)$$

Bu da Teorem 2.3.1'i ispatlar.

Şimdi ise $z \to \infty$ iken $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için iki terimli asimptotik açılımı elde edeceğimiz teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.2: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun:

i) $\alpha_2 \equiv E(\nu_1^{+2}) < +\infty$,

ii) $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty$,

iii) $n_{r_1 r_2} \equiv E\left(\chi_1^{+r_1} \cdot \nu_1^{+r_2}\right) < +\infty, r_1 = 1,2;\ r_2 = 1,2$

Bu takdirde, $z \to \infty$ iken $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımı yazabiliriz.

$$Var\left(K_0(z)\right) = dz + e + o(1)$$

Burada $d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1}$;

$e \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{1}{\mu_1^2}n_{11}^2 + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2 - \frac{1}{\mu_1}n_{12}'$ dır.

İspat: Teorem 2.3.1' de $Var\left(K_0(z)\right)$ 'in kesin şekli bulunmuştur. Bu formülden yararlanarak $Var\left(K_0(z)\right)$ için ikiterimli asimptotik açılım elde etmek mümkündür. Bunun için önce $D_1(z)$, $\left(D_1(z)\right)^2$, $D_1^{*2}(z)$, $D_2(z)$'in açılımlarını yazalım.

Teorem 2.2.1 'de $D_1(z) = az + b + o(1)$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Önerme 2.3.2'de $D_1(z) = az + b + o\left(\frac{1}{z}\right)$ şeklinde olduğu ispat edilmiştir. Bu durumda $\left(D_1(z)\right)^2$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\left(D_1(z)\right)^2 = a^2 z^2 + 2abz + b^2 + o(1) \qquad (2.38)$$

Teorem 2.2.1' de ν_i^+ yerine ν_i^{+2} yazıldığında

$$D_2(z) \equiv E\left\{\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^{+2}\right\} = \frac{\alpha_2}{\mu_1}z + \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_2 - \frac{n_{12}}{\mu_1}\right] + o(1) \qquad (2.39)$$

olduğunu görmek mümkündür. Ayrıca, $r^*(z)$'in tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$D_1^{*2}(z) \equiv \int_{s=0}^{z} D_1(z-s)dD_1\,(s)$$

$$= \int_{s=0}^{z} r^*(z-s)dD_1\,(s) + \int_{s=0}^{z} [a(z-s)+b]dD_1\,(s) \qquad (2.40)$$

Anahtar Yenileme teoremine göre

$$\int_{s=0}^{z} r^*(z-s)dD_1\,(s) = r^*(z) * D_1(z) = al^* + o(1) \tag{2.41}$$

açılımı doğrudur (Brown, M., Solomon, H., (1975)). Ayrıca, $z \to \infty$ iken aşağıdaki açılım sağlanmaktadır:

$$\int_{s=0}^{z} [a(z-s)+b]dD_1\,(s) = a\int_{s=0}^{z} D_1(s)d\,(s) + bD_1(z)$$

$$= a\int_{0}^{z} r^*(s)\,ds \;+ a\int_{s=0}^{z} [as+b]ds + \;bD_1(z)$$

$$= \frac{1}{2}a^2z^2 + 2abz + al^* + b^2 + o(1) \tag{2.42}$$

(2.41) ve (2.42) açılımlarını (2.3.40) eşitliğinde yerine yazıp sadeleştirdiğimiz takdirde,

$$D_1{}^{*2}(z) = \frac{1}{2}a^2z^2 + 2abz + 2al^* + b^2 + o(1) \tag{2.43}$$

açılımını elde ederiz. Burada $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1};\; b \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - \frac{n_{11}}{\mu_1};\; l \equiv \frac{1}{4}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^3} - \frac{1}{6}\frac{\mu_3}{\mu_1^2};$
$l^* \equiv \alpha_1 l + \frac{1}{2}\frac{n_{21}}{\mu_1} - \frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1^2}n_{11}{}'$ dır.

(2.38), (2.39) ve (2.43) açılımlarını (2.37) eşitliğinde yerine yazdığımızda $K_0(z)$ yardımcı sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki açılımı elde ederiz.

$$Var\big(K_0(z)\big) = \frac{\alpha_2}{\mu_1}z + \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_2 - \frac{n_{12}}{\mu_1}\right] + a^2z^2 + 4abz + 4al^*$$

$$+2b^2 - a^2z^2 - 2abz - b^2 + o(1)$$

$$= \left[\frac{\alpha_2}{\mu_1} + 2ab\right]z + \left[4al^* + b^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_2 - \frac{n_{12}}{\mu_1}\right] + o(1)$$

Kolaylık açısından aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1}$$

$$e \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{1}{\mu_1^2}n_{11}^2 + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2 - \frac{1}{\mu_1}n_{12}$$

Bu takdirde,

$$Var\big(K_0(z)\big) = dz + e + o(1)$$

eşitliğini elde ederiz. Bununla da Teorem 2.3.2'ün ispatı tamamlanmış olur.
Şimdi de $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansını inceleyelim

2.4. N0(z) Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değer ve Varyansı

Önceden de belittiğimiz gibi $N_0(z)$ sınır fonksiyoneli $\xi_0 = 0$ olduğu durumda $N(z)$ sınır fonksiyoneli ile aynı davranış sergileyemektedir. Ayrıca, $N_0(z)$ sınır fonksiyoneli matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$N_0(z) = \max\{n \geq 0: X_n > 0\} = \max\{n \geq 0: S_n < z\}$$

$\mathcal{L}_0(z) \equiv E\big(N_0(z)\big)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını ifade eden teoremi aşağıdaki şekilde verelim.

Teorem 2.4.1: Varsayalım ki, $\alpha_1 \equiv E(\nu_1^+) < +\infty$; $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < +\infty$ koşulları sağlanmıştır. Bu takdirde, $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki açılım doğrudur:

$$\mathcal{L}_0(z) = az + k + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

Burada $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1}$; $k \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1$'dir.

İspat: Dynkin prensipine göre $N_0(z)+1$ sınır fonksiyonelini

$$N_0(z)+1 \equiv \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^{+} \tag{2.44}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $H(z)$ süreci $\{\chi_n^{+}\}$ dizisinin oluşturduğu bir Yenileme sürecidir. Ayrıca, $H(z)$ durdurma anı olduğu için Wald özdeşliğine göre $N_0(z)+1$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için

$$E(N_0(z)+1\,) = E\left(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^{+}\right) = E(\nu_1^{+})E\big(H(z)\big) \tag{2.45}$$

eşitliğini yazabiliriz (Feller (1971)). $\mu_3 < +\infty$ koşulu sağlandığı takdirde $E\big(H(z)\big)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir (Feller (1971)):

$$E\big(H(z)\big) = \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.46}$$

(2.46) eşitliğini (2.45) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$E(N_0(z)+1\,) = E(\nu_1^{+})E\big(H(z)\big) = \alpha_1\left(\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \frac{\alpha_1}{\mu_1}z + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.47}$$

açılımını elde etmiş oluyoruz. (2.47) açılımından $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki ikiterimli asimptotik sonuç elde edilir:

$$\mathcal{L}_0(z) \equiv E(N_0(z)\,) = \frac{\alpha_1}{\mu_1}z + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1\right) + o\left(\frac{1}{z}\right) = az + k + \ o\left(\frac{1}{z}\right)$$

Bununla da Teorem 2.4.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını inceleyelim.

Teorem 2.4.2: Varsayalım ki, aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır:

i) $\alpha_2 \equiv E(\nu_1^{+2}) < +\infty,$

ii) $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty,$

iii) $n_{r_1 r_2} \equiv E\left(\chi_1^{+r_1} \cdot \nu_1^{+r_2}\right) < +\infty, r_1 = 1{,}2;\ r_2 = 1$

Bu takdirde, $z \to \infty$ iken $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımı yazabiliriz.

$$Var\left(N_0(z)\right) = dz + f + o(1)$$

Burada $d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1};$

$f \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2{}'$ dır.

İspat: (2.44) eşitliğini kullanarak $N_0(z)$ sınır fonksiyonelini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$N_0(z) = \sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+ + \nu_{H(z)}^+ - 1 = K_0(z) + \nu_{H(z)}^+ - 1$$

Bu durumda $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını

$$Var\left(N_0(z)\right) = Var\left(K_0(z) + \nu_{H(z)}^+ - 1\right)$$

$$= Var\left(K_0(z)\right) + Var\left(\nu_{H(z)}^+\right) + 2Cov\left(K_0(z); \nu_{H(z)}^+\right) \qquad (2.48)$$

şeklinde yazabiliriz. $Var\left(N_0(z)\right)'$ i hesaplayabilmek için öncelikle $Cov\left(K_0(z); \nu_{H(z)}^+\right)$ ifadesini hesaplamamız gerekmektedir. Bu amacla hesaplamaları aşağıdaki şekilde devam ettirelim:

$$Cov\left(K_0(z); \nu_{H(z)}^+\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^{H(z)-1} \nu_i^+ ; \nu_{H(z)}^+\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Cov\left(\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i^+ \ ; \nu_n^+\right) P\{H(z) = n\}$$

Feller, (1971) ispat etmiştir ki, ν_n^+rasgele değişkeni $\nu_1^+; \nu_2^+; \dots; \nu_n^+$ dizisi ile bağımlı değildir. Bu takdirde $Cov(\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i^+ \ ; \nu_n^+) = 0$ olacaktır ve $Cov\big(K_0(z); \nu_{H(z)}^+\big)$ için

$$Cov\big(K_0(z); \nu_{H(z)}^+\big) = \sum_{n=1}^{\infty} Cov\left(\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i^+ \ ; \nu_n^+\right) P\{H(z) = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot P\{H(z) = n\} = 0 \qquad (2.49)$$

eşitliğini elde etmiş oluyoruz. (2.49) eşitliğini (2.48) eşitliğinde yerine yazdığımızda aşağıdaki sonuçu elde ederiz:

$$Var\big(N_0(z)\big) = Var\big(K_0(z)\big) + Var\big(\nu_{H(z)}^+\big) \qquad (2.50)$$

Teorem 2.3.2'de $K_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki gibi ifade edilmiş asimptotik sonuç elde edilmiştir:

$$Var\big(K_0(z)\big) = dz + e + o(1) \qquad (2.51)$$

Burada $d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1}$;

$e \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{1}{\mu_1^2}n_{11}^2 + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2 - \frac{1}{\mu_1}n_{12}'$ dır.

Şimdi de $\nu_{H(z)}^+$rasgele değişkeninin varyansını hesaplayalım.Varyansın tanımına göre

$$Var\left(\nu_{H(z)}^{+}\right) = E\left(\nu_{H(z)}^{+2}\right) - \left(E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right)^{2} \tag{2.52}$$

eşitliği yazılabilir. Brown, M., Solomon, H., (1975) ispat etmiştir ki, $E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)$ için aşağıdaki asimptotik sonuçun doğrudur:

$$E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right) = \frac{E(\chi_1^{+}\nu_1^{+})}{E(\chi_1^{+})} + o(1) = \frac{n_{11}}{\mu_1} + o(1) \tag{2.53}$$

(2.53) eşitliği kareye yükseltildiğinde

$$\left(E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right)^{2} = \left(\frac{n_{11}}{\mu_1}\right)^{2} + o(1) \tag{2.54}$$

açılımını elde ederiz. Ayrıca göstermek mümkündür ki,

$$E\left(\nu_{H(z)}^{+2}\right) = \frac{E(\chi_1^{+}\nu_1^{+2})}{E(\chi_1^{+})} + o(1) = \frac{n_{12}}{\mu_1} + o(1) \tag{2.55}$$

(2.54) ve (2.55) açılımları (2.52) açılımında yerine yazıldığında $\nu_{H(z)}^{+}$ rasgele değişkeninin varyansı için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$Var\left(\nu_{H(z)}^{+}\right) = E\left(\nu_{H(z)}^{+2}\right) - \left(E\left(\nu_{H(z)}^{+}\right)\right)^{2} = \frac{n_{12}}{\mu_1} - \left(\frac{n_{11}}{\mu_1}\right)^{2} + o(1) \tag{2.56}$$

(2.51) ve (2.56) açılımlarını (2.50) açılımında yerine yazdığımızda $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyası için aşağıdaki iki terimli asimptotik sonucu elde ediyoruz:

$$Var\big(N_0(z)\big) = dz + f + o(1)$$

Burada $d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1}$;

$f \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2{}'$ dır.

Böylece Teorem 2.4.2' nin ispatı tamamlanmış oldu.

Şimdi de $N(z)$ sınır fonksiyonelini inceleyelim.

2.5. N(z) Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değeri

$N(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini hesaplamadan önce aşağıdaki önermeyi ispat edelim. Bu amacla $\hat{\mathcal{L}}_0(z) \equiv \mathcal{L}_0(z) - az$ notasyonunu tanımlayalım.

Önerme 2.5.1 Teorem 2.4.1'in şartları sağlandığı takdirde

$$\lim_{z\to\infty} \int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c\,(u) = k$$

olur. Burada $k \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1;\, \Phi_c(t) \equiv P\left(\xi_0 \le \frac{t}{c}\right)$'dır.

