

Temel Biyomekanik

Nihat Özkaya - Margareta Nordin
David Goldsheyder - Dawn Leger

Çeviri Editörü:
Teyfik Demir - Fatma Kübra Erbay Elibol



First published in English under the title Fundamentals of Biomechanics, 4th Edition by Nihat Özkaya, Dawn Leger, David Goldsheyder, Margareta Nordin, by Springer-Verlag GmbH, DE
Copyright © 2017, Springer International Publishing Switzerland.

This edition has been translated and published under licence from Springer-Verlag GmbH, DE. Springer-Verlag GmbH, DE takes no responsibility and shall not be made liable for the accuracy of the translation.

TEMEL BİYOMEKANİK

Yayına Hazırlayanlar:

Teyfik Demir - Fatma Kübra Erbay Elibol

Ankara: TOBB ETÜ Yayınları, Ekim 2019

ISBN: 978 - 975 - 9116 - 11 - 8 (Basılı)

ISBN: 978 - 975 - 9116 - 15 - 5 (e-Kitap)

Kapak Tasarım:

Teyfik Demir - Selin Özdemir

Tasarım - Baskı:

Ses Reklam ve Matbaacılık Ltd. Şti.

Ayten Sokak No: 28/7 Tandoğan/ANKARA

Tel: +90 312 215 62 00

Fax: +90 312 215 61 81

e-mail: ses@sesreklam.net

Web: www.sesreklam.net

Yayında yer alan yazıların içeriğinden yazarları sorumludur.

©TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi 2019

Bu kitabın her hakkı saklıdır tamamı veya herhangi bir bölümü yayınlayanın yazılı izni olmaksızın yayınlanamaz.

Bu eser için verdiğim tüm emeği, beni dñnyaya getiren, sevgisiyle büyüten Annem Adeviye Demir'e, yetişmem için her türlü desteği veren Rahmetli Babam Ali Demir'in aziz hatırasına, uzun süren çalışma saatlerime tahammül gösterip sevgisiyle desteğini hep yanımda hissettiren eřim Esra'ya, dñnyayı güzel bir yer kılan kızım Betül'e ve yakışıklı oğlum Ahmed Tarık'a armağan ediyorum.

Teyfik Demir

Kitap çalışmamızı, öncelikle bizlere bu fırsatı sağlayan çok kıymetli Hocam Prof. Dr. Teyfik Demir'e, sevgi ve desteklerini her zaman hissettiğim, annem Huriye Erbay, babam Hasan Erbay, eşim Burak Elibol, ailem Neriman Elibol, Orhan Elibol, kardeşlerim Elvan Büşra Yenigün, Bihter Deniz Erbay, Atilla Yenigün, Alperen Elibol ve biricik yeğenim Almıla Yenigün'e ithaf ediyorum.

Fatma Kübra Erbay Elibol

TAKDİM

Biyomekanik, vücudun statik ve dinamik tüm süreçlerini multidisipliner bir yaklaşımla inceleyen, mühendislik bilim dalıdır. Nöroşirürjiyenler, ortopedistler, omurga cerrahları, fizik tedavi uzmanları, spor hekimleri, fizyoterapistler gibi birçok hekim ve sağlık profesyoneli tarafından biyomekaniğin temel düzeyde bilinmesi, ilgilendikleri konunun fizyolojik ve patolojik süreçlerinin tanımlanmasında ve uygun tedavinin planlanmasında önemlidir. Temel eğitimlerinde genelde yoğun matematik ve fizik eğitimi bulunmayan hekimler ve sağlık profesyonellerinin biyomekanik gibi yoğun fizik ve matematik bilgisi gerektiren bir bilim dalı hakkında yeteri kadar bilgi sahibi olmaları mevcut kaynaklar ile çok zor olabilmektedir. Diğer taraftan, mühendislik temel eğitimi (yoğun fizik ve matematik bilgisi içerirken,) biyomekanik bilim dalının biyolojik temellerini çoğu zaman tam anlamıyla kapsayamamaktadır. Bu eser, orijinal dilinde basılmış ön sözünde de belirtildiği üzere, mühendislik ve tıp gibi farklı disiplinlerden beslenen biyomekanik bilim dalının, her iki disiplinle ilgili kişilere temel kaynak olabilmesi amacıyla hazırlanmıştır.

Yıllar içerisinde, bilimin ve teknolojinin gelişimine paralel olarak Biyomekanik alanı da çok büyük gelişim göstermiştir. Başta kas iskelet sistemi olmak üzere vücudun biyolojik yapısı, gelişimi, yaşlanma süreci ve hastalıkları hakkında elde edilen bilgiler, gelişen mühendislik bilgisi ile bir araya getirilerek, insan vücudunun “biyolojik ve mekanik” özellikleri artan bir merak ile incelenmektedir. Bu gelişimin doğal bir sonucu olarak fizyolojik süreçler hakkında daha detaylı bilgiler ele edildikçe, biyomekanik biliminin hastalıkların (patolojik süreçlerin) tedavilerine katkısı giderek artmaktadır.

Bu eser, New York Üniversitesi, Eklem Hastalıkları Ortopedi Enstitüsü ile New York Üniversitesi, Sanat ve Bilim Yüksekokulu Ergonomik ve Biyomekanik bölümünün ortak çabası ile ortaya konmuştur. Eser orijinal dili olan İngilizceden Yunanca, Japonca ve İtalyanca ‘ya çevrilmiştir. Bu eserin Türkçeye çevirisinin takdimini yazmanın derin mutluluğu içerisindeyim.

Ülkemizde biyomekanik alanının gelişmesine önderlik etmiş çok değerli bilim adamı, hocam Prof. Dr. Teyfik Demir önderliğinde, çeşitli mühendislik dallarından gelen ve “hocanın tedrisinden geçen” değerli doktora öğrencileri sayesinde dilimize kazandırılmış bu eserin, tıp ve mühendislik alanında temel eğitimlerini tamamlamış, özel ilgi alanları doğrultusunda biyomekanik konusunda bilgi sahibi olmayı amaçlayan kişilere başucu kitabı olma niteliği taşımaktadır. Mühendislik fakültelerinde biyomekanik alanında kaynak kitap olan eserin dilimize tercümesi, bu alana gönül vermiş, meraklı bilim insanlarına rehberlik etmesi, bilime, insana ve hayata katkı sağlaması temennisi ile..

Doç. Dr. Mesut Emre YAMAN
Gazi Üniversitesi
Tıp Fakültesi
Nöroşirürji Anabilim Dalı

TÜRKÇE ÇEVİRİYE ÖN SÖZ

Biyomekanik, bilim dünyasında yeni ve dinamik bir alan gibi görünse de aslında geçmişi 15. yüzyıla dayanan, matematik, fizik, tıp gibi pek çok farklı bilim dalının temellerini barındıran multidisipliner bir alandır. Bu sebeple de pek çok meslek dalını ilgilendirmekte ve farklı meslek gruplarının ilgisini çekmektedir. Temel olarak biyomekanik alanı ile mekanik prensipler kullanılarak biyolojik sistemler incelenmekte ve bu bilgiler ışığında sağlık, spor gibi alanların gelişimine destek olunmaktadır.

Çevirisi yapılan bu kitapta ise mekanik prensipler; bu konu hakkında bilgi sahibi olmayan araştırmacıların veya öğrencilerin anlayabileceği düzeyde işlenmiş ve biyolojik sistemler üzerinde uygulanışı ile örneklendirilmiştir. Kısaca mühendisler, tıp dünyası ve bu alanlardaki öğrencilerin rahatlıkla anlayıp, yorumlayabileceği ve biyomekanik alanı için temel bakış açısı kazandırabilecek bir kitaptır. Ayrıca bu kitap uluslararası alanda pek çok üniversitede ders kitabı olarak okutulmaktadır. Böyle bir eserin Türkçe literatüre kazandırılmasının, ülkemizde alana ilgi duyan kişilerin gelişiminde ve bu alanın ilerlemesinde katkısı olmasını ümid ediyoruz.

Çeviri esnasında kitabın orijinal baskısına sadık kalmaya ve cümlelerin anlamını kaybetmemesine dikkat edildi. Teknik terimlerin çevirisine ayrıca özen gösterilmiştir.

Temel Biyomekanik kitabı Türkçe basımı için değerli katkılarından dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Mütevelli Heyeti Başkanı sayın Rifat Hisarcıklıoğlu'na ve TOBB ETÜ Yayın Evi'ne,

Terimlerin kullanımında yardım ve desteklerini esirgemeyen Dr. Tolga Tolunay ve Dr. Mesut Emre Yaman'a,

Kitabın görsellerini Türkçe basım için yeniden yorumlayan TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Görsel İletişim Tasarımı Bölümü öğrencisi Selin Özdemir'e,

Son olarak, her daim sabır ve anlayışla bizleri destekleyen ailelerimize teşekkürü bir borç biliriz.

Editörler ve Çevirmenler

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1 - GİRİŞ

1.1	Mekanik.....	3
1.2	Biyomekanik.....	5
1.3	Temel Kavramlar.....	6
1.4	Newton Yasaları.....	6
1.5	Boyutsal Analiz.....	7
1.6	Birimler Sistemi.....	8
1.7	Birimlerin Dönüştürülmesi.....	9
1.8	Matematik.....	11
1.9	Skaler Büyüklükler ve Vektörler.....	11
1.10	Modelleme ve Yaklaşımlar.....	11
1.11	Yaygın Yöntem.....	12
1.12	Kapsam.....	12
1.13	Gösterim.....	13
	Kaynaklar, Tavsiye Edilen Okumalar ve Diğer Kaynaklar.....	13

Bölüm 2 - KUVVET VEKTÖRÜ

2.1	Kuvvetin Tanımı.....	21
2.2	Vektörel Büyüklük Olarak Kuvvet Özellikleri.....	21
2.3	Kuvvetin Boyut ve Birimleri.....	22
2.4	Kuvvet Sistemleri.....	22
2.5	Dış ve İç Kuvvetler.....	22
2.6	Normal ve Teğet Kuvvetler.....	23
2.7	Çekme ve Basma Kuvveti.....	23
2.8	Eşdüzlem Kuvvetler.....	24
2.9	Eşdoğrultulu Kuvvetler.....	24
2.10	Kesişen Kuvvetler.....	24
2.11	Paralel Kuvvet.....	24
2.12	Yer Çekimi Kuvveti ve Ağırlık.....	25
2.13	Dağılan Kuvvet Sistemleri ve Basınç.....	26
2.14	Sürtünme Kuvvetleri.....	27
2.15	Örnek Problemler.....	30

Bölüm 3 - MOMENT VE TORK VEKTÖRLERİ

3.1	Moment ve Tork Vektörlerinin Tanımı.....	39
3.2	Momentin Büyüklüğü.....	39
3.3	Momentin Yönü.....	40
3.4	Momentin Boyut ve Birimleri.....	41
3.5	Moment Vektörü ile İlgili Bazı Önemli Noktalar.....	41
3.6	Net ve Bileşke Moment.....	43
3.7	Çift ve Çift Momenti.....	49

3.8 Kuvvetlerin Ötelenmesi.....	50
3.9 Vektör Ürünü Olarak Moment.....	51
3.10 Örnek Problemler	56

Bölüm 4 - STATİK: DENGEDKİ SİSTEMLER

4.1 Genel Bakış	65
4.2 Newton'un Mekanik Yasaları.....	65
4.3 Denge Koşulları.....	67
4.4 Serbest Cisim Diyagramları	69
4.5 Dengedeki Sistemlerin Analiz Yöntemleri.....	71
4.6 Denge Denklemlerini ile Alakalı Notlar.....	72
4.7 Kısıtlar ve Tepkiler.....	73
4.8 Basit Destekli Yapılar.....	74
4.9 Kablo Makara Sistemleri ve Traksiyon Cihazları	81
4.10 Ankastre Yapılar.....	84
4.11 Sürtünmeli Sistemler.....	91
4.12 Ağırlık Merkezi Belirleme	93
4.13 Örnek Problemler	98

Bölüm 5 - STATİĞİN BİYOMEKANİK UYGULAMALARI

5.1 Eklemler	109
5.2 Çizgili Kaslar.....	110
5.3 Temel Hususlar.....	111
5.4 Temel Varsayımlar ve Kısıtlamalar	112
5.5 Dirseğin Mekanığı.....	113
5.6 Omuzun Mekanığı.....	119
5.7 Omurganın Mekanığı	123
5.8 Kalçanın Mekanığı	129
5.9 Dizin Mekanığı.....	138
5.10 Ayak Bileğinin Mekanığı	144
5.11 Örnek Problemler	147
Kaynaklar	150

Bölüm 6 - DİNAMİĞE GİRİŞ

6.1 Dinamik.....	153
6.2 Kinematik ve Kinetik	153
6.3 Doğrusal, Açısal ve Genel Hareketler	153
6.4 Uzaklık ve Yer değiştirme	155
6.5 Sürat ve Hız.....	156
6.6 İvme.....	156
6.7 Atalet ve Momentum.....	156
6.8 Serbestlik Derecesi.....	156

6.9	Parçacık Kavramı	156
6.10	Referans Düzlemleri ve Koordinat Sistemleri	157
6.11	Dinamik Analizler için Önkoşullar	157
6.12	İşlenecek Konular.....	157

Bölüm 7 - DOĞRUSAL KİNEMATİK

7.1	Tek Eksenli Hareket	161
7.2	Konum, Yer Değiştirme, Hız ve İvme.....	161
7.3	Boyutlar ve Birimler.....	163
7.4	Ölçülen ve Türetilen Büyüklükler.....	164
7.5	Sabit İvme ile Tek Eksenli Hareket.....	165
7.6	Tek Eksenli Hareket Örnekleri.....	166
7.7	Çift Eksenli Hareket.....	173
7.8	Konum, Hız ve İvme Vektörleri	173
7.9	Sabit İvme ile Çift Eksenli Hareket.....	175
7.10	Eğik hareket.....	176
7.11	Atletizm Uygulamaları.....	180
7.12	Örnek Problemler	184

Bölüm 8 - DOĞRUSAL KİNETİK

8.1	Genel Bakış	191
8.2	Hareket Denklemleri	191
8.3	Translasyonel Hareketin Özel Durumları.....	193
8.3.1	Sabit Kuvvet.....	193
8.3.2	Zamanın Fonksiyonu Olarak Kuvvet.....	194
8.3.3	Yer Değiştirmenin Fonksiyonu olarak Kuvvet.....	194
8.4	Kinetikte Problem Çözümü için Yöntem	195
8.5	İş ve Enerji Metotları.....	197
8.6	Mekanik İş.....	197
8.6.1	Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan İş.....	197
8.6.2	Değişken Kuvvet Tarafından Yapılan İş.....	198
8.6.3	İş'in Skaler Çarpım Olarak Hesaplanması.....	199
8.7	Mekanik Enerji.....	200
8.7.1	Potansiyel Enerji	200
8.7.2	Kinetik Enerji	200
8.8	İş-Enerji Teoremi.....	200
8.9	Enerjinin Korunumu İlkesi.....	201
8.10	İş ve Enerjinin Birimi ve Boyutu	201
8.11	Güç	201
8.12	Enerji Yöntemlerinin Uygulamaları.....	202
8.13	Örnek Problemler	207

Bölüm 9 - AÇISAL KİNEMATİK

9.1 Kutupsal Koordinatlar	215
9.2 Açısal Konum ve Yer Değiştirme	215
9.3 Açısal Hız	216
9.4 Açısal İvme	216
9.5 Büyüklük ve Birimler	217
9.6 Temel Konseptlerin Tanımları	217
9.7 Sabit bir Eksen Etrafında Rotasyon Hareketi	227
9.8 Çizgisel ve Açısal Büyüklükler Arasındaki İlişki	229
9.9 Düzgün Dairesel Hareket	230
9.10 Sabit İvmeli Dairesel Hareket	231
9.11 Bağlı Hareket	232
9.12 Bağlantı Sistemleri	224
9.13 Örnek Problemler	237

Bölüm 10 - AÇISAL KİNEMATİK

10.1 Açısal Hareket Kinetiği	243
10.2 Tork ve Açısal İvme	250
10.3 Kütle Atalet Momenti	251
10.4 Paralel Eksen Teorisi	252
10.5 Jirasyon Yarıçapı	253
10.6 Segmental Hareket Analizi	253
10.7 Rotasyonel Kinetik Enerji	257
10.8 Açısal İş ve Güç	258
10.9 Örnek Problemler	260

Bölüm 11 - İMPULS VE MOMENTUM

11.1 Giriş	265
11.2 Doğrusal Momentum ve İmpuls	265
11.3 İmpuls ve Momentum Metodunun Uygulama Alanları	267
11.4 Doğrusal Momentumun Korunumu	273
11.5 Çarpma ve Çarpışmalar	274
11.6 Tek Boyutlu Çarpışmalar	275
11.6.1 Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar	275
11.6.2 Tamamen Esnek Çarpışma	276
11.6.3 Elastoplastik Çarpışma	277
11.7 İki Boyutlu Çarpışmalar	279
11.8 Açısal İmpuls ve Momentum	282
11.9 Temel Denklemlerin Özetleri	283
11.10 Düzlemsel Harekette Rijit Cisimlerin Kinetiği	284
11.11 Örnek Problemler	285

Bölüm 12 - ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN CİSİMLERİN MEKANİĞİNE GİRİŞ

12.1 Genel Bakış	289
12.2 Uygulanan Kuvvetler ve Şekil Değiştirme.....	289
12.3 İç Kuvvetler ve Momentler	290
12.4 Gerilme ve Gerinim.....	291
12.5 Genel Prosedür.....	293
12.6 Matematiksel İlişki.....	294
12.7 Ele Alınacak Konular.....	294
12.8 Önerilen Okumalar.....	294

Bölüm 13 - GERİLME VE GERİNİM

13.1 Temel Yükleme Koşulları.....	299
13.2 Tek Eksenli Çekme Testi.....	299
13.3 Yük-Uzama Diyagramı	300
13.4 Basit Gerilme.....	301
13.5 Basit Gerinim	304
13.6 Gerilme-Gerinim Diyagramı	306
13.7 Elastik Deformasyon	307
13.8 Hooke Kanunu.....	309
13.9 Plastik Deformasyon	310
13.10 Boyun Verme	311
13.11 İş ve Gerinim Enerjisi	312
13.12 Gerinim Sertleşmesi (Pekleşme).....	312
13.13 Histerezis Döngüsü	313
13.14 Gerilme Gerinim Diyagramına Bağlı Özellikler.....	313
13.15 Malzeme Davranışının İdealleştirilmiş Modelleri	314
13.16 Malzemelerin Mekanik Özellikleri	315
13.17 Örnek Problemler.....	316
13.18 Çalışma soruları	324

Bölüm 14 - ÇOK EKSENLİ DEFORMASYONLAR VE GERİLME ANALİZLERİ

14.1 Poisson Oranı	333
14.2 İki ve Üç Eksenli Gerilmeler.....	334
14.3 Gerilme Dönüşümleri.....	340
14.4 Asal Gerilmeler	341
14.5 Mohr Çemberi	342
14.6 Hasar Teorileri.....	346
14.7 Kabul Edilebilir Gerilme ve Emniyet Faktörü	349
14.8 Malzeme Mukavemetini Etkileyen Faktörler.....	350
14.9 Yorulma ve Dayanıklılık	350
14.10 Gerilme Konsantrasyonu	352
14.11 Burulma.....	354

14.12 Eğme	362
14.13 Birleşik Yükleme	373
14.14 Örnek Problemler.....	375

Bölüm 15 - BİYOLOJİK DOKULARIN MEKANİK ÖZELLİKLERİ

15.1 Viskoelastisite	383
15.2 Yaylara ve Damperlere Dayalı Analogiler	384
15.3 Viskoelastisitenin Deneysel Modelleri.....	386
15.3.1 Kelvin-Voight Modeli	386
15.3.2 Maxwell Modeli	387
15.3.3 Standart Katı Modeli	388
15.4 Zamana Bağlı Malzeme Cevabı	389
15.5 Elastikiyet ve Viskozite Karşılaştırması	390
15.6 Biyolojik Dokuların Ortak Özellikleri	394
15.7 Kemiğin Biyomekaniği	395
15.7.1 Kemiğin Yapısı	395
15.7.2 Kemiğin Mekanik Özellikleri.....	396
15.7.3 Kemiğin Yapısal Bütünlüğü	399
15.7.4 Kemik Kırıkları	401
15.8 Tendonlar ve Ligamentler	401
15.9 İskelet Kası.....	403
15.10 Artiküler Kartilaj.....	405
15.11 Tartışma.....	407
15.12 Örnek Problemler.....	408

Bölüm - EK A : DÜZLEM GEOMETRİSİ

A.1 Açılar	415
A.2 Üçgenler	416
A.3 Sinüs Teoremi.....	416
A.4 Kosinüs Teoremi.....	416
A.5 Dik Üçgen	417
A.6 Pisagor Teoremi.....	417
A.7 Sinüs, Kosinüs ve Tanjant	417
A.8 Ters Sinüs, Kosinüs ve Tanjant	418
A.9 Çalışma Problemleri.....	421

Bölüm - EK - B : VEKTÖR MATEMATİĞİ

B.1 Tanımlar	425
B.2 Notasyon.....	425
B.3 Bir Vektörün Skaler Çarpımı.....	426
B.4 Negatif Vektör	426

B.5	Vektörlerin Eklenmesi: Grafik Metodu	426
B.6	Vektörlerin Çıkarılması	427
B.7	İkiden Fazla Vektörün Toplanması	427
B.8	Vektörlerin İzdüşümü	429
B.9	Vektörlerin Bileşenlerine Ayrılması	429
B.10	Birim Vektör	430
B.11	Dikdörtgensel Koordinatlar	430
B.12	Vektörlerin Toplanması: Trigonometrik Metot	432
B.13	Vektörlerin Üç Boyutlu Bileşenleri	437
B.14	Vektörlerin Nokta (Skaler) Çarpımı	438
B.15	Vektörlerin Kros (Vektörel) Çarpımı	439
B.16	Alıştırma Problemleri	441

Bölüm - EK - C: KALKÜLÜS

C.1	Fonksiyonlar	449
C.1.1	Sabit Fonksiyonlar	450
C.1.2	Kuvvet Fonksiyonları	451
C.1.3	Lineer Fonksiyonlar	452
C.1.4	İkinci Dereceden Fonksiyonlar	453
C.1.5	Çok Terimli Fonksiyonlar	454
C.1.6	Trigonometrik Fonksiyonlar	454
C.1.7	Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar	456
C.2	Türev	457
C.2.1	Temel Fonksiyonların Türevleri	458
C.2.2	Sabit Çarpım Kuralı	458
C.2.3	Toplam Kuralı	459
C.2.4	Çarpım Kuralı	459
C.2.5	Bölüm Kuralı	460
C.2.6	Zincir Kuralı	460
C.2.7	Kapalı Türevleme	461
C.2.8	Daha Yüksek Türevler	462
C.3	İntegral	462
C.3.1	Belirsiz İntegrallerin Özellikleri	464
C.3.2	Belirli İntegrallerin Özellikleri	465
C.3.3	İntegral Alma Yöntemleri	466
C.4	Trigonometrik Özdeşlikler	467
C.5	İkinci Dereceden (Kuadratik) Formül	468
C.6	Çalışma Problemleri	469

İndeks	471
---------------------	------------

Bölüm 1

GİRİŞ

Çeviren: Fatma Kübra Erbay Elibol

- 1.1 Mekanik
- 1.2 Biyomekanik
- 1.3 Temel Kavramlar
- 1.4 Newton Yasaları
- 1.5 Boyutsal Analiz
- 1.6 Birimler Sistemi
- 1.7 Birimlerin Dönüştürülmesi
- 1.8 Matematik
- 1.9 Skaler Büyüklükler ve Vektörler
- 1.10 Modelleme ve Yaklaşımlar
- 1.11 Yaygın Yöntem
- 1.12 Kapsam
- 1.13 Gösterim

Kaynaklar, Tavsiye Edilen Okumalar ve Diğer Kaynaklar /

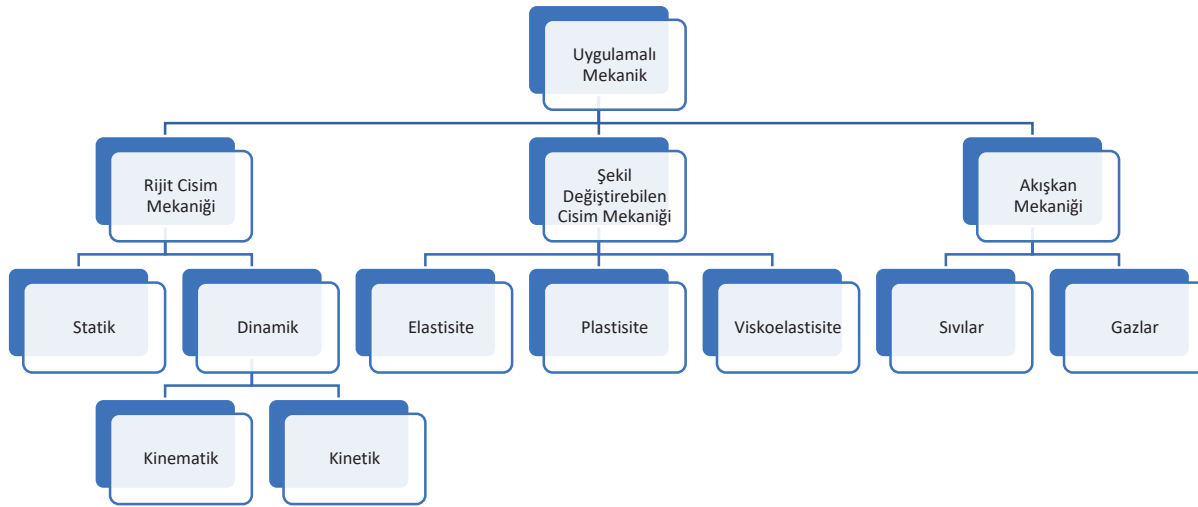
1.1.Mekanik

Mekanik, kuvvet olarak adlandırılan mekanik müdahaleler tarafından oluşturulan cisim deformasyonu ve hareketiyle ilgili bir fizik dalıdır. Mekanik, Archimedes (287-212 MÖ) zamanına kadar dayanan en eski fizik bilimidir. Galileo (1564- 1642) ve Newton (1564-1642) bu alanın önde gelen ve katkıda bulunan isimleridir. Galileo, dinamikte ilk temel analiz

ve deneyleri yaparken Newton hareket ve yer çekimi yasalarını formüle etmiştir.

Mühendislik mekaniği ya da uygulamalı mekanik, mekanik ilkelerin uygulamalı bilimidir. Uygulamalı mekanik, mekanik sistemlerin analizi ve tasarımı ile ilgilenir. Uygulamalı mekanik temelinde Tablo 1.1’de gösterildiği gibi 3 ana kısma bölünebilir.

Tablo 1.1: Uygulamalı Mekaniğin Sınıflandırılması



Genellikle, materyaller katı ve akışkan olarak sınıflandırılabilir. Katı malzemeler rijit veya şekil değiştirebilen malzemelerdir. *Rijit cisim* deforme edilemez. Gerçekte, her nesne veya malzemede dış kuvvet uygulandığında deformasyon görülür. Bazı durumlarda, deformasyonun miktarı çok küçük olduğu için istenilen analizleri etkilemez. Böyle durumlarda cismi rijit olarak kabul ederek analizleri göreceli olarak basit hesaplamalarla yapmak tercih edilebilir.

Statik, duran veya sabit hızla hareket eden rijit cisimlerin üzerindeki kuvvetleri inceler. *Dinamik* ise hareketli cisimlere değinir. *Kinematik*, kuvvetin sebep olduğu hareketi hesaba katmadan hareketin geometrisi ve zamana bağlılığına değinen dinamiğin alt dalıdır. *Kinetik*, kinematikten yola çıkarak kuvvetlerin ve kütlelerin analizlerdeki etkisini içerir.

Statik ve dinamik, temel olarak kuvvetin deformasyonun ihmal edilebildiği rijit cisimler üzerindeki dış etkilerini incelemeye yöneliktir. Diğer yandan, *şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği*, dışardan uygulanan kuvvetler ve onların cisimler üzerinde oluşturduğu iç etkileri arasındaki ilişkiye değinir. Uygulamalı mekanikte, ilgilenilen cisimlerin rijit olduğunu varsayılmaz, malzeme özelliklerinin gerçek yapısı dikkate alınır. Şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği ile malzemelerin atomik ve moleküler yapısıyla ilgilenen malzeme biliminin kuvvetli ilişkisi vardır. Şekil değiştirebilen cisim özellikleri, yapıların ve makine parçalarının tasarımında önemli uygulamalara sahiptir. Genellikle, rijit cisim mekaniğinin gerektirdiği analizler ile kıyaslandığında şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniğinin analizleri daha karmaşıktır.

Şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği, nesnelerin şekil değiştirebilme özelliği ile ilgilenen alandır. *Şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği* sırasıyla elastik, plastik ve viskoelastik malzemelerin mekaniğine ayrılır. Elastik cisim, bütün deformasyonların dışardan uygulanan kuvvetin kaldırılmasıyla eski haline döndüğü malzemeler olarak tanımlanabilir. Bazı malzemelerin bu özelliği, bir yay veya paket lastiğini gözlemleyerek zihinde kolayca canlandırılabilir. Eğer bir yay yavaşça gerdirilip (deforme edilip) sonrasında serbest bırakılırsa (uygulanan kuvvet kaldırılırsa), eski (deforme olmamış) boyutuna ve şekline geri dönecektir. Diğer yandan, bir plastik cisim

kalıcı (geri dönüşü olmayan) deformasyona maruz kalabilir. Bu davranış yine yay kullanılarak gözlemlenebilir. Yaya büyük miktarda kuvvet uygulayıp geniş ölçüde gerdirip bırakıldıktan sonra, yay kendini geri toparlayacaktır ancak boyunda bir artış gerçekleşebilir. Bu artış yaydaki plastik deformasyonun miktarını sergiler. Bu bağlamda uygulanan kuvvetin miktarı ve süresine bağlı olarak, bir malzeme yay olayındaki gibi elastik veya elastoplastik davranış sergileyebilir.

Vizkoelastisiteyi açıklamak için, öncelikle neyin *akışkan* olarak bilindiğini tanımlamalıyız. Malzemeler genellikle, katı veya akışkan olarak sınıflandırılır. Katı cisme dışardan kuvvet uygulandığı zaman, cisim belli bir oranda şekil değiştirecektir. Aynı kuvvetin sürekli uygulanışı, katı cismi muhakkak daimî bir şekilde deforme etmez. Ancak, akışkan bir cisme sürekli uygulanan kuvvet daimî bir deformasyona sebep olabilir (akıntı). *Viskozite*, akıntıya karşı gösterilen direncin nicel ölçümü olarak bilinen akışkan özelliğidir. Doğada hem akışkan hem katı özelliğe sahip bazı malzemeler vardır. *Viskoelastik* terimi, bu tip malzemelerin mekanik özelliklerini tanımlamada kullanılır. Çoğu biyolojik malzeme viskoelastik özellik sergiler.

Uygulamalı mekaniğin 3. kısmı akışkanlar mekaniğidir. *Gazların ve sıvıların mekaniğini* içerir.

Uygulamalı mekaniğin çeşitli alanları arasında keskin ayrımların olmadığı dikkate alınmalıdır.

Örneğin, viskoelastisitede katı ve akışkan özellikleri aynı anda değerlendirilmelidir.

1.2. Biyomekanik

Genel olarak biyomekanik, çeşitli biyolojik problemlere klasik mekaniğin uygulanmasıyla ilgilendirilir. Biyomekanik, mühendislik mekaniği ile biyoloji ve fizyoloji alanlarını birleştirir. Biyomekanik temel olarak insan vücuduyla ilgilendirilir. Biyomekanik alanında, mekanik ilkeler biyoloji ve tıptaki ekipman ve sistemlerin anlaşılması, tasarımı, gelişimi ve analizinde uygulanmaktadır. Esas itibarıyla biyomekanik, hareket halinde ya da durağan halde insan vücuduna, mekanik ilkelerin uygulanması ile ilgilenen çok disiplinli bir bilim dalıdır. Biyomekanik, nispeten yeni ve dinamik bir alan olmasına rağmen, tarihi Leonardo da Vinci'nin (1452- 1519) biyolojik çalışmalarında mekaniğin önemini vurguladığı 15 yy'a dayanmaktadır. Biyoloji, tıp, temel bilimler ve mühendislik alanındaki araştırmacıların katkıları sonucunda, disiplinler arası bir alan olan biyomekanik son 50 yıldır istikrarlı bir şekilde büyümektedir.