İspat: $M(z) \equiv \hat{\mathcal{L}}_0(z) * \Phi_c(z) \equiv \int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u)$ notasyonunu tanımlayalım. Ayrıca $\widetilde{M}(\lambda)$ fonksiyonu ile $M(z)$ fonksiyonunun, $\widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda)$ fonksiyonu ile $\hat{\mathcal{L}}_0(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü, $\Phi_c^*(\lambda)$ fonksiyonu ile ise $\Phi_c(z)$ fonksiyonunun Laplace Stiltijes dönüşümünü tanımlayalım, yani

$$\widetilde{M}(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, M(z)dz;\ \widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, \hat{\mathcal{L}}_0(z)dz;$$

$$\Phi_c^*(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, d\Phi_c(z)$$

olur. Tauber- Abel teoremine göre

$$\lim_{z\to\infty} M(z) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\widetilde{M}\,(\lambda) \tag{2.57}$$

yazılabilir.

Ayrıca, $\widetilde{M}(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\widetilde{M}(\lambda) = \widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda)\Phi_c^*(\lambda) \tag{2.58}$$

(2.58) eşitliği (2.57) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{z\to\infty} M(z) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\widetilde{M}\,(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\,\widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda)\Phi_c^*(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \lambda\,\widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda) \lim_{\lambda\to 0} \Phi_c^*(\lambda) \tag{2.59}$$

Ayrıca, $\Phi_c^*(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\Phi_c^*(\lambda) = \lambda\widetilde{\Phi_c}(\lambda) \tag{2.60}$$

(2.60) eşitliğini (2.59) eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$\lim_{z\to\infty} M(z) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\,\widetilde{\hat{\mathcal{L}}_0}(\lambda) \lim_{\lambda\to 0} \lambda\widetilde{\Phi_c}(\lambda) = \lim_{z\to\infty} \hat{\mathcal{L}}_0(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z)$$

eşitliğini elde ederiz. Özetle,

$$\lim_{z\to\infty} M(z) \equiv \lim_{z\to\infty} \hat{\mathcal{L}}_0(z) * \Phi_c(z) = \lim_{z\to\infty} \hat{\mathcal{L}}_0(z) \cdot \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z)$$

denklemi elde edilir. Teorem 2.4.1'den yararlanarak göstermek mümkündür ki, $\lim\limits_{z\to\infty} \hat{\mathcal{L}}_0(z) = k$'dır. Burada $k \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1'$ dır. Ayrıca, $\Phi_c(z)$ bir dağılım fonksiyonu olduğuna göre $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi_c(z) = 1$'dir. Bu takdirde, (2.5.7) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lim_{z\to\infty} M(z) = \lim_{z\to\infty} \int\limits_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) = \lim_{z\to\infty} \hat{\mathcal{L}}_0(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z)\, k \tag{2.61}$$

Bununla da Önerme 2.5.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi ise $N(z)$ Sınır Fonksiyonelinin beklenen değerini hesaplayalım.

Teorem 2.5.1: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun:

$$\alpha_1 \equiv E(\nu_1^+) < +\infty;\ \mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < +\infty;\ E(\xi_0) < +\infty$$

Bu takdirde, $z \to \infty$ iken $N(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımı yazabiliriz:

$$E\big(N(z)\big) = az + k - acE(\xi_0) + o(1)$$

Burada $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1}$; $k \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1$ ve c pozitif bir katsayıdır.

İspat: $\mathcal{L}_1(z) \equiv E\big(N(z)\big)$ notasyonunu tanımlayalım. $X(t)$ süreci ξ_0 kadar sağa kaydırıldığı takdirde, $\mathcal{L}_1(z)$ için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\mathcal{L}_1(z) \equiv E\big(N(z)\big) = \int_{s=0}^{\frac{z}{c}} E\big(N_0(z - cs)\big)\, d\Phi_0(s)$$

$$= \int_{s=0}^{\frac{z}{c}} \mathcal{L}_0(z - cs)\, d\Phi_0(s) = \int_{u=0}^{z} \mathcal{L}_0(z - u)\, d\Phi_0\left(\frac{u}{c}\right)$$

Burada $\Phi_c(t) \equiv P\left(\xi_0 \leq \frac{t}{c}\right)$'dır. $\Phi_c(u) \equiv \Phi_0\left(\frac{u}{c}\right)$ notasyonu tanımlayalım. Bu takdirde, $N(z)$ sınır fonksiyoneli için aşağıdaki integral denklem yazılabilir:

$$\mathcal{L}_1(z) = \int_{u=0}^{z} \mathcal{L}_0(z - u)\, d\Phi_c(u) \tag{2.62}$$

$\mathcal{L}_1(z)$ için asimptotik açılım elde etmek için (2.62) eşitliğinin her iki tarafından az'i çıkarttığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\mathcal{L}_1(z) - az = \int_{u=0}^{z} \mathcal{L}_0(z - u)\, d\Phi_c(u) - az$$

Kısaltmak için $\hat{\mathcal{L}}_1(z) \equiv \mathcal{L}_1(z) - az$ notasyonunu tanımlayalım ve $\hat{\mathcal{L}}_1(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde hesaplayalım:

$$\hat{\mathcal{L}}_1(z) = \int_{u=0}^{z} [\mathcal{L}_0(z-u) - a(z-u)]\, d\Phi_c(u) + a \int_{u=0}^{z} (z-u)\, d\Phi_c(u) - az$$

$$= \int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) + a \int_{u=0}^{z} \Phi_c(u)\, du - a \int_{u=0}^{z} du$$

$$= \int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) - a \int_{u=0}^{z} \big(1 - \Phi_c(u)\big)\, du$$

Özetle,

$$\hat{\mathcal{L}}_1(z) = \int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) - a \int_{u=0}^{z} \big(1 - \Phi_c(u)\big)\, du \tag{2.63}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 2.5.1'de $z \to \infty$ iken $\int_{u=0}^{z} \hat{\mathcal{L}}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) \to k$ olduğu ispat edilmişti. Ayrıca, göstermek mümkündür ki, $z \to \infty$ iken

$$\lim_{z\to\infty} \int_{u=0}^{z} \big(1 - \Phi_c(u)\big)\, du = cE(\xi_0) \tag{2.64}$$

olur. (2.63) denkleminde (2.61), (2.64) açılımlarını göz önünde bulundurduğumuz takdirde $z \to \infty$ iken $\hat{\mathcal{L}}_1(z)$ için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\hat{\mathcal{L}}_1(z) \equiv \mathcal{L}_1(z) - az = k - acE(\xi_0) + o(1)$$

Buradan da

$$\mathcal{L}_1(z) \equiv E\big(N(z)\big) = az + k - acE(\xi_0) + o(1)$$

açılımını elde etmiş oluyoruz. Burada ξ_0 rasgele değişkeni ξ_n $(n \geq 1)$ rasgele değişkenleri ile aynı dağılıma sahiptir. Ayrıca, $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1}$; $k \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1$ ve c pozitif bir katsayıdır. Bununla da Teorem 2.5.1 ispatlanmış olur.

Şimdi de $N(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını inceleyelim.

2.6. N(z) Sınır Fonksiyonelinin Varyansı

Aşağıdaki notasyonunu tanımlayalım:

$$\bar{p}(z) \equiv Var\big(N_0(z)\big) - dz - f$$

$$p^* \equiv E\big(N_0(z)\big) - az - k$$

Amacımız $N(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için asimptotik sonuç elde etmektir. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.6.1. Varsayalım ki, aşağıdaki koşullar sağlanır:

- **i)** $\alpha_2 \equiv E(\nu_1^{+2}) < +\infty,$
- **ii)** $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty,$
- **iii)** $n_{r_1 r_2} \equiv E\big(\chi_1^{+r_1} \cdot \nu_1^{+r_2}\big) < +\infty, r_1 = 1{,}2;\ r_2 = 1,$
- **iv)** $E(\xi_0) < +\infty,$

Bu takdirde $z \to \infty$ iken $N(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için

$$Var\big(N(z)\big) = dz + f - dcE(\xi_0) + o(1)$$

asimptotik açılımı doğrudur. Burada $d \equiv \frac{\alpha_1^2}{\mu_1^3}\mu_2 - 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{11} + \frac{\alpha_2}{\mu_1}$;

$f \equiv \frac{5\alpha_1^2}{4\mu_1^4}\mu_2^2 - \frac{2\alpha_1^2}{3\mu_1^3}\mu_3 + 2\frac{\alpha_1}{\mu_1^2}n_{21} - 3\frac{\alpha_1}{\mu_1^3}\mu_2 n_{11} + \frac{\alpha_2}{2\mu_1^2}\mu_2$ ve c pozitif bir katsayıdır.

İspat: Varyansın tanımına göre

$$Var\big(N(z)\big) = E\big(N(z)\big)^2 - \Big(E\big(N(z)\big)\Big)^2 \tag{2.65}$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca, kaydırma işleminin yardımıyla $N(z)$ sınır fonksiyonelini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$N(z) = I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\{N_0(z - c\xi_0)\} \tag{2.66}$$

(2.66) eşitliğinin her iki tarafını kareye yükseltip beklenen değer hesapladığımızda

$$E\big(N(z)\big)^2 = E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} N_0^2(z - c\xi_0)\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. Varyansın tanımından yararlanarak $E\big(N(z)\big)^2$ ifadesini

$$E\big(N(z)\big)^2 = E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} N_0^2(z - c\xi_0)\right\}$$

$$= E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\left[Var\big(N_0(z - c\xi_0)\big) + \Big(E\big(N_0(z - c\xi_0)\big)\Big)^2\right]\right\} \qquad (2.67)$$

şeklinde yazabiliriz. Teorem 2.4.2'de

$$Var\big(N_0(z)\big) = dz + f + o(1) \qquad (2.68)$$

olduğu ispat edilmiştir. $\bar{p}(z)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak (2.66) eşitliği aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$Var\big(N_0(z)\big) = dz + f + \bar{p}(z)$$

Bu takdirde

$$Var\big(N_0(z - c\xi_0)\big) = d(z - c\xi_0) + f + \bar{p}(z - c\xi_0) \qquad (2.69)$$

olur. Ayrıca, Teorem 2.4.1'de

$$E\big(N_0(z)\big) = az + k + o(1)$$

olduğu ispat edilmiştir. Burada $a \equiv \frac{\alpha_1}{\mu_1}; k \equiv \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1\right]'$dır. Ayrıca, $p^*(z)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak $E\big(N_0(z)\big)$ için aşağıdaki eşitliği yazılabilir:

$$E\big(N_0(z)\big) = az + k + p^*(z)$$

Burada $p^*(z) \equiv E\big(N_0(z)\big) - az - k$'dır. Bu takdirde $E\big(N_0(z - c\xi_0)\big)$'ni aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$E\big(N_0(z - c\xi_0)\big) = a(z - c\xi_0) + k + p^*(z - c\xi_0) \tag{2.70}$$

(2.70) eşitliğinin her iki tarafı kareye yükseltildiğinde

$$\Big(E\big(N_0(z - c\xi_0)\big)\Big)^2 = a^2z^2 + z(2ak - 2a^2c\xi_0) + (a^2c^2\xi_0^2 - 2akc\xi_0 + b^2)$$

$$+2(a(z - c\xi_0) + k)p^*(z - c\xi_0) + \big(p^*(z - c\xi_0)\big)^2 \tag{2.71}$$

eşitliği elde edilir. (2.69) ve (2.71) eşitliklerini (2.67) eşitliğinde yerine yazıp sadeleştirdiğimiz zaman $E\big(N(z)\big)^2$ için

$$E\big(N(z)\big)^2 = E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\left[Var\big(N_0(z - c\xi_0)\big) + \Big(E\big(N_0(z - c\xi_0)\big)\Big)^2\right]\right\}$$

$$E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}[a^2z^2 + z(d + 2ak - 2a^2c\xi_0)]\right\}$$

$$+E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}[a^2c^2\xi_0^2 + k^2 + f - 2akc\xi_0 - dc\xi_0]\right\}$$

$$+E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\left[\bar{p}(z - c\xi_0) + 2(a(z - c\xi_0) + k)p^*(z - c\xi_0) + \big(p^*(z - c\xi_0)\big)^2\right]\right\}$$

$$= a^2z^2 + z\big(d + 2ak - 2a^2cE(\xi_0)\big)$$

$$+\big(a^2c^2E(\xi_0^2) + k^2 + f - 2akcE(\xi_0) - dcE(\xi_0)\big)$$

$$+2aE\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}(z - c\xi_0)p^*(z - c\xi_0)\right\} + 2kE\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}p^*(z - c\xi_0)\right\}$$

$$+E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\,\bar{p}(z - c\xi_0)\right\} + E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\big(p^*(z - c\xi_0)\big)^2\right\} \tag{2.72}$$

eşitliğini elde ederiz. Kısalık için hesaplamanı aşağıdaki gibi devam ettirelim. İlk olarak $E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}}\,p^*(z - c\xi_0)\right\}$ ifadesini hesaplayalım.

$$E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} p^*(z - c\xi_0)\right\} = \int\limits_{s=0}^{\frac{z}{c}} p^*(z - cs)\, d\Phi_0(s)$$

$$= \int\limits_{u=0}^{z} p^*(z-u)\, d\Phi_0\left(\frac{u}{c}\right) \qquad (2.73)$$

Burada $\Phi_c(t) \equiv P\left(\xi_0 \le \frac{t}{c}\right)$'dır. $\Phi_c(u) \equiv \Phi_0\left(\frac{u}{c}\right)$ notasyonunu tanımlayalım. Bu takdirde (2.73) eşitliği

$$E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} p^*(z - c\xi_0)\right\} = \int\limits_{u=0}^{z} p^*(z-u)\, d\Phi_c(u)$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 2.5.1 ile benzer şekilde göstermek mümkündür ki,

$$\lim_{z\to\infty} \int\limits_{u=0}^{z} p^*(z-u)\, d\Phi_c(u) = \lim_{z\to\infty} p^*(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z)$$

olur. Önerme 2.3.2 ile benzer şekilde göstermek mümkündür ki, $\int_{z=0}^{\infty} p^*(z)\, dz < \infty$'dır. Bu takdirde, $p^*(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$'dır. Ayrıca, $\Phi_c(z)$ bir dağılım fonksiyonu olduğuna göre $\lim_{z\to\infty} \Phi_c(z) = 1$'dir. Bu durumda,

$$\lim_{z\to\infty} \int\limits_{u=0}^{z} p^*(z-u)\, d\Phi_c(u) = \lim_{z\to\infty} p^*(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z) = 0 \cdot 1 = 0$$

olur. Bu durumda $z \to \infty$ iken aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} p^*(z - c\xi_0)\right\} = \int\limits_{u=0}^{z} p^*(z-u)\, d\Phi_c(u) = 0$$

Benzer kuralla göstermek mümkündür ki,

$$E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} (z - c\xi_0) p^*(z - c\xi_0)\right\} = 0;\ E\left\{I_{\xi_0 \le \frac{z}{c}} \bar{p}(z - c\xi_0)\right\} = 0;$$

$$E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\left(p^*(z-c\xi_0)\right)^2\right\}=0$$

Bu takdirde, $z\to\infty$ iken (2.72) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(N(z)\big)^2=a^2z^2+z\big(d+2ak-2a^2cE(\xi_0)\big)$$

$$+\big(a^2c^2E(\xi_0^2)+k^2+f-2akcE(\xi_0)-dcE(\xi_0)\big)+o(1) \qquad (2.74)$$

Şimdi de $\Big(E\big(N(z)\big)\Big)^2$ ifadesini hesaplayalım. Teorem 2.5.1'de ispat edilmiştir ki, $z\to\infty$ iken $N(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$E\big(N(z)\big)=az+k-acE(\xi_0)+o(1)$$

Belli koşullar altında göstermek mümkündür ki,

$$E\big(N(z)\big)=az+k-acE(\xi_0)+o\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (2.75)$$

olur. (2.75) açılımının her iki tarafını kareye yükselttiğimizde

$$\Big(E\big(N(z)\big)\Big)^2=a^2z^2+z\big(2ak-2a^2cE(\xi_0)\big)$$

$$+\Big(a^2c^2\big(E(\xi_0)\big)^2+k^2-2akcE(\xi_0)\Big)+o(1) \qquad (2.76)$$

asimptotik açılımını elde ederiz. (2.74) ve (2.76) açılımlarını (2.65) eşitliğinde yerine yazarsak, $z\to\infty$ iken $N(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki gibi ifade edilmiş asimptotik açılımı elde ederiz:

$$Var\big(N(z)\big)=E\big(N(z)\big)^2-\Big(E\big(N(z)\big)\Big)^2$$

$$=dz+f-dcE(\xi_0)+Var(\xi_0)+o(1)$$

Bununla da Teorem 2.6.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de amacımız sisteme, kaynağının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde yapılacak bakım politikasını belirlemekte önem arz eden $X_{N_0(z)+1}$ ve $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonellerini incelenmektir. Fakat $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin incelemek için öncelikle $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin incelenmesi gerekmektedir.

2.7. $S_{N_0(z)+1}$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değer ve Varyansı

Şimdi ise $X(t)$ sürecinin $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansını inceleyelim. $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyoneli tanımına göre $S_{N_0(z)+1} \equiv \sum_{i=1}^{N_0(z)+1} V_i$ şeklindedir. Ayrıca, Dynkin prensibine $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyoneli aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$S_{N_0(z)+1} \equiv \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \equiv S_{H(z)}^+$$

Burada $H(z)$ süreci $\{\chi_n^+\}$ dizisinin oluşturduğu bir Yenileme sürecidir ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$H(z) \equiv min\{n \geq 1 \colon \textstyle\sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\}, z > 0$$

Amacımız $z \to \infty$ iken $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansı için asimptotik açılım elde etmektir. Bunun için Khaniyev T.A.,'in (2005) makalesindeki yöntemden yararlanacağız. Bu amaçla aşağıdaki fonksiyonu dâhil edelim:

$$\Psi(s,k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right)dz, \quad s > 0, k \geq 0 \qquad (2.77)$$

Ayrıca, $\varphi(\alpha) \equiv E\left(e^{-\alpha\chi_1^+}\right);\ \alpha \geq 0$ fonksiyonunu da tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 2.7.1: χ_1^+ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun iki katlı dönüşümü ifade eden $\Psi(s,k)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanıyor (Khaniyev, T.A., (2005)):

$$\Psi(s,k) = \frac{\varphi(k) - \varphi(s+k)}{s\left(1 - \varphi(s+k)\right)}$$

İspat: (2.77) eşitliği ile tanımlanmış $\Psi(s,k)$ fonksiyonunun hesaplamadan önce beklenen değer tanımından yararlanarak $E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right)$'i aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right) = E\left(e^{-kS^+_{H(z)}}\right) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx}\, dP\{S^+_{H(z)} \le x\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx}\, P\{S^+_{H(z)} \in dx\} = \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx}\, P\left\{\sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \in dx\right\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{H(z) = n; \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \in dx\right\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} P\{S^+_{n-1} < z < S^+_n;\ S_n \in dx\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} P\{S^+_{n-1} \in ds;\ s < z < s + \chi_n^+;\ s + \chi_n^+ \in dx\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} P\{S^+_{n-1} \in ds;\ \chi_1^+ > z - s;\ \chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} P\{S^+_{n-1} \in ds;\ \chi_1^+ > z - s;\ \chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} P\{S^+_{n-1} \in ds;\ \ \chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \int_{s=0}^{z} \sum_{n=1}^{\infty} P\{S^+_{n-1} \in ds\}\, P\{\chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \int_{s=0}^{z} \sum_{m=0}^{\infty} P\{S^+_m \in ds\}\, P\{\chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \int_{s=0}^{z} dU_+(s)\, P\{\chi_1^+ \in d(x-s)\}$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \int_{s=0}^{z} d\,U_+(s) f_{\chi_1^+}(x-s)dx$$

$$= \int_{s=0}^{z} dU_+(s) \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x-s)dx$$

$$= \int_{s=0}^{z} e^{-ks} dU_+(s) \int_{x=z}^{\infty} e^{-k(x-s)} f_{\chi_1^+}(x-s)dx$$

Özetle, $E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right)$ için aşağıdaki eşitliği elde etmiş oluyoruz:

$$E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right) = \int_{s=0}^{z} e^{-ks} dU_+(s) \int_{x=z}^{\infty} e^{-k(x-s)} f_{\chi_1^+}(x-s)dx \qquad (2.78)$$

Burada $U_+(s)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$U_+(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n^+ \leq s\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \leq s\right\}$$

(2.78) eşitliğini (2.77) eşitliğinde yerine yazdığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\Psi(s,k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(e^{-kS_{N_0(z)+1}}\right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} \int_{s=0}^{z} e^{-ks} dU_+(s) \int_{x=z}^{\infty} e^{-k(x-s)} f_{\chi_1^+}(x-s)dx\, dz \qquad (2.79)$$

Kolaylık açısından aşağıdaki fonksiyonları dâhil edelim:

$$R_1(z) \equiv \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x)dx;\ R_2\{ds\} \equiv e^{-ks} dU_+(s)$$

Bu takdirde, (2.79) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Psi(s,k) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} \int_{s=0}^{z} R_1(z-s) R_2\{ds\}\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} \left(R_1(z) * R_2(z)\right) dz = \widetilde{R_1}(s) R_2^*(s) \qquad (2.80)$$

Burada $\widetilde{R_1}(s)$ fonksiyonu $R_1(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $R_2^*(s)$ ise $R_2(z)$ fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümüdür. Şimdi de $\widetilde{R_1}(s)$ fonksiyonunu hesaplayalım:

$$\widetilde{R_1}(s) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} R_1(z) dz = \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx dz$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sz} \int_{z=0}^{x} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx dz = \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx \int_{z=0}^{x} e^{-sz}\, dz$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sx}\right) e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx$$

$$= \frac{1}{s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx - \frac{1}{s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-(k+s)x} f_{\chi_1^+}(x) dx \tag{2.81}$$

$\varphi(\alpha)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak (2.81) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\widetilde{R_1}(s) = \frac{1}{s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x) dx - \frac{1}{s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-(k+s)x} f_{\chi_1^+}(x) dx$$

$$= \frac{\varphi(k) - \varphi(s+k)}{s} \tag{2.82}$$

Şimdi de $R_2^*(s)$ fonksiyonunu hesaplayalım.

$$R_2^*(s) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} \cdot e^{-kz} dU_+(z) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-(s+k)z}\, dU_+(z) = U_+^*(s+k) \tag{2.83}$$

Hatırlasak olursak, $\widetilde{U_+}(s) = \frac{1}{s(1-\varphi(s))}$; $U_+^*(s) = s\, \widetilde{U_+}(s) = \frac{1}{1-\varphi(s)}$ olur. Burada $\widetilde{U_+}(s)$ fonksiyonu ile $U_+(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $U_+^*(s)$ fonksiyonu ile ise $U_+(z)$ fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümü tanımlanmıştır. Bu takdirde, (2.83) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_2^*(s) = U_+^*(s+k) = \frac{1}{1 - \varphi(s+k)} \tag{2.84}$$

(2.82) ve (2.84) eşitliklerini (2.80) eşitliğinde yerine yazarsak, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Psi(s,k) = \widetilde{R_1}(s) R_2^*(s) = \frac{\varphi(k) - \varphi(s+k)}{s\big(1 - \varphi(s+k)\big)}$$

Bununla da Yardımcı Teorem 2.7.1' in ispatı tamamlanmış oldu.

$S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansının kesin şeklini elde etmek için Yardımcı Teorem 2.7.1 kendi başına yeterli değildir. Bundan dolayı aşağıdaki teoremi de ispat etmemiz gerekmektedir.

Teorem 2.7.1: χ_1^+ rasgele değişkenin ikinci momenti mevcut ve sonlu olduğu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

a) $\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\big(S_{H(z)}^{+}\big) dz = \mu_1 \widetilde{U_+}(s)$,

b) $\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\big(S_{H(z)}^{+2}\big) dz = \mu_2 \widetilde{U_+}(s) + 2\mu_1 \widetilde{U_+}(s) U_+^*(s) L_1^*(s)$,

Burada, $\mu_k \equiv E\big(\chi_1^{+k}\big);\ k \geq 1;\ L_1^*(s) \equiv E\big(\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+}\big)$'dir.

Ayrıca $U_+(z)$ ile χ_1^+ rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonu tanımlanmıştır.

İspat: Yardımcı Teorem 2.7.1'de ispat edilmiştir ki,

$$\Psi(s,k) = \frac{\varphi(k) - \varphi(s+k)}{s\big(1 - \varphi(s+k)\big)} \tag{2.85}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Ayrıca, $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ ise aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\varphi(\alpha) \equiv E\big(e^{-\alpha\chi_1^+}\big) = 1 - \alpha E(\chi_1^+) + \frac{\alpha^2}{2} E(\chi_1^{+2}) + o(\alpha^2)$$
$$= 1 - \alpha\mu_1 + \frac{\alpha^2}{2}\mu_2 + o(\alpha^2)$$

Bu takdirde, her $s > 0$ için $k \to 0$ iken $\varphi(s+k)$ fonksiyonu için aşağıdaki açılım doğrudur:

$$\varphi(s+k) = E\big(e^{-(s+k)\chi_1^+}\big) = E\big(e^{-s\chi_1^+} e^{-k\chi_1^+}\big)$$

$$= E\left(e^{-s\chi_1^+}\left(1 - k\chi_1^+ + \frac{\alpha^2}{2}\chi_1^{+2} + o(k^2)\right)\right)$$

$$= E\left(e^{-s\chi_1^+} - k\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+} + \frac{k^2}{2}\chi_1^{+2} e^{-s\chi_1^+} + o(k^2)\right)$$

$$= E\left(e^{-s\chi_1^+}\right) - kE\left(\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+}\right) + \frac{k^2}{2} E\left(\chi_1^{+2} e^{-s\chi_1^+}\right) + o(k^2) \tag{2.86}$$