Biyomekanik alanındaki gelişmeler, normal ve patolojik durumlar, nöromüsküler kontrolün mekaniği, mikrodolaşımda kan akışının mekaniği, akciğerde hava akışının mekaniği, büyüme ve gelişimin mekaniğini içeren pek çok şeyi kavramamızı iyileştirmiştir. Tıbbi teşhis ve tedavi süreçlerinin gelişimine katkıda bulunmuştur. Medikal ekipman, cihaz, alet,

engelli insanlar için yardımcı teknolojik cihazlar, yapay protez, implant tasarım ve üretimini sağlar. Sahada ve spor müsabakalarında insan performansını geliştirme hakkında fikir verir.

Biyomekaniğin farklı bakış açıları, uygulamalı mekaniğin farklı kavram ve metodlarını faydalı kılar. Örneğin, statik ilkeleri, iskelet-kas sisteminin çeşitli eklem ve kaslardaki kuvvetlerin büyüklüğünün ve yapısının belirlenmesinde kullanılır. Dinamiğin ilkeleri, hareket tanımlama için kullanılır ve spor mekaniğinde pek çok uygulamaya sahiptir. Şekil değiştiren cisimlerin mekanik ilkeleri, biyolojik malzeme ve sistemlerde, bu alanın ve temel denklemlerin gelişimi için gerekli araçları sağlar, bu da farklı koşullar altında fonksiyonel davranışlarını değerlendirmek için kullanılır. Akışkan mekaniğinin ilkeleri, insan dolaşım sisteminde kan akışını ve akciğerlerdeki hava akışını incelerken kullanılır.

Bu kitabın amacı, biyomekaniğin ilkeleri ve uygulamalarını okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla, ilk olarak temel araçlar ve ilkelere bahsedilecektir. Sonrasında, bu ilkelerin sistematik ve kapsamlı uygulamaları, çözülmüş örnek problemlerle işlenecektir. Statik, dinamik ve şekil değiştirebilen cisimlerin (katı mekaniği vb.) uygulamaları üzerinde yoğunlaşacaktır. Akışkanlar mekaniği ve onun biyomekanikteki uygulamaları ile ilgili de sınırlı da olsa bilgi verilecektir.

1.3. Temel Kavramlar

Mühendislik mekaniği, uzunluk, zaman ve kütle için temel kavramlar olduğu Newton mekaniği temel alınarak kurulmuştur. Bunlar birbirinden bağımsız mutlak kavramlardır. *Uzunluk*, boyutu nicel bir şekilde tanımlayan kavramdır. *Zaman* ise, olayların akışını sıralamak için kullanılan kavramdır. *Kütle*, tüm cisimlerin özelliğidir ve ataletin nicel ölçümüdür. *Atalet*, cismin hareket değişimine direncidir. *Atalet*, bir cismin sabit veya sabit hareketli durumunu sürdürebilme yetisini de tanımlayabilir.

Mekanikteki diğer önemli kavramlar, mutlak değişimler ancak temel kavramlardan türemişlerdir. Kuvvet, moment veya tork, hız, ivme, iş, enerji, güç, impuls, momentum, gerilim ve gerinimi içerirler. *Kuvvet*, mekanik müdahale veya yük gibi pek çok şekilde tanımlanabilir. Kuvvet, bir cismin diğeri üzerindeki hareketidir. Kuvvet bir cisme uygulandığında harekete, deformasyona ya da her ikisine de sebep olur. *Moment* veya *tork*, cisme uygulanan kuvvetin rotasyonel, eğme veya burma hareketinin nicel olarak ölçümüdür. *Hız*, yer değiştirmenin zamana oranı olarak tanımlanır. Bunun yanı sıra artan hızın zamana oranı ivme olarak tanımlanır. Bu ve konuyla alakalı diğer kavramlarla ilgili detaylı tanımlamalardan sonraki bölümlerde bahsedilecektir.

1.4. Newton Yasaları

Tüm mekanik alanı, birkaç temel kanuna dayanmaktadır. Bunların arasında, Isaac Newton tarafından ortaya atılan mekaniğin kanunları, statik ve dinamik analizlerin için temel oluşturmuştur.

*Newton'un ilk yasa*sı, cisme etki eden net kuvvet sıfır olduğunda, cismin ilk başta hareketsizse hareketsiz kalacağını ya da hareket halindeyse cismin sabit hızla düz bir çizgide hareket edeceğini belirtir. Bu yasa incelendiğinde, bazı anahtar kelimelere fazladan dikkat edilmelidir. 'Durağan' terimi hareket olmadığını belirtir. Örneğin, masa üzerinde bulunan bir kitap için durağan halde denilebilir. Net kuvvet kavramını tam olarak açıklayabilmek için vektör cebirinden bahsetmemiz gerekir (bkz Bölüm 2). Net kuvvet, basitçe cisme etki eden tüm kuvvetlerin birleşik etkisidir. Eğer cisme etki eden net kuvvet sıfırsa, cisme etki eden kuvvet yok demek değildir. Örneğin bir cisme eşit şiddette ve zıt yönde iki kuvvet uygulandığında, cisme etki eden toplam kuvvet sıfırdır ve cismin rijit olduğu varsayılır. Bu bağlamda eğer bir cisim durağan veya sabit hızla düz bir çizgide hareket ediyorsa, bu cismin dengede olduğu söylenebilir. Bu sebeple, ilk yasa eğer cisme etki eden net kuvvet sıfırsa, cismin dengede olduğunu belirtir.

*Newton'un ikinci yasa*sına göre, bir cisim, bu cisme etki eden net kuvvetle, kuvvet yönünde ivmelenecek ve ivmenin büyüklüğü, net

kuvvetin büyüklüğüyle doğru orantılı ve cismin kütlesiyle ters orantılı olacaktır. İkinci yasanın ifadesindeki önemli terimler, ‘büyüklük’ ve ‘yön’ olup, Bölüm 2’de vektör cebiri içinde detaylı bir şekilde açıklanacaktır. *Newton’un 3. yasasına göre*, her etkiye karşılık her zaman eşit tepki vardır ve birbirini etkileyen cisimler arasındaki etki ve tepki kuvveti, büyüklük bakımından eşit ve ters yönde olup aynı etki çizgisine sahiptir. Bu yasa şu şekilde basitleştirilebilir, eğer bir cisim iterseniz, cisim sizi geri itecektir. Bu yasa, büyük sistemlerin *serbest cisim diyagramlarının* belirlenmesinde önemli uygulamalara sahiptir. Bir yapının bileşenlerinin serbest cisim diyagramı, bileşenlerin yapının etrafını saran eş kuvvetlerle değiştirilmesi ile oluşturulur. Yapıyla ilgili kuvvetlerin incelenmesinde etkili bir yöntemdir.

Sonraki bölümlerde Newton’un yasaları detaylı olarak anlatılacak ve bu metin diğer bölümler sırasında yaygın olarak kullanılacaktır.

1.5. Boyutsal analiz

Boyut teriminin mekanikte pek çok kullanımı vardır. Uzayı tanımlarken, örneğin, tek boyutlu, iki boyutlu ya da 3 boyutlu durumlardan bahsederken kullanılır. Boyut aynı zamanda, miktar özelliğini belirtmede de kullanılır. Her ölçülebilen miktar, bir *boyuta* ve bununla bağlantılı bir *birime* sahiptir. Birim, birimlerin sistemi ile bağlantılı iken boyut

miktarın genel tanımıdır (bkz Bölüm 1.6). Bir mesafe, metre veya feet cinsinden ölçülebiliyorsa bir uzaklığı ifade eder ve bu ölçüyü uzunluk olarak tanımlarız.

Bir olayın akışı saniye, dakika, saat veya gün olarak ölçülebiliyorsa, belirli bir olayın başlangıcı ve sonrasında bitişini ifade eden zamanı belirtir. Bu yüzden bu süreyi “zaman” olan tanımlarız.

İki tip boyut vardır. *Birincil veya temel boyutlar*, mekaniğin temel kavramlarıyla bağlantılı olanlardır. Bu kitapta, uzunluk, zaman ve kütleyi kapsayan temel boyutlar sırasıyla L, T ve M büyük harfleriyle gösterilecektir. Fiziksel büyüklüklerin boyutlarını belirtmek için ise köşeli parantezler kullanılacaktır. Temel boyutlar;

$$[\text{UZUNLUK}] = L$$

$$[\text{ZAMAN}] = T$$

$$[\text{KÜTLE}] = M$$

İkincil boyutlar, temel kavramlardan türeyen bağımlı kavramlarla bağlantılıdır. Örneğin dikdörtgenin alanı, ikisi de uzunluk ölçü birimi olan en ve boyun çarpımından hesaplanabilir. Bu sebeple, alanın boyutu;

$$[\text{ALAN}] = [\text{UZUNLUK}]$$

$$[\text{UZUNLUK}] = LL = L^2$$

Tanım olarak hız, göreceli yer değiştirmenin zamana oranıdır. Göreceli yer değiştirme uzunluk birimleriyle ölçülür. Bu yüzden hızın boyutu;

$$[\text{HIZ}] = \frac{[\text{KONUM}]}{[\text{ZAMAN}]} = \frac{L}{T}$$

İkincil boyut ölçüleri bazı doğal yasaların sonucu olarak ortaya konmuştur. Eğer bir fiziksel ölçünün tanımını biliyorsak, temel boyutun yardımıyla o ölçünün boyutunu kolay bir şekilde belirleyebiliriz. Eğer bir fiziksel ölçü biliniyorsa, o ölçünün birimi de farklı birim sistemlerinde kolayca belirlenebilir. Dahası, bir dizi fiziksel ölçü ile ilgili bir denklemin doğruluğu, denklemi ya da formülü oluşturan terimlerin boyutları analiz ederek doğrulanabilir. Bu bağlamda, *boyutsal homojenlik kanunu* bu ilişkilerin formül haline getirilmesi üzerine kısıtlamalar getirir. Bu kanunu açıklamak için, aşağıda verilen rastgele seçilmiş denklem dikkate alındığında:

$$Z = aX + bY + c$$

Denklemin boyutsal olarak homojen olması için denklemdeki her grubun aynı boyutsal ifadeyi temsil etmesi gerekmektedir. Başka bir şekilde ifade edildiğinde, Z uzunluk ölçüsünü ifade ediyorsa, aX, bY çarpımları ve c büyüklüğü uzunluk ölçüsü olmalıdır. Denklemin iki tarafındaki sayısal eşitlik bütün birim sistemleri için sağlanmalıdır.

1.6 Birim Sistemleri

Dünyanın farklı yerlerinde benimsenmiş pek çok sayıda farklı birim sistemleri mevcuttur. İngiliz birim sistemi (foot-pound-saniye sistemi), Gaussian sistemi (CGS-santimetre-gram-saniye sistemi), ve metrik sistem (MKS-metre-kilogram-saniye sistemi) bunlara örnek olarak verilebilir. Ölçümlerde evrensel bir

standart birimin olmaması karışıklığa sebep olmaktadır.

Bu karışıklığa bir düzenleme getirmek amacıyla 1960'da Uluslararası Ağırlık ve Ölçüm Konferansı düzenlenmiştir. Metrik sistemden yola çıkıldığında, bu konferansta, SI olarak kısaltılan Fransızcası 'Le Systeme' International d'Unite's' olarak bilinen sistem kabul edilmiştir. İngilizcede ise 'International System of Units' yani uluslararası birimler sistemi olarak da bilinir. Bugün, neredeyse tüm dünya kabul görmüş ve modernleştirilmiş bu metrik sistemi kullanıyor. Uluslararası birimler sisteminde uzunluk, zaman ve kütle için birimleri sırasıyla metre (m), saniye (s), ve kilogramdır (kg). Bu temel kavramların ölçüm birimleri 3 farklı birimler sistemi için Tablo 1.2.'de listelenmiştir. Bu kitap boyunca, biz uluslararası birimler sistemini kullanacağız. Diğer birimler bilgilendirme amaçlı tanımlanacaktır.

Tablo 1.2: Mekaniğin Temel Niceliklerinin Birimleri

Sistem	Uzunluk	Kütle	Zaman
SI	Metre (m)	Kilogram (kg)	Saniye (s)
CGS	Santimetre (cm)	Gram (gm)	Saniye (s)
British	Foot (ft)	Slug (slug)	Saniye (s)

Temel kavramlar için ölçü birimleri kararlaştırıldığında, temel ve türetilmiş ölçüler arasındaki boyutsal ilişki biliniyorsa, türetilmiş

kavramlar için ölçü birimleri kolayca belirlenebilir. Gerekli olan, uzunluk, kütle ve zamanın boyutsal temsilinin uygun birimleriyle yer değiştirmesidir. Örneğin, kuvvetin boyutu ML/T^2 'dir. Bu yüzden, uluslararası birimler sistemine göre, kuvvetin birimi Newton (N) olarak da bilinen $kg\cdot m/s^2$ 'dir. Benzer olarak, kuvvetin İngiliz birim sistemindeki birimi $lb\ ft/s^2$, c-g-s biriminde ise $g\cdot cm/s^2$ ya da dyne (dyn)'dir. Tablo 1.3 'de türetilmiş ölçü ve uluslararası birim sistemindeki birimlerinden bazılarının boyutsal temsilleri listelenmiştir.

Tablo 1.3: SI'da seçilen ölçülerin boyutları ve birimleri

Miktar	Boyut	SI Birimi	Özel Ad
Alan	L^2	m^2	
Hacim	L^3	m^3	
Hız	L/T	m/s	
İvme	L/T^2	m/s^2	
Kuvvet	$M/L/T^2$	$kg\cdot m/s^2$	Newton (N)
Basınç ve gerilim	$M/L/T^2$	N/m^2	Pascal (Pa)
Moment (tork)	$M\cdot L/T^2$	$N\cdot m$	
İş ve Enerji	$M\cdot L^2/T^2$	$N\cdot m$	Joule (J)
Güç	$M\cdot L^2/T^3$	J/s	Watt (W)

Kilogramın SI'da kütlenin birimi olduğu unutulmamalıdır. Örnek olarak 60 kg'lık bir nesne düşünüldüğünde objenin ağırlığı, yer çekimi ivmesinin büyüklüğü $9.8\ m/s^2$ olarak alındığında, SI da $(60\ kg) \times (9.8\ m/s^2) = 588\ N$ olur.

Mekanikteki temel ve türetilmiş kavramlarla bağlantılı olan birincil ve ikincil birimlere ek olarak düzlem açısı ve sıcaklık gibi tamamlayıcı birimler mevcuttur. Açının genel ölçümü derece ($^\circ$) dir. 360° bir devire ya da 2π radyana eşittir ($\pi=3.1416$). Sıcaklığın SI birimi Kelvin olsa da Celcius ($^\circ C$) en sık kullanılandır. Sıcaklığın İngiliz birim sisteminde birimi Fahrenheit'tır ($^\circ F$).

Çoğu durumda, bir sayının ancak doğru bir birimle verildiyse anlam ifade edeceği unutulmamalıdır. Hesaplamalarda, denklem çözümleri boyunca, her sayı için doğru birimi göstermek en iyi yöntemdir. Bu yaklaşım, kavramsal hataların belirlenmesine ve hesaplanan miktarların birimlerinin ayrı ayrı belirlenme ihtiyacının ortadan kalkmasına yardımcı olur. Bir diğer önemli konu ise birimlerin tutarlılığıdır. Hesaplamalar yapılırken, büyüklükler için kullanılan birim sistemi ne ise bütün büyüklükler için o sistem kullanılmalıdır.

1.7 Birimlerin Dönüştürülmesi

Uluslararası birimler sistemi, ondalık sistemden temel alınmış metrik sistemin düzenlenmiş versiyonudur. Tablo 1. 4'de SI çoğalma katsayıları ve onlara denk gelen ön ekleri listelenmiştir.

Tablo 1.4: SI çoğalma katsayıları ve önekleri

Multiplication factor	SI prefix	SI symbol
1,000,000,000 = 10 ⁹	Giga	G
1,000,000 = 10 ⁶	Mega	M
1,000 = 10 ³	Kilo	K
100 = 10 ²	Hector	H
10 = 10 ¹	Deka	Da
0.1 = 10 ⁻¹	Deci	D
0.01 = 10 ⁻²	Centi	C
0.001 = 10 ⁻³	Milli	M
0.000001 = 10 ⁻⁶	Micro	μ
0.000000001 = 10 ⁻⁹	Nano	N
0.000000000001 = 10 ⁻¹²	Pico	P

Tablo 1.5 ‘de İngiliz ve metrik sistemde yazılan büyüklüklerin SI birimlere dönüştürülmesi verilmiştir.

Tablo 1.5: Birimlerin dönüştürülmesi

Uzunluk	1 santimetre (cm) = 0.01 metre (m) = 0.3937 inç (in) 1 in. = 2.54 cm = 0.0254 m 1 foot (ft) = 30.48 cm = 0.3048 m 1 m = 3.28 ft = 39.37 in. 1 yard (yd) = 0.9144 m = 3 ft 1 mil = 1.609 m 1.609 kilometre (km) = 5,280 ft 1 km = 0.6214 mil
Zaman	1 dakika (min) = 60 saniye (s) 1 saat (h) = 60 min = 3,600 s 1 gün = 24 h = 1,440 min = 86,400 s
Alan	1 cm ² = 0.155 in ² 1 in ² = 6.452 cm ² 1 m ² = 10.763 ft ² 1 ft ² = 0.0929 m ²
Kütle	1 pound mass (lbm) = 0.4536 kg 1 kg = 2.2 lbm = 0.0685 slug 1 slug = 14.59 kg = 32.098 lbm
Kuvvet	1 kilogram kuvvet (kgf) = 9.807 Newton (N) 1 pound kuvvet (lbf) = 4.448 N 1 N = 0.2248 lbf 1 dyne (dyn) = 10 ⁻⁵ N 1 N = 105 dyn
Basınç ve stres	1 N/m ² = 1 Pascal (Pa) = 0.000145 lbf/in ² (psi) 1 psi = 6,895 Pa 1 lbf/ft ² (psf) = 592,966 Pa 1 dyn/cm ² = 0.1 Pa
Moment (tork)	1 N-m = 107 dyn cm = 0.7376 lbf ft 1 dyn/cm = 10 ⁻⁷ N-m 1 lbf ft = 1.356 N-m
İş ve enerji	1 N-m = 1 Joule (J) = 107 erg 1 J = 0.7376 lbf ft 1 lbf ft = 1.356 J
Güç	1 kg m ² /s ³ = 1 J/s = 1 Watt (W) 1 horsepower (hp) = 550 lbf ft/s = 746 W 1 lbf ft/s = 1.356 W 1 W = 0.737 lbf ft/s
Düzlem açısı	1 derece (°) = π/180 radyan (rad) 1 revolution (rev) = 360° 1 rev = 2π rad = 6.283 rad 1 rad = 57.297° 1 ° = 0.0175 rad
Sıcaklık	°C = °K - 273.2 °C = (5/9)(°F - 32) °F = (9/5)(°C + 32)

1.8 Matematik

Biyomekanik uygulamalar, basit geometri, dik üçgen özellikleri, temel matematik, türev ve integral gibi matematik bilgisi gerektirmektedir. Son bölümü takip eden ekler kısmında bu kitapta yapılan hesaplamalar için ihtiyaç duyulan matematiksel araçlar ve tekniklerin özeti mevcuttur. Okuyucu şu an inceleyip sonra kavramlara ihtiyaç duyulduğunca da tekrarlamayı faydalı bulabilir.

Sonraki bölümlerde metin boyunca, gerekli matematik değerlendirilecek ve ona karşılık gelen ek kısımlar belirtilecektir. Problemlerin formüle edilmesi esnasında, Latin alfabesi kadar Yunan alfabesi de kullanılmaktadır. Örneğin Yunan alfabesi açılımları belirtmede kullanılabilir. Hızlı referans için Yunan alfabesi Tablo 1.6'da verilmiştir.

Tablo 1.6: Yunan alfabesi

Alfa	A α	Iota	I ι	Rho	P ρ
Beta	B β	Kappa	K κ	Sigma	Σ σ
Gamma	Γ γ	Lambda	Λ λ	Tau	T τ
Delta	Δ δ	Mu	M μ	Upsilon	Y υ
Epsilon	E ϵ	Nu	N ν	Phi	Φ ϕ
Zeta	Z ζ	Xi	Ξ ξ	Chi	X χ
Eta	H η	Omicron	O \omicron	Psi	Ψ ψ
Theta	Θ θ	Pi	Π π	Omega	Ω ω

1.9 Skaler ve Vektörler

Mekanikte 2 tip büyüklük vardır. Bunlardan biri kütle, sıcaklık, iş ve enerji gibi sadece büyüklüğe sahip olan skaler büyüklükken diğeri kuvvet, hız, ivme gibi hem büyüklük

hem yöne sahip olan vektörel büyüklüktür. Skaler büyüklükten farklı olarak vektörel büyüklükler, vektörel cebir kurallarına göre eklenir. Vektörel cebir Bölüm 2 'de detaylı olarak ele alınacaktır.

1.10 Modelleme ve Yaklaşım

Analitik çözümler elde edebilmek için, karmaşık sistemleri ve problemleri basitleştirmede bazı varsayımlar yapmak gerekmektedir. Tam bir model, bir sistemi oluşturan her parçanın etkilerini içerir. Ancak, daha detaylı bir modelde, problemin formüle edilmesi ve çözümü daha zordur. Analizlerde her detayın olması bazen mümkün olmazken bazen de her detayın olmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Örneğin insanların aktiviteleri esnasında, belli bir zamanda aktif olan birden fazla kas grubu vardır. Eğer görev, belirli bir insan aktivitesi esnasında eklemler ve kaslardaki kuvvetleri analizse, en iyi yaklaşım, en aktif kas grubunu belirleyip, diğer kas gruplarını ihmal ederek bir model oluşturmaktır. İlerleyen bölümlerde de görüleceği gibi, kemik şekil değiştirebilen cisimdir. Eğer üzerindeki yükler görece küçük ise kemiğe rijit cisim gibi davranılabilir. Bu yaklaşım, incelenen problemin karmaşıklığını azaltmaya yardımcı olabilir.

Genel olarak, sistemi temsil eden basit temel modelle başlamak en iyisidir. Model, kazanılan tecrübe ve basit modellerden elde edilen çıkarımlardan yola çıkarak adım adım

geliştirilebilir. Yol gösterici ilke, sonuçların doğruluğuyla uyuşan basitleştirmelerdir. Bu doğrultuda, araştırmacılar, üzerinde çalışılan konuyu tatmin edici bir şekilde analiz edip ortaya koyacak basit bir model tasarlayabilirler. Daha fazla öğrendikçe, analizler de daha detaylı hale gelebilecektir.

1.11 Yaygın Yöntem

Biyomekanikte genel problem çözme yöntemi aşağıda sıralanmıştır;

1. İlgilenilen sistemin seçilmesi
2. Sistemin özellikleriyle ilgili varsayım
3. Uygun yaklaşımlar yaparak sistemi basitleştirmek. Yapılan varsayımları açık bir şekilde belirtmek.
4. İnsan vücudunun kısımları ile temel mekanik unsurların arasında analogi kurulması
5. Sistemin mekanik modelinin kurulması
6. Problemleri formül haline getirebilmek için mekanik ilkelerin uygulanması
7. Bilinmeyenler için problemin çözülmesi
8. Asıl sistemin cevabıyla sonuçları karşılaştırmak. Test ve deney içerebilir
9. Eğer tatmin edici bir sonuç alınmadıysa, basamak 3 ve 7 arası, farklı varsayımlar ve yeni bir sistem modeli düşünülerek tekrarlanmalıdır.

1.12 Kapsam

Biyomekanik dersi, oldukça farklı akademik programların içinde, farklı geçmiş ve farklı

seviyedeki çeşitli mühendislik dalları ve diğer akademik disiplinlerden gelen öğrencilere öğretiliyor. Bu kitap, matematik, fizik ve mühendislik mekaniğinde sınırlı temeli olan, biyomekanikte lisans derecesine sahip sağlık hizmetleri uzmanları için hem öğrenirken hem de öğretirken kullanabilecekleri kaynağı sağlamaktadır. Bu kaynak biyomedikal, biyomekanik veya biyomühendislik programlarına devam eden öğrenciler için de yararlı bir kaynak olabilir.

Bu kitap 3 parçaya bölünmüştür. İlk kısım (Bölüm 1'den 5'e kadar ve Ek A, B), kuvvet ve moment vektörleri içeren mekaniğin temel kavramlarını tanıtır, bu kavramların tam tanımlarını verebilen matematiksel araçları (geometri, cebir ve vektörel cebir) sağlar, "statik denge"deki sistemlerin analizi için yöntem açıklar ve bu yöntemin, basit mekanik sistemlerin analizi, çeşitli kaslardaki ve insan kas iskelet sisteminin eklemlerindeki kuvvetlere uygulanmasından bahseder. İlk kısımdaki konuların ikinci ve üçüncü kısımlar için önkoşul olduğuna dikkat edilmelidir.

İkinci kısım (bölüm 6'dan 11' kadar) "dinamik" analize yöneliktir. İkinci kısımda bahsedilen kavramlar konum, hız ve ivme vektörleri, iş, enerji, güç, sinyal ve momentumdur. Ayrıca ikinci kısım, translasyonel ve dönme hareketleri altındaki sistemlerin kinetik ve kinematik analizleri için teknikleri sağlar. Bu teknikler, çeşitli spor aktivitelerinin hareket analizi için kullanılır.

Son kısımda (bölüm 12'den 15'e kadar) farklı yükleme koşulları altında malzemelerin deformasyon özelliklerinin analizi için teknikler sağlar. Bu amaçla, gerilim ve gerinim kavramları tanımlanmıştır. Verilen gerilme-gerinim grafiklerine göre malzemeler sınıflandırılmıştır. Elastisite, plastisite ve vizkoelastisite kavramları da tanımlanmış ve açıklanmıştır. Rotasyon, eğme, yorulma, dayanıklılık ve malzemenin dayanımını etkileyen faktörler gibi konularda tartışılmıştır. Ortopedik biyomekanik uygulamalar vurgulanmıştır.

1.13 Gösterim

Bu kaynak hazırlanırken, gösterimlerin istikrarlı kullanımına özel olarak dikkat edilmiştir. Önemli terimler tanımlandığında (örneğin *kuvvet* yük veya mekanik bozunum olarak tanımlanır) italik olarak yazılır. Ölçü belirten semboller de italik olarak yazılır (örneğin kütle için *m*). Birimler italik yazılmamıştır (örneğin kilogram için kg). Vektörel büyüklükleri göstermek için altı çizili harfler kullanılmıştır (örneğin kuvvet vektörü \underline{F}). Yıldızla (*) işaretlenen bölümler ve alt bölümler tercihe bırakılmıştır. Diğer bir ifadeyle, okuyucu, yıldızla işaretlenmiş bir bölümü veya alt bölümü kitapta anlatılan konunun bütünlüğünü bozulmadan çıkarabilir.

Kaynaklar, Önerilen Okumalar ve Diğer Kaynaklar¹

I. Önerilen Okumalar

- Adams, M.A., Bogduk, N., Burton, K., Dolan, P., 2012. The Biomechanics of Back Pain. 3rd Edition. London, Churchill Livingstone.
- Arus, E., 2012. Biomechanics of Human Motion: Applications in the Martial Arts. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- Benzel, E.C., 2015. Biomechanics of Spine Stabilization. New York, Thieme Medical Publishers Inc.
- Bartlett, R., 2014. Introduction to Sports Biomechanics: Analyzing Human Movement Patterns. 3rd Edition. London, Routledge International Handbooks.
- Bartlett, R., Bussey, M., 2012. Sports Biomechanics: Reducing Injury Risk and Improving Sports Performance. 2nd Edition. London, Routledge International Handbooks.
- Blazevich, A.J., 2010. Sports Biomechanics. The Basics: Optimizing Human Performance. 2nd Ed. A & C Black Publishers Ltd.
- Crowe, S.A., Visentin, P., Gongbing Shan., 2014. Biomechanics of Bi-Directional Bicycle Pedaling. Aachen, Shaker Verlag GmbH.

¹Bu kitabın kendi başına hem öğretmek için hem de öğrenmek için yeterli olduğuna inanıyoruz. Kitabı hazırlarken, bir kısmı aşağıda listelenen pek çok kaynaktan elde edilen bilgilerden faydalandık. Ancak bu yayınları destekleme ya da bu konudaki tek ulaşılabilir kaynaklar olduğunu söylemek gibi bir niyetimiz yok, çünkü biyomekanik alanı çok hızlı büyüyen bir alandır. Biyomekanikte bilimsel makaleler, hakemli dergilerde araştırma makaleleri gibi hazır ulaşılabilir bilgilerin olduğu pek çok başka kaynakları mevcuttur.

- Doblare, M., Merodio, J., Ma Goicolea Ruigomez, J., 2015. *Biomechanics*. Ramsey, EOLSS Publishers Co Ltd.
- Doyle, B., Miller, K., Wittek, A., Nielsen, P.M.F., 2014. *Computational Biomechanics for Medicine: Fundamental Science and Patient-Specific Applications*. New York, Springer-Verlag New York Inc.
- Doyle, B., Miller, K., Wittek, A., Nielsen, P.M.F., 2015. *Computational Biomechanics for Medicine: New Approaches and New Applications*. Cham, Springer-International-Publishing-AG.
- Ethier, R.C., Simmons, C.A., 2012. *Introductory Biomechanics: From Cells to Organisms*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Flanagan, S.P., 2013. *Biomechanics: A Case-based Approach*. Sudbury, Jones and Bartlett Publishers, Inc.
- Fleisig, G.S., Young-Hoo Kwon, 2013. *The Biomechanics of Batting, Swinging, and Hitting*. London, Routledge International Handbooks.
- Freivalds, A., 2014. *Biomechanics of the Upper Limbs: Mechanics, Modeling and Musculoskeletal Injuries*. 2nd Edition. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- Gerhard Silber, G., Then, C., 2013. *Preventive Biomechanics*. Berlin, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K.
- Hall, S.J., 2014. *Basic Biomechanics*. London, McGraw Hill Higher Education.
- Hamill, J., Knutzen, K.M., Derrick, T.D., 2014. *Biomechanical Basis of Human Movement*. Philadelphia, Lippincott Williams and Wilkins.
- Holzappel, G.A., Kuhl, E., 2013. *Computer Models in Biomechanics*. Dordrecht, Springer.
- Huston, R.L., 2013. *Fundamentals of Biomechanics*. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- Huttner, B., 2013. *Biomechanical Analysis Methods for Substitute Voice Production*. Aachen, Shaker Verlag GmbH.
- Kerr, A., 2010. *Introductory Biomechanics*. Elsevier Health Sciences, UK.
- Kieser, J., Taylor, M., Carr, D., 2012. *Forensic Biomechanics*. New York, John Wiley & Sons Inc.
- Knudson, D.V., 2012. *Fundamentals of Biomechanics*. 2nd Edition. New York, Springer-Verlag New York Inc.
- LeVeau, B.F., 2010. *Biomechanics of Human Motion: Basics and Beyond for the Health Professions*. Thorofare, NJ. SLACK Incorporated.
- Luo Qi, 2015. *Biomechanics and Sports Engineering*. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- McGinnis, P., 2013. *Biomechanics of Sport and Exercise*. 3rd Edition. Champaign, Human Kinetics Publishers.
- McLester, J., Peter St. Pierre, P.St., 2010. *Applied Biomechanics: Concepts and Connections*. CA. Brooks/Cole.
- Ming Zhang., Yubo Fan., 2014. *Computational Biomechanics of the Musculoskeletal System*. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- Mohammed Rafiq Abdul Kadir, 2013. *Computational Biomechanics of the Hip Joint*. Berlin, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K.
- Morin, J.-B., Samozino, P., 2015. *Biomechanics of Training and Testing: Innovative Concepts and Simple Field Methods*. Cham, Springer-International-Publishing-AG.
- Peterson, D.R., Bronzino, J.D., 2014. *Biomechanics: Principles and Practices*. Bosa Roca, CRC Press Inc.
- Richards, J., 2015. *The Complete Textbook of Biomechanics*. London, Churchill Livingstone.
- Sanders, R., 2012. *Sport Biomechanics into Coaching Practice*. Chichester, John Wiley & Sons Ltd.
- Shahbaz S. Malik, Sheraz S. Malik, 2015. *Orthopaedic Biomechanics Made Easy*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Tanaka, M., Wada, S., Nakamura, M., 2012. *Computational Biomechanics: Theoretical Background and Biological/Biomedical Problems*. Tokyo, Springer Verlag.
- Tien Tua Dao, Marie-Christine Ho Ba Tho., 2014. *Biomechanics of the Musculoskeletal System: Modeling of Data Uncertainty and Knowledge*. London, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc.
- Vogel, S., 2013. *Comparative Biomechanics: Life's Physical World*. New Jersey, Princeton University Press.
- Winkelstein, B.A., 2015. *Orthopaedic Biomechanics*. Bosa Roca, CRC Press Inc.