$\varphi(\alpha)$ ve $L_1^*(s)$ fonksiyonlarının tanımından yararlanarak her $s > 0$ için $k \to 0$ iken (2.86) açılımını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\varphi(s+k) = E\left(e^{-s\chi_1^+}\right) - kE\left(\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+}\right) + \frac{k^2}{2} E\left(\chi_1^{+2} e^{-s\chi_1^+}\right) + o(k^2)$$

$$= \varphi(s) - kL_1^*(s) + \frac{k^2}{2} L_2^*(s) + o(k^2)$$

Buradan da aşağıdaki açılımlar elde edilir. İlk olarak $\varphi(k) - \varphi(s+k)$ ifadesi için açılımı hesaplayalım:

$$\varphi(k) - \varphi(s+k) == 1 - \varphi(s) + k(L_1^*(s) - \mu_1) - \frac{k^2}{2}(L_2^*(s) - \mu_2) + o(k^2)$$

$$= \left(1 - \varphi(s)\right)\left(1 + k\frac{L_1^*(s) - \mu_1}{1 - \varphi(s)} - \frac{k^2}{2} \cdot \frac{L_2^*(s) - \mu_2}{1 - \varphi(s)} + o(k^2)\right) \tag{2.87}$$

Şimdi $1 - \varphi(s+k)$ ifadesi için aşağıdaki açılımı yazalım:

$$1 - \varphi(s+k) = 1 - \varphi(s) + kL_1^*(s) - \frac{k^2}{2} L_2^*(s) + o(k^2)$$

$$= \left(1 - \varphi(s)\right)\left(1 + k\frac{L_1^*(s)}{1 - \varphi(s)} - \frac{k^2}{2} \cdot \frac{L_2^*(s)}{1 - \varphi(s)} + o(k^2)\right) \tag{2.88}$$

(2.87) ve (2.88) açılımlarını (2.85) formülünde yerlerine yazarsak,

$$\Psi(s,k)=\frac{\varphi(k)-\varphi(s+k)}{s\big(1-\varphi(s+k)\big)}$$

$$=\frac{\big(1-\varphi(s)\big)\left(1+k\frac{L_1^*(s)-\mu_1}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)-\mu_2}{1-\varphi(s)}+o(k^2)\right)}{s\big(1-\varphi(s)\big)\left(1+k\frac{L_1^*(s)}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)}{1-\varphi(s)}+o(k^2)\right)}$$

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{1+k\frac{L_1^*(s)-\mu_1}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)-\mu_2}{1-\varphi(s)}+o(k^2)}{1+k\frac{L_1^*(s)}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)}{1-\varphi(s)}+o(k^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{k\frac{\mu_1}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\mu_2}{1-\varphi(s)}+o(k^2)}{1+k\frac{L_1^*(s)}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)}{1-\varphi(s)}+o(k^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{\mu_1 k}{1-\varphi(s)}\cdot\frac{1-k\frac{\mu_2}{2\mu_2}+o(k)}{1+k\frac{L_1^*(s)}{1-\varphi(s)}-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{L_2^*(s)}{1-\varphi(s)}+o(k^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{\mu_1 k}{1-\varphi(s)}\cdot\frac{1-k\frac{\mu_2}{2\mu_2}+o(k)}{1+kL_1^*(s)U_+^*(s)-\frac{k^2}{2}L_2^*(s)U_+^*(s)+o(k^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\mu_1 k}{s\big(1-\varphi(s)\big)}\left(1-k\frac{\mu_2}{2\mu_1}+o(k)\right)$$

$$\times\left(1-kL_1^*(s)U_+^*(s)+\frac{k^2}{2}L_2^*(s)U_+^*(s)+k^2L_1^{*2}(s)U_+^{*2}(s)+o(k^2)\right)$$

$$=\frac{1}{s}-k\mu_1\widetilde{U_+}(s)+k^2\mu_1L_1^*(s)\widetilde{U_+}(s)U_+^*(s)+\frac{k^2}{2}\mu_2\widetilde{U_+}(s)+o(k^2)$$

$$=\frac{1}{s}-k\mu_1\widetilde{U_+}(s)+\frac{k^2}{2}\left[\mu_2\widetilde{U_+}(s)+2\mu_1L_1^*(s)\widetilde{U_+}(s)U_+^*(s)\right]+o(k^2)$$

Özetle, $k\to 0$ iken $\Psi(s,k)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\Psi(s,k) = \frac{1}{s} - k\mu_1 \widetilde{U_+}(s)$$

$$+\frac{k^2}{2}\left[\mu_2 \widetilde{U_+}(s) + 2\mu_1 L_1^*(s)\widetilde{U_+}(s)U_+^*(s)\right] + o(k^2) \qquad (2.89)$$

Diğer taraftan (2.77) eşitliğini kullanarak $s > 0$ ve $k \to 0$ iken $\Psi(s,k)$ için aşağıdaki açılımı da yazabiliriz:

$$\Psi(s,k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(e^{-kS_{H(z)}^+}\right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(1 - kS_{H(z)}^+ + \frac{k^2}{2} S_{H(z)}^{+2} + o(k^2)\right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz}\left(1 - kE\left(S_{H(z)}^+\right) + \frac{k^2}{2} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)\right) dz + o(k^2)$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz}\, dz - k\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^+\right) dz + \frac{k^2}{2}\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz + o(k^2)$$

$$= \frac{1}{s} - k\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^+\right) dz + \frac{k^2}{2}\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz + o(k^2)$$

Sonuç olarak, $s > 0$ ve $k \to 0$ iken $\Psi(s,k)$ için aşağıdaki açılım da doğrudur:

$$\Psi(s,k) = \frac{1}{s} - k\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^+\right) dz + \frac{k^2}{2}\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz + o(k^2) \qquad (2.90)$$

(2.89) ve (2.90) açılımlarını karşılaştırdığımızda, aşağıdaki eşitlikleri elde etmiş oluyoruz:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^+\right) dz = \mu_1 \widetilde{U_+}(s)$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz = \mu_2 \widetilde{U_+}(s) + 2\mu_1 \widetilde{U_+}(s) U_+^*(s) L_1^*(s)$$

Bununla da Teorem 2.7.1 ispatlanmış oldu.

$S^{+}_{H(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansının kesin şeklini elde etmeden önce aşağıdaki Önermeyi ispatlayalım. Bunun için öncelikle aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$L_1(z) \equiv \int_0^z s dF_+(s)$$

Ayrıca Teorem 2.7.1'de $L_1^*(s)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_1^*(s) \equiv E\left(\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+}\right)$$

Önerme 2.7.1: Varsayalım ki, $\int_{\boldsymbol{z=0}}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\lambda z}} dL_1(z)$ integrali mevcut ve sonludur. Bu takdirde $L_1(z)$ fonksiyonunun Laplace- Stiltijes dönüşümünü olan $L_1^*(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir (Khaniyev, T.A., (2005)):

$$L_1^*(\lambda) = E\left(\chi_1^+ e^{-\lambda\chi_1^+}\right)$$

İspat: $L_1^*(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$L_1^*(\lambda) \equiv \int_{\boldsymbol{z=0}}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\lambda z}} dL_1(z) = \int_{\boldsymbol{z=0}}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\lambda z}} \left(z dF_+(z)\right)$$

$$= \int_{\boldsymbol{z=0}}^{\infty} \left(z e^{-\boldsymbol{\lambda z}}\right) dF_+(z) \qquad (2.91)$$

Beklenen değerin tanımını kullanarak (2.91) eşitliğini

$$L_1^*(\lambda) = \int_{\boldsymbol{z=0}}^{\infty} \left(z e^{-\boldsymbol{\lambda z}}\right) dF_+(z) = E\left(\chi_1^+ e^{-\lambda\chi_1^+}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylelikle, Önerme 2.7.1'in ispatı tamamlanmış oldu.

Şimdi de Teorem 2.7.1 ve Önerme 2.7.1'den yararlanarak $E\left(S^{+}_{H(z)}\right)$ ve $Var\left(S^{+}_{H(z)}\right)$ için kesin formüller elde edebiliriz.

Teorem 2.7.2: Teorem 2.7.1'in şartları sağlandığı takdirde $E\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ve $Var\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ 'in kesin formülleri aşağıdaki şekildedir:

a) $E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = \mu_1 U_+(z)$

b) $Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = \mu_2 U_+(z) - \mu_1^2 \left(U_+(z)\right)^2 + 2\mu_1 U_+(z) * U_+(z) * L_1(z)$

Burada $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+k}\right);\ k \geq 1;\ L_1(z) = \int_0^z s dF_+(s)$'dır.

İspat: Teorem 2.7.1'de $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ olduğu takdirde

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U_+}(s) \tag{2.92}$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz = \mu_2 \widetilde{U_+}(s) + 2\mu_1 \widetilde{U_+}(s) U_+^*(s) L_1^*(s) \tag{2.93}$$

eşitliklerinin sağlandığı ispat edilmiştir. Önerme 2.7.1'de de $L_1(z)$ fonksiyonun Laplace-Stiltijes dönüşümünün $L_1^*(\lambda) = E\left(\chi_1^{+} e^{-\lambda \chi_1^{+}}\right)$ şeklinde olduğu ispat gösterilmiştir. Bu durumda (2.92) ve (2.93) eşitliklerine ters Laplace dönüşümünü uyguladığımızda

$$E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = \mu_1 U_+(z)$$

$$E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) = \mu_2 U_+(z) + 2\mu_1 U_+(z) * U_+(z) * L_1(z)$$

eşitliklerini elde ederiz. Ayrıca, varyansın tanımından yararlanarak $S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için de

$$Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) - \left(E\left(S_{H(z)}^{+}\right)\right)^2$$

$$= \mu_2 U_+(z) - \mu_1^2 \left(U_+(z)\right)^2 + 2\mu_1 U_+(z) * U_+(z) * L_1(z)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, Teorem 2.7.2'nin ispatı tamamlanmış oldu.

Teorem 2.7.2'de $X(t)$ süreçi için $S_{N_0(z)+1} \equiv S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansının kesin şekli elde edildi. Fakat uygulamada, incelediğimiz $X(t)$ süreçi için $S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansının asimptotik açılımları da oldukça önem taşımaktadır. Bu sebepten şimdi de $E\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ ve $\mathrm{Var}\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ için asimptotik açılımları hesaplayalım.

Teorem 2.7.3: $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olduğu takdirde $z \to \infty$ iken $S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki ikiterimli asimptotik açılım doğrudur:

$$E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

İspat: Wald özdeşliğini kullanarak aşağıdaki denklem yazılabilir (Feller (1971)):

$$E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^{+}\right) = E\big(H(z)\big)E(\chi_1^{+}) \tag{2.94}$$

Burada $H(z)$ süreci $\{\chi_n^{+}\}$ dizisinin oluşturduğu bir Yenileme sürecidir ve $E\big(H(z)\big)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir (Feller (1971)):

$$E\big(H(z)\big) = \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.95}$$

(2.95) açılımını (2.94) denkleminde yerine yazarsak, $E\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ için aşağıdaki ikiterimli asimptotik açılımı elde ederiz:

$$E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = E\big(H(z)\big)E(\chi_1^{+}) = \mu_1\left(\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.96}$$

Burada $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+k}\right);\ k \geq 1$'dir. Bununla da teorem ispat olundu.

Şimdi de $\mathrm{Var}\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ için asimptotik açılım elde etmeye çalışalım. Varyansın tanımına göre aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) - \left(E\left(S_{H(z)}^{+}\right)\right)^2 \tag{2.97}$$

(2.97) denklemi göz önünde bulundurduğunda, $Var\left(S_{H(z)}^{+}\right)'$in asimptotik açılımını elde etmek için ilk olarak $E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)$ için asimptotik açılımın hesaplanması gerektiği görülmektedir. Bu sebepten ilk olarak $E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)$ için asimptotik açılım elde edelim.

Teorem 2.7.4: $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olduğu takdirde $z \to \infty$ iken $E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)$ için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) = z^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} z + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(1)$$

Burada $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+k}\right);\ k \geq 1$'dır.

İspat: Teorem 2.7.1'de

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz}\, E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz = \mu_2 \widetilde{U_+}(s) + 2\mu_1 \widetilde{U_+}(s) U_+^*(s) L_1^*(s) \tag{2.93}$$

olduğunu ispat etmiştik.

Burada $\widetilde{U_+}(s) = \frac{1}{s(1-\varphi(s))}$; $U_+^*(s) = \frac{1}{1-\varphi(s)}$; $L_1^*(s) \equiv E\left(\chi_1^+ e^{-s\chi_1^+}\right)$'dır.