Youlian Hong., Bartlett, R., 2010. Routledge Handbook of Biomechanics and Human Movement Science. London, Routledge International Handbooks.

Zatsiorsky, V.M., Prilutsky, B.I., 2012. Biomechanics of Skeletal Muscles. Champaign, Human Kinetics Publishers.

II. Biyomekanik ve Biyomühendislikte İleri Konular

Devasahayam, S.R., 2013. Signals and Systems in Biomedical Engineering: Signal Processing and Physiological Systems Modeling. 3rd Edition. Springer.

Jiyuan Tu, Kiao Inthavong, Kelvin Kian Loong Wong, 2015. Computational Hemodynamics: Theory, Modelling and Applications. Springer.

Johnson, M., Ethier, C.R., 2013. Problems for Biomedical Fluid Mechanics and Transport Phenomena. Cambridge University Press.

Kenedi, R., 2013. Advances in Biomedical Engineering. Academic Press.

King, M.R., Mody, N.A., 2010. Numerical and Statistical Methods for Bioengineering: Applications in MATLAB. Cambridge University Press.

Miftahof, M.R.N., Hong Gil Nam, 2010. Mathematical Foundations and Biomechanics of the Digestive System. Cambridge University Press.

Miftahof, M.R.N., Kamm, R.D, 2011. Cytoskeletal Mechanics. Models and Measurements in Cell Mechanics. Cambridge University Press (Texts in Biomedical Engineering).

Northrop, R.B., 2010. Signals and Systems Analysis in Biomedical Engineering. 2nd Edition. CRC Press.

Pruitt, L.A., Chakravartula, A.M., 2011. Mechanics of Biomaterials. Fundamental Principles for Implant Design. Cambridge University Press (Texts in Biomedical Engineering).

Saha, P.K., Maulik, U., Basu, S., 2014. Advanced Computational Approaches to Biomedical Engineering. Springer Berlin Heidelberg.

Saltzman, M.W., 2015. Biomedical Engineering: Bridging Medicine and Technology. 2nd Edition. Cambridge University Press (Texts in Biomedical Engineering).

Suvranu De, S., Guilak, F., Mofrad, M.R.K., 2009. Computational Modeling in Biomechanics. Springer.

Williams, D., 2014. Essential Biomaterials Science. Cambridge University Press (Texts in Biomedical Engineering).

III. Fizik ve Mühendislik Mekaniği Hakkında Kitaplar

Bhattacharya, D.K., Bhaskaran, A., 2010. Engineering Physics. Oxford University Press.

Chin-Teh Sun Zhihe Jin, 2011. Fracture Mechanics. Academic Press. Harrison, H., Nettleton, T., 2012. Principles of Engineering Mechanics. 2nd Edition. Elsevier.

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W.A., Rajapakse, N., 2013. Engineering Mechanics: Statics. Springer.

Hibbeler, R. C., 2012. Engineering Mechanics: Dynamics. 13th Edition. PrenticeHall. Jain, S.D., 2010. Engineering Physics. Universities Press.

Khare, P., Swarup, A., 2009. Engineering Physics: Fundamentals & Modern Applications. Jones & Bartlett Learning.

Knight, R.D., 2012. Physics for Scientists and Engineers: Modern Physics Plus Mastering Physics. 3rd Edition. Addison-Wesley.

Kumar, K.I., 2011. Engineering Mechanics. McGraw-Hill Education (India) Pvt Limited.

Morrison, J., 2009. Modern Physics for Scientists and Engineers. Academic Press.

Plesha, M., Gray, G., Costanzo, F., 2012. Engineering Mechanics: Statics. McGraw-Hill.

Shankar, R., 2014. Fundamentals of Physics: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics. Yale University Press.

Verma, N.K., 2013. Physics for Engineers. PHI Learning Pvt. Ltd.

IV. Şekil Değiştirebilen Cisimlerin Mekaniği, Malzemelerin Mekaniği ve Malzemelerin Dayanımı Hakkındaki Kitaplar

Beer, F. Jr., Johnston, R.E., DeWolf, J., Mazurek, D., 2014. Mechanics of Materials. McGraw-Hill Science.

Farag, M.M., 2013. Resistance of Materials: Materials and Process Selection for Engineering Design, 3rd Edition. Boca Roca, CRC Press Inc.

Franc,ois, D., Pineau, A., Zaoui, A., 2013. Mechanical Behavior of Materials: Fracture Mechanics and Damage. Springer.

Ghavami, P., 2015. Mechanics of Materials: An Introduction to Engineering Technology. Springer.

Martin, B.R., Burr, D.B., Sharkey, N.A., 2010. Skeletal Tissue Mechanics. New York, Springer-Verlag New York Inc.

Philpot, T.A., 2012. Mechanics of Materials: An Integrated Learning System, 3rd Edition. Hoboken, Wiley.

Pruitt, L.A., Chakravartula, A.M., 2012. Mechanics of Biomaterials: Fundamental Principles for Implant Design. Cambridge, Cambridge University Press.

Riley, W.F., 2006. Mechanics of Materials. John Wiley and Sons.

Rubenstein, D., Yin Wei., Frame, M., 2011. Biofluid Mechanics: An Introduction to Fluid Mechanics, Macrocirculation, and Microcirculation. San Diego, Academic Press Inc.

V. Biyomekanik Toplulukları

Bulgarian Society of Biomechanics:
<http://www.imbm.bas.bg/biomechanics/index.php/societies>

Czech Society of Biomechanics:
<http://www.csbiomech.cz/index.php/en/>

Danish Society of Biomechanics:
<http://www.danskiomekaniskelskab.dk/>

European Society of Biomechanics:
<http://esbiomech.org/>

French Society of Biomechanics:
<http://www.biomecanique.org/>

Hellenic Society of Biomechanics:
<http://www.elembio.gr/index.php/el/>

International Society of Biomechanics:
<https://isbweb.org/>

International Society of Biomechanics in Sports:
<http://www.isbs.org/>

Polish Society of Biomechanics:
<http://www.biomechanics.pl/>

Portuguese Society of Biomechanics:
<http://www.spbiomecanica.com/>

The British Association of Sport and Exercise Sciences: <http://www.bases.org.uk/>

VI. Biyomekanik ile ilgili Dergiler

Applied Bionics and Biomechanics:
<http://www.hindawi.com/journals/abb/>

Clinical Biomechanics:
<http://www.clinbiomech.com/>

International Journal of Experimental and Computational Biomechanics: <http://www.journal-data.com/journal/international-journal-of-experimental-and-computational-biomechanics.html>

Journal of Biomechanics:
<http://www.jbiomech.com/>

Journal of Applied Biomechanics:
<http://journals.humankinetics.com/about-jab>

Journal of Biomechanical Engineering:
<http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/journal.aspx>

Journal of Biomechanical Science and Engineering: <http://jbse.org/>

Journal of Dental Biomechanics:
<http://www.journal-data.com/journal/journalof-dental-biomechanics.html>

Sports Biomechanics:
<http://www.isbs.org/journal.html>

VII. Amerika'da Biyomekanikle İlgili Lisansüstü Programlar²

Boston University. Department of Biomedical Engineering: <http://www.bu.edu/dbin/bme/>

University of California Berkeley. Department of Bioengineering: <http://bioegrad.berkeley.edu/>

Carnegie Mellon. Department of Biomedical Engineering: <http://www.bme.cmu.edu/>

Columbia University. Department of Biomedical Engineering:
<http://www.bme.columbia.edu/index.html>

Cornell University. Department of Biomedical Engineering: <http://www.bme.cornell.edu/>

Duke University. Biomedical Engineering:
<http://www.bme.duke.edu/grads/>

Harvard University. School of Public Health. Occupational Biomechanics and Ergonomics

Laboratory:

<http://www.hsph.harvard.edu/ergonomics/>

Johns Hopkins University. The Whitaker Institute.

Department of Biomedical Engineering:

<http://www.bme.jhu.edu/>

University of Michigan. Center for Ergonomics:

<http://www.engin.umich.edu/dept/ioe/C4E/>

MIT. Center for Biomedical Engineering:

<http://web.mit.edu/afs/athena.mit.edu/org/c/cbe/www/>

University of North Carolina at Chapel Hill.

Biomedical Engineering:

<http://www.bme.unc.edu/academics/grad.html>

New Jersey Institute of Technology. Department of Biomedical Engineering:

<http://biomedical.njit.edu/index.php>

New York University. Graduate School of Arts and Science. Environmental Health Sciences-Ergonomics and Biomechanics Program:

<http://oioc.med.nyu.edu/education/masters-program>

Ohio State University. Department of Biomedical Engineering: <http://www.bme.ohio-state.edu/bmeweb3/>

Stanford University. Department of

Bioengineering:

<http://bioengineering.stanford.edu/education/ms.html>

Syracuse University. Department of Biomedical

Engineering:

http://www.lcs.syr.edu/academic/biochem_engineering/index.aspx

Yale University. Department of Biomedical

Engineering:

<http://www.eng.yale.edu/content/DPBiomedicalEngineering.asp>

² Amerika'daki Biyomekanik ile ilgili lisansüstü programların tam listesi için Amerikan Biyomekanik Topluluğunun web sitesini ziyaret edin, <http://www.asbweb.org/>.

Bölüm 2

KUVVET VEKTÖRÜ

Çeviren: Fatma Kübra Erbay Elibol

- 2.1 Kuvvetin Tanımı
- 2.2 Vektörel Büyüklük Olarak Kuvvet Özellikleri
- 2.3 Kuvvetin Boyut ve Birimleri
- 2.4 Kuvvet Sistemleri
- 2.5 Dış ve İç Kuvvetler
- 2.6 Normal ve Teğet Kuvvetler
- 2.7 Çekme ve Basma Kuvveti
- 2.8 Eşdüzlem Kuvvetler
- 2.9 Eşdoğrultulu Kuvvetler
- 2.10 Kesişen Kuvvetler
- 2.11 Paralel Kuvvet
- 2.12 Yer Çekimi Kuvveti ve Ağırlık
- 2.13 Dağılan Kuvvet Sistemleri ve Basınç
- 2.14 Sürtünme Kuvvetleri
- 2.15 Örnek Problemler

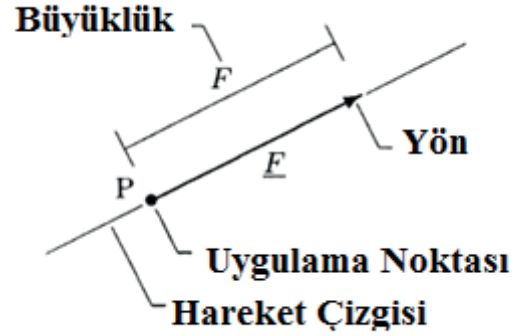
2.1 Kuvvetin Tanımı

Kuvvet, mekanik müdahale veya yük olarak tanımlanabilir. Bir nesneyi çektiğinizde veya ittiğinizde ona bir kuvvet uygularsınız. Bir topu attığınızda veya topa vurduğunuzda da bir kuvvet uygularsınız. Tüm bu durumlar, kuvvet kas aktivitesi sonucuyla ilişkilidir. Bir nesneye etki eden kuvvetler onu deforme edebilir, hareket halini değiştirebilir veya her ikisini birden değiştirebilir. Kuvvetler harekete neden olsa da, bu durum kuvvetin her zaman hareketle ilişkili olduğu anlamına gelmez. Örneğin, bir sandalyede oturan bir kişi ağırlığını sandalyeye uygular ancak sandalye sabit kalır. Kuvvet ve hareket arasındaki ilişkiyi düzenleyen nispeten az sayıda temel yasa vardır. Bu yasalar daha sonraki bölümlerde ayrıntılı olarak tartışılacaktır.

2.2 Vektörel Büyüklük Olarak Kuvvet Özellikleri

Kuvvet, vektörel bir büyüklüktür ve kuvvetleri içeren problemleri analiz etmek için vektör cebiri ilkeleri (bkz. Ek B) uygulanmalıdır. Bir kuvveti tam olarak tanımlamak için, büyüklüğü ve yönü belirtilmelidir. Şekil 2.1'de gösterildiği gibi bir kuvvet vektörü, okun yönü kuvvet vektörünün etki çizgisini gösterecek şekilde bir ok ile grafiksel olarak gösterilebilir. Okun ucu kuvvetin hareket ettiği yönü ve doğrultusunu tanımlarken, okun tabanı kuvvet vektörünün

uygulama noktasını temsil eder. Tek bir çizimde birden fazla kuvvet vektörünün gösterilecekse, her bir ok uzunluğu temsil ettiği kuvvet vektörünün büyüklüğü ile orantılı olmalıdır.



Şekil 2.1 Kuvvet vektörünün grafiksel gösterimi

Diğer vektörel büyüklükler gibi, grafik ve trigonometrik yöntemler kullanılarak kuvvetler eklenebilir. Örneğin, Şekil 2.2'de gösterilen kısmi dizi düşünün. Patellada, kuadriseps \underline{F}_Q ve patellar tendon \underline{F}_P tarafından uygulanan kuvvetler gösterilmiştir. Kuadriseps ve patellar tendonun uyguladığı kuvvetlere bağlı patellada ortaya çıkan bileşke kuvvet \underline{F}_R , bu kuvvetlerin vektörel toplamıyla belirlenebilir:

$$\underline{F}_R = \underline{F}_Q + \underline{F}_P \quad (2.1)$$

Ortaya çıkan kuvvetin büyüklüğü hesaplanırken Pisagor teoremi kullanılabilir:

$$F_R = \sqrt{F_Q^2 + F_P^2} \quad (2.2)$$



Şekil 2.2 Bileşke kuvvet

2.3 Kuvvetin Boyut ve Birimleri

Tanım gereği kuvvet, kütle çarpı ivmeye eşittir. İvme hızın zamana bağlı değişim oranıdır ve hız, göreceli konumun zamana göre değişim oranıdır. Konumdaki değişim uzunluk birimleri cinsinden ölçülür. Bu nedenle, hızın boyutu uzunluğunun zamana bölünmesiyle, ivmenin boyutu hızın zamana bölünmesiyle ve kuvvetin boyutu kütle ile çarpılmasıyla bulunur:

$$[HIZ] = \frac{[KONUM]}{[ZAMAN]} = \frac{L}{T}$$

$$[İVME] = \frac{[HIZ]}{[ZAMAN]} = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2}$$

$$[KUVVET] = [KÜTLE][İVME] = \frac{ML}{T^2}$$

Farklı birim sistemlerinde kuvvet birimleri Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1 Kuvvet birimleri (1 N = 10⁵ dyn, 1 N = 0,225 lb)

Sistem	Kuvvet Birimi	Özel İsmi
SI	Kg-m/s ²	Newton (N)
CGS	g-cm/s ²	dyne (dyn)
İngiliz	Slug foot/s ²	Pound (lb)

2.4 Kuvvet Sistemleri

Tek bir cisme etki eden herhangi iki veya daha fazla kuvvet, *kuvvet sistemi* oluşturur. Bir kuvvet sistemini oluşturan kuvvetler çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir. Kuvvetler, uygulandıkları cisim üzerindeki etkilerine göre veya birbirlerine göre yönelimlerine göre sınıflandırılabilir.

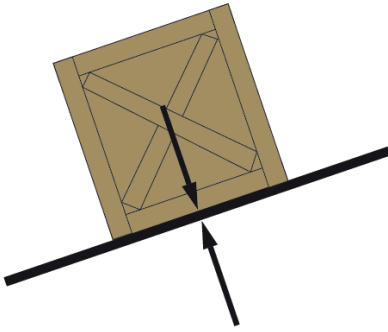
2.5 Dış ve İç Kuvvetler

Bir kuvvet, *iç* veya *dış* olarak sınıflandırılabilir. Hemen hemen bilinen tüm kuvvetler dış kuvvetlerdir. Örneğin, bir el arabasını ittiğinizde, bir çiviye çekiçle vurduğunuzda, bir sandalyeye oturduğunuzda, bir futbol topuna vurduğunuzda veya bir basket attığınızda, el arabasına, çiviye, sandalyeye, futbol topuna veya basketbol topuna dış kuvvet uygularsınız. İç kuvvetler, cisim dışarıdan uygulanan kuvvetlerin etkisi altındayken cismi bir arada tutan kuvvetlerdir. Örneğin, bir ip parçası, her iki uçtan çekildiğinde kopmayabilir. Bir lastik bant gerildiğinde, bant belli bir ölçüde uzar.

Harici olarak uygulanan kuvvetler altında herhangi bir malzemeyi bir arada tutan şey, bu malzeme içinde üretilen iç kuvvetlerdir. İnsan vücudunu bir bütün olarak ele alırsak, kas kasılmalarıyla üretilen kuvvetler de iç kuvvetlerdir. İç kuvvetlerin önemi ve detayları sonraki bölümlerde “gerilim” kavramının tanıtılmasıyla incelenecektir.

2.6 Normal ve Teğet Kuvvetler

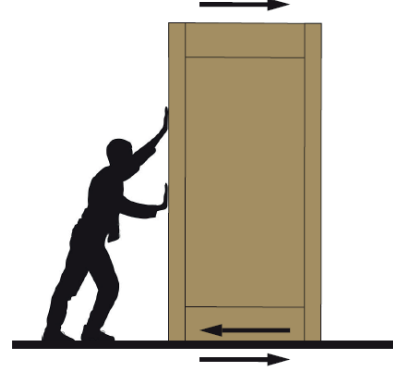
Mekanikte, “normal” kelimesi dik anlamına gelir. Bir yüzeye etki eden bir kuvvet, bu yüzeye dik bir yönde uygulanıyorsa *normal kuvvet* olarak adlandırılır. Örneğin, düz yatay bir masanın üzerinde duran bir kitap, masanın üzerine kitabın ağırlığına eşit olan normal kuvvet uygular (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Temas halindeki yüzeylere normal kuvvetler

Teğet kuvvet, yüzeye paralel yönde uygulanan kuvvettir. Sürtünme kuvveti teğet kuvvetler için iyi bir örnektir. Şekil 2.4'te gösterildiği gibi, bir bloğu itmek veya çekmek, bloğun alt yüzeyi ve zemin arasında bir sürtünme

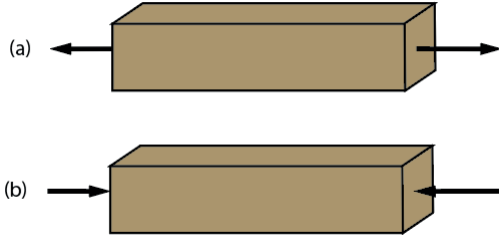
kuvvetinin oluşmasına neden olacaktır. Sürtünme kuvvetinin etki çizgisi daima temas eden yüzeylere teğettir.



Şekil 2.4 Sürtünme kuvvetleri teğet kuvvetlerdir

2.7 Çekme ve Basma Kuvveti

Bir cisme uygulanan bir *çekme kuvveti*, cismi germeye ya da uzatmaya sebep olurken, *basma kuvveti*, uygulanan kuvvet doğrultusunda cismi küçültme eğiliminde olacaktır (Şekil 2.5). Örneğin, bir lastik bant üzerine uygulanan çekme kuvveti bandı gerecektir. Şişirilmiş bir balona bastırmak ise, balon üzerinde bir basma kuvveti üretecektir. Sadece çekme kuvvetlerinin uygulanabileceği bazı malzemeler olduğu unutulmamalıdır. Örneğin, bir ip, bir kablo veya bir yay basma kuvvetlerine dayanamaz. Bu malzemelerin şekilleri, basma kuvvetleri altında tamamen biçimsiz olacaktır. Benzer şekilde, kaslar bağlandıkları kemikleri bir araya getirmek için kasılarak çekme kuvveti üretirler. Kaslar, basma kuvvetleri üretmez veya itme gerçekleştirmezler.



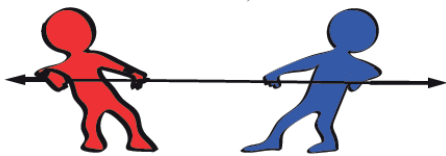
Şekil 2.5 (a) Çekme ve (b) basma kuvvetleri

2.8 Eşdüzlem Kuvvetler

Bütün kuvvetler iki boyutlu (düzlemsel) bir yüzey üzerinde hareket ediyorsa, bir kuvvetler sistemi *eşdüzlem*dir. Eşdüzlem bir sistem oluşturan kuvvetlerin en fazla iki sıfır olmayan bileşeni vardır. Bu nedenle, Kartezyen (dikdörtgen) koordinat çerçevesi ile ilgili olan kuvvetlerin x ve y bileşenlerini göz önünde bulundurarak eş düzlem sistemlerini analiz etmek yeterlidir.

2.9 Eşdoğrultulu Kuvvetler

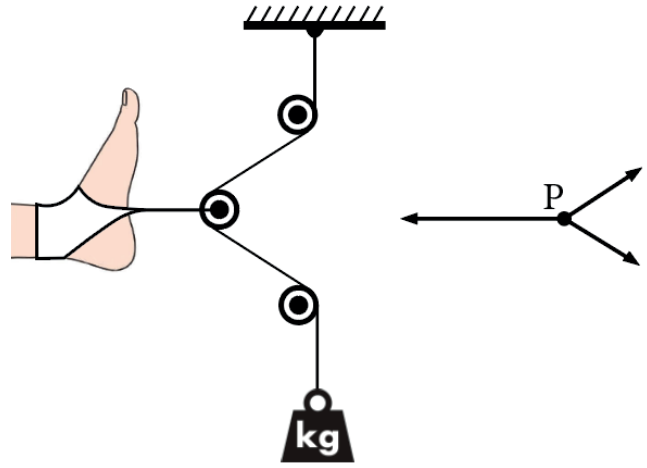
Bütün kuvvetler ortak bir etki çizgisine sahipse, bir kuvvetler sistemi *eşdoğrultulu*dur. Örneğin, bir halat çekme yarışmasında bir ip üzerine uygulanan kuvvetler, eşdoğrultulu kuvvet sistemi oluşturur (Şekil 2.6).



Şekil 2.6 Eşdoğrultulu kuvvetler

2.10 Kesişen Kuvvetler

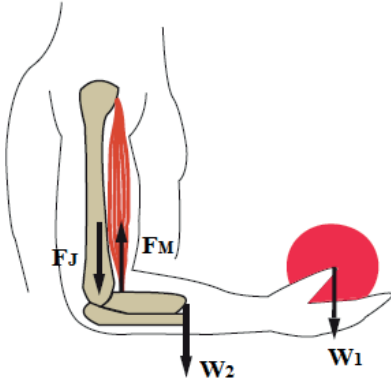
Kuvvetlerin etki çizgileri ortak bir kesişme noktasına sahipse, bu kuvvet sistemi *kesişendir*. Kesişen kuvvet sistemlerinin örnekleri, Şekil 2.7'de gösterildiği gibi çeşitli traksiyon sistemlerinde görülebilir. Ağırlık tavaasındaki ağırlığa bağlı olarak, kablolar gerilir ve kuvvetler makaraya ve bacağına uygulanır. Bacak üzerine uygulanan kuvvet bacağı yerinde tutar.



Şekil 2.7 Kesişen kuvvetler

2.11 Paralel Kuvvet

Bir dizi kuvvetin etki çizgileri birbirine paralelse bu kuvvetler *paralel* kuvvet sistemi oluşturur. Paralel kuvvet sistemlerinin bir örneği Şekil 2.8'de, dik açı ile bükülmüş ve bir nesneyi tutan bir insan kolu ile gösterilmiştir. Ön kol etkileyen kuvvetler, W_1 nesnesinin ağırlığı, W_2 kolun kendi ağırlığı, F_M biceps kasındaki gerginlik ve F_j dirsekteki eklem reaksiyon kuvvetidir. Bu kuvvetler birbirine paraleldir, dolayısıyla bir paralel kuvvetler sistemi oluştururlar.



Şekil 2.8 Paralel kuvvetler

2.12 Yerçekimi Kuvveti veya Ağırlık

Dünya tarafından bir nesneye uygulanan kuvvet, nesnenin *yerçekimi kuvveti* veya *ağırlığı* olarak adlandırılır. Bir nesnenin ağırlığının büyüklüğü, cismin kütlesiyle yerçekimi ivmesinin çarpımına eşittir $w = m \times g$, w , nesnenin ağırlığı, m , nesnenin kütlesi ve g , yerçekimi ivmesidir. Farklı birim sistemleri için yerçekimi ivmesinin büyüklüğü Tablo 2.2'de listelenmiştir. Bu değerler sadece Dünya için geçerlidir. Yerçekimi ivmesinin büyüklüğü yükseklik (rakım) ile az miktarda değişebilir.

Tablo 2.2 Dünya üzerindeki yerçekimi ivmesi

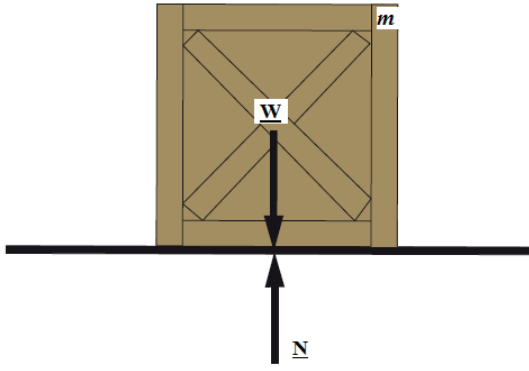
Sistem	Yerçekimi İvmesi
SI	9,81 m/s ²
CGS	981 cm/s ²
İngiliz	32,2 ft/s ²

Uygulamalarımız için g 'nin sabit olması gerektiğini kabul etmeliyiz.

Kütle ve ağırlık terimleri genellikle birbiriyle karıştırılır. Kütle cismin bir özelliğidir. Ağırlık, cismin kütlesine etki eden yerçekimi kuvvetidir. Bir cisim, Dünya'da ve Ay'da aynı kütleye sahiptir. Ancak, bir cismin ağırlığı, Ay'da Dünya'nın yaklaşık altı kat daha fazladır, çünkü Ay'daki yerçekimi ivmesinin büyüklüğü, Dünya'dakinin yaklaşık altıda biridir. Bu nedenle, Dünya üzerindeki 10 kg'lık bir kütle, Dünya'da yaklaşık 98 N ağırlığındayken Ay'da yaklaşık 17 N ağırlığındadır.

Kuvvet gibi, ivme de vektörel büyüklüktür. Yerçekimi ivmesi ve yerçekimi kuvveti vektörlerinin yönü daima Dünya'nın merkezine doğru veya daima dikey olarak aşağı doğrudur. Yerçekimi kuvveti her zaman bir nesne üzerine etkir. Bir nesneyi bir yükseklikten düşürürsek, nesneyi aşağıya çekecek olan yerçekimi kuvvetidir.

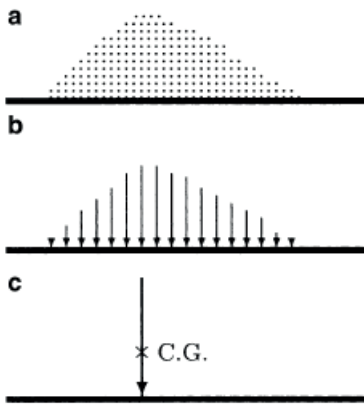
Bir nesne zeminde durağan haldeyken, çekim kuvveti ortadan kalkmaz. Durağan veya statik denge halindeki bir nesne, nesneye etki eden net kuvvetin sıfır olduğu anlamına gelir (Şekil 2.9).



Şekil 2.9 Durağan haldeki cismin üzerindeki net kuvvet sıfırdır

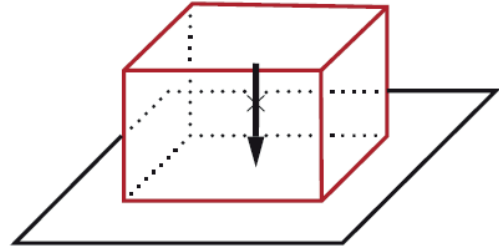
2.13 Yayılı Kuvvet Sistemleri ve Basınç

Şekil 2.10a 'da gösterildiği gibi düz yatay bir düzlem üzerindeki kum yığını düşünülürken, kum yüzeye, kumun altındaki alan üzerinde dağılan kuvvet veya yük uyguluyor. Yük bu alanda eşit olarak dağılmıyor. Yığının altındaki kenar bölgeler merkez bölgelerle karşılaştırıldığında daha az yüklenmiştir (Şekil 2.10b). Pratik amaçlı, kum tarafından uygulanan dağılmış yük, eş kuvvet veya tekil kuvvet olarak adlandırılan tek bir kuvvet olarak temsil edilebilir.



Şekil 2.10 Kum yığını (a), tabanda dağılan kuvvet (b), ve eşdeğer kuvvet (c)

Tekil kuvvetin büyüklüğü kumun toplam ağırlığına eşittir (Şekil 2.10c). Bu kuvvetin hareket çizgisi *ağırlık merkezi* olarak adlandırılan noktadan geçmektedir. Bazı uygulamalar için, kumun tüm ağırlığının, yükün ağırlık merkezinde yoğunlaştığı varsayılır. Şekil 2.11'de gösterildiği gibi yatay düzlemde dikdörtgen blok tarafından uygulanan yük gibi homojen yayılı yüklerde, ağırlık merkezi yükün geometrik merkezindedir. Eş dağılmayan yüklerde, ağırlık merkezi deneylerle belirlenebilir (bkz Bölüm 4).



Şekil 2.11 Dikdörtgen blok

Ağırlık merkezi Dünya'nın yerçekimi kuvvetiyle bağlantılıdır. Kütle merkezi ise yerçekimi etkilerinden bağımsız bir diğer kavramdır. New York'ta bulunan Empire State gibi büyük nesne veya yapılar için ağırlık merkezi kütle merkezinden farklı olabilir, çünkü yerçekimi ivmesinin büyüklüğü yükseklikle bağlantılı olarak değişebilir. Göreceli olarak daha küçük olan nesnelere ve bizim uygulamalarımız için ikisi arasındaki fark ihmal edilebilir.

Yayılı kuvvet sistemleriyle bağlantılı bir diğer kavramsa yayılı kuvvetlerin yoğunluğunun ölçümü olan *basıncı*. Tanımlamayla, *ortalama basınç* toplam kuvvetin, yüzeye dik olarak uygulanan kuvvetin uygulandığı yüzeyin alanına bölünmesiyle hesaplanır. Aynı zamanda *yükün şiddeti* olarak da bilinir. Örneğin Şekil 2.11'deki dikdörtgen bloğun alt yüzey alanı A, ve bloğun toplam ağırlığı W, yatay düzlemde blok tarafından uygulanan basıncın büyüklüğü;

$$p = \frac{W}{A}$$

Basıncın boyutu, kuvvetin boyutunun (ML/T²) alanın boyutuna (L²) bölünmesi;

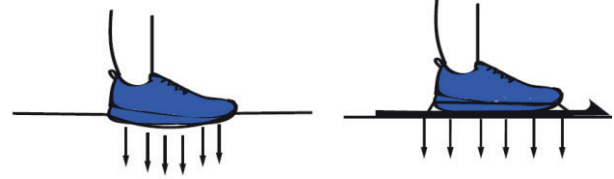
$$[\text{BASINÇ}] = \frac{[\text{KUVVET}]}{[\text{ALAN}]} = \frac{(\text{M} \cdot \text{L})/\text{T}^2}{\text{L}^2} = \frac{\text{M}}{\text{LT}^2}$$

Tablo 2. 3'de farklı birim sistemlerindeki basınç birimleri listelenmiştir.

Sistem	Basınç birimi	Özel adı
SI	Kg/m s ² veya N/m ²	Pascal (Pa)
CGS	g/cm s ² veya dyn/cm ²	
İngiliz	lb/s ² veya lb/in. ²	psf veya psi

Basınç kavramının arkasındaki ilkeler pek çok uygulamaya sahiptir. Kuvvetin uygulandığı daha geniş bir alan, basıncın büyüklüğünü azaltır. Biri bot diğeri kayak giymiş 2 kişiyi yumuşak karda beklerken gözlemlersek, bot giyen kişinin kayakçıdan daha derine gömüldüğünü kolayca farkedebiliriz. Çünkü bot giyen kişinin ağırlığı karda daha küçük alanda

yayılr ve karın birim alanına daha büyük kuvvet düşer (Şekil 2.12). Keskin bir nesne tarafından verilen hasarda hassasiyet ve ağrı körelmiş malzemeninkinden çok daha fazladır.



Şekil 2.12 Botların uyguladığı kuvvetin yoğunluğunun kayanın uyguladığından yüksektir

Kesilmiş bacağı uyan bir protez veya diş etine ve kemiksi yapıya uyan bir set damak protezi yanlış uygulanmış implant veya protezden hem daha iyi hissettirir ve hem de daha iyi çalışır. Temel düşünce, konu olan kuvvetleri geniş alanlara olabildiğince eşit olarak yaymaktır.