Ayrıca $\widetilde{U_+}(s) = \frac{U_+^*(s)}{s}$ olduğu bilinmektedir. Bu formülü (2.93) formülünün ikinci teriminde yerine yazarsak,

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz}\, E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) dz = \mu_2 \widetilde{U_+}(s) + \frac{2}{s} \mu_1 U_+^{*2}(s) L_1^*(s) \tag{2.98}$$

eşitliğini elde ederiz. Amacımız (2.98) formülünden yararlanarak $E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)$ için asimptotik açılım elde etmektir. Bu amaçla ilk olarak $s \to 0$ iken $U_+^{*2}(s)$fonksiyonu için asimptotik açılım elde etmeye çalışacağız. Yukarıda da belirttiğimiz gibi $U_+^*(s) = \frac{1}{1-\varphi(s)}$ 'dir. Bu durumda $U_+^{*2}(s) = \frac{1}{(1-\varphi(s))^2}$ olacaktır. Öncelikle $s > 0$ olduğunda $\varphi(s)$ fonksiyonunun $s \to 0$ iken Mclauren açılımını yazalım:

$$\varphi(s) \equiv E\left(e^{-s\chi_1^+}\right) = E\left(1 - s\chi_1^+ + \frac{s^2}{2}\chi_1^{+2} - \frac{s^3}{6}\chi_1^{+3} + o(s^3)\right)$$

$$= 1 - sE(\chi_1^+) + \frac{s^2}{2} E(\chi_1^{+2}) - \frac{s^3}{6} E(\chi_1^{+3}) + o(s^3)$$

$$= 1 - s\mu_1 + \frac{s^2}{2}\mu_2 - \frac{s^3}{6}\mu_3 + o(s^3)$$

Bu takdirde

$$1-\varphi(s)=s\mu_1\left(1-s\frac{\mu_2}{2\mu_1}+s^2\frac{\mu_3}{6\mu_1}+o(s^2)\right) \qquad (2.99)$$

olur. (2.99) açılımını kareye yükselttiğimizde aşağıdaki açılımı elde ediyoruz:

$$\big(1-\varphi(s)\big)^2$$

$$=s^2\mu_1^2\left(1-s\frac{\mu_2}{\mu_1}+\frac{s^2}{12}\left(3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2+4\frac{\mu_3}{\mu_1}\right)+o(s^2)\right) \qquad (2.100)$$

$U_+^*(s)$ fonksiyonunun tanımından ve (2.100) açılımından yararlanarak göstermek mümkündür ki,

$$U_+^{*2}(s)=\frac{1}{\big(1-\varphi(s)\big)^2}$$

$$=\frac{1}{s^2\mu_1^2\left(1-s\frac{\mu_2}{\mu_1}+\frac{s^2}{12}\left(3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2+4\frac{\mu_3}{\mu_1}\right)+o(s^2)\right)}$$

$$=\frac{1}{s^2\mu_1^2}\left(1+s\frac{\mu_2}{\mu_1}+\frac{s^2}{12}\left(9\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2-4\frac{\mu_3}{\mu_1}\right)+o(s^2)\right) \qquad (2.101)$$

olur. Ayrıca, $L_1^*(s)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak $s\to\infty$ iken göstermek mümkündür ki,

$$L_1^*(s)\equiv E\big(\chi_1^+e^{-s\chi_1^+}\big)$$

$$=E\left(\chi_1^+\left(1-s\chi_1^++\frac{s^2}{2}\chi_1^{+2}-\frac{s^3}{6}\chi_1^{+3}+o(s^3)\right)\right)$$

$$=E(\chi_1^+)-sE(\chi_1^{+2})+\frac{s^2}{2}E(\chi_1^{+3})+o(s^2)$$

$$= \mu_1 \left(1 - s\frac{\mu_2}{\mu_1} + s^2 \frac{\mu_3}{2\mu_1} + o(s^2)\right) \tag{2.102}$$

açılımı doğrudur. (2.101) ve (2.102) açılımlarından yararlanarak

$$U_+^{*2}(s) L_1^*(s) = \frac{1}{s^2 \mu_1}\left(1 + s\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{s^2}{12}\left(9\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - 4\frac{\mu_3}{\mu_1}\right) + o(s^2)\right)$$

$$\times \left(1 - s\frac{\mu_2}{\mu_1} + s^2 \frac{\mu_3}{2\mu_1} + o(s^2)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2 \mu_1}\left(1 + \frac{s^2}{12}\left(2\frac{\mu_3}{\mu_1} - 3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2\right) + o(s^2)\right) \tag{2.103}$$

açılımını elde etmiş oluyoruz. Aynı zamanda $\widetilde{U_+}(s)$ fonksiyonunun tanımını ve (2.99) açılımını kullanarak $s \to 0$ iken $\widetilde{U_+}(s)$ fonksiyonu için

$$\widetilde{U_+}(s) = \frac{1}{s\big(1 - \varphi(s)\big)}$$

$$= \frac{1}{s^2 \mu_1}\left(1 + s\frac{\mu_2}{\mu_1} - s^2\left(\frac{\mu_3}{6\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2\right) + o(s^2)\right) \tag{2.104}$$

açılımı elde edilir. (2.103) ve (2.104) açılımları (2.98) eşitliğinde yerine yazıldığında $\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\big(S_{H(z)}^{+2}\big)dz$ integrali için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} E\big(S_{H(z)}^{+2}\big)dz = \frac{\mu_2}{\mu_1 s^2}\left(1 + s\frac{\mu_2}{\mu_1} - s^2\left(\frac{\mu_3}{6\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2\right) + o(s^2)\right)$$

$$+ \frac{2}{s^3}\left(1 + \frac{s^2}{12}\left(2\frac{\mu_3}{\mu_1} - 3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2\right) + o(s^2)\right) \tag{2.105}$$

(2.105) açılımına Tauber-Abelian teoremini uygulamakla, $s \to 0$ iken $E\big(S_{H(z)}^{+2}\big)$ için aşağıdaki ikiterimli asimptotik sonuçu elde etmek mümkündür (Feller (1971)):

$$E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) = z^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} z + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(1) \qquad (2.106)$$

Bununla da Teorem 2.7.4 ispatlanmış oldu.

Teorem 2.7.5: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ koşulu sağlandığı takdirde $z \to \infty$ iken $S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki açılım doğrudur:

$$Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1)$$

İspat: Önceden de belirttiğimiz gibi varyansın tanımına göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = E\left(S_{H(z)}^{+2}\right) - \left(E\left(S_{H(z)}^{+}\right)\right)^2 \qquad (2.97)$$

Teorem 2.7.4' de $E\left(S_{H(z)}^{+2}\right)$için asimptotik açılım elde etmiştik. Ayrıca,Teorem 2.7.4'de $E\left(S_{H(z)}^{+}\right)$ için aşağıdaki sonucun doğru olduğu ispatlanmıştır:

$$E\left(S_{H(z)}^{+}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (2.96)$$

(2.96) açılımı kareye yükseldiğinde $\left(E\left(S_{H(z)}^{+}\right)\right)^2$ için aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilir:

$$\left(E\left(S_{H(z)}^{+}\right)\right)^2 = z^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} z + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1) \qquad (2.106)$$

(2.105) ve (2.106) açılımlarını (2.97)'de yerine yazdığımızda $S_{H(z)}^{+}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki açılımı elde ederiz.

$$Var\left(S_{H(z)}^{+}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1)$$

Bununla da Teorem 2.7.5 ispat olundu.

2.8. $S_{N(z)+1}$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değer ve Varyansı

Bu bölümde $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansı için asimptotik sonuçlar elde etmeye çalışacağız. Fakat $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini hesaplamadan önce aşağıdaki önermeleri ispat etmemiz gerekmektedir. Aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$B_0(z) \equiv E\left(S_{N_0(z)+1}\right);\ \hat{B}_0(z) \equiv\ B_0(z) - z$$

Önerme 2.8.1: Varsayalım ki, $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ koşulu sağlanmaktadır. Bu takdirde $z \to \infty$ iken

$$\lim_{z\to\infty} \int_{u=0}^{z} \hat{B}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

eşitliği doğrudur. Burada $\Phi_c(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Phi_c(t) \equiv \Phi_0\left(\frac{t}{c}\right) \equiv P\left(\xi_0 \le \frac{t}{c}\right)$$

İspat: $Q(z) \equiv \hat{B}_0(z) * \Phi_c(z) \equiv \int_{u=0}^{z} \hat{B}_0(z-u)\, d\Phi_c(u)$ notasyonunu tanımlayalım. Bilindiği üzere $\tilde{Q}(\lambda)$ fonksiyonu ile $Q(z)$ fonksiyonunun, $\widetilde{\hat{B}_0}(\lambda)$ fonksiyonu ile $\hat{B}_0(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $\Phi_c^*(\lambda)$ fonksiyonu ile ise $\Phi_c(z)$ fonksiyonunun Laplace Stiltijes dönüşümünü tanımlanmıştır, yani

$$\tilde{Q}(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, Q(z)dz;\ \widetilde{\hat{B}_0}(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, \hat{B}_0(z)dz$$

$$\Phi_c^*(\lambda) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda z}\, d\Phi_c(z)$$

eşitlikleri doğrudur. Tauber- Abel teoremine göre

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\tilde{Q}\,(\lambda) \tag{2.107}$$

yazılabilir. Ayrıca, $\tilde{Q}(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\tilde{Q}(\lambda) = \widetilde{\hat{B}_0}(\lambda)\Phi_c^*(\lambda) \tag{2.108}$$

(2.108) eşitliği (2.107) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\tilde{Q}\,(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda\,\widetilde{\hat{B}_0}(\lambda) \lim_{\lambda\to 0} \Phi_c^*(\lambda) \tag{2.109}$$

Ayrıca, $\Phi_c^*(\lambda)$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\Phi_c^*(\lambda) = \lambda\widetilde{\Phi_c}(\lambda) \tag{2.110}$$

(2.110) eşitliğini (2.109) eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \lim_{z\to\infty} \hat{B}_0(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z) \tag{2.111}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca, göstermek mümkündür ki,

$$\lim_{z\to\infty} \hat{B}_0(z) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

olur. $\Phi_c(z)$ bir dağılım fonksiyonu olduğuna göre $\lim_{z\to\infty} \Phi_c(z) = 1$'dir. Bu takdirde, (2.111) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \lim_{z\to\infty} \hat{B}_0(z) \lim_{z\to\infty} \Phi_c(z) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \cdot 1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

Bununla da Önerme 2.8.1 ispatlanmış oldu.

Önerme 2.8.2: $E(\xi_0^2) < +\infty$ şartı sağlandığı takdirde

$$\int_{u=0}^{z} \big(1 - \Phi_c(u)\big)\,du \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} cE(\xi_0)$$

doğrudur. Burada $\Phi_c(t) \equiv \Phi_0\left(\frac{t}{c}\right) \equiv P\left(\xi_0 \le \frac{t}{c}\right)$'dır.

İspat: $\int_{u=0}^{z}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du$ integralini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int\limits_{u=0}^{z}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du$$

$$=\int\limits_{u=0}^{\infty}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du-\int\limits_{u=z}^{\infty}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du \qquad (2.112)$$

Kolaylık açısından $A(z)\equiv\int_{u=z}^{\infty}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du$ fonksiyonunu tanımlayalım ve ilk olarak $z\to\infty$ iken $A(z)$ fonksiyonunu inceleyelim. Bilindiği üzere $\int_{z=0}^{\infty}A(z)\,dz<\infty$ ise $A(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0$ olur. Bunun için $\int_{z=0}^{\infty}A(z)\,dz$ integralini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\int_{z=0}^{\infty}A(z)\,dz=\int_{z=0}^{\infty}\int_{u=z}^{\infty}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,dudz$$

$$=\int_{u=0}^{\infty}\int_{z=0}^{u}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,dudz\int_{u=0}^{\infty}\big(1-\Phi_c(u)\big)du\int_{z=0}^{u}dz$$

$$=\int_{u=0}^{\infty}u\big(1-\Phi_c(u)\big)du=\frac{E(\xi_0^2)}{2}$$

Önermenin şartına göre $E(\xi_0^2)<+\infty$'dır. Bu takdirde $\int_{z=0}^{\infty}A(z)\,dz<\infty$ olur. Yukarıda da belirttiğimiz gibi $\int_{z=0}^{\infty}A(z)\,dz<\infty$ ise $A(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0$ olur. Bu durumda (2.112)'den yola çıkarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_{u=0}^{z}\big(1-\Phi_c(u)\big)\,du=cE(\xi_0)$$

Bununla da Önerme 2.8.2 ispatlanmış oldu.

Şimdi de $S_{N(z)+1}$ Sınır Fonksiyonelinin beklenen değerini hesaplayalım.