2.14 Sürtünme Kuvvetleri

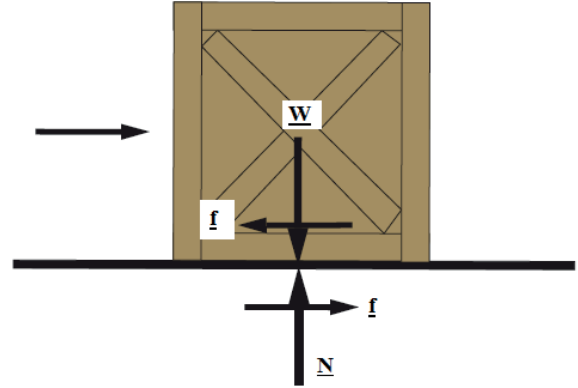
Sürtünme kuvvetleri, iki yüzey temas halinde iken yüzeylerden birisi diğerrinin üzerinden kayıyor veya kaymaya çalışıyor ise ortaya çıkar. Bir kütle, sert bir yüzeyde veya bir nesne akışkan bir ortamın (su gibi viskoz ortam) içerisinden gitmeye çalışıyor ise nesnenin çevresindeki ortam ile etkileşiminden dolayı harekete karşı direnç görülür. Bazı uygulamalarda sürtünme aranırken, diğerrlerinde en aza indirgenmesi gerekebilir. Örnek olarak, sürtünme kuvvetinin olmadığı koşullarda yürümeye başlamak imkansızdır.

Otomobil, bisiklet ve tekerlekli sandalye frenleri sürtünme ilkelerini uygulamaktadır. Diğer yandan, sürtünme temasta olan yüzeyler arasında ısı oluşumuna sebep olabilir. Fazla ısı, makine parçalarının erken ve beklenmedik bir şekilde bozulmasına sebep olabilir. Sürtünme ayrıca aşınmaya da sebep olur.

Sürtünme kuvvetini etkileyen birçok faktör vardır. Sürtünme, iki kayan yüzeyin yapısına bağlıdır. Örnek olarak, bütün koşullar aynı ise temas halindeki iki metal yüzey arasındaki sürtünme, temas halindeki iki ahşap yüzey arasındaki sürtünmeden daha farklı olacaktır. Sürtünme, daha güçlü etkileşen materyaller için daha büyüktür. Sürtünme yüzey kalitesi ve yüzey pürüzsüzlüğüne bağlıdır. Pürüzsüz bir yüzey sürtünme etkisini azaltabilir. Sürtünme kuvveti temasta olunan toplam yüzey alanından bağımsızdır.

Şekil 2.13'te gösterildiği gibi yerde duran bir bloğu ele aldığımızda, blok yere ağırlığı olan \underline{W} 'yi uygulamaktadır. Buna karşılık olarak yer blok üzerine normal kuvvet \underline{N} uygulamaktadır ve bu kuvvetlerin büyüklükleri birbirine eşittir ($\underline{N} = \underline{W}$). Bloğu sağa doğru oynatmak için yatay bir kuvvet \underline{F} 'nin uygulandığını varsaydığımızda, bu kuvvet, blok ile yer arasında sürtünme kuvveti \underline{f} 'nin oluşmasına sebep olacaktır. Blok sabit kaldığı sürece (statik denge) sürtünme kuvveti \underline{f} 'nin büyüklüğü uygulanan kuvvet \underline{F} 'nin

büyüklüğüne eşit olacaktır. Bu sürtünme kuvvetine *statik sürtünme* denir.



Şekil 2.13 İki yüzey temas halinde iken yüzeylerden birisi kayıyor veya kaymaya çalışıyor ise sürtünme ortaya çıkar

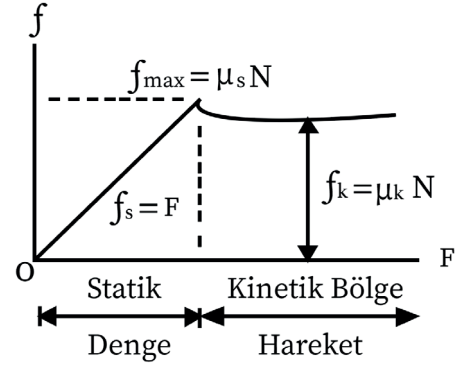
Eğer uygulanan kuvvetin büyüklüğü arttırılırsa, blok bir noktadan sonra kaymaya veya yer üzerinde hareket etmeye başlayacaktır. Blok hareket etmenin sınırındayken (kayma başlamadan önce oluşan anlık durum), statik sürtünmenin büyüklüğü en yüksektir (f_{max}). Uygulanan kuvvetin büyüklüğü f_{max} 'ı geçtiği anda blok sağa doğru hareket etmeye başlar. Blok hareket halindeyken temas noktalarındaki dirence kinetik veya dinamik sürtünme, f_k olarak adlandırılır. Genel olarak, kinetik sürtünmenin büyüklüğü, en yüksek statik sürtünmeden ($f_k < f_{max}$) ve uygulanan kuvvetten ($f_k < F$) daha küçüktür. Uygulanan kuvvet ile kinetik sürtünme kuvvetinin büyüklüğü arasındaki fark bloğun sağ tarafa doğru ivmelenmesini sağlar.

Hem statik hem de kinetik sürtünmenin büyüklüğünün temasta olan yüzeylere etki eden normal kuvvet (N , Şekil 2.13) ile orantılı olduğu deneysel olarak belirlenmiştir. Orantılılığın sabiti genel olarak μ (mü) ile anılır ve materyal özelliği, yüzey pürüzlülüğünün kalitesi ve temastaki yüzeylerin içinde buldukları koşullar gibi faktörlere bağlı olan *sürtünme katsayısı* olarak adlandırılır. Sürtünme katsayısı ayrıca temasta olan kütlelerin sabit veya hareketli olup olmadığına da bağlıdır. Statik ve dinamik durumlarda sürtünme kuvvetlerini ayrıştırılabilmek için iki farklı sürtünme katsayısı belirlenmiştir. *Statik sürtünme katsayısı* (μ_s) statik sürtünme ile, *kinetik sürtünme katsayısı* (μ_k) kinetik veya dinamik sürtünme ile bağlantılıdır. Statik sürtünme kuvvetinin büyüklüğü blok tam hareket etmek üzereyken $F_s = \mu_s N = f_{\max}$ 'tır ve uygulanan kuvvetin büyüklüğü en yüksek statik sürtünme kuvvetinden azken $f_s < \mu_s N$ 'tir. Bu durumda statik sürtünme kuvvetinin büyüklüğü uygulanan kuvvetin büyüklüğüne eşittir ($f_s = F$). Kinetik sürtünme ve normal kuvveti bağdaştıran formül:

$$F_k = \mu_k N \text{ dir. (2.4)}$$

Sürtünme kuvvetindeki değişimin temas eden yüzeye paralel (teğet) uygulanan kuvvete bağlı olarak değişimi Şekil 2.14'te gösterilmiştir. Herhangi bir materyal çifti için, kinetik sürtünme katsayısı genellikle statik sürtünme katsayısından daha düşüktür. Kinetik sürtünme katsayısı ortalama kayma hızlarında neredeyse sabittir. Daha yüksek hızlarda, μ_k sürtünmeden

dolayı ortaya çıkan ısıdan ötürü azalabilir. Örnek sürtünme katsayıları Tablo 2.4'te listelenmiştir. Tablo 2.4'teki değerlerin ortalama değerler olduğu ve statik ve kinetik sürtünme katsayıları ayrımının yapılmadığı unutulmamalıdır.



Şekil 2.14 Sürtünme kuvveti değişiminin uygulanan kuvvete bağlı fonksiyonu

Tablo 2.4 Sürtünme katsayıları

Etkileşimdeki yüzeyler	Sürtünme katsayısı
Ahşap üstünde ahşap	0.25 – 0.50
Metal üstünde metal	0.30 – 0.80
Plastik üstünde plastik	0.10 – 0.30
Plastik üstünde metal	0.10 – 0.20
Beton üzerinde kauçuk	0.60 – 0.70
Seramik üzerinde kauçuk	0.20 – 0.40
Ahşap üzerinde kauçuk	0.70 – 0.75
Metal üzerinde kemik	0.10 – 0.20
Kıkırdak üzerinde kıkırdak	0.001 – 0.002

Sürtünme kuvvetleri her zaman temasta olan yüzeylere teğet yönde etki eder. Eğer temas halindeki iki kütlede birisi hareket ediyorsa o kütleyle etki eden sürtünme kuvveti hareket

yönünün zıt yönüne doğrudur. Örnek olarak, uygulanan kuvvetin etkisi altında, Şekil 2.13'teki blok sağa doğru hareket etmeye çalışır. Blok üzerindeki sürtünme kuvvetinin yönü ise sol taraf olup, bloğun hareketi durdurmaya yöneliktir. Sürtünme kuvvetleri her zaman çiftler halinde oluşur çünkü her zaman temas halinde olan ve sürtünme beklenen iki yüzey vardır. Bu nedenle Şekil 2.13'te yere etki eden sürtünme kuvveti de vardır. Yere etki eden sürtünme kuvveti ile bloğa etki eden sürtünme kuvveti birbirine eşittir. Fakat, yere uygulanan sürtünme kuvvetinin yönü sağ tarafa doğrudur.

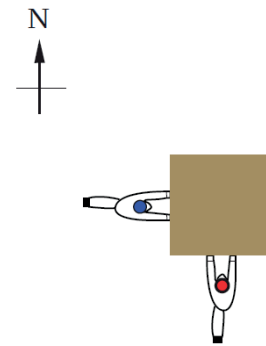
Sürtünme ve aşınmanın etkileri kayan yüzeyler arasına yeni malzemeler konularak azaltılabilir. Bu malzemeler katı, sıvı olabilir ve *yağlayıcı* olarak adlandırılırlar. Hareket eden parçalar arasına yerleştirilen yağlayıcılar hareket eden parçalar arasındaki direkt teması azaltarak sürtünmenin etkisini ve aşınmayı azaltır. İnsan vücudunda hareketli eklemler (diresek, kalça ve diz eklemler) *sinoviyal sıvı* ile kayganlaştırılır. Sinoviyal sıvı, eklem yüzeyleri arasındaki direkt teması kısıtlayarak ve eklem yüzeylerindeki kıkırdağı besleyerek, hareketli yüzeylerin sürtünme etkisini, aşınmasını ve parçalanmasını azaltan viskoz bir materyaldir.

Her ne kadar hareketli eklemler aşırı yüklenme koşullarına maruz kalsalar da, kıkırdağ yüzeyler normal, günlük koşullarda çok az aşınmaya maruz kalır. Göreceli harekete giren

iki katı yüzey arasında, yağlayıcı olarak bir akışkanın kullanılmasının, sürtünme etkilerinin nasıl değerlendirileceği tartışmasını değiştirdiğini unutmamak önemlidir. Örneğin, viskoz bir ortamın mevcut olduğu sürtünme kuvveti sadece ilgili normal kuvvetlerin (basınç) bir fonksiyonu değil, aynı zamanda hareketli parçaların göreceli hızına da bağlıdır. Farklı yüklenme ve hareket koşulları altında hareketli eklemlerde sürtünme etkilerini açıklamak için bir dizi kayganlaştırma türü tanımlanmıştır. Bu türler, hidrodinamik, sınır, elastohidrodinamik, ezilmiş film, akış ve güçlendirilmiş yağlamayı içerir.

2.15 Örnek Problemler

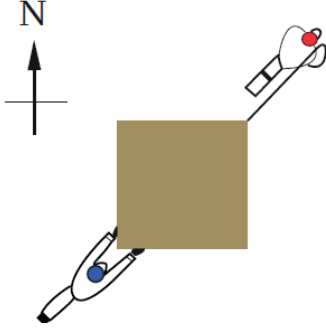
Problem 2.1 Şekil 2.15'te gösterildiği üzere, bir bloğu oynatmaya çalışan iki işçi olduğu ve her iki işçinin de 200 N'luk eşit kuvvet uyguladığı varsayılmaktadır. İşçilerden birisi bloğu Kuzey'e doğru diğeri ise Doğu'ya doğru itmektedir. İşçiler tarafından bloğa uygulanan net kuvveti bulunuz.



Şekil 2.15 Problem 2.1

Cevap: 283 N, kuzeydoğu

Problem 2.2 Şekil 2.16’da gösterildiği üzere, bir bloğu oynatmaya çalışan iki işçi olduğunu ve her iki işçinin de 200 N’luk eşit kuvvet uyguladığı varsayılmaktadır. İşçilerden birisi bloğu kuzeydoğuya doğru iterken, diğeri aynı yönde çekmektedir. İşçiler tarafından bloğa uygulanan net kuvveti bulunuz.



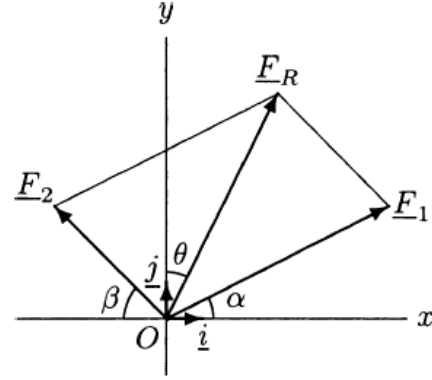
Şekil 2.16 Problem 2.2

Cevap: 400 N, kuzeydoğu

Problem 2.3 Şekil 2.17’de gösterilen \underline{F}_1 ve \underline{F}_2 kuvvetleri dikkate alındığında, bu kuvvetlerin uygulandığı nesnenin xy-düzleminde olduğunu varsayılmaktadır. İlk kuvvet $\underline{F}_1 = 15$ N, ve pozitif x eksenine ile $\alpha = 30^\circ$ ’lik açı ile uygulanmaktadır. İkinci kuvvet $\underline{F}_2 = 10$ N’dir ve negatif x eksenine ile $\beta = 45^\circ$ ’lik açı ile uygulanmaktadır.

- \underline{F}_1 ve \underline{F}_2 ’nin x ve y eksenine yönündeki skaler bileşenleri hesaplayınız.
- \underline{F}_1 ve \underline{F}_2 ’yi bileşenleri ile birlikte ifade ediniz.
- Meydana gelen \underline{F}_R kuvvetini ifade ediniz.
- Meydana gelen bileşke kuvvetin büyüklüğünü hesaplayınız.

(e) \underline{F}_R ’nin pozitif y eksenine ile yaptığı θ açısını hesaplayınız.



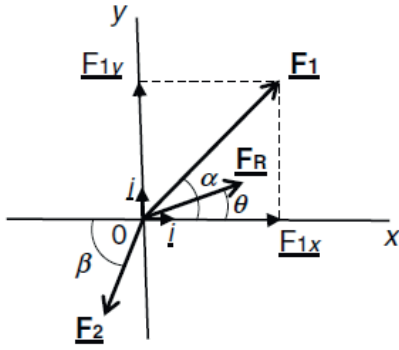
Şekil 2.17 Problem 2.3

Cevaplar:

- $F_{1x} = 13.0$ N, $F_{1y} = 7.5$ N, $F_{2x} = -7.1$ N, $F_{2y} = 7.1$ N; (b) $\underline{F}_1 = 13.0\mathbf{i} + 7.5\mathbf{j}$ ve $\underline{F}_2 = -7.1\mathbf{i} + 7.1\mathbf{j}$; (c) $\underline{F}_R = 5.9\mathbf{i} + 14.6\mathbf{j}$; (d) $F_R = 15.7$ N; (e) $\theta = 22^\circ$

Problem 2.4 Şekil 2.18 de gösterilen kuvvetler ele alındığında \underline{F}_R bileşke kuvvet vektörü pozitif x eksenine ile $\theta = 27^\circ$ açı yapmaktadır. Bileşke vektörünün büyüklüğü, $F_R = 21.4$ N’dir. \underline{F}_1 kuvvetinin vektörel bileşenleri $F_{1x} = 26$ N, $F_{1y} = 25$ N’dir.

- \underline{F}_1 kuvvetinin büyüklüğünü hesaplayınız.
- \underline{F}_1 kuvvetinin pozitif x eksenine ile yaptığı α açısını hesaplayınız.
- \underline{F}_2 kuvvetinin büyüklüğünü hesaplayınız.
- \underline{F}_2 ’nin yatay ile yaptığı β açısını hesaplayınız.



Şekil 2.18 Problem 2.4

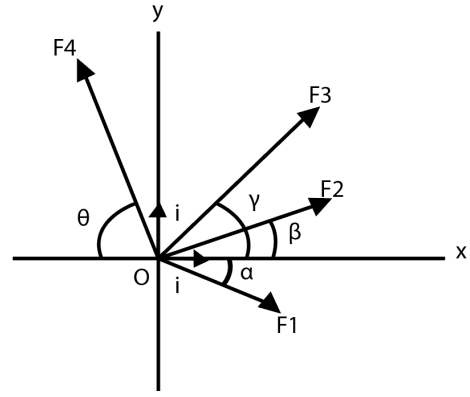
Cevaplar:

- (a) $F_1 = 36.1 \text{ N}$; (b) $\alpha = 43.9^\circ$; (c) $F_2 = 16.8 \text{ N}$;
 (d) $\beta = 65.7^\circ$

Problem 2.5

Şekil 2.19’da gösterilen F_1 , F_2 , F_3 ve F_4 kuvvetlerinin xy ekseninde bir nesneye uygulandığını varsaydığımızda birinci, ikinci ve üçüncü kuvvetlerin büyüklükleri sırayla $F_1=32 \text{ N}$, $F_2=45 \text{ N}$ ve $F_3=50 \text{ N}$, pozitif x eksenine yaptıkları açılar ise sırasıyla $\alpha = 43.9^\circ$, $\beta = 65.7^\circ$ ve $\gamma=50^\circ$ ’dir. F_4 kuvvetinin büyüklüğü ise $F_4=55 \text{ N}$ ve etki çizgisinin negatif x eksenine yaptığı açı ise $\theta = 65^\circ$ ’dir.

- (a) Bileşke kuvvet vektörünün F_R vektörel bileşenlerini hesaplayınız.
 (b) Bileşke kuvvetin F_R büyüklüğünü hesaplayınız.
 (c) Bileşke kuvvet vektörünün F_R yatayla yaptığı açı τ ’yi hesaplayınız.



Şekil 2.19 Problem 2.5

Cevaplar

- (a) $F_{Rx} = 73.3 \text{ N}$, $F_{Ry} = 93.5 \text{ N}$; (b) $F_R = 118.8 \text{ N}$;
 (c) $\tau=51.9^\circ$

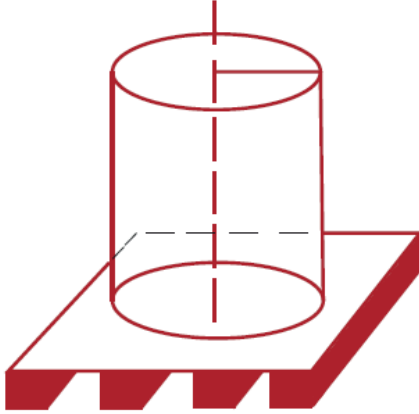
Problem 2.6 Şekil 2.20’de gösterildiği üzere, 2 kg’lık 20 cm x 30 cm’lik bir kitabın masanın üzerinde durduğu varsayılmaktadır. Kitap tarafından masaya uygulanan ortalama kuvveti hesaplayınız.



Şekil 2.20 Problem 2.6

Cevap: 327 Pa.

Problem 2.7 Şekil 2.19’da gösterildiği üzere, 50 kg’lık bir silindir varilin ahşap bir palet üzerinde durduğunu ele alındığında varil tarafından palete uygulanan basınç 260 Pa’dır. Varilin yarıçapı r kaçtır?

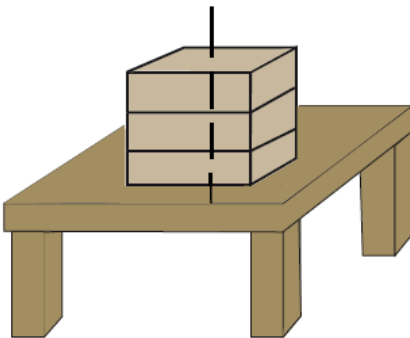


Şekil 2.21 Problem 2.7

Cevap: $r = 0.77$ m

Problem 2.8 Şekil 2.22’de gösterildiği üzere, 3 tane birbirinin aynı her biri 10 kg olan 3 kutu üst üste masanın üzerinde durmaktadır. Kutunun taban ölçüleri 40 cm x 50 cm’dir.

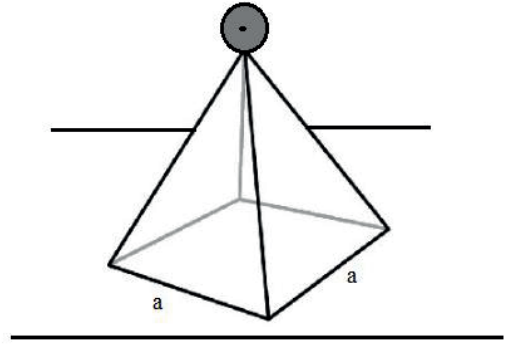
Kutular tarafından masaya uygulanan ortalama basıncı hesaplayınız.



Şekil 2.22 Problem 2.8

Cevap: $P = 1470$ Pa.

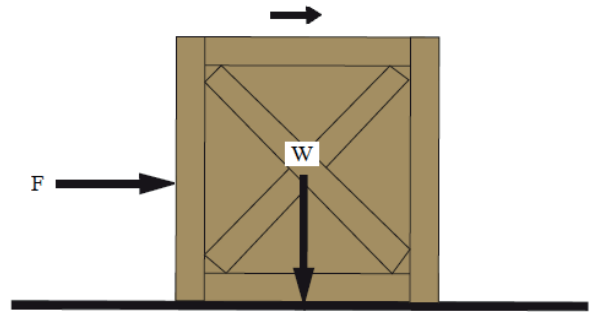
Problem 2.9 Şekil 2.23’de gösterilen 35 kg ağırlığında üzerine küre monte edilmiş kare tabanlı piramitin, piramit ağırlığı $W=650$ N ve karenin bir kenarının uzunluğu $a=0.7$ m’dir. Bu yapı tarafından yere uygulanan ortalama basıncı hesaplayınız.



Şekil 2.23 Problem 2.9

Cevap: $P=2026.5$ Pa

Problem 2.10 Şekil 2.24’te gösterildiği üzere, 400 N’luk bloğun yatay düzlemde durduğunu ele alındığında, blok ve yatay yüzey arasındaki statik sürtünme kuvvetinin 0.3 olduğunu varsayılmaktadır. Bloğu sağa doğru hareket ettirmek için uygulanması gereken en küçük yatay kuvvet kaçtır?



Şekil 2.24 Problem 2.10, 2.11 ve 2.12

Cevap: 120 N’den biraz fazla.

Problem 2.11 Şekil 2.24'te gösterildiği üzere, dışarıdan uygulanan 280 N'luk bir kuvvet sonucunda bloğun sağ tarafa hareket ettiği ve yatay düzlem ile blok arasındaki kinetik sürtünme katsayısının 0.35 olduğu varsayıldığında bloğun kütlesi (m) kaçtır?

Cevap: $m = 28.6 \text{ kg}$

Problem 2.12 Şekil 2.24'te gösterildiği üzere, yatay olarak uygulanan 62.5 N'luk bir kuvvet sonucunda bloğun sağ tarafa hareket ettiği ve yatay düzlem ile blok arasındaki kinetik sürtünme katsayısının 0.25 olduğu varsayıldığında bloğun ağırlığı (W) kaçtır?

Cevap: $W = 250 \text{ N}$

Problem 2.13 Şekil 2.25'te gösterildiği üzere, 50 kg'lık bir dosya dolabını seramik kaplı bir yüzeyde 74 N'luk kuvvet uygulayarak iten bir kişi olduğunu ele alındığında dolap ile yer arasındaki sürtünme katsayısı kaçtır?



Şekil 2.25 Problem 2.13 ve 2.14

Cevap: $\mu = 0.15$

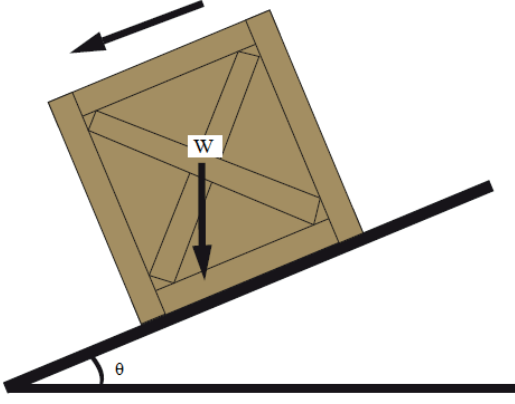
Problem 2.14 Şekil 2.25'te gösterildiği üzere, içi çeşitli dosyalar ve ofis malzemeleri ile dolu bir dosya dolabını ahşap yüzeyde itmeye çalışan bir kişi olduğu ele alındığında, dolu dosya dolabının toplam ağırlığı $W=900 \text{ N}$, boş ağırlığının ise $W_1= 500 \text{ N}$ olduğu varsayılmaktadır. Yer ile dosya dolabı arasındaki sürtünme katsayısı ise $\mu = 0.4$ 'tür.

- İçi dolu dosya dolabını yüzeyde hareketini başlatabilmek için bu kişinin yatayda uygulaması gereken kuvvetin büyüklüğü nedir?
- İçi boş dosya dolabını yüzeyde hareketini başlatabilmek için bu kişinin yatayda uygulaması gereken kuvvetin büyüklüğü nedir?
- İçi dolu dolabı zemin üzerinde iterken gerekli olan kuvvet değişimi nedir?

Cevaplar: (a) 360 N'dan biraz fazla; (b) 200 N'dan biraz fazla; (c) % 80 artış

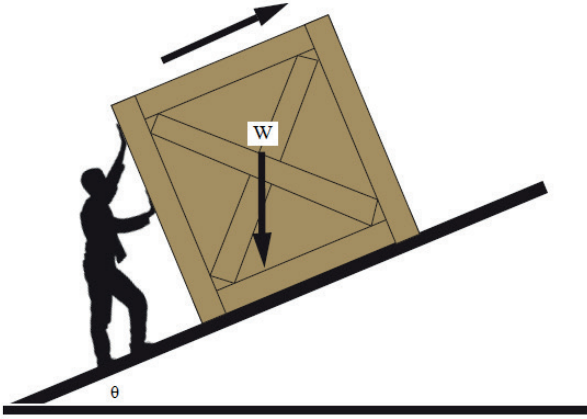
Problem 2.15 Şekil 2.26'te gösterildiği üzere, W ağırlığında bir blok, yerçekimi etkisine bağlı olarak, yatay düzlem ile θ açısı yapan eğimli bir yüzeyden aşağıya doğru kaymaktadır. Blok ve eğimli yüzey arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k 'dir.

Blok ve eğimli yüzey arasında oluşan sürtünme kuvvetinin büyüklüğünün $f = \mu_k W \cos \theta$ olduğunu gösteriniz.



Şekil 2.26 Problem 2.15

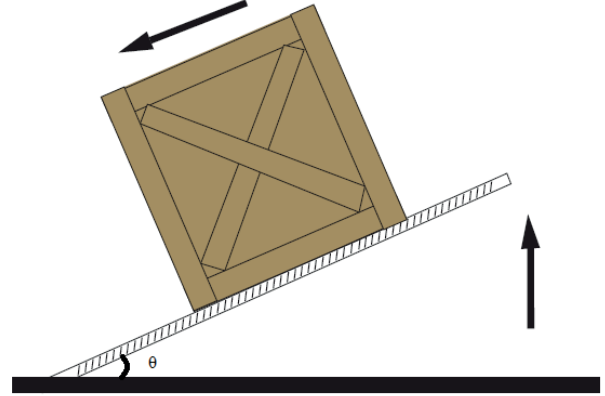
Problem 2.16 Şekil 2.27’de gösterildiği üzere, bir kişi 500 N ağırlığındaki bir kutuyu eğimli bir yüzeyde yukarıya doğru itmektedir. Eğer kutu ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı 0.4 ise ve yüzey, yatay düzlem ile $\theta = 25^\circ$ ’lik açı yapıyor ise kutu üzerine etki eden sürtünme kuvvetlerinin büyüklüklerini hesaplayınız.



Şekil 2.27 Problem 2.16

Cevap: $f = 181.3 \text{ N}$

Problem 2.17 Şekil 2.28’de temas halindeki yüzeyler arasındaki sürtünme katsayısının belirlenmesi için oluşturulan basit bir deney ortamı gösterilmektedir. Bu metot, bir bloğu yatay bir plakaya yerleştirip, plakayı yavaş yavaş blok yüzey üzerinde kaymaya başlayana kadar kaldırarak ve kayma gerçekleştiği anda plakanın yatay düzlem ile yaptığı açının kaydedilmesiyle uygulanır. Bu kritik açı (θ_c) *yatırma açısı* olarak adlandırılır. Kayma başlamadan önceki anda blok statik dengedir. Kuvvet dengesi üzerinden, statik sürtünme kuvvetinin, hareket başlamadan hemen önce $\mu = \tan\theta_c$ olduğunu gösteriniz.



Şekil 2.28 Problem 2.17

Bölüm 3

MOMENT VE TORK VEKTÖRLERİ

Çeviren: Fatma Kübra Erbay Elibol

3.1 Moment ve Tork Vektörlerinin Tanımı

3.2 Momentin Büyüklüğü

3.3 Momentin Yönü

3.4 Momentin Boyut ve Birimleri

3.5 Moment Vektörü ile İlgili Bazı Önemli Noktalar

3.6 Net ve Bileşke Moment

3.7 Çift ve Çift Momenti

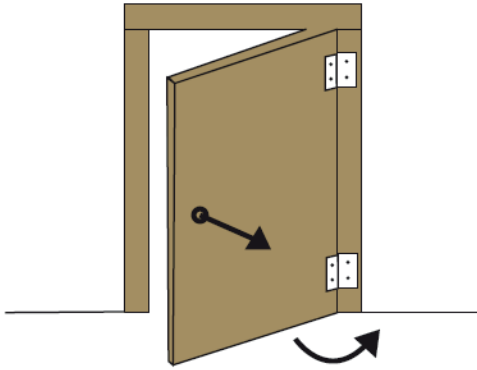
3.8 Kuvvetlerin Ötelenmesi

3.9 Vektör Ürünü Olarak Moment

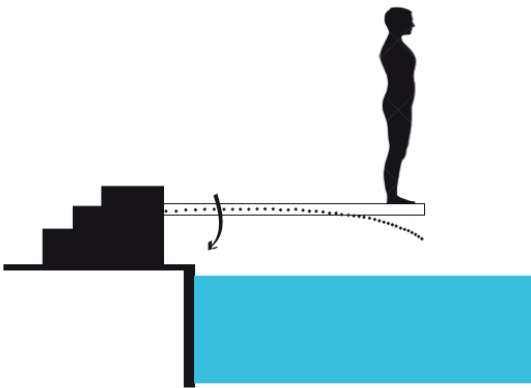
3.10 Örnek Problemler

3.1 Moment ve Tork Vektörlerinin Tanımı

Bir nesne üzerine uygulanan kuvvet bu nesneyi öteleyebilir, döndürebilir ve/veya nesnede deformasyon yaratabilir. Nesneye uygulanan kuvvetin etkisi nesneye nasıl uygulandığı ve nesnenin ne kadar desteklendiğine bağlı olarak değişmektedir. Örnek olarak, açık bir kapı çekildiği zaman kapı kasasına monte edildiği menteşeler boyunca salınır (Şekil 3.1). Kapının salınımına sebep olan ise kapıya uygulanan kuvvetin menteşeler içerisinden geçen eksen üzerinde tork yaratmasıdır. Eğer bir kişi atlama tahtasının boş ucunda durursa tahta bükülecektir (Şekil 3.2). Bu durumda tahtayı eğen, vücut ağırlığının tahtanın sabitlenmiş ucuna bağlı olan momentidir.



Şekil 3.1 Döndürme etkisi



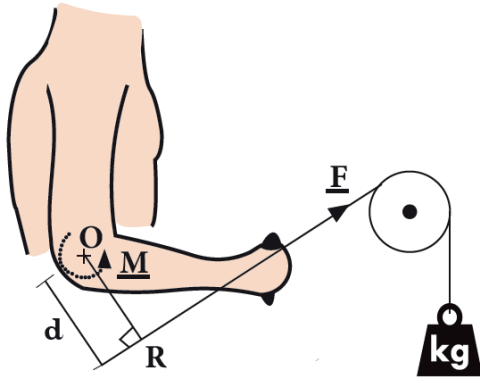
Şekil 3.2 Eğme etkisi

Genel olarak *tork* uygulanan kuvvetlerin dönme ve burma hareketleri ile bağdaştırılırken, *moment* eğme etkisi ile bağlantılıdır. Fakat, tork ve momentin matematiksel tanımı aynıdır. Bu nedenle, tork ve moment vektörlerinin özelliklerini tartışırken moment kullanmak yeterlidir.

3.2. Momentin Büyüklüğü

Bir kuvvetin bir noktadaki momentinin büyüklüğü, kuvvetin büyüklüğünün moment noktası ile kuvvetin uygulandığı nokta arasındaki uzunluğun çarpımına eşittir. Bu uzunluk, *kuvvet* veya *moment kolu* olarak da bilinir. Kabloya bağlı tutacağı olan bir aparat üzerinde egzersiz yapan bir insanı ele alalım (Şekil 3.3). Kablo makara etrafından dolanmakta ve ucunda bir ağırlık bulunmaktadır. Kablonun ucundaki ağırlık kabloyu esnetmekte ve kablo üzerinde çekme gerilim kuvvetine (F) sebep olmaktadır. Bu kuvvet, tutacağı tutan kişiye aktarılmaktadır. Bu F kuvvetinin dirsekteki O noktasında yarattığı momentin büyüklüğünün belirleneceğini varsayalım. O noktası ile etki çizgisi arasındaki en kısa uzaklığı bulmak için F kuvvetinin etki çizgisini uzatalım ve O noktasından bu hat üzerine hattı dik açıyla kesen bir doğru çizelim. Her iki hattın kesişim noktası R ise O ve R arasındaki uzaklık olan d kuvvet kolu, F kuvvetinin O noktasındaki momentini M ise;

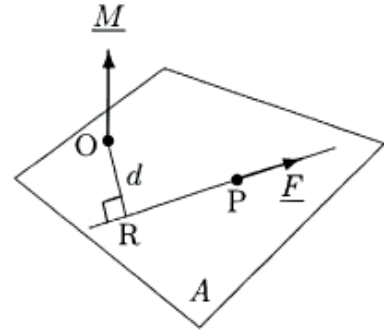
$$M = dF \quad (3.1)$$



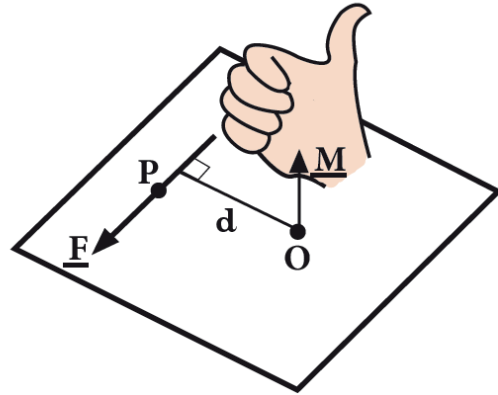
Şekil 3.3 Bir noktadaki kuvvetin momenti

3.3. Momentin Yönü

Uygulanan kuvvetin bir nokta üzerindeki momentinin yönü, uygulanan kuvvetin bulunduğu düzlem veya eksene diktir. Örnek olarak Şekil 3.4'te görüldüğü üzere, O noktası ile \underline{F} kuvvetinin etki çizgisi A düzleminde yer almaktadır. \underline{F} kuvvetinin O noktasına göre uyguladığı momentin \underline{M} etki çizgisi, A düzlemine diktir. Moment vektörünün etki çizgisi boyunca yönü ve doğrultusu *sağ el kuralı* uygulanarak tespit edilebilir. Şekil 3.5'te gösterildiği üzere, sağ elin parmakları uygulanan kuvvetin etrafını sardığında O noktasında kütleli döndürmeye çalışır ve baş parmağın yönü moment vektörünün yönünü verir. Daha spesifik olarak inceleyecek olursak, sağ elin baş parmağının diğer parmaklara dik olacak şekilde kaldırıp, diğer parmakların yönünü uygulanan kuvvetin yönüne çevrilir ve avuç içi momentin belirleneceği noktaya doğru baktığında başparmağın yönü moment vektörünün yönünü verecektir.

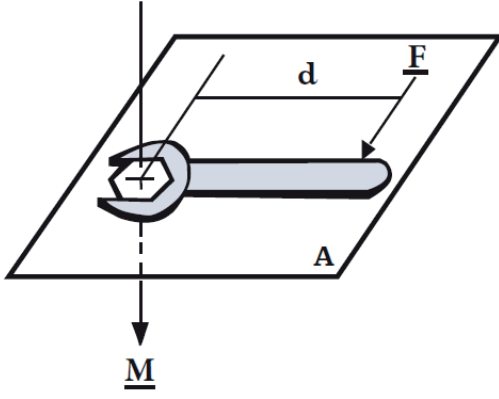


Şekil 3.4 Moment vektörünün yönü



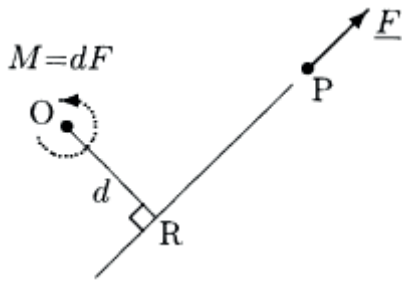
Şekil 3.5 Sağ el kuralı

Moment vektörünün etki çizgisi ve yönü, İngiliz anahtarı ve sağ diş civata kullanılarak da belirlenebilir (Şekil 3.6). İngiliz anahtarının tutacak kısmına kuvvet uygulandığında civatayı döndürecek bir tork oluşur. Bu torkun etki çizgisi civatanın merkezi ile çakışır. Tork nedeniyle, kuvvetin uygulanışına bağlı olarak civata yüzeyden ayrılacak veya yüzeyin içine girmeye çalışacaktır. Şekil 3.6'da görüldüğü gibi, eğer kuvvet saat yönünde ise torkun yönü yüzeyin içerisinde doğrudur ve bunun neticesinde civata yüzeyin içerisine girmeye çalışacaktır. Eğer kuvvet saat yönünün tersine ise torkun yönü yüzeyden dışarı doğru olacaktır ve civata yüzeyden çıkmaya çalışacaktır.



Şekil 3.6 İngiliz anahtarı ve civata

Şekil 3.7’de görüldüğü gibi, eğer O noktası ve \underline{F} kuvveti sayfa düzlemi üzerinde yer alıyorsa Momentin \underline{M} etki çizgisi sayfaya dik olacaktır. Serbest sayfayı O noktasına sabitlerseniz, F sayfayı saat yönünün tersine döndürür. Sağ el kuralını kullandığımızda moment yönünün sayfadan dışarıya doğru olduğunu görmekteyiz. Eş düzlemlili kuvvet sistemlerinde momentlerin yönünün belirlenmesi için moment yönünün saat yönü (cw) veya saat yönü tersine (ccw) olduğunu belirtmek yeterli olacaktır.



Şekil 3.7 O noktasında \underline{F} momentinin büyüklüğü ve yönü

3.4. Momentin Boyutu ve Birimleri

Tanım olarak, moment nesneye uygulanan bir kuvvetin moment kolu uzunluğu ile çarpılmasına eşittir. Bu nedenle momentin boyutu kuvvetin boyutu (ML/T^2) çarpı uzunluğun boyutuna (L) eşittir:

$$[MOMENT] = [KUVVET][MOMENT KOLU] = \frac{ML}{T^2} L = \frac{ML^2}{T^2}$$

Momentin farklı sistemlerdeki birimleri Tablo 3.1’de listelenmiştir.

Tablo 3.1 Moment ve Tork Birimleri^a

Sistem	Moment ve tork birimleri
SI	Newton metre (N-m)
CGS	Dyne santimetre (dyn-cm)
İngiliz	Pound foot (lb-ft)

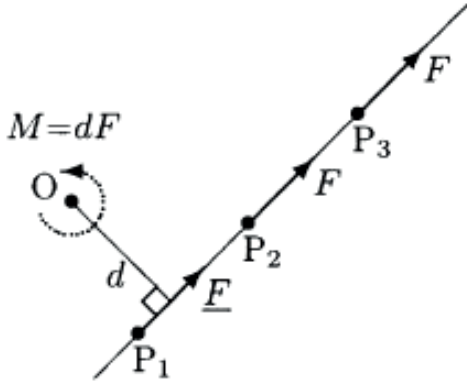
^a1 lb-ft = 1.3573 N-m; 1 N-m = 1 x 10⁷ dyn-cm; 1 N-m = 0.738 lb-ft

3.5. Moment Vektörü ile Alakalı Bazı Önemli Noktalar

Şekil 3.8’de gösterildiği üzere, bir kuvvetin momentini kuvvetin etki çizgisi üzerindeki konumundan bağımsızdır. Gösterilen bütün durumlar için P_1 , P_2 ve P_3 noktalarında uygulanan F kuvvetinin O noktasındaki momenti:

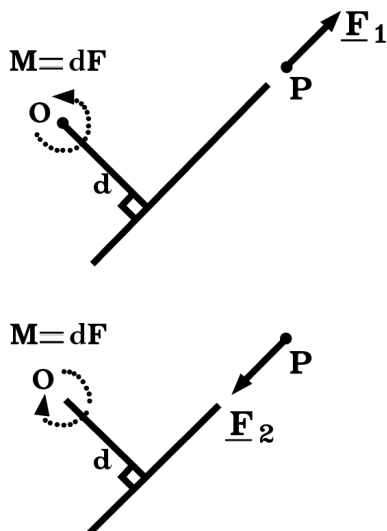
$$M = dF \quad (\text{saat yönünün tersine})$$

d uzunluğu, her zaman O noktası ile \underline{F} kuvvetinin etki çizgisi arasındaki en kısa mesafedir. Şekil 3.8’de gösterilen her üç durum için kuvvetler saat yönünün tersine moment yaratmaktadır.



Şekil 3.8 Moment, kuvveti etki çizgisi boyunca kaydırma işlemi altında değişmez

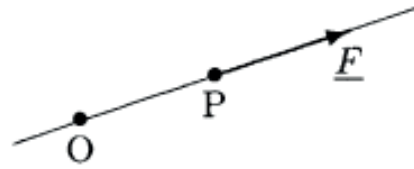
F_1 ve F_2 'nin (Şekil 3.9), eşdeğer büyüklükte ($F_1 = F_2 = F$) ve aynı etki çizgisinde fakat zıt yönlerde olduğunu varsayalım. O noktasındaki F_1 kuvvetinin momentini M_1 ve F_2 kuvvetinin momentini M_2 eşdeğer büyüklükte ($M_1 = M_2 = M = dF$) fakat zıt yönlerde olacaktır ($M_1 = -M_2$).



Şekil 3.9 Zıt momentler

Uygulanan kuvvetin momentinin büyüklüğü moment kolunun uzaması ile artacaktır. Kuvvet vektörünün etki çizgisi ile moment noktasının arasındaki mesafe ne kadar uzunsa ilgili moment vektörünün büyüklüğü de o kadar büyük olacaktır.

Kuvvetin etki çizgisi üzerindeki bir noktadaki moment, noktanın etki çizgisine olan mesafesinin sıfır olmasından dolayı sıfırdır (Şekil 3.10).



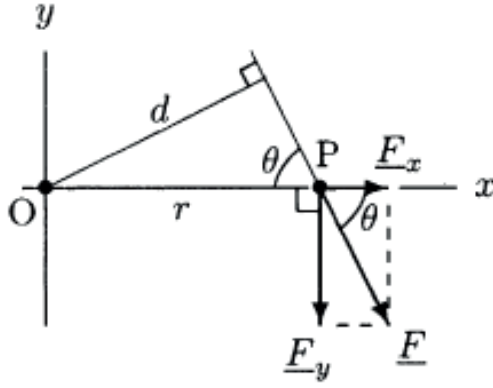
Şekil 3.10 \underline{F} 'in O noktasındaki momentini sıfırdır

Bir kütleye uygulanan kuvvet, kütle için bir noktaya göre bir yönde veya aynı düzlemde başka bir noktaya göre zıt yönde döndürmeye veya eğmeye çalışır.

Kuvvetleri uygun yönlerdeki bileşenlerine ayırmak, moment hesaplamasını kolaylaştırmak için kullanılabilir. Örnek olarak Şekil 3.11’de görüldüğü gibi uygulanan \underline{F} kuvveti, x ve y eksenleri boyunca F_x ve F_y olarak bileşenlerine ayrılabilir.

$$F_x = F \cos\theta$$

$$F_y = F \sin\theta$$

Şekil 3.11 \underline{F} 'in bileşenleri

O noktası \underline{F}_x 'in etki çizgisinde yer aldığından dolayı bu eksenindeki moment sıfırdır. Diğer yandan moment kolunun \underline{F} kuvvetine olan mesafesi r 'dir ve \underline{F}_y kuvvetinin momenti;

$$M = r\underline{F}_y = rF\sin\theta \quad (\text{saat yönünde})$$

Bu moment ayrıca bileşke F kuvvet vektörünün O noktasına göre oluşturduğu moment dF 'tir. Çünkü $d = r \sin\theta$ 'dir.

3.6. Net veya Bileşke Moment

Bir kütleye birden fazla kuvvet uygulandığında net veya bileşke moment bütün kuvvetler tarafından uygulanan moment vektörlerinin toplamı ile hesaplanır. Örnek olarak Şekil 3.12'de gösterilen eş düzlemdeki \underline{F}_1 , \underline{F}_2 ve \underline{F}_3 kuvvetlerinin O noktasına göre moment kolu uzunlukları d_1 , d_2 ve d_3 'ün olduğunu varsayalım. Bu kuvvetler O noktasına göre \underline{M}_1 , \underline{M}_2 ve \underline{M}_3 momentlerini oluşturacaktır ve aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$M_1 = d_1F_1 \quad (\text{saat yönünde})$$

$$M_2 = d_2F_2 \quad (\text{saat yönünde})$$

$$M_3 = d_3F_3 \quad (\text{saat yönünde})$$

Kütle üzerine etkiyen F_1 , F_2 ve F_3 kuvvetleri sonucu O noktasına göre oluşan net moment M_{net} o noktadaki bütün momentlerin vektör toplamına eşittir:

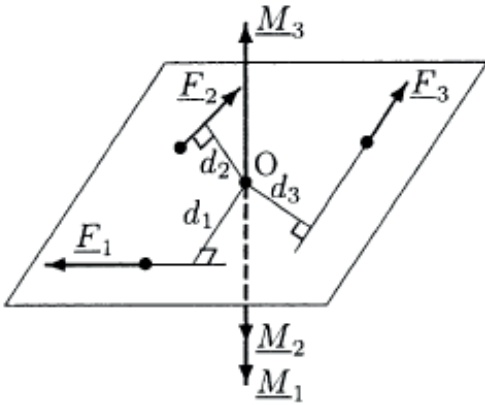
$$\underline{M}_{\text{net}} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 \quad (3.2)$$

Eş düzlem kuvvet sistemlerinde net momentin büyüklüğünün ve yönünün belirlenmesi için pratik bir yol tartışılacaktır. Şekil 3.12'de çizilen durum için, her bir moment ya saat yönünde ya da saat yönünün tersindedir. Bu nedenle bileşke moment de saat yönünde veya saat yönünün tersinde olmalıdır. Bileşke momentin yönünü seçiniz veya tahmin ediniz. Örnek olarak, bileşke moment vektörünün saat yönünde olduğunu varsayalım, bunun sonucunda saat yönündeki momentler \underline{M}_1 ve \underline{M}_2 pozitif saat yönü tersindeki \underline{M}_3 momentini negatif olacaktır. Net momentin büyüklüğü bütün pozitif momentlerin büyüklüklerinin toplanması negatif momentlerin ise çıkartılması ile belirlenebilir:

$$M_{\text{net}} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 \quad (3.3)$$

M_1 , M_2 ve M_3 'ün nümerik değerlerine göre bu eşitlik net moment için negatif, pozitif veya sıfır değeri verecektir. Eğer hesaplanan değer pozitif ise net momentin büyüklüğünü ve seçilen yönünün doğru olduğunu gösterir (bu

durumda, saat yönünde). Eğer hesaplanan değer negatif ise net momentin seçilen yönünün yanlış olduğunu fakat düzeltilebileceğini gösterir. Eğer seçilen yön saat yönünde ise negatif değer net momentin saat yönünün tersine olduğunu gösterir. (Vektör büyüklüklerinin skaler büyüklük olup her zaman pozitif olduğunu unutmayın.) Net momentin doğru yönü tespit edildiğinde büyüklüğünün başındaki negatif işareti kaldırılabilir. Üçüncü olasılık ise 3.3'teki denklem ile hesaplanan değer sıfır olabilir. Eğer net moment sıfıra eşit ise kütlelerin denge halinde olduğu söylenebilir. Bu durum bir sonraki bölümde detaylıca tartışılmaktadır.

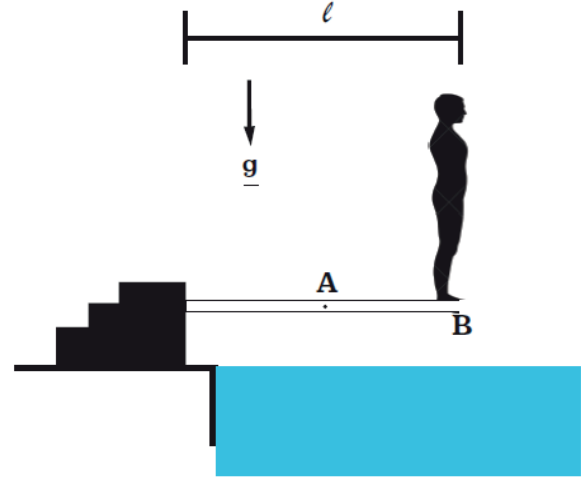


Şekil 3.12 Net moment

Örnek 3.1 Şekil 3.13 bir insanın havuza dalmak için hazırlık yaptığını göstermektedir. Yatay atlama tahtası homojen kalınlığa sahip olup, O noktasından yere sabitlenmiştir ve uzunluğu $l = 4 \text{ m}$ 'dir. 90 kg ağırlığa sahip bir kişi atlama tahtasının serbest ucu olan B noktasında konumlanmıştır. A noktası atlama

tahtasının ağırlık merkezini göstermektedir. A noktası, O noktası ve B noktasına eşit mesafededir.

Kişinin ve tahtanın ağırlığı neticesinde O noktasında oluşan net momenti hesaplayınız.



Şekil 3.13 Dalmaya hazırlanan kişi

Çözüm

m_1 , m_2 ve W_1 , W_2 sırasıyla insan ve atlama tahtasının kütleleri ve ağırlıkları olduğunu varsayalım. W_1 ve W_2 verilen bilgilere göre aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$W_1 = m_1g = (90 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 882 \text{ N}$$

$$W_2 = m_2g = (120 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 1176 \text{ N}$$

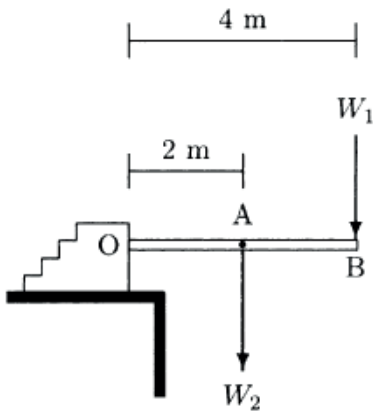
Bir kişi B noktasında durmaktadır. Bu nedenle kişinin W_1 ağırlığı B noktasından atlama tahtasına uygulanmaktadır. Atlama tahtasının kütlesi bütün tahtanın uzunluğu boyunca eşit olarak etki eden kuvvet oluşturmaktadır. Bu yayılı kuvvet sisteminin bileşkesi tahtanın ağırlığı olan W_2 'e eşittir. Pratik nedenlerden ve

atlama tahtasının kalınlığının homojen olmasından dolayı, atlama tahtasının ağırlığından dolayı oluşan kuvvetin atlama tahtasının ağırlık merkezi olan A noktasından etki ettiği varsayılmaktadır.

Şekil 3.14'te gösterildiği gibi W_1 ve W_2 ağırlıkları dikey olarak aşağıya doğru veya yerçekimi ivmelenmesi yönünde etki etmektedir. Atlama tahtası yataydır. Bu nedenle O noktası ve B(l) noktaları arasındaki mesafe W_1 için moment kolu, O noktası ve A(l/2) noktaları arasındaki mesafe W_2 için moment kolu olarak alınır. Bu nedenle W_1 ve W_2 ağırlıkları sonucu O noktasında oluşan M_1 ve M_2 momentleri:

$$M_1 = lW_1 = (4 \text{ m})(882 \text{ N}) = 3528 \text{ Nm (saat yönünde)}$$

$$M_2 = l/2W_2 = (2 \text{ m})(1176 \text{ N}) = 2352 \text{ Nm (saat yönünde)}$$



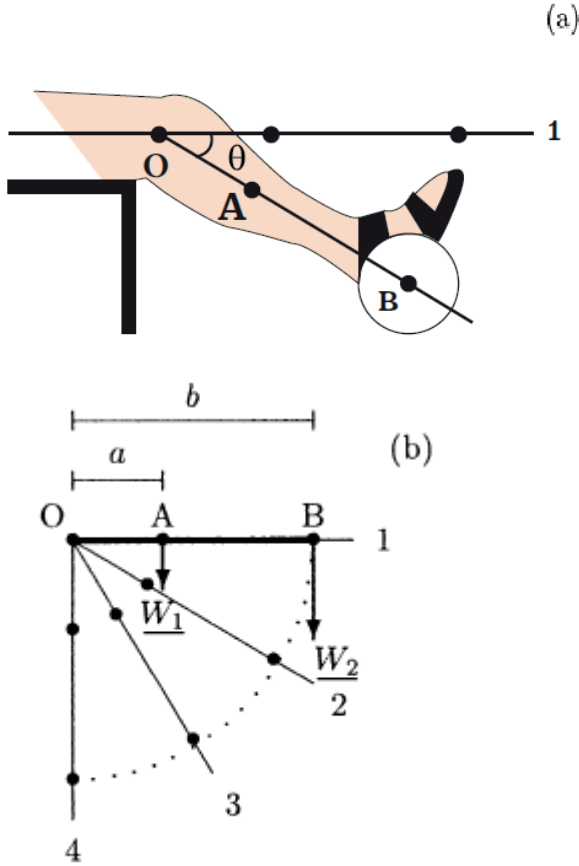
Şekil 3.14 Atlama tahtasına etki eden kuvvetler

Her iki momentin de saat yönünde olmasından dolayı, net moment de saat yönünde olmalı. O noktasına göre net momentin büyüklüğü:

$$M_{\text{net}} = M_1 + M_2 = 5880 \text{ Nm (saat yönünde)}$$

Örnek 3.2 Şekil 3.15a'da gösterildiği gibi, ağırlık botu giymiş bir sporcu olduğunu ve oturur pozisyonda quadriceps kaslarını güçlendirmek için alt bacak fleksiyon/ekstansiyon egzersizi yaptığını varsayalım. Sporcunun alt bacağının ağırlığı $W_1 = 50 \text{ N}$ ve ağırlık botunun ağırlığı ise $W_2 = 100 \text{ N}$ 'dur. Diz ekleme noktası olan O noktasından ölçüldüğü üzere alt bacağın ağırlık noktası (A noktası), $a = 20 \text{ cm}$ 'de ve ağırlık botunun ağırlık merkezi (B noktası), $b = 50 \text{ cm}$ 'de yer almaktadır.

Alt bacak tamamen yatay olarak kaldırıldığında (1. pozisyon), alt bacak 30° açıdayken (2. pozisyon), 60° açıdayken (3. pozisyon) ve 90° açıdayken (4. pozisyon) diz ekleminde oluşan net momentini hesaplayınız (Şekil 3.15b).



Şekil 3.15 Örnek 3.2

Çözüm

1. pozisyondayken, alt bacak yatay olarak uzatıldığında \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 'nin hareket hattına dik olarak konumlanmaktadır. Bu nedenle a ve b sırasıyla \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 için moment kollarıdır. Hem \underline{W}_1 hem de \underline{W}_2 diz eklemine saat yönünde moment uygulamaktadır. Alt bacak 1. pozisyondayken diz eklemi üzerindeki net moment M_o :

$$\begin{aligned} M_o &= aW_1 + bW_2 \\ &= (0,20)(50) + (0,50)(100) \\ &= 60 \text{ Nm (saat yönünde)} \end{aligned}$$

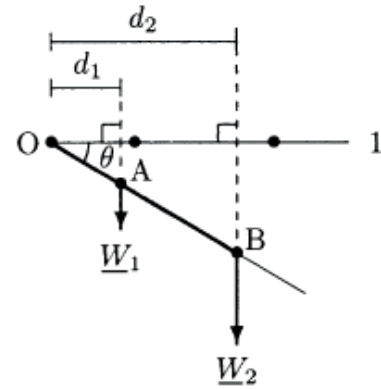
Şekil 3.16, alt bacak yatay eksen ile θ açısı yaptığında, alt bacağa ve moment kollarına (d_1 ve d_2) uygulanan dış kuvvetleri göstermektedir. Problemin geometrisinden,

$$d_1 = a \cos \theta$$

$$d_2 = b \cos \theta$$

Bu yüzden, O noktasına uygulanan net moment:

$$\begin{aligned} M_o &= d_1W_1 + d_2W_2 \\ &= a \cos\theta W_1 + b \cos\theta W_2 \\ &= (aW_1 + bW_2) \cos \theta \end{aligned}$$



Şekil 3.16 Alt bacak yatayla θ açısı yaptığı zaman oluşan kuvvetler ve moment kolları

Parantez içerisindeki eşitlik yukarıda 60 Nm olarak hesaplanmıştır. Bu nedenle:

$$M_o = 60 \cos \theta$$

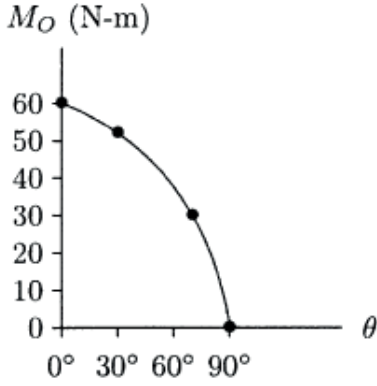
1. Pozisyon için: $\theta = 0^\circ$, $M_o = 60 \text{ Nm}$
(saat yönünde)

2. Pozisyon için: $\theta = 30^\circ$, $M_o = 52 \text{ Nm}$
(saat yönünde)

3. Pozisyon için: $\theta = 60^\circ$, $M_o = 30 \text{ Nm}$
(saat yönünde)

4. Pozisyon için: $\theta = 90^\circ$, $M_o = 0 \text{ Nm}$ (saat yönünde)

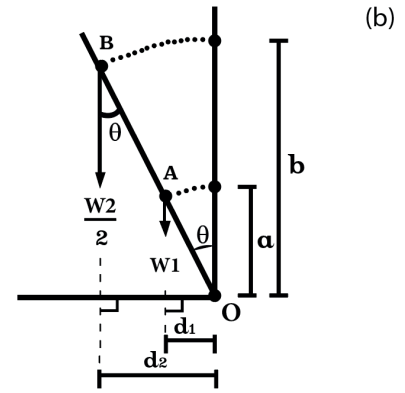
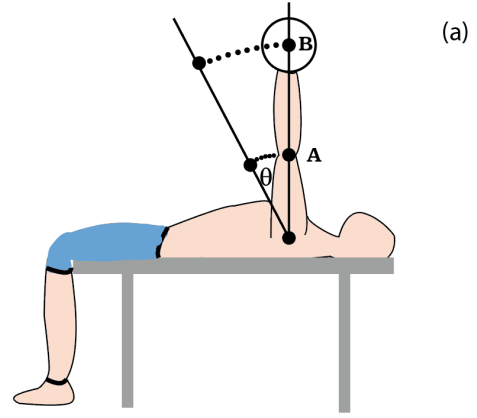
Şekil 3.17’de diz ekleminde oluşan moment, θ açısının bir fonksiyonu olarak çizilmiştir.



Şekil 3.17 θ açısı ile momentin değişimi

Örnek 3.3 Şekil 3.18a bir sporcunun halteri kolları düz bir şekilde kaldırıp indirerek omuz kaslarını güçlendirme egzersizi yaptığını göstermektedir. Kolların dikey eksen ile yaptığı θ açısı Şekil 3.18b’de gösterilmiştir. O noktası omuz eklemi, A noktası bir kolun ağırlık merkezini ve B noktası halterin merkezi ve OA doğrusunun kesişim noktasını vermektedir. O ve A noktaları arasındaki mesafe $a = 24 \text{ cm}$ ve O ve B noktaları arasındaki mesafe $b = 60 \text{ cm}$ ’dir. Her bir kolun ağırlığı $W_1 = 50 \text{ N}$ ve halterin toplam ağırlığı $W_2 = 300 \text{ N}$ ’dur.

\underline{W}_1 ve \underline{W}_2 sonucunda omuz ekleminde, kolun dikeyle yaptığı açı olan θ açısının bir fonksiyonu olarak oluşan net momenti belirleyiniz. $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ve 60° için momentleri hesaplayınız.



Şekil 3.18 (a) Omuz kaslarını güçlendirici egzersiz (b)ve kolun basit bir modeli

Çözüm

\underline{W}_1 ve \underline{W}_2 tarafından omuz eklemlerinde oluşan momentleri hesaplamak için \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 ’nin O noktasına göre d_1 ve d_2 moment kollarını belirlemeliyiz. Problemin geometrisinden (Şekil 3.18b), moment kollarının uzunlukları

$$d_1 = a \sin \theta$$

$$d_2 = b \sin \theta$$

Sporcu her iki kolunu da kullandığı için, halterin ağırlığının her iki kola da eşit olarak dağıldığını varsayabiliriz. Ayrıca unutulmamalıdır ki, omuz eklemine göre kolun ağırlığı ve halterin ağırlığı kolu saat yönünün tersi yönünde döndürmeye çalışmaktadır. \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 ağırlıklarına bağlı olarak O noktasında oluşan \underline{M}_1 ve \underline{M}_2 momentleri:

$$M_1 = d_1 W_1 = a W_1 \sin \theta = (0,24)(50) \sin \theta = 12 \sin \theta$$

$$M_2 = d_2 \frac{W_2}{2} = b \frac{W_2}{2} \sin \theta = (0,60) \left(\frac{300}{2} \right) \sin \theta = 90 \sin \theta$$

Her iki moment saat yönünün tersine olduğu için net moment de saat yönünün tersine olmalıdır. Bu nedenle omuz eklemine oluşan net moment \underline{M}_0 :

$$M_0 = M_1 + M_2 = 12 \sin \theta + 90 \sin \theta = 102 \sin \theta$$

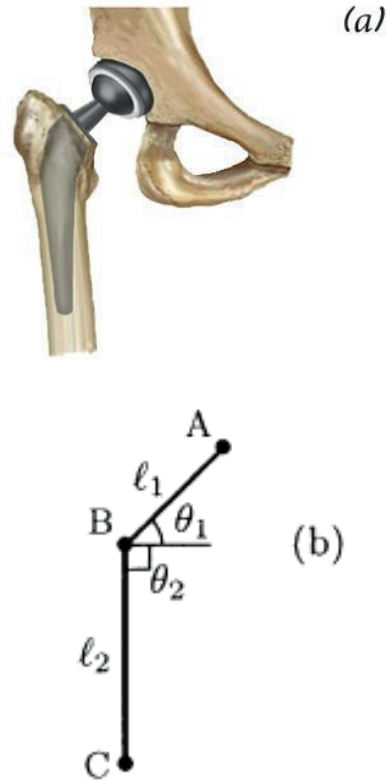
Nm (saat yönünün tersine)

O noktasında oluşan momentlerin $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ve 60° açılara göre hesaplanması için sinüs değerlerinin bulunması ve çarpım işleminin yapılması gerekmektedir. Sonuçlar Tablo 3.2'de görülmektedir.

Tablo 3.2 Omuz eklemine moment (Örnek 3.3)

θ ($^\circ$)	Sin θ	M_0 (Nm)
0	0,000	0,0
15	0,259	26,4
30	0,500	51,0
45	0,707	72,1
60	0,866	88,3

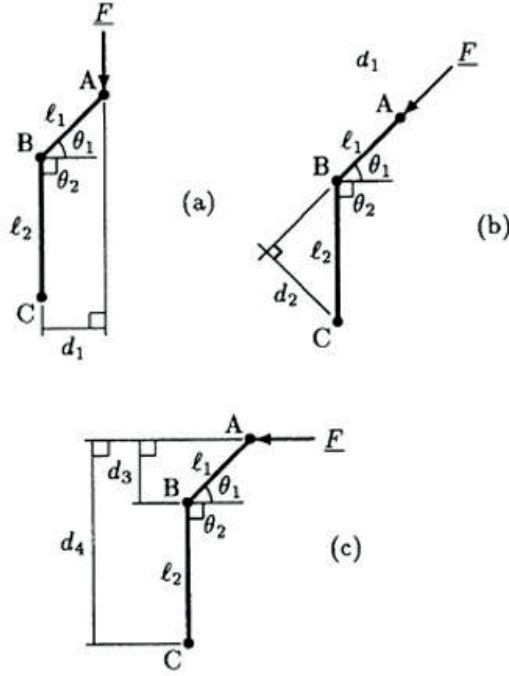
Örnek 3.4 Şekil 3.19'da gösterilen kalça eklem protezini ele aldığımızda protezin geometrik özellikleri, $l_1 = 50$ mm, $l_2 = 50$ mm, $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ 'dir. Her iki ayak üzerinde de simetrik olarak dururken hastanın ağırlığından dolayı etken kuvvet $F = 400$ N'un femoral başa uygulandığını varsayarak gösterimi için uygulanan kuvvet Şekil 3.20'de gösterilen 3 farklı etki çizgisi ele alınmıştır. Gösterilen tüm durumlar için protez üzerindeki B ve C noktalarında oluşan momentleri belirleyin.