Teorem 2.8.1: Varsayalım ki, aşağıdaki koşullar sağlanmıştır:

i) $\mu_2\equiv E(\chi_1^{+2})<+\infty$;

ii) $E(\xi_0)<+\infty$;

Bu takdirde $z \to \infty$ iken $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(S_{N(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} - cE(\xi_0) + o(1)$$

İspat: Kolaylık açısından aşağıdaki notasyonu tanımlayalım:

$$B_1(z) \equiv E\left(S_{N(z)+1}\right)$$

Kaydırma işleminin yardımıyla $B_1(z)$ için aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$B_1(z) \equiv E\left(S_{N(z)+1}\right) = \int_{s=0}^{\frac{z}{c}} E\left(S_{N_0(z-cs)+1}\right) d\Phi_0(s)$$

$$= \int_{s=0}^{\frac{z}{c}} B_0(z-cs)\, \mathrm{d}\Phi_0(s) = \int_{u=0}^{z} B_0(z-u)\, d\Phi_0\left(\frac{u}{c}\right) \qquad (2.113)$$

Burada$\Phi_0(t) \equiv P(\xi_0 \leq t)$'dır. $\Phi_c(u) \equiv \Phi_0\left(\frac{u}{c}\right)$ notasyonunu tanımlayalım. Bu durumda (2.113) eşitliği

$$B_1(z) = \int_{u=0}^{z} B_0(z-u)\, d\Phi_c(u) \qquad (2.114)$$

şeklinde yazılabilir. $B_1(z)$ için asimptotik sonuç elde etmek amacıyla (2.114) denkleminin her iki tarafından z' i çıkartalım:

$$B_1(z) - z = \int_{u=0}^{z} B_0(z-u)\, d\Phi_c(u) - z \qquad (2.115)$$

Kısaltmak için $\hat{B}_1(z) \equiv B_1(z) - z$ notasyonunu tanımlayalım. Ayrıca integralaltı ifadede de eşitliğin sol tarafındakine benzer bir ifade elde etmek için (2.115) denkleminin sağ tarafına $\int_{u=0}^{z}(z-u)\, d\Phi_c(u)$ integralini ilave edip ve çıkartalım. Bu durumda $\hat{B}_1(z)$ fonksiyonu

$$\hat{B}_1(z) = \int_{u=0}^{z} \hat{B}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) + \int_{u=0}^{z} (z-u)\, d\Phi_c(u) - \int_{u=0}^{z} du$$

şeklinde olur. $\int_{u=0}^{z}(z-u)\, d\Phi_c(u)$integraline kısmi integrasyon uyguladıktan sonra $\hat{B}_1(z)$ fonksiyonu

$$\hat{B}_1(z) = \int_{u=0}^{z} \hat{B}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) - \int_{u=0}^{z} \left(1-\Phi_c(u)\right) du \qquad (2.116)$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 2.8.1'de $z \to \infty$ iken

$$\int_{u=0}^{z} \hat{B}_0(z-u)\, d\Phi_c(u) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mu_2}{2\mu_1} \qquad (2.117)$$

olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, Önerme 2.8.2'de $z \to \infty$ iken

$$\int_{u=0}^{z} \left(1-\Phi_c(u)\right) du \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} cE(\xi_0) \qquad (2.118)$$

olduğu gösterilmiştir. (2.117), (2.118) açılımları (2.116) açılımında yerine yazıldığında $z \to \infty$ iken $\hat{B}_1(z)$ için aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilir:

$$\hat{B}_1(z) \equiv B_1(z) - z = \frac{\mu_2}{2\mu_1} - cE(\xi_0) + o(1)$$

Buradan da

$$B_1(z) \equiv E\left(S_{N(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} - cE(\xi_0) + o(1)$$

asimptotik sonucu elde edilir. Burada ξ_0 rasgele değişkeni ξ_n $(n \geq 1)$ rasgele değişkenleri ile aynı dağılıma sahiptir ve c pozitif bir katsayıdır. Bununla da Teorem ispatlanmış olur.

Şimdi de amacımız $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için asimptotik sonuç elde etmektir. İlk olarak aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$\hat{p}(z) \equiv E\left(S_{N_0(z)+1}\right) - z - \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

$$\bar{\bar{p}}(z) \equiv Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) - \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2$$

Teorem 2.8.2: Varsayalım ki, aşağıdaki koşullanmış sağlanmıştır:

i) $E(\chi_1^{+3}) < \infty$,

ii) $E(\ \xi_0^2) < \infty$

Bu takdirde $z \to \infty$ iken $Var\left(S_{N(z)+1}\right)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$Var\left(S_{N(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + c^2 Var(\xi_0) + o(1)$$

Burada c pozitif bir katsayıdır.

İspat: Varyansın tanımına göre

$$Var\left(S_{N(z)+1}\right) = E\left(S_{N(z)+1}^2\right) - \left(E\left(S_{N(z)+1}\right)\right)^2 \tag{2.119}$$

eşitliği yazılabilir. Kaydırma işleminin yardımıyla $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$S_{N(z)+1} = I_{\xi_0 \leq \frac{z}{c}}\left\{S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right\} \tag{2.120}$$

(2.120) eşitliğinin her iki tarafı kareye yükseltilip beklenen değerini yazdığımızda

$$E\left(S_{N(z)+1}^2\right) = E\left\{I_{\xi_0 \leq \frac{z}{c}}\left\{S_{N_0(z-c\xi_0)+1}^2\right\}\right\}$$

eşitliğini elde edilir. Varyansın tanımından yararlanarak $E\left(S_{N(z)}^2\right)$ ifadesini

$$E\left(S_{N(z)+1}^2\right) = E\left\{I_{\xi_0 \leq \frac{z}{c}}\left\{S_{N_0(z-c\xi_0)+1}^2\right\}\right\}$$

$$= E\left\{I_{\xi_0 \leq \frac{z}{c}}\left(Var\left(S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right) + \left(E\left(S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right)\right)^2\right)\right\} \qquad (2.121)$$

şeklinde yazabiliriz. Teorem 2.7.5 de ispat edilmiştir ki,

$$Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1) \qquad (2.122)$$

açılımı doğrudur. $\bar{\bar{p}}(z)$ fonksiyonunun tanımına göre $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + \bar{\bar{p}}(z)$$

Bu durumda

$$Var\left(S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right) = Var\left(S_{N_0(z)+1}\right)$$

$$= \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + \bar{\bar{p}}(z - c\xi_0) \qquad (2.123)$$

olur. Ayrıca, Teorem 2.7.3 de

$$E\left(S_{N_0(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (2.96)$$

olduğu ispat edilmiştir. $\hat{p}(z)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak (2.96) açılımını aşağıdaki gibi de gösterebiliriz:

$$E\left(S_{N_0(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \hat{p}(z)$$

Bu takdirde

$$E\left(S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right) = (z - c\xi_0) + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \hat{p}(z - c\xi_0) \qquad (2.124)$$

eşitliği elde edilir. (2.124) eşitliğinin her iki tarafı kareye yükselttiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(E\left(S_{N_0(z-c\xi_0)+1}\right)\right)^2 = z^2 + z\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 2c\xi_0\right)$$

$$+\left(c^2\xi_0^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}c\xi_0 + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2\right) + 2\left((z-c\xi_0) + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)\hat{p}(z-c\xi_0)$$

$$+\left(\hat{p}(z-c\xi_0)\right)^2 \tag{2.125}$$

(2.123) ve (2.125) eşitliklerini (2.121) eşitliğinde yerine yazıp sadeleştirdiğimizde

$$E\left(S_{N(z)+1}^2\right) = z^2 + \ z\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 2cE(\xi_0)\right)$$

$$+\left(c^2E(\ \xi_0^2) - \frac{\mu_2}{\mu_1}cE(\xi_0) + \frac{\mu_3}{3\mu_1}\right) + E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\bar{\bar{p}}(z-c\xi_0)\right\}$$

$$+2E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}(z-c\xi_0)\hat{p}(z-c\xi_0)\right\} + \frac{\mu_2}{\mu_1}E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\hat{p}(z-c\xi_0)\right\}$$

$$+E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\left(\hat{p}(z-c\xi_0)\right)^2\right\} \tag{2.126}$$

eşitliğini elde ediyoruz. Göstermek mümkündür ki,

$$E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\bar{\bar{p}}(z-c\xi_0)\right\} = 0, E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\hat{p}(z-c\xi_0)\right\} = 0$$

$$E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}\left(\hat{p}(z-c\xi_0)\right)^2\right\} = 0, E\left\{I_{\xi_0\le\frac{z}{c}}(z-c\xi_0)\hat{p}(z-c\xi_0)\right\} = 0$$

olur. Bu takdirde (2.126) eşitliğinden yararlanarak, $z \to \infty$ iken $E\left(S_{N(z)+1}^2\right)$ için aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)+1}^2\right) = z^2 + \ z\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 2cE(\xi_0)\right)$$

$$+\left(c^2E(\ \xi_0^2) - \frac{\mu_2}{\mu_1}cE(\xi_0) + \frac{\mu_3}{3\mu_1}\right) + o(1) \tag{2.127}$$

Şimdi de $\left(E\left(S_{N(z)+1}\right)\right)^2$ ifadesini hesaplayalım. Teorem 2.8.1'de $z \to \infty$ iken $S_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilmiştir:

$$E\left(S_{N(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} - cE(\xi_0) + o(1)$$

Önerme 2.3.2 ile benzer şekilde göstermek mümkündür ki,

$$E\left(S_{N(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} - cE(\xi_0) + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.128}$$

olur. (2.128) açılımının her iki tarafı kareye yükseltildiğinde

$$\left(E\left(S_{N(z)+1}\right)\right)^2 = z^2 + z\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 2cE(\xi_0)\right)$$

$$+\left(\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}cE(\xi_0) - c^2\left(E(\xi_0)\right)^2\right) + o(1) \tag{2.129}$$

açılımı elde edilir. (2.127) ve (2.129) açılımları (2.119) eşitliğinde yerlerine yazıldığında $Var\left(S_{N(z)+1}\right)$ için aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilir:

$$Var\left(S_{N(z)+1}\right) = E\left(S_{N(z)+1}^2\right) - \left(E\left(S_{N(z)+1}\right)\right)^2$$

$$= \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + c^2 Var(\xi_0) + o(1)$$

Bununla da Teorem 2.8.2. ispatlanmış oldu.
Şimdi de amacımız $X(t)$ sürecinin $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin incelenmektir.

2.9. $X_{N_0(z)+1}$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değer ve Varyansı

Bu bölümde amacımız $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansı için asimptotik sonuçlar elde etmektir. Bu amaçla ilk olarak $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini inceleyelim. Öncelikle $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelini matematiksel olarak tanımlayalım.

$X(t)$ sürecinin tanımına esasen $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelini matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$X_{N_0(z)+1} = z - S_{N_0(z)+1} \tag{2.130}$$

Teorem 2.9.1 $\{\chi_n^+\}$ rasgele değişken dizisi $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ koşulunu sağlandığı takdirde $z \to \infty$ iken $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$E\left(X_{N_0(z)+1}\right) = -\frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

Burada $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+k}\right), k = 1, 2$' dir.

İspat: (2.130) eşitliğinden yola çıkılarak $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için

$$E\left(X_{N_0(z)+1}\right) = E\left(z - S_{N_0(z)+1}\right) = E(z) - E\left(S_{N_0(z)+1}\right)$$

$$= z - E\left(S_{N_0(z)+1}\right) \tag{2.131}$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 2.7.3'de $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ olduğu takdirde $z \to \infty$ iken $E\left(S_{N_0(z)+1}\right)$ için

$$E\left(S_{N_0(z)+1}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.96}$$

açılımının doğru olduğu ispat edilmiştir. (2.96) açılımını (2.131) eşitliğinde yerine yazarsak

$$E\left(X_{N_0(z)+1}\right) = -\frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

açılımını elde ederiz. Bununla da Teorem 2.9.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansını inceleyelim.

Teorem 2.9.2: $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ koşulu sağlandığı takdirde $z \to \infty$ iken $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$Var\left(X_{N_0(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1)$$

İspat: (2.130) eşitliğinden yararlanarak $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$Var\left(X_{N_0(z)+1}\right) = Var\left(z - S_{N_0(z)+1}\right) = Var\left(S_{N_0(z)+1}\right)$$

Teorem 2.7.5'de $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ koşulu sağlandığı takdirde $z \to \infty$ iken $S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilmiştir:

$$Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1)$$

Bu durumda $X_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$Var\left(X_{N_0(z)+1}\right) = Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + o(1)$$

Bununla da Teorem 2.9.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de $X(t)$ sürecinin en önemli sınır fonksiyoneli olan $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansını inceleyelim.

2.10. $X_{N(z)+1}$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değer ve Varyansı

Teorem 2.10.1: $\{\chi_n^+\}$ rasgele değişken dizisi ve ξ_0 rasgele değişkeni aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $E(\chi_1^{+2}) < \infty$

ii) $E(\xi_0) < \infty$

Bu takdirde $z \to \infty$ iken $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$E\left(X_{N(z)+1}\right) = -\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1} + cE(\xi_0)\right) + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

İspat: $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelini matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$X_{N(z)+1} = z - c\xi_0 - S_{N_0(z)+1} \tag{2.132}$$

(2.132) eşitliğin kullanarak $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E\left(X_{N(z)+1}\right) = z - cE(\xi_0) - E\left(S_{N_0(z)+1}\right) \tag{2.133}$$

(2.96) açılımını (2.133) eşitliğinde yerine yazdığımızda $E\left(X_{N(z)+1}\right)$ için

$$E\left(X_{N(z)+1}\right) = -\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1} + cE(\xi_0)\right) + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

asimptotik sonucunu elde etmiş oluyoruz. Böylece Teorem 2.10.1 ispatı tamamlanmış oldu.

Teorem 2.10.2: Aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) $E(\chi_1^{+3}) < \infty$,

ii) $E(\,\xi_0^2) < \infty$

Bu durumda $z \to \infty$ iken $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$Var\left(X_{N(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + c^2 Var(\xi_0) + o(1)$$

İspat: $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelini matematiksel tanımından yola çıkılarak $Var\left(X_{N(z)+1}\right)$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$Var\left(X_{N(z)+1}\right) = c^2 Var(\xi_0) + Var\left(S_{N_0(z)+1}\right) \tag{2.134}$$

$S_{N_0(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için elde ettiğimiz açılımı (2.134) eşitliğinde yerine yazalım. Bu durumda $X_{N(z)+1}$ sınır fonksiyonelinin varyansı için aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilir:

$$Var\left(X_{N(z)+1}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + c^2 Var(\xi_0) + o(1)$$

Bununla da Teorem 2.10.2'nin ispatı tamamlanmış oldu.

2.11. $T_{N_0(z)}$ Sınır Fonksiyonelinin Beklenen Değeri

Bu bölümde amacımız $X(t)$ süreci için önemli sınır fonksiyonellerinden biri olan $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini incelemektir. $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyoneli matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$T_{N_0(z)} = \sum_{i=1}^{N_0(z)} U_i$$

Burada $U_i = \eta_i + \xi_i$'dir. Ayrıca, $M_0(z) \equiv E\left(T_{N_0(z)}\right)$ notasyonunu tanımlayalım. $\forall z < 0$ için $M_0(z) = 0$'dır. $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerinin kesin şekli için aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 2.11.1: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun:

i) $E(\eta_1) < \infty$
ii) $E(\xi_1) < \infty$

Bu durumda $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için aşağıdaki integral denklem sağlanmaktadır:

$$M_0(z) = E(U_1) + \int_{v=0}^{\infty} f_{1\zeta}(z-v)\left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right) dv$$

İspat: Kaydırma işleminin yardımıyla $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için aşağıdaki integrel denklem yazılabilir:

$$M_0(z) = \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} [M_0(z+x-ct)+s+t]\, P\{\eta_1 \in ds; \xi_1 \in dt; \zeta_1 \in dx\}$$

$$= \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} [M_0(z+x-ct)+s+t]\, dF_\eta(s) dF_\xi(t) dF_\zeta(x)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} M_0(z+x-ct)\, dF_\eta(s) dF_\xi(t) dF_\zeta(x)$$

$$+ \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} s\, dF_\eta(s) dF_\xi(t) dF_\zeta(x) + \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} t\, dF_\eta(s) dF_\xi(t) dF_\zeta(x)$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} dF_\eta(s) \int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} M_0(z+x-ct)\, dF_\xi(t) dF_\zeta(x) + E(\eta_1) + E(\xi_1)$$

$$= E(U_1) + \int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} M_0(z+x-ct)\, dF_\xi(t) dF_\zeta(x)$$

Özetle, $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için aşağıdaki integral denklemi elde etmiş oluyoruz:

$$M_0(z) = E(U_1) + \int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} M_0(z+x-ct)\, dF_\xi(t) dF_\zeta(x) \tag{2.135}$$

$z + x - ct \geq 0$ olduğu için (2.135) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$M_0(z) = E(U_1) + \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{t=0}^{\frac{z+x}{c}} M_0(z+x-ct)\, dF_\xi(t) \right) dF_\zeta(x) \tag{2.136}$$

Değişim dönüşünü kullanarak (2.136) denklemini

$$M_0(z) = E(U_1)$$

$$+ \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{z+x} M_0(z+x-y)\, dF_\xi\left(\frac{y}{c}\right) \right) dF_\zeta(x) \tag{2.137}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $F_{c\xi}(y) \equiv F_\xi\left(\frac{y}{c}\right)$ notasyonunu tanımlayalım. Bu durumda (2.137) denklemi aşağıdaki yazılabilir:

$$M_0(z) = E(U_1) + \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{z+x} M_0(z+x-y)\, dF_{c\xi}(y) \right) dF_\zeta(x)$$

$$= E(U_1) + \int_{v=z}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{v} M_0(v-y)\, dF_{c\xi}(y) \right) dF_\zeta(v-z)$$

$$= E(U_1) + \int_{v=z}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{v} M_0(v-y)\, dF_{c\xi}(y) \right) f_\zeta(v-z) dv$$

$$= E(U_1) + \int_{v=0}^{\infty} f_\zeta(v-z)\left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right)dv$$

$$= E(U_1) + \int_{v=0}^{\infty} f_{1\zeta}(z-v)\left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right)dv$$

Burada $f_{1\zeta}(z) \equiv f_\zeta(-z)$'dir. Sonuç olarak $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için aşağıdaki integral denklemi elde etmiş oluyoruz:

$$M_0(z) = E(U_1) + \int_{v=0}^{\infty} f_{1\zeta}(z-v)\left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right)dv \qquad (2.138)$$

Bununla da Teorem 2.11.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de aşağıdaki teoremin yardımıyla (2.138) integral denkleminin çözümünü bulmağa çalışacağız.

Teorem 2.11.2: Varsayalım ki, $E(\eta_1) < \infty$; $E(\xi_1) < \infty$ koşulları sağlanmıştır. Bu durumda (2.138) eşitliğinin kesin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$M_0(z) = E(U_1) + \sum_{n=0}^{\infty} f_\zeta^n\,(0)\mathrm{F}_{c\xi}^{*n}(z)$$

İspat: (2.138) integral denklemini

$$M_0(z) = E(U_1) + f_{1\zeta}(z) * \left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right) \qquad (2.139)$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu takdirde (2.139) eşitliğinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\widetilde{M_0}(\lambda) = \frac{E(U_1)}{\lambda} + L_\lambda\left(f_{1\zeta}(z)\right)L_\lambda\left(M_0(v) * F_{c\xi}(v)\right)$$

$$= \frac{E(U_1)}{\lambda} + L_\lambda\left(f_{1\zeta}(z)\right)\widetilde{M_0}(\lambda)\mathrm{F}_{c\xi}^{*}(\lambda) \qquad (2.140)$$

Burada $L_\lambda\left(f_{1\zeta}(z)\right) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\lambda z} f_{1\zeta}(z)dz = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\lambda z} f_\zeta(-z)dz = f_\zeta(0) \neq 0'$dır. Bu durumda (2.140) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\widetilde{M_0}(\lambda) = \frac{E(U_1)}{\lambda} + f_\zeta(0)\widetilde{M_0}(\lambda)\mathrm{F}^*_{c\xi}(\lambda) \tag{2.141}$$

(2.141) eşitliğini aşağıdaki gibi sadeleştirelim:

$$\widetilde{M_0}(\lambda) = \frac{E(U_1)}{\lambda\left[1 - f_\zeta(0)\mathrm{F}^*_{c\xi}(\lambda)\right]}$$

$$= \frac{E(U_1)}{\lambda}\left\{1 + \left(f_\zeta(0)\mathrm{F}^*_{c\xi}(\lambda)\right) + \left(f_\zeta(0)\mathrm{F}^*_{c\xi}(\lambda)\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{E(U_1)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} f_\zeta^n(0)\left(\mathrm{F}^*_{c\xi}(\lambda)\right)^n \tag{2.142}$$

(2.142) eşitliğine ters Laplace dönüşümünü uyguladığımızda $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için aşağıdaki eşitliği elde etmiş oluyoruz:

$$M_0(z) \equiv E\left(T_{N_0(z)}\right) = E(U_1) + \sum_{n=0}^{\infty} f_\zeta^n(0)\mathrm{F}^{*n}_{c\xi}(z) \tag{2.143}$$

Bununla da Teorem 2.11.2'nin ispatı tamamlanmış oldu.

Fakat (2.143)'daki serini hesaplamak hiç de kolay değildir. Bu yüzden $z \to \infty$ iken $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değerini için asimptotik sonuç elde etmeye çalışacağız.

Teorem 2.11.3: Varsayalım ki,

i) $\alpha_1 \equiv E(\nu_1^+) < +\infty$,

ii) $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < +\infty$;

iii) $E(\eta_1) < +\infty$;

iv) $E(\xi_1) < +\infty$

koşulları sağlanmıştır. Bu durumda $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyoneli için aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{E\left(T_{N_0(z)}\right)}{z} = aE(U_1)$$

Burada $E(U_i) = E(\eta_i + \xi_i);\ a = \frac{\alpha_1}{\mu_1}$'dir.

İspat: $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyoneli matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$T_{N_0(z)} = \sum_{i=1}^{N_0(z)} U_i$$

Bu takdirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$E\left(T_{N_0(z)}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N_0(z)} U_i\right) = E(U_1)E\left(N_0(z)\right) + C + o(1) \tag{2.144}$$

Burada *C* bir sabittir. Teorem 2.4.1'de $z \to \infty$ iken $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımının doğruluğu ispat edilmiştir:

$$E\left(N_0(z)\right) = az + k + o(1) \tag{2.145}$$

Burada $a = \frac{\alpha_1}{\mu_1}; k = \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\alpha_1 - 1\right]'$dır. (2.145) açılımını (2.144) açılımında yerine yazdığımızda

$$E\left(T_{N_0(z)}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N_0(z)} U_i\right) = aE(U_1)z + C + o(1) \tag{2.146}$$

açılımını elde etmiş oluyoruz. (2.146)'den yararlanarak $z \to \infty$ iken

$$\lim_{z \to \infty} \frac{E\left(T_{N_0(z)}\right)}{z} = aE(U_1)$$

eşitliği yazılabilir. Bununla da Teorem 2.11.3 ispatlanmış oldu.

3. SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmanın amacı zamanla doğrusal eskiyen bir sistemin yenileme politikasının stokastik süreçler yöntemi ile incelenmesidir. Bu amaçla, çalışmada bağımlı bileşenli bir stokastik süreç $(X(t))$ ele alınıp incelenmiştir. $X(t)$ sürecinin önemli sınır fonksiyonelleri olan $K_0(z)$, $N_0(z)$, $N(z)$, $S_{N_0(z)+1}$, $S_{N(z)+1}$, $X_{N_0(z)+1}$, $X_{N(z)+1}$' in beklenen değer ve varyansı için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. $N_0(z)$ sınır fonksiyonelinin varyansını hesaplamak için gerekli olan $K_0(z)$ sınır fonksiyoneli tanımlanmış ve bu sınır fonksiyonelinin bekelenen değer ve varyansı için hem kesin, hem de asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara ilaveten, $X(t)$ sürecinin sıfırın altına inmeden bir önceki zamanı ifade eden $T_{N_0(z)}$ sınır fonksiyonelinin de beklenen değeri için hem kesin, hem de z'in büyük değerleri için asimptorik sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen önemli sonuçlardan biri $X(t)$ süreci ile ifade edilebilen, zamanla doğrusal eskiyen sistemlerin kaynaklarının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimi için bakım veya tamir politikasının önerilmesidir. Bu politikanın temelinde aşağıdaki düşünce yatmaktadır. İlk olarak sistemin kaynağının sıfırın altına düşen miktarı $(E(X_{N_0(z)+1}))$ belirlenmiştir. Daha sonra ise $\Delta = -E\left(X_{N_0(z)+1}\right) + k\sqrt{Var\left(X_{N_0(z)+1}\right)}$ ek kaynak miktarı tanımlanmış ve sistemin kaynağının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde sisteme yapılacak bakım $\zeta_i + \Delta$ şeklinde belirlenmiştir. Burada k katsayısı araştırmacının isteğine veya sistemin güvenirliliğine uygun olarak belirlenir. Genellikle, $2 \leq k \leq 3$ arasında belirlenmesi önerilmektedir. Eğer sisteme, kaynağının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde yapılacak bakım sistemin kullanılabilir kaynağını $\zeta_i + \Delta$ kadar iyileştirebilirse, sistemin son bir devre daha çalıştırılıp, sonra kendine benzer yeni bir sistemle değiştirilmesi önerilmiştir. Eğer sisteme, kaynağının sıfırın altına inmeden bir önceki çevrimde yapılacak bakım sistemi her zamanki bakıma ilaveten $\zeta_i + \Delta$ kadar iyileştiremeyecekse, bu takdirde sistemin $N(z)$ çevriminde kendine benzer yeni bir sistemle değiştirilmesi gerekmektedir. Gelecek çalışmalarda ele alınan sınır fonksiyonellerin yüksek mertebeden momentleri ve sürecin durağan karakteristikleri asimptotik yöntemlerle incelenebilir.

KAYNAKLAR

Barlow, R.E., Proschan, F., (1965). Mathematical Theory of Reliability. Wiley**.**

Barlow, R.E., Proschan, F.,(1996). Mathematical Theory of Reliability, SIAM, Philadelphia, USA.

Barlow, R.E.,(2002). Mathematical reliability theory: From the beginning to the present time, *Proc. of 3rd International Conference. on Mathematical Methods in Reliability*.

Bazovsky, I.,(1961). Reliability Theory and Practice, Prentice Hall.

Brown, M., Solomon, H.,(1975) A second – order approximation for the variance of a renewal-reward process, *Stochastic Processes and Applications*, 3, 301 – 314.

Campbell, N.R.,(1941). The replacement of perishable members of a continually operating system, *J. Roy. Statist. Soc*., 7, 110-130.

Carter, A.,(1997) Mechanical Reliability and Design, Wiley.

Coria, V.H., Maximov, S., Rivas-Davalos, F., Melchor, C.L., Guardado, J.L.,(2015), Analytical Method for Optimization of Maintenance Policy Based on Available System Failure Data, *Reliability Engineering and System Safety*, 135, 55-63

Dhillon, B.S.,(2002). Engineering maintenance: A Modern Approach, CRC Press, Washington, D.C.

Dhillon, B.S.,(2006). Maintainability, Maintenance, and Reliability for Engineers. CRC Press.

Feller, W.,(1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John Wiley, New York.

Gertsbakh, I.,(2000). Theory of Reliability with Applications to Preventive Maintenance, Springer.

Gnedenko, B.V., Belyaev, Yu.K., Solovyev, A.D.,(1965). Mathematical Methods in Reliability Theory, Nauka, Russian.

Gnedenko, B.V., Ushakov, I.A.,(1995) Probabilistic Reliability Engineering, Wiley.

Hoang Pham,(2003). Handbook of Reliability Engineering, Springer-Verlag, London.