Şekil 3.19 Total kalça eklem protezi

Çözüm

Şekil 3.20'de gösterilen her durum için etki çizgisi ve eklem tepki kuvveti farklıdır ve bu nedenle moment kolu uzunlukları da farklıdır.



Şekil 3.20 Örnek 3.4

Şekil 3.20 a'da yer alan problemin geometrisinden, B ve C noktalarındaki F kuvvetinin moment kolunun aynı olduğunu görebiliriz:

$$d_1 = l_1 \cos \theta_1 = (50)(\cos 45^\circ) = 35 \text{ mm}$$

Bu nedenle B ve C noktalarında oluşan momentler:

$$M_B = M_C = d_1 F = (0,035)(400) = 14 \text{ Nm (saat yönünde)}$$

Şekil 3.20b'de gösterilen durum için, B noktası uygulanan kuvvetin etki çizgisinde yer almaktadır. Bu nedenle B noktası için moment kolunun uzunluğu sıfırdır ve

$$M_B = 0$$

Aynı durumda C noktasında oluşan moment ve moment kolu:

$$d_2 = l_2 \cos \theta_1 = (100)(\cos 45^\circ) = 71 \text{ mm}$$

$$M_C = d_2 F = (0,071)(400) = 28 \text{ N-m (saat yönünün tersine)}$$

Şekil 3.20c'de gösterilen durum için B ve C noktalarına göre olan moment kol uzunlukları:

$$d_3 = l_1 \sin \theta_1 = (50)(\sin 45^\circ) = 35 \text{ mm}$$

$$d_4 = d_3 + l_2 = (35) + (100) = 135 \text{ mm}$$

Bu nedenle B ve C noktalarında oluşan momentler:

$$M_B = d_3 F = (0,035)(400) = 14 \text{ Nm}$$

(saat yönünün tersine)

$$M_C = d_4 F = (0,135)(400) = 54 \text{ Nm}$$

(saat yönünün tersine)

3.7. Çift ve Momenti

Önemli bir Eşit büyüklükte ve birbirine zıt yönde iki paralel kuvvet tarafından şekillendirilen özel kuvvetler düzenlemesi *çift* olarak adlandırılır. Katı bir kütlede çift, saf döndürme etkisine sahiptir. Çift tarafından oluşturulan döngü etkisi *çift momenti* ile ölçülür.

Şekil 3.21'de gösterilen A ve B noktalarına etki eden kuvvetleri ele alalım. A noktasına etki eden net moment $M = dF$ (saat yönünde) olup B noktasına uygulanan kuvvet sonucu görülür. B noktasına etki eden net moment de yine $M = dF$ (saat yönünde) olup A noktasına uygulanan kuvvet sonucu görülür. C noktasını ele

aldığımızda, C noktası ve B noktası arasındaki uzunluk b , ve bu nedenle C noktası ile A noktası arasındaki mesafe de $d - b$ 'dir. C noktasına göre oluşan net moment $d - b$ ve b mesafede yer alan A ve B noktalarına uygulanan saat yönündeki kuvvetlerin momentlerinin toplamına eşittir.

$$M = (d-b)F + bF = dF \text{ (saat yönünde)}$$

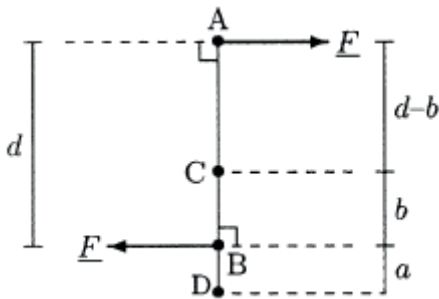
D noktasını ele aldığımızda ise, B noktası ile D noktası arasındaki uzaklık, A ve B noktalarına uygulanan F kuvvetinin momentleri arasındaki farka eşittir.

$$M_D = (a + d)F - aF = dF + aF - aF = dF$$

Çiftin düzlemdeki herhangi bir noktada uyguladığı momentin aynı olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Çifti oluşturan kuvvetlerin büyüklüğü, F ve kuvvetlerin etki çizgisi arasındaki dik uzaklık, d ise büyüklüğü:

$$M = dF \quad (3.4)$$

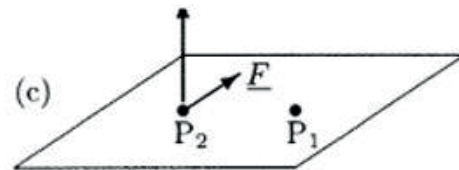
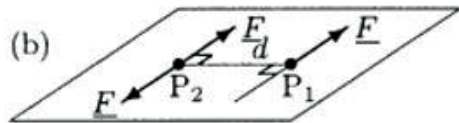
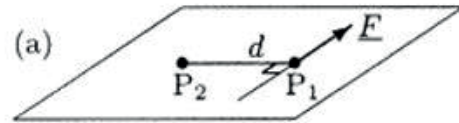
Çiftin momentinin yönü sağ el kuralı ile belirlenebilir.



Şekil 3.21 Çift

3.8 Kuvvetlerin Ötelenmesi

Eğer katı bir nesneye uygulanan kuvvetler eşit büyüklükte ve aynı etki çizgisine sahip olup, zıt yönlere ise çiftin etkisi sıfırdır. Bunu göz önünde bulundurarak büyüklüğü F olan bir kuvvetin Şekil. 3.22a'daki P_1 noktasına uygulandığını ele alalım. Şekil 3.22b'de gösterildiği üzere, bu kuvvet, P_2 noktasına, eşdeğer büyüklükteki (F), aynı etki çizgisine sahip olan ancak zıt yönlere sahip bir çift eklenerek, P_2 noktasına ötelenebilir. Böylece P_1 noktasındaki merkezî kuvvet ile P_2 noktasında zıt yönlü kuvvet bir çift oluşturur. Bu çift, saat yönünün tersine, büyüklüğü $M = dF$ olan ve d , P_1 ve P_2 noktaları arasındaki en kısa mesafe olmak üzere, olan bir moment oluşturur. Bu nedenle, Şekil 3.22c'de gösterildiği gibi çift, çift momenti ile değiştirilebilir.



Şekil 3.22 Bir kuvvetin P_1 noktasından P_2 noktasına ötelenmesi

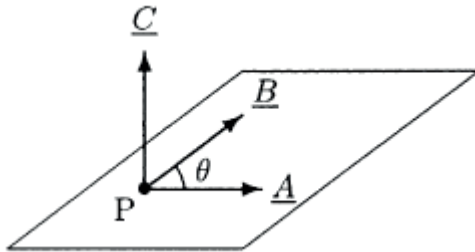
Merkezal kuvvetin katı bir nesneye uygulandığı bilindiğinden, Şekil 3.22a'daki tek kuvvetli sistem, Şekil 3.22b'deki üç kuvvetli sistem ve Şekil 3.22c'deki tek kuvvetli tek çift moment sistemi mekanik olarak eşdeğerdir.

3.9. Bir Vektör Çıktısı Olarak Moment

Bir kuvvetin bir noktaya göre oluşturduğu momenti belirlemek için skaler metot uygulanmaktadır. Skaler metot, görece daha basit eş düzlem kuvvet sistemlerini analiz etmede ve nokta ile etki çizgisi arasındaki en kısa dik mesafenin hesaplanmasının kolay olduğu sistemlerde tatmin edicidir. Daha kompleks problemlerin basitleştirilmesi için ek matematiksel işlemler kullanılabilir.

İki vektörün *vektörel çarpım konsepti* Ek B'de anlatılmış olup bu bölümde de üzerinden geçilecektir. Şekil 3.23'te gösterilen \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini ele alalım. \underline{A} ve \underline{B} 'nin vektörel çarpımı üçüncü bir vektör \underline{C} 'yi verir:

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \quad (3.5)$$



Şekil 3.23 \underline{A} ve \underline{B} 'nin vektörel çarpımı sonucu ortaya çıkan \underline{C} vektörü

Çıktı olan vektör \underline{C} 'nin özellikleri:

- \underline{C} 'nin büyüklüğü, \underline{A} 'nın \underline{B} 'nin ve \underline{A} ile \underline{B} arasındaki küçük açı θ 'nin $\sin\theta$ çarpımına eşittir.

$$C = A B \sin\theta \quad (3.6)$$

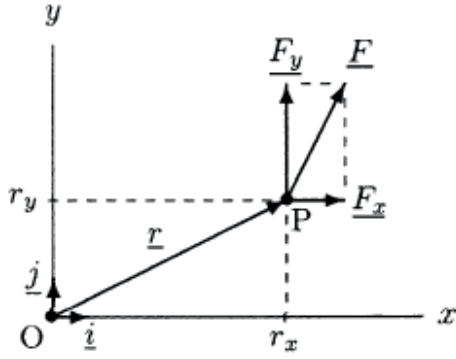
- \underline{C} 'nin hareket hattı \underline{A} ve \underline{B} vektörleri ile oluşturulan düzleme diktir.
- \underline{C} 'nin yönü, sağ el kuralı ile uyumluluk gösterir.

Vektörel çarpım ilkesi kuvvetlerin momentinin belirlenmesi için uygulanabilir. Bir noktaya göre bir kuvvetin momenti konum ve kuvvet vektörlerinin vektörel çarpımı olarak tanımlanmaktadır. P noktasının O noktasına göre *konum vektörü*, O noktasından P noktasına doğru çizilen bir vektör ile tanımlanır. Momentin tanımını vektörel çarpım olarak anlamak için Şekil 3.24'ü ele aldığımızda \underline{F} kuvveti xy ekseninde etki eden ve P noktasına uygulanan bir kuvvettir. \underline{F} kuvveti x ve y eksenindeki F_x ve F_y bileşenleri ile belirtilebilir:

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} \quad (3.7)$$

P noktasının O noktasına göre konum vektörü \underline{r} vektörü ile temsil edilmektedir ve bu vektör de bileşenleri ile belirtilebilir:

$$\underline{r} = r_x \underline{i} + r_y \underline{j} \quad (3.8)$$



Şekil 3.24 O noktasındaki moment $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

Konum vektörünün r_x ve r_y bileşenleri temel olarak O noktasından ölçüldüğünde P noktasının x ve y eksen koordinatlarıdır.

F kuvvetinin O noktasına göre momenti, konum vektörü \underline{r} ve kuvvet vektörü \underline{F} 'nin vektörel çarpımına eşittir:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \quad (3.9)$$

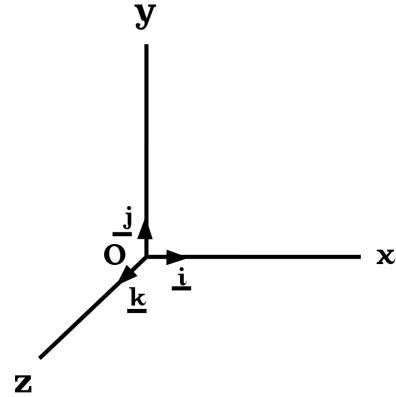
3.7 ve 3.8 denklemlerini kullanarak 3.9 denklemini alternatif olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \underline{M} &= (r_x \underline{i} + r_y \underline{j}) \times (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \\ &= (r_x F_x (\underline{i} \times \underline{i}) + r_x F_y (\underline{i} \times \underline{j}) + r_y F_x (\underline{j} \times \underline{i}) + r_y F_y (\underline{j} \times \underline{j})) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{j} \times \underline{i} = 0$ olduğunu, her birim vektörün kendisi ile yaptığı açının sıfır olması ve $\sin 0^\circ = 0$ olmasından çıkartabiliriz. Pozitif x eksenini ile pozitif y eksenini arasındaki açının 90° ($\sin 90^\circ = 1$) olmasından dolayı $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$ 'dir. Diğer yandan $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$ 'dir. Son iki durum için, çarpım ya pozitif z (saat yönünün tersine veya sayfanın dışına) veya negatif z (saat yönünde veya

sayfanın içine) doğrultusundadır. z ve \underline{k} vektörü, xy düzlemine dik yönü göstermektedir (Şekil 3.25). Böylece, (3.10) denklemini aşağıdaki gibi basitleştirilebilir:

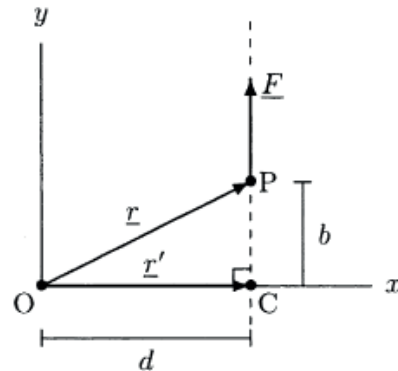
$$M = (r_x F_y - r_y F_x) \underline{k} \quad (3.11)$$



Şekil 3.25 Sağ el kuralının Kartezyen koordinat sistemine uygulanması

Momentinin tanımının konum vektörü ve kuvvet vektörlerinin vektörel çarpımı olduğu ve skaler metot ile uyumluluğunu göstermek adına Şekil 3.26'da gösterilen basit durumu ele alalım. Kuvvet vektörü \underline{F} , pozitif y yönünde etki etmektedir ve etki çizgisi O noktasından d uzaklıkta yer almaktadır. Skaler metodu uygularsak, O noktasına göre moment:

$$M = dF \text{ (saat yönünün tersine)} \quad (3.12)$$



Şekil 3.26 $M = dF$ (saat yönünün tersine)

Kuvvet vektörü pozitif y yönünde etki etmektedir. Bu nedenle,

$$\underline{F} = F\mathbf{j} \quad (3.13)$$

Eğer b kuvvetin y koordinatındaki uygulama noktası ise, P noktasının konum vektörü:

$$\underline{r} = d\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad (3.14)$$

Bu nedenle, \underline{F} 'in O noktasına göre momenti:

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{r} \times \underline{F} \\ &= (d\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \times (F\mathbf{j}) \\ &= dF(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + bF(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \quad (3.15) \\ &= dF\mathbf{k}. \end{aligned}$$

3.12 ve 3.15 formülleri, iki farklı yönden aynı bilgiyi içermektedir. Buna ek olarak, P noktasının y koordinatı (b) çözümde yer almamaktadır. Bu, momentin; kuvvetin etki çizgisindeki herhangi bir noktanın konum vektörü ve kuvvetin kendisinin vektörel çarpımı tanımı ile uygunluk göstermektedir. Şekil 3.26'da gösterildiği üzere, C noktası \underline{F} kuvvetinin etki çizgisi ile x ekseninin kesişim noktası ise, C noktasının O noktasına göre konum vektörü \underline{r}' :

$$\underline{r}' = d\mathbf{i} \quad (3.16)$$

Bu nedenle, O noktasına göre \underline{F} kuvvetinin momenti alternatif olarak aşağıdaki şekilde belirlenebilir:

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{r}' \times \underline{F} \\ &= (d\mathbf{i}) \times (F\mathbf{j}) \quad (3.17) \\ &= dF\mathbf{k} \end{aligned}$$

xy düzlemi içerisindeki eş düzlem kuvvet sistemlerinin oluşturduğu her iki boyutlu problemin sonucunda moment vektörü sadece tek bileşen içermektedir. Meydana gelen moment vektörünün yönü xy düzlemine dik olup, pozitif veya negatif z ekseninde etkindir.

Eş düzlem kuvvet sistemlerini çalışmak üzere oluşturduğumuz vektörel çarpım konsepti, üç boyutlu durumları analiz etmek için de geliştirilebilir. Genel olarak, kuvvet vektörü \underline{F} ve O noktasına göre \underline{F} kuvvetinin etki çizgisi üzerindeki bir noktanın konum vektörü \underline{r} , üç bileşene kadar ayrılabilir. Kartezyen koordinat sistemine bağlı olarak;

$$\underline{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.18)$$

$$\underline{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k} \quad (3.19)$$

O noktasına göre \underline{F} 'nin momenti;

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{r} \times \underline{F} \\ &= (r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}) \times (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ &= (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak hesaplanır.

Moment vektörü x, y ve z yönlerindeki bileşenleri ile ifade edilebilir;

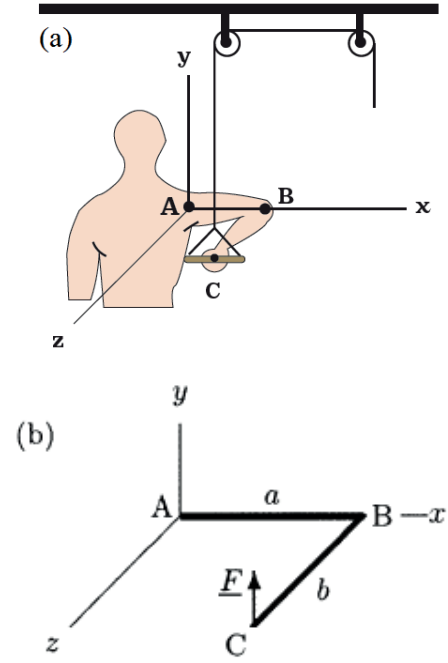
$$\underline{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.21)$$

3.20 ve 3.21 denklemleri karşılaştırıldığında elde edilen sonuç;

$$\begin{aligned} M_x &= r_y F_z - r_z F_y \\ M_y &= r_z F_x - r_x F_z \\ M_z &= r_x F_y - r_y F_x \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aşağıdaki örnek, bu bölümün son 3 başlığında incelenen analizin uygulamasını göstermektedir.

Örnek 3.5 Şekil 3.27a egzersiz aletini kullanan bir insanı göstermektedir. Şekil 3.27b’de görülen L şeklindeki doğrular kişinin sol kolunu temsil etmektedir. A ve B noktaları sırasıyla omuz ve dirsek eklemlerine karşılık gelmektedir. Kişiye göre, üst kol (AB), sola doğru (x yönünde) ve alt kol (BC) ileriye doğru (z yönünde) uzatılmıştır. B noktasında kişi bir ağırlığa kablo ile bağlı olan tutacağı tutmaktadır. Ağırlık kişinin koluna C noktasından yukarı yönlü (y yönünde), büyüklüğü F olan bir kuvvet uygulamaktadır. Üst kol ve alt kolun uzunlukları sırasıyla $a = 25$ cm ve $b = 30$ cm’dir ve uygulanan kuvvetin büyüklüğü ise $F = 200$ N’dur. Kuvvetin omuz eklem noktası olan A noktasına nasıl ötelenebileceğini açıklayınız ve F neticesinde üst kol ve alt kolda oluşan momentlerin büyüklüklerini ve yönlerini belirleyiniz.



Şekil 3.27 Örnek 3.5

1. Çözüm: Skaler Metot

Skaler metot kullanılarak alt kol (BC) ve üst kol (AB) üzerinde oluşan momentlerin bulunması Şekil 3.28’de gösterilmiştir ve yöntem çift ve çift momenti konseptini uygulamaktadır.

İlk adım, B noktasına eşdeğer kuvvetli (F) ve zıt yönlerde iki kuvvet yerleştirmektir. Her biri C noktasındaki kuvvete paraleldir (Şekil 3.28a). C noktasındaki yukarı yönlü kuvvet ile B noktasındaki aşağı yönlü kuvvet bir çift oluştururlar. Bu nedenle, bu çift, bir çift momenti ile değiştirilebilir (Şekil 3.28b’de çift başlı ok ile gösterilmiştir.). Çift momenti büyüklüğü bF ’tir. Sağ el kuralını uygularsak çift momentinin negatif x eksenine yönünde etki ettiğini görebiliriz. Eğer M_x bu moment çiftinin büyüklüğünü gösteriyorsa;

$$M_x = bF \text{ (-x yönünde)}$$

Bir sonraki adım, omuz ekleminin yer aldığı A noktasına bir çift yerleştirmektir (Şekil 3.28c). Bu sefer, B noktasındaki yukarı yönlü kuvvet ile A noktasındaki aşağı yönlü kuvvet çifti oluşturmaktadır ve yine, çift momenti ile değiştirilebilirler (Şekil 3.28d). Bu moment çiftinin büyüklüğü aF 'dir ve xy düzlemine diktir veya pozitif z yönündedir. Bu momentin büyüklüğüne M_z diyecek olursak;

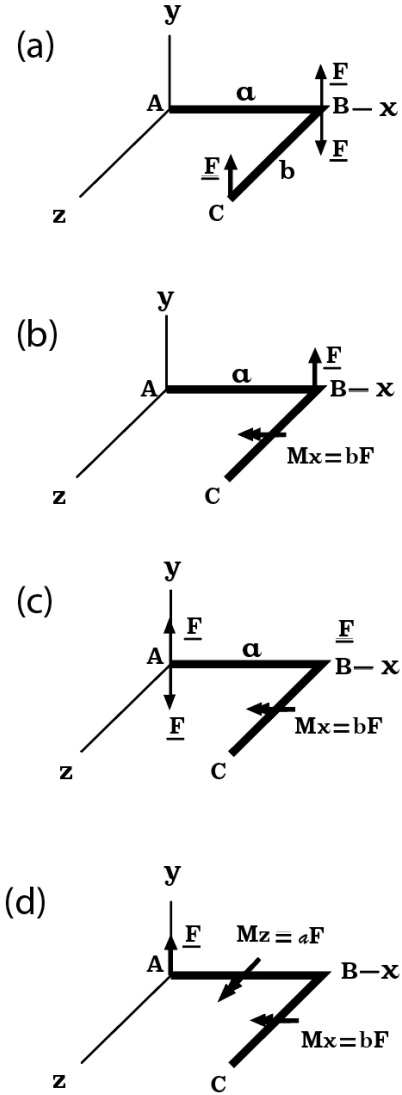
$$M_z = aF \quad (+z \text{ yönünde})$$

Çift momenti büyüklüklerini incelemek için yukarıdaki denklemlerde bulunan a , b ve F değerleri yerine yazılmalıdır;

$$M_x = (0,30)(200) = 60 \text{ Nm}$$

$$M_z = (0,25)(200) = 50 \text{ Nm}$$

C noktasına uygulanan kuvvetin etkisi sonucunda kişi, dirsek ekleminde alt kolu yz düzleminde döndürmek isteyen F büyüklüğünde bir kuvvet ve M_x büyüklüğünde bir moment hisseder. Kişi, omuz ekleminde, yukarı yönlü bir F kuvveti ve M_x büyüklüğünde üst kolu xy düzleminde bükme isteyen bir tork ve üst kolu xy düzleminde döndürmeye veya eğmeye çalışan M_z momenti hisseder. Eğer kişi kolunu bu şekilde tutabiliyorsa, kişi bu kuvvetlere ve momentlere karşı gelebilecek yeterli kas kuvvetini sağlayabiliyor demektir.



Şekil 3.28 Skaler metot

2. Çözüm: Vektörel Çarpım Metodu

Momentin, konum vektörü ve kuvvet vektörlerinin vektörel çarpımı ile tanımlanması, uygulama açısından daha kolaydır. A noktasına göre (omuz ekleminin yer aldığı) C noktasındaki (kuvvetin uygulandığı) konum vektörü ve Şekil 3.29'da görülen kuvvet vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\underline{r} = a\underline{i} + b\underline{k}$$

$$\underline{F} = F\underline{j}$$

\underline{r} ve \underline{F} 'nin vektörel çarpımı A noktasına göre \underline{F} kuvvetinin momentini verecektir.

$$\begin{aligned}\underline{M} &= \underline{r} \times \underline{F} \\ &= (a\underline{i} + b\underline{k}) \times (F\underline{j}) \\ &= aF(\underline{i} \times \underline{j}) + bF(\underline{k} \times \underline{j}) \\ &= aF\underline{k} - bF\underline{i} \\ &= (0,25)(200)\underline{k} - (0,30)(200)\underline{i} \\ &= 50\underline{k} - 60\underline{i}\end{aligned}$$

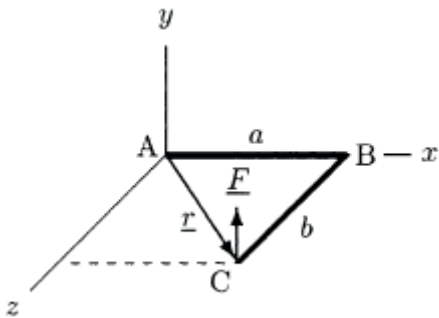
$60\underline{i}$ 'nin önündeki '-' işareti moment vektörünün x bileşeninin negatif x yönünde etki ettiğini göstermektedir. Buna ek olarak \underline{j} vektörü ile alakalı bir birim vektör yer almamaktadır. Bu da moment vektörünün y bileşeninin sıfır olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, A noktasına göre oluşan moment aşağıdaki bileşenlere sahiptir:

$$M_x = 60 \text{ Nm} \quad (-x \text{ yönünde})$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = 50 \text{ Nm} \quad (+z \text{ yönünde})$$

Bu sonuçlar, skaler metot ile elde edilen sonuçlar ile uygunluk göstermektedir.



Şekil 3.29 Vektörel çarpım metodu (Örnek 3.5)

3.10 Örnek Problemler

Problem 3.1 Şekil 3.6'da gösterildiği gibi, bir işçinin İngiliz anahtarı kullanarak bir cıvata \underline{F} kuvveti ile sıktığı varsayılırsa, uygulanan kuvvet sonucu cıvata metal levhaya doğru ilerlemektedir. Cıvata için tavsiye edilen tork M_{rec} 80 Nm olup, İngiliz anahtarının kolu $d=25$ cm'dir.

- İşi tamamlamak için gerekli olan kuvvetin büyüklüğünü hesaplayınız.
- Uygulanması gereken yük nasıl % 50 azaltılabilir?

Cevaplar: (a) $F=320$ N, (b) İngiliz anahtarının kolunun uzunluğunu arttırarak ($d=50$ cm)

Problem 3.2 Şekil 3.13'te gösterildiği gibi 88 kg'lık bir dalgıcın yatay atlama tahtasının B noktasında, sabit olmayan ucunda zıplamaya hazırlandığını ele alınmaktadır. Atlama tahtası homojen kalınlıkta olup kütlesi 56 kg'dır ve yere O noktasından sabitlenmiştir. A noktası atlama tahtasının ağırlık merkezini gösterir. A noktası O ve B noktalarına eşit uzaklıkta yer almaktadır. Eğer dalgıç ve atlama tahtasının O noktasında oluşturduğu net moment $M_o = 3979$ Nm ise atlama tahtasının uzunluğunu bulunuz.

Cevap: $l = 3.5$ m.

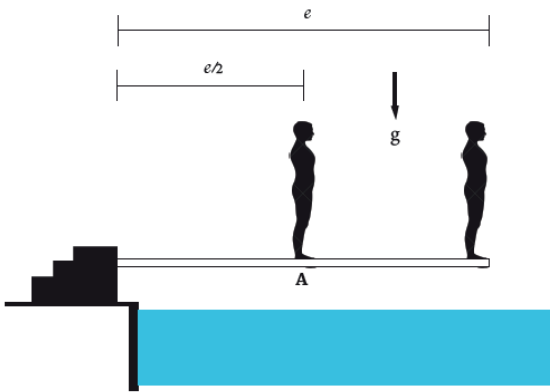
Problem 3.3 Şekil 3.13'te gösterildiği gibi bir dalgıcın atlama tahtasının serbest ucunda (B noktası) dalmaya hazırlandığı ele alınmaktadır. 110 kg ağırlığında ve uzunluğu $l=$

3 m olan atlama tahtası O noktasından sabitlenmiştir. A noktası atlama tahtasının ağırlık merkezini göstermektedir. A noktası O noktası ve B noktasına eşit uzaklıktadır. O noktasındaki net moment $M_{\text{net}}=3760$ Nm ise, dalgıcın ağırlığını belirleyiniz.

Cevap: $W=714.3$ N

Problem 3.4 Şekil 3.30'da gösterildiği gibi iki dalgıç havuza sırayla atlamaya hazırlanmaktadır. Atlama tahtası homojen kalınlıkta olup, O noktasından yere sabitlenmiştir. Atlama tahtasının kütlesi 130 kg, uzunluğu $l = 4$ m'dir. İlk dalgıcın kütlesi 86 kg'dır ve B noktasında durmaktadır. İkinci dalgıcın kütlesi 82 kg'dır ve aynı zamanda atlama tahtasının ağırlık merkezi de olan A noktasında durmaktadır. Buna ek olarak A noktası O ve B noktalarından eşit uzaklıkta yer almaktadır.

O noktasına göre dalgıçlar ve atlama tahtası tarafından oluşturulan momenti bulunuz. O noktasındaki net momenti hesaplayınız.

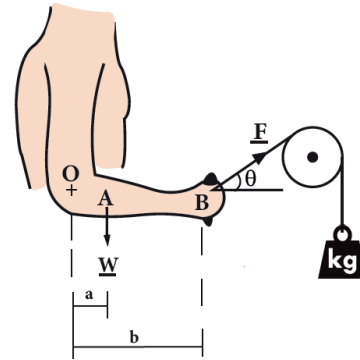


Şekil 3.30 Atlamaya hazırlanan dalgıçlar

Cevaplar: $M_1 = 3371$ Nm, $M_2 = 1607,2$ Nm, $M_b = 2548$ Nm; $M_{\text{net}} = 7526,4$ Nm.

Problem 3.5 Bir kabloya bağlı tutacağı olan egzersiz aletini tutan bir kişi ele alınmaktadır (Şekil 3.31). Kablo bir makara etrafından geçmekte ve bir ağırlığa bağlanmaktadır. Ağırlık kabloyu germekte ve F gerilim kuvveti yaratmaktadır. Bu kuvvet, kişinin eline tutacak ile iletilmektedir. Kuvvet yatay düzlem ile θ açısı yapmaktadır ve kişinin eline B noktasından etki etmektedir. A noktası kişinin alt kolunun ağırlık merkezini ve O noktası ise dirsek ekleminin hareket merkezini göstermektedir. O, A ve B noktalarının ve F kuvvetinin aynı yatay düzlemde yer aldığını varsayılmaktadır.

O ve A noktaları arasındaki yatay mesafenin $a = 15$ cm olduğu, O ve B noktaları arasındaki mesafenin $b = 35$ cm, alt kolun ağırlığının $W = 20$ N, uygulanan kuvvetin büyüklüğünün $F = 50$ N ve açısının $\theta = 30^\circ$ olduğu biliniyorsa O noktasında F ve W tarafından oluşan net momenti bulunuz.



Şekil 3.31 Problem 3.5 ve 3.7

Cevap: $M_o = 5,75$ Nm (saat yönünün tersine)

Problem 3.6 Şekil 3.15a’de ağırlık botu giyerek oturma pozisyonunda alt bacak egzersizi yapan bir kişi gösterilmektedir. Botun ağırlığı $W_2=65\text{ N}$ ’dur. Diz eklem bölgesi olan O noktasından ölçüldüğünde, alt bacağın ağırlık merkezi (A noktası) $a=23\text{ cm}$ uzaklıkta olup, botun ağırlık merkezinin (B noktası) O noktasından uzaklığı ise $b=55\text{ cm}$ ’dir. Bacak yatayla $\theta=45^\circ$ açı yaptığında diz eklemindeki net moment $M_{\text{net}}=34\text{ Nm}$ ise alt bacağın ağırlığını (W_1) belirleyiniz.

Cevap: $W_1=53,8\text{ N}$

Problem 3.7 Şekil 3.31’de kabloya bağlı tutacağı olan egzersiz aleti ile kol egzersizi yapan bir kişi gösterilmektedir. Kablo bir makara etrafından geçmekte ve kablonun serbest ucu ağırlığa bağlanmaktadır. A noktası alt kolun ağırlık merkezini, O noktası ise tutacağın kabloya bağlandığı noktayı temsil etmektedir. Alt kolun ağırlığı $W=23\text{ N}$ ’dur. O - A noktaları ve O - B noktaları arasındaki mesafe sırasıyla $a=16\text{ cm}$, $b=39\text{ cm}$ ’dir. Alt kol üzerindeki kuvvetler ve noktaların aynı yatay düzlemde olduğu varsayılmaktadır. O noktasındaki net moment $M_{\text{net}} = 6,3\text{ N}$ olup kablonun yatayla yaptığı açı $\theta=17^\circ$ ’dir. Ağırlığın kütlesini belirleyiniz.

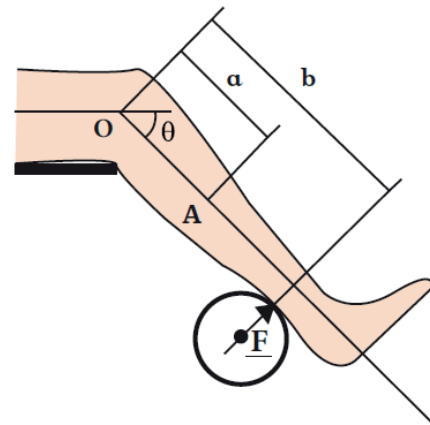
Cevap: $m = 8,9\text{ kg}$

Problem 3.8 Şekil 3.32’de rehabilitasyon ve sporcu eğitim protokolü için hamstring güçlendirici egzersiz sistemi uygulamasının basitleştirilmiş versiyonunu gösterilmektedir.

Hasta veya sporcu oturur pozisyonda alt bacağı silindirik bir yastık ucuna bağlı yükün direncine karşı bükür. Çizilen pozisyonda alt bacak yatay düzlem ile θ açısı yapmaktadır. O noktası diz eklemine, A noktası alt bacağın ağırlık merkezini, W alt bacağın ağırlığını, F silindirik yastıktan alt bacağı dikey olarak uygulanan kuvvetin büyüklüğünü, a , O ve A noktaları arasındaki mesafeyi, b ise O noktası ve alt bacağın uzun eksenini boyunca ölçülen F ’nin etki çizgisi arasındaki mesafeyi göstermektedir.

(a) O noktasındaki \underline{W} ve \underline{F} sonucu oluşan net momenti ifade eden bir tanım belirleyiniz.

(b) Eğer $a = 20\text{ cm}$, $b = 40\text{ cm}$, $\theta = 30^\circ$, $W = 60\text{ N}$ ve $F = 200\text{ N}$ ise O noktasında oluşan net momenti bulunuz.

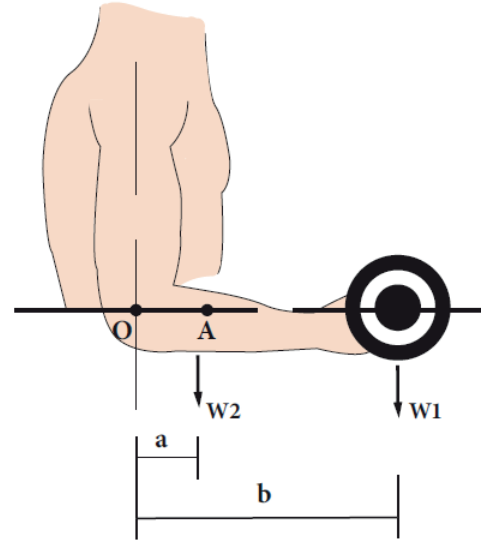


Şekil 3.32 Problem 3.8 ve 3.9

Cevaplar: (a) $M_o = bF - aW \cos\theta$, (b) $M_o = 69,6\text{ Nm}$ (saat yönünün tersine)

Problem 3.9 Şekil 3.32 özel bir egzersiz sistemi ile oturma pozisyonunda hamstring kaslarını güçlendirici alt bacak egzersizi yapan

bir sporcu göstermektedir. Egzersiz sistemi ile bacak bükülü pozisyondayken, yüke bağlı silindirik yastık aracılığı ile bacakta bir direnç yaratılmaktadır. O noktası diz eklemi, A noktası alt bacağın ağırlık merkezini, W alt bacağın ağırlığını, θ , bacağın uzun ekseninin yatayla yaptığı açıyı, M_o ise bacağına uygulanan kuvvetin O noktasında oluşturduğu net momenti temsil etmektedir.



Şekil 3.33 Alt kol egzersizi yapan sporcu

- (a) Eğer, $a=0,23$ m, $b=0,45$ m, $\theta=45^\circ$, $W=65$ N, $M_o=86,14$ Nm ise direncin (F) büyüklüğünü belirleyiniz.
- (b) Bacığın aynı pozisyonda olduğu ve direncin 10 N arttırıldığı varsayılırsa O noktasındaki net momenti hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $F=215$ N; (b) $M_o=90,64$ Nm

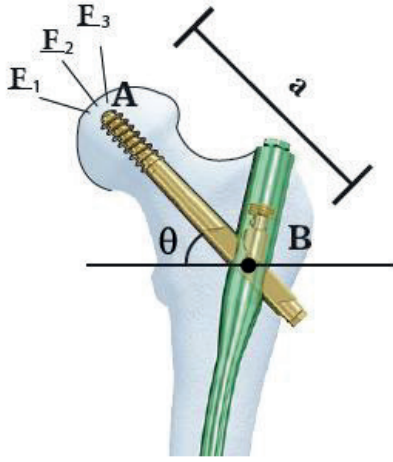
Problem 3.10 Şekil 3.33'te gösterildiği gibi, bir sporcunun biceps kaslarını geliştirmek için alt kol esneme/germe egzersizleri yaptığı varsayılmaktadır. Sporcu, $W_1 = 150$ N'luk bir ağırlığı elinde tutmaktadır. Alt kolunun ağırlığı $W_2 = 20$ N'dur. Dirsek eklemindeki O noktasından ölçüldüğünde, alt kolun ağırlık merkezi (A noktası), $a = 7,5$ cm, sporcunun elinde bulunan yükün ağırlık merkezi ise $b = 32$ cm uzaklıkta yer almaktadır.

Alt kol yatay olarak uzatıldığında ve alt kolun uzun eksenini sırasıyla $f = 30^\circ$ ve $f = 60^\circ$ açı yaptığında dirsek ekleminde oluşan net momenti hesaplayınız.

Cevaplar: $M_{net}(f = 0^\circ) = 49,5$ Nm; $M_{net}(f = 30^\circ) = 42,9$ Nm; $M_{net}(f = 60^\circ) = 24,8$ Nm.

Problem 3.11 Şekil 3.34 materyal dayanıklılığının testi için tasarlanmış deney düzeneğini göstermektedir. Çizilen durumda, sıklıkla femur başı kırığını sabitlemek için kullanılan intertorakanterik çivi sıkı bir şekilde düzeneğe tutturulmuştur. Çivinin merkezden uzak kolu (BC) dikey olarak ayarlanmıştır. Çivinin merkeze yakın olan kolunun (AB) uzunluğu a 'dır ve yatay eksenle θ açısı yapmaktadır.

Şekil 3.34'te gösterildiği gibi, intertrokanterik çivi F_1 (yatay, sağa doğru), F_2 (AB ile aynı düzlemde, A'ya doğru), F_3 (dikey, aşağı yönlü) kuvvetleri uygulanarak üç teste tabi tutulmuştur. Bu üç kuvvet neticesinde her bir kuvvet için B noktasında oluşan momenti, kuvvet büyüklüğü ve a ve θ geometrik parametrelerini içerecek şekilde bulunuz.



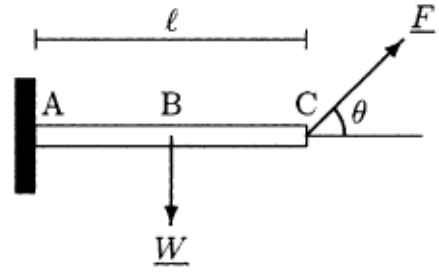
Şekil 3.34 Deney düzeneği

Cevaplar: $M_1 = aF_1 \sin\theta$ (saat yönünde), $M_2 = 0$, $M_3 = aF_3 \cos\theta$ (saat yönünün tersine)

Problem 3.12 Şekil 3.35'te gösterilen basit yapı, mühendislikteki temel mekanik elementlerden biri olan ankastre kiriş olarak adlandırılmaktadır ve ankastre kiriş bir uçtan sabitlenmiş diğer uçtan ise serbest haldedir. Şekil 3.35'te sabit ve serbest uçlar sırasıyla A ve C noktaları olarak gösterilmiştir. B noktası ise, kirişin ağırlık merkezini göstermektedir.

Kirişin ağırlığı $W = 100$ N ve uzunluğu $l = 1$ m'dir. Büyüklüğü $F = 150$ N olan bir kuvvet, kirişin serbest ucu yatay düzlem ile $\theta = 45^\circ$ olacak şekilde uygulanmaktadır.

Kirişin sabit ucunda oluşan net momentin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

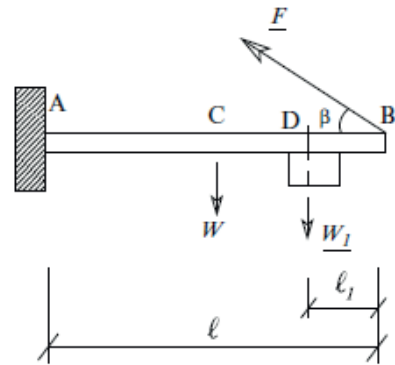


Şekil 3.35 Ankastre kiriş

Cevap: $M_A = 56$ Nm (saat yönünün tersine)

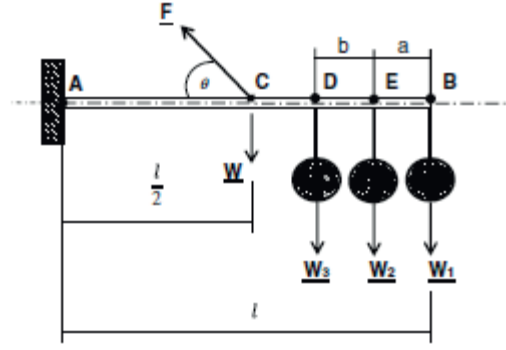
Problem 3.13 Şekil 3.36'da gösterildiği üzere, kütlesi 9 kg olan bir kolon kiriş yapısı ele alınmaktadır. Kiriş duvara A ve B noktalarından sabitlenmiştir. Kirişin boyu $l = 4$ m'dir. C noktası kirişin ağırlık merkezidir. $W_1 = 50$ N olan bir ağırlık kirişin serbest ucuna eklenmiştir ve ağırlık merkezi $l = 35$ cm'de yer almaktadır. Büyüklüğü $F = 180$ N olan bir kuvvet kirişin serbest ucuna kirişi sabit tutmak için uygulanmaktadır. Kuvvetin hareket hattı yatay düzlem ile $\beta = 35^\circ$ açı yapmaktadır.

A noktasında oluşan net momentin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

Şekil 3.36 Serbest ucunda W_1 ağırlığı olan ankastre kiriş

Cevap: $M_{\text{net}} = 54,1$ Nm (saat yönünün tersine)

Problem 3.14 Şekil 3.37’de gösterildiği gibi birbiriyle aynı 3 küre şeklinde kablo ile bağlanmış elektrikli aksesuarlar birbirinden eşit uzaklıkta ($a=b$) ve kirişin serbest ucunda bulunmaktadır. Kiriş A noktasından duvara tutturulmuştur. B noktası ise kirişin serbest ucunu göstermektedir. Aynı zamanda ilk elektrikli aksesuarın kirişe bağlandığı yeri de temsil etmektedir. D ve E noktaları ise 2. ve 3. aksesuarların bağlanma noktasını göstermektedir. C noktası, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olup, kirişin ağırlık merkezini temsil etmektedir. Kirişin ağırlığı $W=150$ N, elektrikli aksesuarların ağırlığı ise $W_1= W_2= W_3=49$ N’dur. Kirişi yerinde tutmak için D noktasından kirişe uygulanan kuvvet $F=203$ N’dur ve bu kuvvetin etki çizgisi yatayla θ açısı yapmaktadır.



Şekil 3.37 Problem 3.14

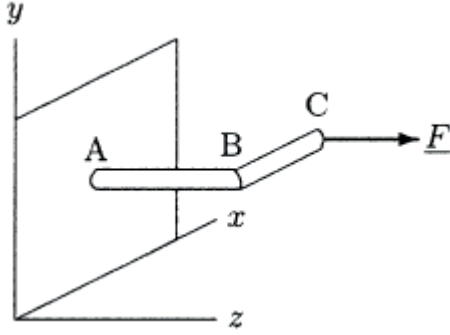
Cevaplar: (a) $l=3$ m; (b) $M_{\text{net}}= 296.9$ Nm; (c) $M_{\text{net}}= 309.7$ Nm; (d) $M_{\text{net}}= 192.5$ Nm

Problem 3.15 Şekil 3.37’de görüldüğü gibi L şeklinde bir kiriş ele alındığında, Kiriş A noktasından duvara sabitlenmiş, AB kolu z eksenini yönünde, BC kolu x eksenini yönünde uzanmaktadır. \underline{F} kuvveti z eksenini yönünde kirişin serbest ucundan uygulanmaktadır. AB ve BC kollarının uzunlukları sırasıyla a ve b ise, uygulanan kuvvetin büyüklüğü F ise, \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} ’nın sırasıyla x, y ve z yönlerini gösterdiği durumda, C noktasının A noktasına göre konum vektörünün $\underline{r} = b\underline{i} + a\underline{k}$ olarak ve kuvvet vektörünün $\underline{F} = F\underline{k}$ olarak ifade edilebileceğini gösteriniz.

(a) Konum ve kuvvet vektörlerinin vektörel çarpımlarını kullanarak A noktasında \underline{F} ile oluşturulan momenti a, b ve F cinsinden belirleyiniz.

(b) Eğer $a = b = 30$ cm ve $F = 20$ N ise, A noktasında \underline{F} ile oluşturulan momentin büyüklüğünü hesaplayınız.

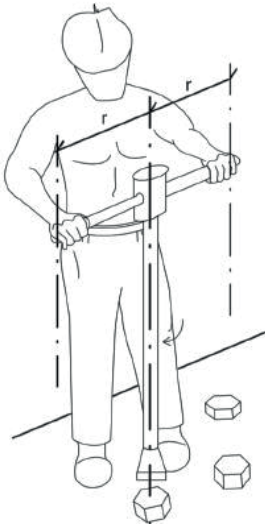
- (a) $a = b = 0.5$ m, $\theta=45^\circ$ ve A noktasındaki net moment $M_{\text{net}}=267.2$ Nm ise kirişin uzunluğunu (l) belirleyiniz.
- (b) Kirişin uzunluğu 50 cm arttırıldığında A noktasındaki net momenti hesaplayınız.
- (c) \underline{F} kuvvetinin büyüklüğü 30 N arttırılır ve kirişin uzunluğu $l=3$ m olursa, A noktasında oluşan net momenti hesaplayınız.
- (d) Kirişin uzunluğu $l=3$ m ve \underline{F} kuvveti kirişin uzun eksenine dik olarak uygulandığında A noktasında oluşan net momenti hesaplayınız.



Şekil 3.38 Problem 3.15

Cevaplar: (a) $\underline{M}_A = -bF\mathbf{j}$; (b) $\underline{M}_A = 6 \text{ Nm}$.

Problem 3.16 Şekil 3.38’de gösterildiği gibi, cıvataları sıkmak için özel bir lokma anahtar kullanan bir işçi olduğu ele alınmaktadır. Lokma anahtarın uzun ekseninde meydana gelen çift momenti $M_c=100 \text{ Nm}$, lokma anahtarın tutacağı ile uzun eksenindeki mesafe $r= 25 \text{ cm}$ ’dir. Lokma anahtarın tutacağına işçi tarafından uygulanan kuvveti belirleyiniz.



Şekil 3.39 Özel lokma anahtarı kullanan işçi

Cevap: $F= 200\text{N}$

Bölüm 4

STATİK: DENGEDEKİ SİSTEMLER

Çeviren: Pelin Coşkun

- 4.1 Genel Bakış**
- 4.2 Newton'un Mekanik Yasaları**
- 4.3 Denge Koşulları**
- 4.4 Serbest Cisim Diyagramları**
- 4.5 Dengedeki Sistemlerin Analiz Yöntemleri**
- 4.6 Denge Denklemlerini ile Alakalı Notlar**
- 4.7 Kısıtlar ve Tepkiler**
- 4.8 Basit Destekli Yapılar**
- 4.9 Kablo Makara Sistemleri ve Traksiyon Cihazları**
- 4.10 Ankastre Yapılar**
- 4.11 Sürtünmeli Sistemler**
- 4.12 Ağırlık Merkezi Belirleme**
- 4.13 Örnek Problemler**

4.1 Genel Bakış

Statik, dengedeki katı cisimlerin analiziyle ilgilenen, uygulamalı mekaniğin alanıdır. Mekanikte *denge* terimi, ilgilenilen cismin durağan olduğu ya da sabit bir hızda hareket ettiği anlamına gelir. *Rijit cisim*, dışardan uygulanan kuvvetlerin etkisiyle cismin herhangi bir deformasyona uğramadığı varsayılan bir olgudur. Gerçek hayatta rijit malzeme yoktur ve bu kavramsal bir yaklaşımdır. Bazı uygulamalarda oluşan deformasyon o kadar küçüktür ki istenilen analize hiçbir etkisi olmayacaktır. Bu gibi durumlarda malzemeler rijit olarak sayılabilir.

Statik alanı, dengedeki rijit cisimlerin analizlerini ele almasına rağmen, deformasyon özellikleri ve malzemenin mukavemetinin de statik analizle başladığı da unutulmamalıdır. Bu bölümde statikğin temelleri tanıtılacak ve bu temellerin nispeten basit sistemlere uygulanması sağlanacaktır. Bölüm 5'te aynı temellerin insan vücudunun ana eklemleri ve etrafında yer alan kuvvetlerin analiz edilme uygulamaları gösterilecektir.

4.2 Newton'un Mekanik Yasaları

Bütün mekanik temeller Sir Isaac Newton'un belirlediği yasalar üzerine kuruludur. *Newton'un ilk yasa*, atalet kanunu, bir cisim başlangıçta durağan haldeyken veya düz bir çizgi üzerinde sabit hızda hareket ederken,

cisim üzerinde sıfır olmayan harici bir bileşke kuvveti olmadıkça hareketini sürdüreceğini belirtmektedir. Newton'un ilk yasa, ikinci yasa ile birlikte ele alınmalıdır.

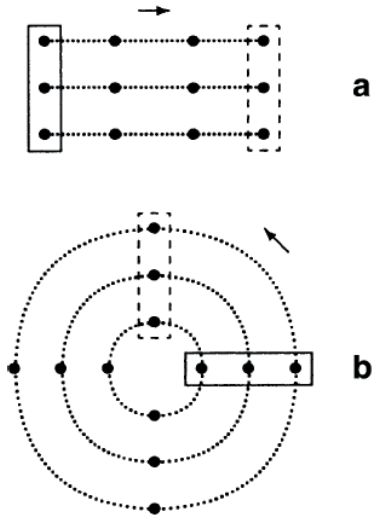
Newton'un ikinci yasa, ivme kanunu, bir cisim üzerine etki eden net veya bileşke kuvvetin sıfır olmaması durumunda, cismin bileşke kuvvet yönünde ivmeleneceğini belirtmektedir. Dahası, cismin ivmesinin büyüklüğü, cisme etki eden net kuvvetin büyüklüğü ile doğru orantılı ve onun kütlesi ile ters orantılı olacaktır. Newton'un ikinci yasa aşağıdaki gibi formüle edilmektedir;

$$\underline{F} = m \underline{a} \quad (4.1)$$

Bu denklem *hareket denklemi* olarak da bilinir. Denklem 4.1'de \underline{F} net ya da bileşke kuvvet, m cismin kütlesi, \underline{a} cismin ivmesidir. Kuvvet ve ivmenin vektörel, kütlenin ise skaler büyüklük olduğunu unutmamak gerekir. Kütle bir cismin ataletinin niceliksel ölçümüdür. *Atalet*, bir cismin durağan durumunu veya düz çizgi üzerindeki düzgün hareketini devam ettirme eğilimi olarak tanımlanır. Aynı zamanda bir cismin hareketindeki değişime karşı gösterdiği direnç olarak da tanımlanabilir. Bir cismin ataleti ne kadar büyükse, durağan halden hareket ettirmeye başlamak, hareketini değiştirmek veya hareket yönünü değiştirmek o kadar zor olur.

Denklem 4.1 düz bir yol boyunca olan translasyonel veya doğrusal hareket analizleri için geçerlidir. Bir cismin tüm parçaları aynı

mesafeyi aynı zamanda ve aynı yönde giderse Şekil 4.1a'da gösterildiği gibi *doğrusal hareket* oluşur. Doğrusal hareketin tipik bir örneği, bir asansörün gövdede dikey hareketidir.



Şekil 4.1 (a) Doğrusal hareket ve (b) açısall hareket

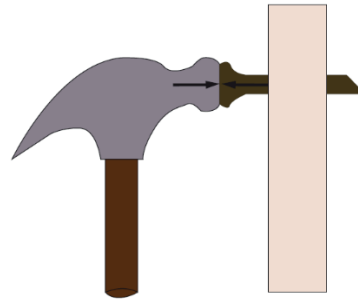
Denklem 4.1 Newton'un ikinci yasasını formüle etmenin tek yoludur, aynı zamanda alternatif olarak Newton'un ikinci yasasının dairesel veya açısall hareketinin formüle edilmiş hali:

$$\underline{M} = I \underline{\alpha} \quad (4.2)$$

Denklem 4.2'de M cisme etkileyen net moment ya da tork, I cismin *kütle momentinin ataleti*, α 'da açısall ivmedir. Şekil 4.1b'de gösterildiği gibi *açısall hareket*, cisim dairesel bir yoldan, cismin tüm parçaları aynı yönde aynı açıda aynı anda hareket ettiğinde meydana gelir. Bu kavramlar dinamik analizi kapsayan daha sonraki bölümlerde ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

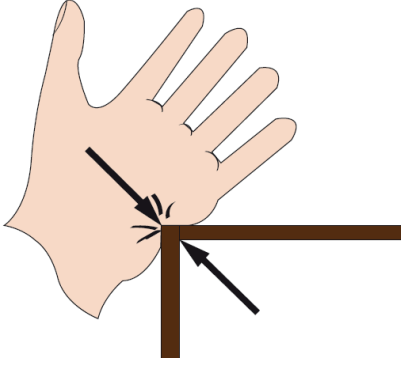
Newton'un üçüncü yasası, etki-tepki yasası, kuvvetle ilgilenildiğinde kuvvetin her zaman iki yönü olduğu gözlemine dayanmaktadır. Bir nesneye uygulanan bir kuvvet her zaman başka bir nesne tarafından uygulanır. Bir işçi bir arabayı iterken, bir çocuk bir arabayı çekerken ve bir çekiç bir çiviye çarparken, kuvvet bir cisim tarafından bir cisme uygulanır. İki cisim temas halindeyse ve cisim 1 cisim 2 üzerine bir kuvvet uyguluyorsa, Newton'un üçüncü yasası, cisim 2'nin, cismin 1 üzerine aynı hareket doğrultusunda zıt yönlü, eşit büyüklükte bir kuvvet uygulayacağını belirtir.

Örneğin çekiç çivi durumunu (Şekil 4.2) değerlendirelim. Duvara yerleştirmek için çekiç çiviye bir kuvvet uygular. Bu kuvvet sonucunda çivinin çekice geri uyguladığı kuvvet her çekiç darbesi sonucunda çekicinin durmasına sebep olur.



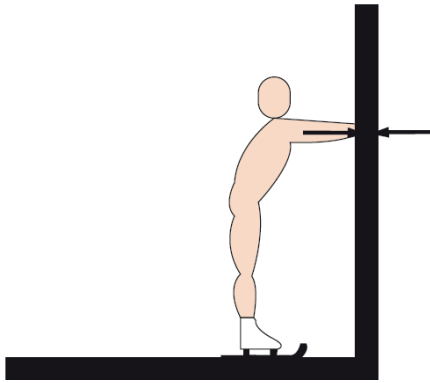
Şekil 4.2 Çekiçle vurma

Elinizi masanın kenarına bastırırsanız elinizin şeklinin değiştiğini görürsünüz ve masanın elinize uyguladığı kuvveti de hissedersiniz (Şekil 4.3). Masaya elinizi ne kadar sert bastırırsanız masa da elinizi o kadar sert geri iter.



Şekil 4.3 Ne kadar sert bastırırsanız o kadar sert geri bastırılırsınız

Belki de Newton'un üçüncü yasasını açıklayan en iyi örnek paten yapan birinin duvarı itmesidir (Şekil 4.4). Duvarı iterek patenci geriye doğru hareket edebilir. Patenli kişi duvarı ittikçe duvarın kişiye uyguladığı kuvvet patenli kişiyi geriye doğru harekete geçirir. Duvar tarafından patenciye uygulanan kuvvet, patencinin hareketine neden olan kuvvettir.



Şekil 4.4 Buz patenci

Newton'un üçüncü yasası, "Her etkiye karşılık eşit ve zıt bir tepki vardır" şeklinde özetlenebilir. Bu yasa eğer etkileşim halinde farklı cisimler varsa özellikle mekanik ve biyomekanikte karmaşık problemleri analiz etmede yararlıdır.

4.3 Denge Koşulları

Denklem (4.1) ve (4.2)'de formüle edilen Newton'un ikinci yasasına göre; translasyonel veya rotasyon hareketine maruz kalan bir cisme etki eden net kuvvet veya net moment sıfır olmazsa doğrusal veya açısal ivmelere sahip olacaktır. Eğer net kuvvet ya da net moment sıfırsa cismin ivmesi de (lineer ya da açısal) sıfırdır ve sonuç olarak cismin hızı (lineer ya da açısal) sabit ya da sıfırdır. İvmenin sıfır olduğu durumlarda cismin *denge* durumunda olduğu söylenebilir. Eğer hız da sıfır ise cisim *statik denge* durumunda ya da *durağan* durumda denir.

Bu sebeple, denge durumu araştırılırken iki durumun sağlandığından emin olunmalıdır. Eğer cisim *translasyonel dengesi* durumunda ise cisim üzerine etkiyen net kuvvet (tüm kuvvetlerin vektörel toplamı) sıfırdır.

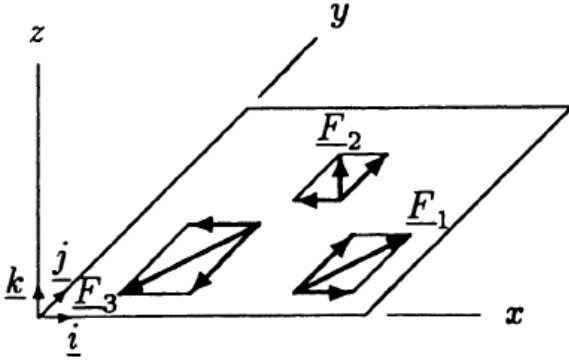
$$\sum \underline{F} = 0 \quad (4.3)$$

Eğer cisim *rotasyonel dengesi* durumunda ise cismin üzerindeki net moment (tüm momentlerin vektörel toplamı) sıfırdır.

$$\sum \underline{M} = 0 \quad (4.4)$$

Bir cisme etki eden birçok kuvvetin olabileceği unutulmamalıdır. Örneğin, Şekil 4.5'deki eş düzlem kuvvet sistemi incelendiğinde xy düzlemindeki bir cisim üzerinde üç kuvvetin etki ettiğini görülmektedir. Bu kuvvetler x ve y yönlerindeki bileşenleri ile ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}\underline{F}_1 &= F_{1x} \underline{i} + F_{1y} \underline{j} \\ \underline{F}_2 &= -F_{2x} \underline{i} + F_{2y} \underline{j} \\ \underline{F}_3 &= -F_{3x} \underline{i} + F_{3y} \underline{j}\end{aligned}\quad (4.5)$$



Şekil 4.5 Eş düzlemlili kuvvet sistemi

Denklem (4.5)'de \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , \underline{F}_3 kuvvetlerinin x yönündeki skaler bileşenleri, F_{1x} , F_{2x} ve F_{3x} , y yönündeki skaler bileşenleri F_{1y} , F_{2y} ve F_{3y} 'dir. i ve j pozitif x ve y yönlerini gösteren birim vektörlerdir. Bu denklemler, tüm kuvvetlerin x ve y bileşenleri bir araya getirilerek Denklem (4.3)'de yerine yazılırsa;

$$\sum \underline{F} = (F_{1x} - F_{2x} - F_{3x})\underline{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\underline{j} = 0$$

Bu denge durumunu korumak için her grup ayrı olarak sıfıra eşit olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned}F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

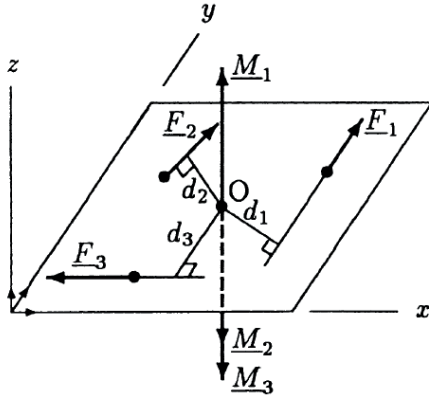
Başka bir deyişle, bir cismin translasyonel dengesinde olması için, x ve y doğrultusunda etki eden net kuvvet sıfıra eşit olmalıdır. Üç boyutlu kuvvet sistemlerinde z yönündeki net kuvvet de sıfıra eşit olmalıdır. Bu sonuçlar şu şekilde özetlenebilir.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Dikkat! Denklem (4.7)'de verilen denge koşulları skaler formdadır ve doğru bir şekilde ele alınmalıdır. Örneğin, x yönünde translasyonel dengesi koşulunu uygularken, pozitif x doğrultusunda etki eden kuvvetler birlikte eklenmeli ve negatif x doğrultusunda etki eden kuvvetler çıkarılmalıdır.

Daha önce belirtildiği gibi, bir cismin dengede olabilmesi için hem translasyonel hem de rotasyonel dengesinde olması gerekir. Bir cismin rotasyonel dengesinde olabilmesi için, her noktada net momentin sıfır olması gerekir. Şekil 4.6'da gösterilen eş düzlem kuvvet sistemini göz önüne alalım. Bu kuvvetlerin xy düzlemindeki bir cisim üzerinde hareket ettiğini varsayalım. d_1 , d_2 ve d_3 , O noktasına göre F_1 , F_2 ve F_3 kuvvetlerinin moment kolları olsun. Dolayısıyla, bu kuvvetlerin O noktasındaki momentleri:

$$\begin{aligned}\underline{M}_1 &= d_1 F_1 \underline{k} \\ \underline{M}_2 &= -d_2 F_2 \underline{k} \\ \underline{M}_3 &= -d_3 F_3 \underline{k}\end{aligned}\quad (4.8)$$



Şekil 4.6 Eş düzlem kuvvetlerin oluşturduğu momentler

Denklem (4.8)'de \underline{k} pozitif z yönünü belirten birim vektördür. Moment \underline{M}_1 pozitif z yönünde etkirken, \underline{M}_2 ve \underline{M}_3 negatif z yönünde etkimektedir. Denklem (4.4)'deki rotasyonel dengesi durumunu sağlamak için denklem (4.8) aşağıdaki şekilde toparlanabilir:

$$\sum \underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = (d_1 F_1 - d_2 F_2 - d_3 F_3) \underline{k} = 0$$

Dengeyi sağlayabilmek için,

$$d_1 F_1 - d_2 F_2 - d_3 F_3 = 0 \quad (4.9)$$

Yani, bu durumda, z yönündeki bileşke moment sıfır olmalıdır. Eş düzlem sistem yerine üç boyutlu kuvvet sistemimiz olursa x ve y yönlerinde de moment oluşur. Rotasyonel dengesi durumunu sağlamak için x ve y yönlerindeki net moment de sıfır olmalıdır. Üç boyutlu sistemler için:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dikkat! Rotasyonel dengesi koşulları denklem (4.10)'da skaler formdadır ve doğru şekilde ele alınmalıdır. Örneğin, z yönünde rotasyonel denge koşulunu uygularken, pozitif z doğrultusunda etki eden momentler birlikte eklenmeli ve negatif z doğrultusunda etki eden momentler çıkarılmalıdır.