Khaniyev, T.A.,(2005). About Moments of Generalized renewal process, *Transactions of NAS of Azerbaijan*, Series of Phy. Tech. And Mth. Sciences, 25, 1,95-100

Khatab, A., (2013), Hybrid hazard rate model for imperfect preventive maintenance of systems subject to random deterioration, *Journal of Intelligent Manufacturing*,10845-013-0819.

Kolowrocki, K., (2009). Reliability and Risk Analysis of Multi-state Systems with Degrading Components, *Reliability: Theory and Application*, Vol.4, No.1,

Kuo, W., Zuo, M.,(2003). Optimal Reliability Modelling, Wiley.

Leemis, Lawrence,(1995). Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods, Prentice-Hall.

Lin, Z., Huang, Y., Fang, C.,(2015), Non-Periodic Preventive Maintenance With Reliability Thresholds For Complex Repairable Systems, *Reliability Engineering and System Safety*, 136, 145-156

Lloyd, D.K., Lipow, M.,(1962). Reliability: Management, Methods, and Mathematics, Prentice-Hall

Lotka, A.J.,(1939). A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special reference to industrial replacement, *Ann. Math. Statist*., 10, 1-25.

Moskowitz, F., McLean, J.,(1956). Some reliability aspects of system design, *IRE Trans.Vol. PGRQC*-8.

Neubeck, Ken.,(2004), Practical Reliability Analysis, Prentice Hall, New Jersey.

O'Connor, Patrick D. T.,(2002). Practical Reliability Engineering IV, John Wiley and Sons, New York.

Polovko, A.M.,(1964). Fundamentals of Reliability Theory, Nauka, ,Russian.

Pusher, W., Ushakov, I.,(2002). Calculation of nomenclature of spare parts for mobile repair station, *Methods of Quality Management*, 4.

Raizer, V.,(2009). Reliability of Structures: Analysis and Applications, Backbone Publishing.

Ross, S.M.,(1970). Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, Calif.,

Rubinstein, R.Y., Levitin, G., Lisnianski, A., Ben-Haim, H.,(1997). Redundancy optimization of static series-parallel reliability models under uncertainty, *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.46, 4.

Smith, W.L,(1959). On the cumulants of renewal process, *Biometrika*, 46 1-29.

Smith, W.L.,(1958). Renewal theory and its ramifications, *J. Roy. Statist. Soc*., (B) 20, 243-302.

Todinov, M.,(2016), Reliability and Risk Models: Setting Reliability Requirements, John Wiley and Sons, New York.

Ushakov, I.,(1969) Methods of Solution of Simplest Optimal Redundancy Problems under Constraints, Sovetskoe Radio, Russian.

Ushakov, I.,(2012). Reliability Theory: History and Current State in Bibliographies, *Reliability: Theory and Application*, Vol.1, No.01, (24), 8-35.

Ushakov, I.A., (2009). Theory of Sytem Reliability, Drofa, Russian.

Weiss, G.,(1956). On the Theory of Replacement of Machinery with a Random Failure Time, *Naval Research Logistics Quarterly* , 3, No. 4, 279-293

EKLER

EK A: Koşullu Beklenen Değerin Tanımı ve Bazı Özellikleri

EK B: Yenileme Sürecinin Tanımı Ve Onunla İlgili Bilgiler

Ek A: KOŞULLU BEKLENEN DEĞERİN TANIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı olsun. X ve Y bu uzayda tanımlanmış rasgele değişkenler olsunlar. Yani, $X\colon \Omega \to R$ ve $Y\colon \Omega \to R$'dır. (X, Y) ise bu uzayda tanımlanmış iki boyutlu bir rasgele değişken olsun. (X, Y) rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y)$$

Tanım A. 1: X ve Y rasgele değişkeninin her ikisi kesikli rasgele değişken ise X'ın Y rasgele değişkeninin $Y = y$ gibi sabit değerine karşılık gelen beklenen değeri

$$E(X/Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X = x/Y = y)$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x \frac{P(X = x; Y = y)}{P(Y = y)} \qquad (A.1)$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım A. 2: Eğer X sürekli Y ise kesikli rasgele değişken ise bu durumda (A.1) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E(X/Y = y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x/Y = y) dx$$

Burada $f_X(x/Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{P(Y=y)}$ X rasgele değişkeninin Y=y gibi sabit bir değerine karşılık gelen koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Ayrıca, $f_{X,Y}(x, y)$ de X ve Y rasgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Tanım A. 3: Eğer X ve Y rasgele değişkeninin her ikisi sürekli rasgele değişkenler ise (A.1) eşitliği

$$E(X/Y=y)=\int_{x=-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)dx$$

ilişkisi ile tanımlanır. Burada $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$'dır. $f_Y(y)$ ise Y rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Koşullu beklenen değerin bazı özellikleri:

$\mathcal{F}'$in bir alt σ cebri olan $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ tanımlayalım.

1) Eğer $X>0$ ise $E(X/\mathcal{H}) \geq 0'$dır.
2) Eğer $X_1 \leq X_2$ ise $E(X_1/\mathcal{H}) \leq E(X_2/\mathcal{H})'$dır.
3) $\forall a \in R$ için $E(a\,X/\mathcal{H}) = aE(X/\mathcal{H})'$dır.
4) $E(X_1{+}X_2/\mathcal{H}) = E(X_1/\mathcal{H}) + E(X_2/\mathcal{H})$
5) Eğer $f: R \to R$ bir konveks fonksiyon ise

$$f\big(E(X/\mathcal{H})\big) \leq E(f(X)/\mathcal{H}) \qquad (A.2)$$

sağlanmaktadır. (A.2) eşitsizliği Jensen eşitsizliği adlanır.

6) Eğer $E(inf_n X_n\,/\,\mathcal{H}) > -\infty$ ise, bu durumda
   $E(\lim inf_{\,n\to\infty} X_n\,/\,\mathcal{H}) \leq \lim inf_{\,n\to\infty} E(X_n\,/\,\mathcal{H})$

eşitsizliği sağlanmaktadır (Fatou's Lemma).

7) $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{F}$ alt σ cebrler ise $E(E(X/\mathcal{H}_2)\,/\,\mathcal{H}_1) = E(X/\mathcal{H}_1)$ olur.
8) Eğer X rasgele değişkeni $\mathcal{H}$ ölçülebilirse, $E(X/\mathcal{H}) = X'$dır.
9) Eğer X rasgele değişkeni $\mathcal{H}$ ölçülebilirse, $E(XY/\mathcal{H}) = XE(Y/\mathcal{H})'$dır.
10) $E\big(E(X/\mathcal{H})\big) = E(X)'$dır.
11) Z bir rasgele değişkeni ise $E(f(z)\,Y/Z) = f(z)E(Y/Z)'$dir.
12) X ve Y rasgele değişkenleri için $E\Big(E\big((X/Y)\,/\,f(Y)\big)\Big) = E\big(X\,/\,f(Y)\big)'$dir.

Ek B: YENİLEME SÜRECİNİN TANIMI VE ONUNLA İLGİLİ BİLGİLER

$\{X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip, pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca, $F(x)$ fonksiyonu ile X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tanımlansın. Yani, $F(x) \equiv P\{X_n \leq x\}'$dır. $\{X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ dizisinin yardımıyla aşağıdaki rasgele değişkenleri matematiksel olarak inşa edelim:

$$T_0 \equiv 0;\ T_n \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i\,;\quad n = 1, 2, \dots$$

$\{T_n\}$ dizisine "Yenileme anları" denir. $\{T_n\}$ dizisinin yardımıyla aşağıdaki stokastik süreci tanımlayalım (Feller (1971)):

$$N(t) \equiv \min\{n \geq 1 : T_n > t\}, t \geq 0 \qquad (B.1)$$

(B.1) eşitliği ile tanımlanan $N(t)$ sürecine Yenileme Süreci denir. Yenileme sürecinin temel özellikleri:

a) $N(0) \equiv 1$
b) $N(t) \in \{1, 2, 3, \dots\},\ t \geq 1$
c) Monoton azalmayan bir fonksiyondur.
d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$
e) Sıçrama yükseklikleri 1 birimdir.
f) Sıçrama anları $T_n \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i\,'$ nin dağılım fonksiyonu olan $F^{*n}(t) \equiv P\{T_n \leq t\}'$ dır.

Burada $F^{*n}(t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiştir. $F^{*n}(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlamak mümkündür:

$$F^{*0}(t) \equiv \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}; \qquad F^{*1}(t) \equiv F(t)$$

$$F^{*n}(t) \equiv F(t) * F^{*(n-1)}(t) = \int_{x=0}^{t} F^{*(n-1)}(t-x)dF(x), \; n \geq 2$$

Bilindiği üzere her bir stokastik süreç için en önemli olasılık karakteristikleri onun sonlu boyutlu dağılımlarıdır. Özellikle, bir boyutlu dağılım oldukça önemlidir. Bu sebepten $N(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılımını aşağıdaki şekilde inceleyelim.

$0 < t < \infty$ ve $n = 1, 2, \ldots$ olsun. Bu takdirde,

$$P\{N(t) = n\} \equiv P\{T_{n-1} \leq t < T_n\} = F^{*(n-1)}(t) - F^{*n}(t)$$

olur. Yenileme sürecinin bir boyutlu dağılımı $F(t)$ fonksiyonunun konvülesyon çarpımları ile ifade edildiği için bir boyutlu dağılımların hesaplanması zordur. Bu nedenle Yenileme Teorisinde $N(t)$ sürecinin beklenen değerinin önemli bir rolü vardır. $N(t)$ Yenileme sürecinin beklenen değerine yenileme fonksiyonu denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$U(t) \equiv E\big(N(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \qquad (B.2)$$

Yenileme Sürecinin tüm sayısal karakteristikleri Yenileme Fonksiyonunun yardımı ile ifade edilebilir.

Teorem B.1: $m_1 \equiv E(X_1) < \infty$ olsun. Bu takdirde $t \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{m_1}$$

Teorem B.1'den t'nin yeterince büyük değerlerinde $U(t) \approx \frac{t}{m_1}$ yazılabileceği sonucuna ulaşılır.

Teorem B.2: (Blackwell teoremi) Varsayalım ki, $m_1 \equiv E(X_1) < \infty$ koşulu sağlanmaktadır. Bu takdirde, her $h > 0$ için aşağıdaki asimptotik bağıntı doğrudur:

$$\lim_{t\to 0} \frac{U(t+h) - U(t)}{t} = \frac{h}{m_1}$$

Teorem B.3: (Feller Teoremi) $m_2 \equiv E(X_1^2) < \infty$ olsun. Ayrıca, X_n rasgele değişkenleri aritmetik olmayan rasgele değişkenler olsunlar. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken $U(t)$ Yenileme Fonksiyonu için aşağıdaki ikiterimli asimptotik sonuç yazılabilir:

$$U(t) = \frac{t}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1)$$

Burada $o(1) \equiv g(t): \lim_{t\to\infty} g(t) = 0'$ dır. Teorem B. 3' den t'nin yeterince büyük değerlerinde $U(t)$ Yenileme Fonksiyonunu yaklaşık olarak $U(t) \approx \frac{t}{m_1} + c_F$ gibi hesaplamak mümkün olduğu sonucuna ulaşılır. Burada, $c_F \equiv \frac{m_2}{2m_1^2}$ tanımlanmıştır. $U(t)$ Yenileme Fonksiyonunu aşağıdaki integral denklem şeklinde de gösterebiliriz:

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)\, dF(s) \qquad (B.3)$$

(B.3) integral denklemi integral denklemlerin özel bir biçimidir. İntegral denklemlerin genel biçimini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$Z(t) = G(t) + \int_0^t Z(t-s)\, dF(s) \qquad (B.4)$$

(B.4) yenileme denklemi veya 2. Tip Volterra integral denklemi adlanır. Burada $G(t)$ ile bilinen fonksiyon , $Z(t)$ ile ise bilinmeyen pozitif değerli bir fonksiyon ifade edilmiştir. Yenileme Denklemi için aşağıdaki teoremi ispatsız verelim.

Teorem B.4: (B.4) şeklinde ifade edilmiş Yenileme Denkleminin analitik çözümü

$$Z(t) = G(t) * U(t) = \int_0^s G(t-s)\, dU(s)$$

şeklindedir (Feller (1971)).

Yukarıda da belirttiğimiz gibi $U(t)$ fonksiyonu X rasgele değişkenlerinin ürettiği Yenileme fonksiyonudur. Fakat bazı sade dağılımlar hariç diğer dağılımlar için $U(t)$ fonksiyonunun kesin şeklini bulmak kolay değildir. Bundan dolayı $Z(t)$

fonksiyonunun asimptotik sonucu oldukça önemlidir. Bu amaçla aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem B.5: $G(t)$ fonksiyonu Riemann integrallene bilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken (B. 4) denklemi için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty G(s)ds$$

Burada $\mu = E(X_1)'$ dır.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : **Aynura POLADOVA**
Uyruğu : **Y. U.**
Doğum Tarihi ve Yeri : **04.10.1986, Sumgayıt/ Azerbaycan**
E-posta : **apoladova@etu.edu.tr**

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2008, Bakü Devlet Üniversitesi, Mekanik Matematik Fakültesi, Mekanik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2017, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2015 – 2017	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce, Rusca

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

Poladova, A., Tekin, S., Khaniyev, T., Reliability Analysis for a System with Gradual Degradation by Using Asymptotic Methods, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), Harran University, Şanlıurfa, 11-13 May 2017*