Şekil 4.6'da gösterilen eş düzlem kuvvet sistemindeki momentler alternatif olarak şu şekilde ifade edilebileceği unutulmamalıdır:

$$M_1 = d_1 F_1 \text{ (saat yönünün tersine)}$$

$$M_2 = d_2 F_2 \text{ (saat yönünde)} \quad (4.11)$$

$$M_3 = d_3 F_3 \text{ (saat yönünde)}$$

Başka bir deyişle, xy düzlemine göre momentler saat yönünde veya saat yönünün tersi yönündedir. Pozitif yönün saat yönünde veya saat yönünün tersine seçilmesine bağlı olarak, momentlerin bazıları pozitif, bazıları negatif olur. Saat yönünün tersi yönündeki momentleri pozitif olarak düşünürsek, O noktası etrafındaki rotasyonel denge yine denklem (4.9)'daki gibi elde edilir:

$$d_1 F_1 - d_2 F_2 - d_3 F_3 = 0$$

4.4 Serbest Cisim Diyagramları

Serbest cisim diyagramları sistemin her bir parçasına ayrı ayrı etkiyen kuvvet ve momentleri doğru bir şekilde tespit etmek ve statik denklemlerin doğru kullanıldığından

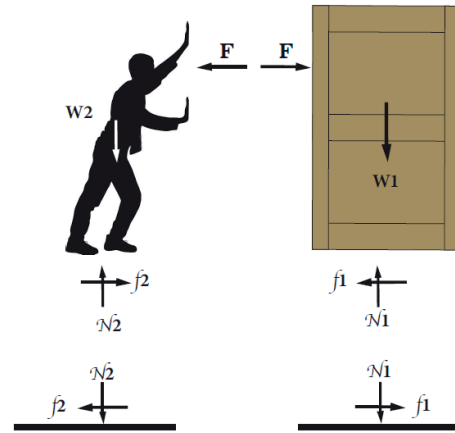
emin olmak adına oluşturulur. Bu amaçla sistemi oluşturan parçalar çevrelerinden ayrıştırılır ve çevrelerinin oluşturduğu etki uygun kuvvet ve momentler ile değiştirilir. Serbest cisim diyagramında bilinen ve bilinmeyen bütün kuvvetler gösterilir. Bir kuvvetin büyüklüğü veya yönü bilinmiyorsa o kuvvet bilinmiyordur. Bilinen kuvvetler için doğru yönleri göstermeliyiz. Eğer kuvvetin yönü bilinmiyorsa, bunu tahmin etmeye çalışırız. Tahminimiz doğru olabilir ya da olmayabilir. Kuvvetin doğru yönü, statik analizin sonucunda ortaya çıkar.

Örneğin, bir kişinin dosya dolabını yatay yüzeyde sağa doğru itmeye çalıştığını düşünün (Şekil 4.7). Bu sistemi oluşturan üç parça vardır; kişi, dosya dolabı ve zemini temsil eden yatay yüzey. Bu parçaların serbest cisim diyagramları Şekil 4.8'de gösterilmektedir. F , dosya dolabını sağa kaydırmak için kişi tarafından dosya dolabında uygulanan yatay kuvvetin büyüklüğüdür. Etki ve tepki kuvvetlerinin büyüklükleri eşit olacağı için, dosya dolabının kişiye uyguladığı kuvvet de F 'dir. Etki ve tepki kuvvetleri aynı çizgi üzerinde ve zıt yönlerde olduğu için, dosya dolabı kişiyi sola doğru itmektedir. W_1 ve W_2 dosya dolabı ve kişinin ağırlıklarıdır ve her zaman dik ve aşağı yöndedir. N_1 ve N_2 hem yatay yüzeyin kişiye ve dosya dolabına uyguladığı normal kuvvetlerin hem de dosya dolabının ve kişinin yatay yüzeye uyguladığı

kuvvetlerin büyüklükleridir. f_1 ve f_2 dosya dolabı, kişi ve yatay yüzey arasındaki sürtünme kuvvetlerinin büyüklükleridir ve her ikisi de temas halindeki yüzeylere paralel olarak yatay yönde hareket eder. Dosya dolabı sağa doğru hareket etmeye eğilimli olduğu için, dosya dolabındaki f_1 sola doğru hareket eder. Kişi sola hareket etmeye eğilimli olduğu için, f_2 sağa doğru hareket eder ve kişinin dosya dolabını hareket ettirebilmesinin itici kuvvetidir.



Şekil 4.7 Dosya dolabını iten kişi



Şekil 4.8 Serbest cisim diyagramı

Birçok uygulama için, sistemi oluşturan her bir parçanın yalnızca birkaçının serbest cisim diyagramlarını dikkate almak yeterlidir. Şekil

4.7 ve 4.8’de gösterilen örnek için, dosya dolabının serbest cisim diyagramı daha fazla analiz yapmak için yeterli ayrıntı sağlamaktadır.

4.5 Dengedeki Sistemlerin Analiz Yöntemleri

Dengedeki rijit cisimlere etki eden kuvvetleri ve momentleri analiz etmek için genel süreç aşağıda özetlenmiştir.

- Analiz edilecek sistemin basit ve düzgün bir diyagramını çizin.
- Sistemi oluşturan parçaların serbest cisim diyagramlarını çizin. Bilinen ve bilinmeyen tüm kuvvetleri ve momentleri serbest cisim diyagramlarında gösterin. Bilinen kuvvetlerin ve momentlerin yönünü doğru belirtin. Eğer kuvvetin ya da momentin yönü bilinmiyorsa yönünü serbest cisim diyagramında doğru tahmin etmeye çalışın ve analizin ortasında değiştirmeyin. Bilinmeyen kuvvetin ya da momentin yönü analizin sonunda ortaya çıkacaktır. Örneğin, bilinmeyen kuvvetler için çözümde çıkan pozitif sayısal değer yönün doğru çıktığını gösterir. Diğer yandan, negatif çıkan sayısal değer tahmin edilen yönün tersi yönünün doğru olduğunu gösterir. Bu durumda, kuvvet büyüklüğü pozitive çevrilmeli, doğru kuvvet birimi belirtilmeli ve doğru yön çözümde tanımlanmalıdır.
- Uygun koordinat sistemini benimseyin. Eğer dikdörtgen koordinat sistemi (x,y,z) kullanılacaksa serbest cisim diyagramı için koordinat eksenleri tek bir sistem halinde farklı şekilde yönlendirebilir. Koordinat eksenlerinin iyi yönlendirilmesi analizi kolaylaştırmaya yardımcı olur. Bütün kuvvetleri ve momentleri bileşenlerine ayırın ve bu bileşenleri gösterin.
- Her bir serbest cisim diyagramı için translasyonel ve rotasyonel denge koşullarını uygulayın. Üç boyutlu problemler için kullanılabilir denklemler sayısı altıdır (üç translasyonel ve üç dönme):

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_z = 0$$

xy düzlemindeki iki boyutlu kuvvet sistemleri için kullanılabilir denklemler sayısı üçtür (iki translasyonel ve bir dönme, diğer üç denklemler otomatik olarak sağlanır):

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

- Bu denklemleri aynı anda bilinmeyenler için çözün. Çözümde kuvvetlerin ve momentlerin doğru yönlerini ve birimlerini ekleyin.

4.6 Denge Denklemleri ile Alakalı Notlar

- Yukarıda verilen denge denklemlerinin "skaler" formda olduğunu ve ilgili kuvvetlerin ve momentlerin yönlerinin hesaba katılmadığını unutmayın. Bu nedenle, örnek olarak x yönünde translasyonel dengesi koşulunu uygularken bir kuvvet pozitif x yönünde hareket ediyorsa pozitif, negatif x yönünde hareket ediyorsa negatif bir kuvvet olduğunu varsayın. Bu kuralı bütün yönler ve momentler için uygulayın.
- Eş düzlem kuvvet sistemleri için rotasyonel denge koşulunu uygularken bütün momentlerin hesaplanabileceği uygun bir nokta seçin. Bu noktanın seçimi isteğe bağlıdır, ancak iyi bir seçim hesaplamaları kolaylaştıracaktır.
- Bazı problemler için kullanılabilir bütün denge koşulu denklemlerine ihtiyacınız olmayabilir. Örneğin, eğer x yönünde hiç kuvvet yoksa x yönü için olan translasyonel denklem koşulları otomatik olarak sağlanır.
- Bazen rotasyonel denge koşullarını birden fazla kez uygulamak uygundur. Örneğin, xy düzlemindeki eş düzlem kuvvet sisteminde, z yönünde rotasyonel denge koşulları, kuvvetlerin momentlerinin iki farklı noktada olduğu düşünülerek iki kez uygulanabilir. Böyle durumlarda üçüncü bağımsız translasyonel denge koşulu ya x ya da y yönündedir. Rotasyonel denge koşulu bir problemde üç kez uygulanabilir. Ancak

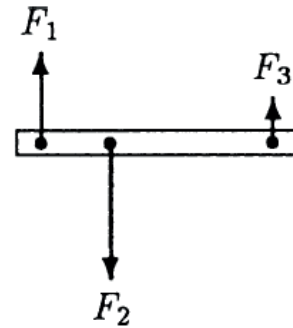
hesaplanacak momentler üç noktada aynı çizgi üzerinde olmamalıdır.

- *Çift-kuvvet sistemleri:* Eğer bir cisme etkiyen sadece iki kuvvet varsa cismin dengede olması sadece ve sadece bu kuvvetler eşdoğrultulu, eşit büyüklükte ve zıt yönde olur (Şekil 4.9).



Şekil 4.9 Eşdoğrultulu, çift-kuvvet sistemi

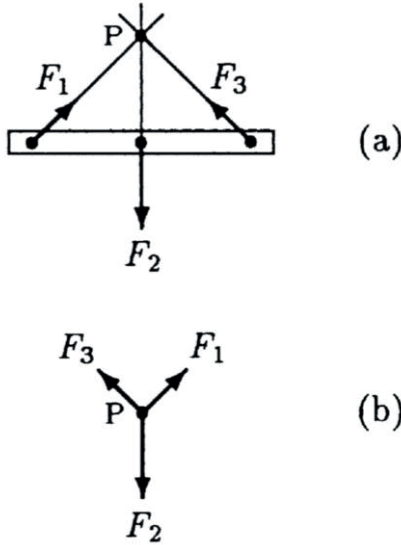
- *Üç-kuvvet sistemleri:* Bir cisme etkiyen sadece üç kuvvet varsa ve cisim dengedeysen, kuvvetler ya paralel ya da kesişen kuvvetler sistemi şeklindedir. Ayrıca, iki durum için de kuvvetler eş düzlem kuvvet sistemi oluşturur. Paralel üç-kuvvet sistemi Şekil 4.10'da gösterilmiştir. Eğer bir cisim üzerinde etkili üç kuvvetten ikisi birbirine paralelse ve cisim dengedeysen, o zaman üçüncü kuvvetin diğer ikisine paralel olduğunu ve bilinmeyen kuvvetin etki çizgisini oluşturduğunu varsayabiliriz.



Şekil 4.10 Paralel, üç kuvvet sistemi

Kesişen üç kuvvet sistemi Şekil 4.11'de gösterilmiştir. Bu durumda, kuvvetlerin hareket eksenlerinin ortak bir kesişim noktası

vardır. Denge halindeki bir cisim üzerine etkiyen üç kuvvetten ikisinin etki çizgisi biliniyorsa ve paralel değillerse, üçüncü kuvvetin etki çizgisi, ilk iki kuvvetin etki çizgilerinin bilinmeyen kuvvetin uygulandığı kesişim noktasına birleşene kadar düz bir çizgi halinde uzatılmalarıyla bulunabilir. Böylece elde edilen düz çizgi bilinmeyen kuvvetin etki çizgisini temsil edecektir. Kesişen bir kuvvet sistemini analiz etmek için sistemi oluşturan kuvvetler, hareket çizgileri boyunca kesişim noktasına kadar çekilebilir (Şekil 4.11b). Kuvvetler iki dik yön boyunca bileşenlerine ayrılabilir ve bilinmeyenleri belirlemek için translasyonel dengesi koşulları kullanılabilir. Bu tür durumlarda rotasyonel denge koşulları otomatik olarak sağlanır.



Şekil 4.11 Kesişen üç kuvvet sistemi

- *Statik olarak belirli ve statik olarak belirsiz sistemler:* Statikte iki boyutlu problemler için kullanılabilir üç tane denge denklemi vardır. Bu yüzden denklemlerden belirlenecek olan maksimum bilinmeyen sayısı (kuvvetler

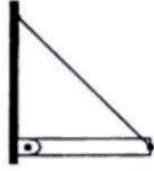
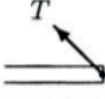

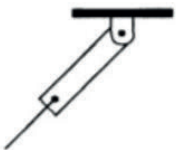
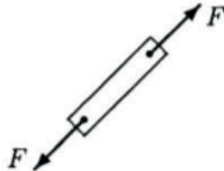

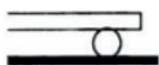
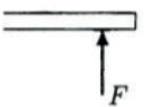

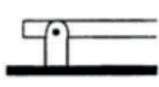
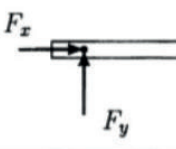

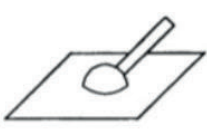
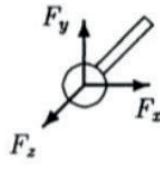

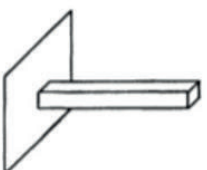
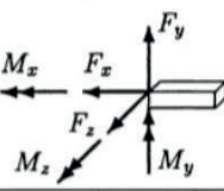

ve/veya momentler) üç ile sınırlıdır. İki boyutlu problemler için eğer üç ya da daha az bilinmeyen varsa, problem *statik olarak belirlidir*. Eğer bilinmeyen sayısı üçü aşıyorsa o zaman problem *statik olarak belirsizdir*. Bu durum, statik yoluyla aldığımız bilgilerin problemi tam olarak çözmek için yeterli olmadığını ve ek bilgilere ihtiyacımız olduğunu gösterir. Genellikle ek bilgiler, sistemi oluşturan parçaların malzeme karakterinden ve özelliklerinden gelir. Bu görüşün üç boyutlu problemler için uzantısı basittir. Altı tane denge denklemi bulunduğundan, tespit edilebilecek maksimum bilinmeyen sayısı altı ile sınırlıdır.

4.7 Kısıtlar ve Tepkiler

Kuvvetleri sınıflandırmanın bir yolu, onların aktif ya da tepki kuvvetleri olduklarını söylemektir. Aktif kuvvetler harici olarak uygulanan yükleri ve yerçekimi kuvvetlerini içerir. Bir cisme etki eden kısıtlayıcı kuvvetlere ve momentlere *teпки* denir. Genellikle tepkiler bilinmez ve denge denklemleri uygulanarak belirlenir.

Tepki kuvvetleri ve momentleri, zemin, silindirler, takozlar ve bıçak kenarları gibi destek elemanları, kablolar, mil ve menteşeler gibi bağlantı elemanları tarafından uygulanan kuvvetlerdir. Tablo 4.1'de özetlenen bu destekleyici ve bağlayıcı elemanların ortak özelliklerinin bilinmesi, serbest cisim diyagramlarının çizilmesine ve belirli problemlerin çözülmesine yardımcı olacaktır.

Tablo 4.1 Genellikle karşılaşılan mesnetler, bağlantılar, bağlantı elemanları ve bunların özellikleri.

Mesnet çeşidi veya bağlantı	Mesnet çeşidi veya bağlantı	Serbest çizim diyagramı için gösterim	Biyomekanik örnekler	Bilinmeyenler
Esnek elemanlar (Kablo, ip)			Kaslar, ligamentler 	Kablo ya da kastaki gerilimin büyüklüğü
İki kuvvetli elemanlar			Kaslar 	Kuvvet büyüklüğü
Makara ve diğer basit mesnetler (sürtünmesiz)			Kemik-kemik bağlantı 	Kuvvet büyüklüğü
Menteşe ya da pim bağlantısı			Dirsek 	Kuvvet bileşenlerinin yönü ve büyüklüğü
Küresel mafsalsal			Kalça 	Kuvvetin yönü ve büyüklüğü
Sabitlenmiş, kaynak yapılmış yada ankastre			Kafatası 	Kuvvet ve momentin yönü ve büyüklüğü

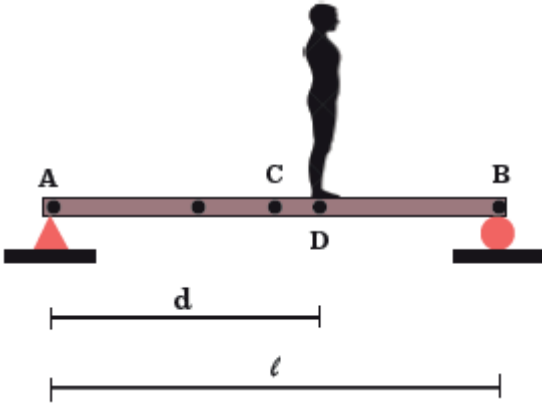
4.8 Basit Destekli Yapılar

Mekanik sistemler çeşitli yollarla birbirine bağlanan bir dizi elemandan oluşur. “Kirişler”, mekaniğin yapı taşlarını oluşturan temel unsurları oluşturur. Diğer yapısal elemanlara ya da zemine silindirler, basit üçgen,

menteşeler, pim bağlantıları, pivotlar veya kablolar vasıtasıyla bağlanan kirişler mekanik bir sistem oluşturur. Denge denklemlerinin kullanımını göstermek için ilk olarak bu gibi durumların nispeten basit örneklerini inceleyeceğiz.

Örnek 4.1 Şekil 4.12'de gösterildiği gibi, sürtünmesiz basit üçgen ve silindir destekleri üzerinde duran düzgün, yatay bir kiriş üzerinde duran bir kişi düşünün. A ve B, basit üçgen ve silindir mesnetlerin kiriş ile temas ettiği iki nokta olsun, C kirişin ağırlık merkezi ve D ise direk olarak kişinin ağırlık merkezinin altındaki noktadır. Kiriş uzunluğunun (A ve B arasındaki mesafe) $l = 5$ m olduğunu, A ve D noktaları arasındaki mesafenin $d = 3$ m olduğunu, kirişin ağırlığının $W_1 = 900$ N olduğunu ve kişinin kütlelerinin $m = 60$ kg olduğunu varsayalım.

Kiriş üzerindeki A ve B noktalarındaki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

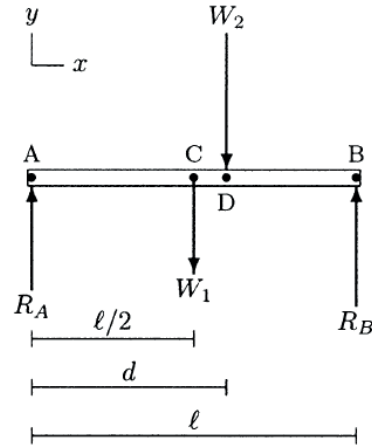


Şekil 4.12 Örnek 4.1

Çözüm

Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 4.13'te gösterilmiştir. Kirişe etki eden kuvvetler, W_1 ve W_2 sırasıyla kirişin ve kişinin ağırlıklarıdır. Kirişin ağırlığının, A ve B'den eşit uzaklıktan uygulanan noktasal bir yük olduğunu

unutmayın. Kirişin ağırlığının büyüklüğü $W_1 = 900$ N olarak verilmiştir. Kişinin kütlesi $m = 60$ kg olarak verilmiştir. Bu nedenle, kişinin ağırlığı $W_2 = mg = 60 \times 9,8 = 588$ N'dir.



Şekil 4.13 Kirişin serbest cisim diyagramı

Ayrıca, kiriş üzerine etki eden bıçak sırtı ve silindirik mesnetlerin reaksiyon kuvvetleri sırasıyla R_A ve R_B 'dir. Yatay bir kirişe, sürtünmesiz basit üçgen ve silindirik mesnetleri sadece dikey yönde kuvvet uygulayabilir. Dahası, bu kuvvetlerin yönü kirişten dışarı değil kirişe doğrudur. Bu nedenle, tepki kuvvetlerinin yönlerini biliyoruz, ancak onların büyüklüklerini bilmiyoruz. Kirişe etki eden kuvvetlerin bir paralel kuvvet sistemi oluşturduğunu unutmayın.

İki bilinmeyen var: R_A ve R_B . Problemin çözümü için, dikey denge koşulunu, A veya B noktası etrafında rotasyonel denge koşulu ile birlikte uygulayabiliriz ya da kirişin A ve B noktaları üzerindeki rotasyonel dengeni dikkate alabiliriz. Burada, ikinci yaklaşımı

kullanacağız ve dikey yönde dengeyi dikkate alarak sonuçları kontrol edeceğiz. Yatay denge durumunun bu yönde etki eden hiçbir kuvvet olmamasından dolayı otomatik olarak karşılandığını unutmayın.

Kirişin A noktasına göre rotasyonel dengeni ele alalım. A noktasına göreceli olarak, R_A moment kolunun uzunluğu sıfırdır, \underline{W}_1 moment kolunun uzunluğu $l/2$, \underline{W}_2 moment kolunun uzunluğu d ve \underline{R}_B moment kolunun uzunluğu l 'dir. Saat yönünde momentlerin pozitif olduğunu varsayarsak, \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 'ye bağlı momentler pozitifken \underline{R}_B 'ye bağlı moment ise negatiftir. Bu nedenle, kirişin A noktasındaki rotasyonel denge için:

$$\sum M_A = 0 : \frac{l}{2}W_1 + dW_2 - lR_B = 0$$

$$R_B = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{2}W_1 + dW_2 \right)$$

$$R_B = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2}900 + 3 * 588 \right) = 802,8 \text{ N } (\uparrow)$$

Şimdi, kirişin B noktasının rotasyonel dengeni ele alalım. B noktasına göreceli olarak, \underline{R}_B moment kolunun uzunluğu sıfırdır, \underline{W}_2 moment kolu $l-d$, \underline{W}_1 moment kolu $l/2$, \underline{R}_A moment kolunun uzunluğu ise l 'dir. Saat yönünde momentlerin pozitif olduğu kabul edilirse, \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 'ye bağlı momentler negatif olurken, \underline{R}_A nedeniyle oluşan moment pozitifdir. Bu nedenle, kirişin B noktasındaki rotasyonel denge için:

$$\sum M_B = 0 : lR_A - \frac{l}{2}W_1 - (l-d)W_2 = 0$$

$$R_A = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{2}W_1 + (l-d)W_2 \right)$$

$$R_A = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2}900 + (5-3)588 \right) = 685,2 \text{ N } (\uparrow)$$

Notlar

- Çözümlerdeki parantez içindeki oklar, kuvvetlerin doğru yönlerini gösterir.
- Bu sonuçları, kirişin dikey yönde dengesini göz önünde bulundurarak kontrol edebiliriz:

$$\sum F_y = 0 : R_A - W_1 - W_2 + R_B = 0$$

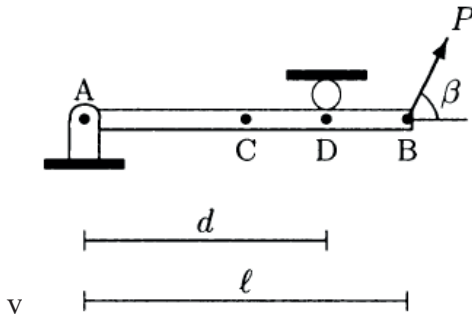
$$685,2 - 900 - 588 + 802,8 = 0$$

- Kullanılan mesnet tipi nedeniyle, bu örnekte analiz edilen kiriş sınırlı bir kullanıma sahiptir. Sürtünmesiz bir basit üçgen, nokta mesnetti, dayanak veya silindir, temas halinde olan yüzeylere yalnızca dik (normal) yönde bir destek sağlayabilir. Bu tür mesnetler, temas yüzeylerine teğet yönünde tepkime kuvvetleri sağlayamaz. Bu nedenle, kirişin uzun eksenini (x) boyunca uygulanan aktif kuvvetler varsa, bu mesnetler kirişin yatay dengesini korumak için gerekli tepki kuvvetlerini sağlayamaz.

Örnek 4.2 Şekil 4.14'de gösterilen düzgün, yatay kiriş A noktasında zemine menteşelenmiştir. Kirişin menteşe mafsalı çevresinde saat yönünün tersine dönmesini sınırlamak için D noktasında kiriş ile tavanın arasına bir sürtünmesiz silindir yerleştirilmiştir.

B noktasından uygulanan kuvvet yatay ile $\beta=60^\circ$ açı yapmaktadır. Uygulanan kuvvetin büyüklüğü $P = 1000 \text{ N}$ 'dur. C noktası kirişin ağırlık merkezini göstermektedir. A ve B noktaları arasındaki mesafe $l = 4 \text{ m}$, A ve D noktaları arasındaki mesafe $d = 3 \text{ m}$ 'dir. Kirişin ağırlığı $W = 800 \text{ N}$ 'dur.

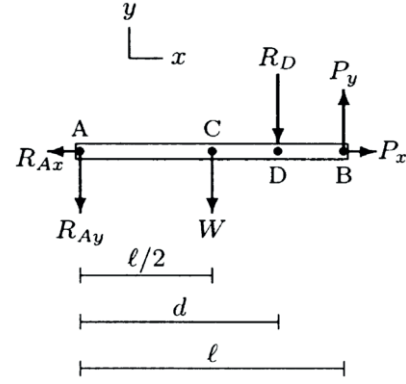
Kirişteki A ve D noktalarının tepkilerini hesaplayın.



Şekil 4.14 Örnek 4.2

Çözüm

Şekil 4.15'te incelenen kirişin serbest cisim diyagramını gösterilmektedir. Yatay ve dikey yönler, sırasıyla x ve y eksenleri ile tanımlanır. A noktasındaki menteşe bağlantısı, kirişin hem x hem de y yönündeki translasyonel hareketini kısıtlar. Bu nedenle A noktasında bir \underline{R}_A tepki kuvveti vardır. Bu kuvvetin ne büyüklüğü ne de yönü (iki bilinmeyen) bilinmemektedir. Şekil 4.15'te gösterildiği gibi, iki bilinmeyen (büyüklük ve yön) tek bir sonuç kuvvetinin yerine, A noktasındaki tepki kuvveti, \underline{R}_{Ax} ve \underline{R}_{Ay} (hala iki bilinmeyen) bileşenleri açısından temsil edilebilir.



Şekil 4.15 Kirişin serbest cisim diyagramı

Sürtünmesiz silindir D noktasında bir “durdurma” işlevi görür. Kirişin saat yönünün tersine dönmesini engeller. Uygulanan P kuvvetinin etkisi altında, kiriş silindiri basar ve bir tepki olarak, silindir kirişe geri bir kuvvet \underline{R}_D uygular. Bu kuvvet, kirişe dik yönde veya dikey olarak aşağı doğru uygulanır. Bu kuvvetin büyüklüğü de bilinmemektedir. Kirişin ağırlığı $W = 800 \text{ N}$ olarak verilir ve kirişin ağırlık merkezinde uygulandığı varsayılır. \underline{P}_x ve \underline{P}_y , uygulanan kuvvetin x ve y yönleri boyunca olan skaler bileşenleridir:

$$P_x = P \cos \beta = (1000)(\cos 60) = 500 \text{ N}$$

$$P_y = P \sin \beta = (1000)(\sin 60) = 866 \text{ N}$$

Üç tane bilinmeyen vardır (\underline{R}_{Ax} , \underline{R}_{Ay} , \underline{R}_D) ve bu problemi çözmek için üç denkleme ihtiyaç vardır. x yönündeki denge koşulunu ele aldığımızda:

$$\sum F_x = 0: -R_{Ax} + P_x = 0$$

$$R_{Ax} = P_x = 500 \text{ N} (\leftarrow)$$

Ardından, kirişin A noktasındaki rotasyonel dengeni dikkate alın. A noktasına göreceli olarak, R_{Ax} ve R_{Ay} için moment kollarının uzunlukları sıfırdır. P_x için moment kolunun uzunluğu da etki çizgisi A noktasından geçtiği için sıfırdır. Diğer bir taraftan, W için moment kolunun uzunluğu $l/2$, R_D için moment kolunun uzunluğu d ve P_y için moment kolunun uzunluğu l' dir. Saat yönündeki momentlerin pozitif olduğunu varsaydıığımızda:

$$\sum M_A = 0 : \frac{l}{2}W + dR_D - lP_y = 0$$

$$R_D = \frac{1}{d} \left(lP_y - \frac{l}{2}W \right)$$

$$R_D = \frac{1}{3} \left(4 * 866 - \frac{4}{2}800 \right) = 621 \text{ N } (\downarrow)$$

Şimdi, kirişin y yönündeki translasyonel dengesini dikkate aldığımızda:

$$\sum F_y = 0 : -R_{Ay} - W - R_D + P_y = 0$$

$$R_{Ay} = P_y - W - R_D$$

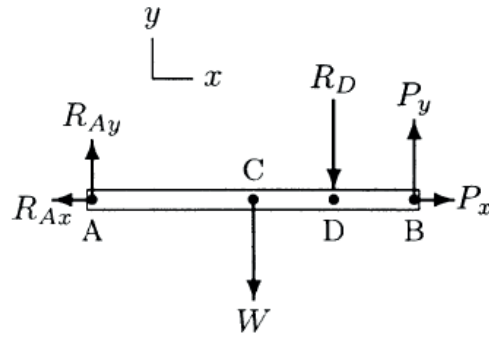
$$R_{Ay} = 866 - 800 - 621 = -555 \text{ N } (\downarrow)$$

R_{Ay} 'nin negatif bir değere sahip olduğu belirlendi. R_{Ay} skaler bir değer olduğu için negatif olamaz. Negatif değer, kirişin serbest cisim diyagramını çizerken, A noktasındaki tepkime kuvvetinin dikey bileşeni için yanlış yön (aşağı doğru) tahmini yapıldığını belirtir. Şimdi değeri aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz:

$$R_{Ay} = 555 \text{ N } (\uparrow)$$

Kirişin düzeltilmiş serbest cisim diyagramı Şekil 4.16'da gösterilmiştir. A'daki tepki kuvveti bileşenlerini zaten hesapladığımız için A noktasındaki tepkime kuvvetinin (R_A) büyüklüğünü ve yönünü de belirleyebiliriz. R_A 'nın büyüklüğü

$$R_A = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} = 747 \text{ N}$$

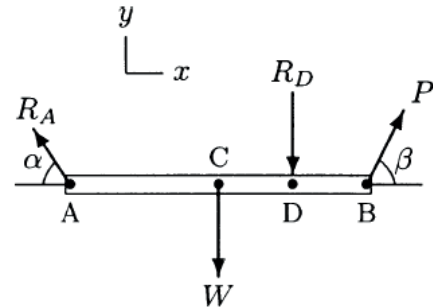


Şekil 4.16 Kirişin düzeltilmiş serbest cisim diyagramı

R_A 'nın yatayla yaptığı açı α ise:

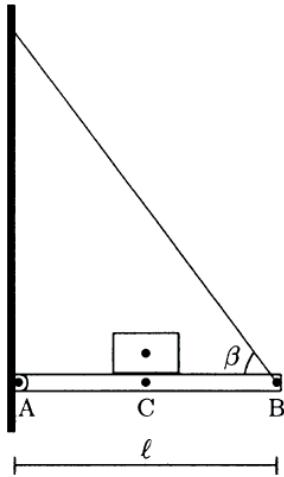
$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{555}{500} \right) = 50^\circ$$

Kirişin bileşke kuvvetlerini gösteren değiştirilmiş serbest cisim diyagramı Şekil 4.17'de gösterilmiştir.



Şekil 4.17 Kirişe etkiyen bileşke kuvvetler

Örnek 4.3 Şekil 4.18'de gösterilen homojen, yatay kiriş, A noktasındaki duvara menteşelenmiş ve B noktasından kirişe bağlı ve yatay düzlem ile $\beta = 53^\circ$ açı yapacak şekilde diğer uçtan duvara bir tel ile bağlanarak desteklenmektedir. C noktası kirişin ağırlık merkezini temsil etmektedir ve A ve B noktasına eş uzaklıktadır. $W_2 = 400$ N ağırlığındaki bir yük, kirişin üzerine ağırlık merkezi doğrudan C noktasının üzerinde olacak şekilde yerleştirilir. Kirişin uzunluğu $l = 4$ m ve ağırlığı $W_1 = 600$ N ise teldeki çekme gerilimini ve A noktasındaki tepki kuvvetini hesaplayın.

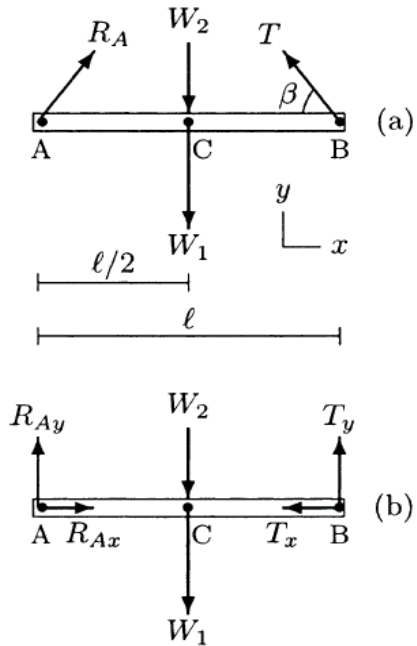


Şekil 4.18 Örnek 4.3

Çözüm

Şekil 4.19 kirişin serbest cisim diyagramını göstermektedir. x ve y eksenleri sırasıyla yatay ve dikey yönleri göstermektedir. A noktasındaki menteşe bağlantısı, x ve y yönündeki translasyonel hareketini sınırlar. A noktasındaki tepki kuvveti \underline{R}_A 'nın Şekil

4.19b'de \underline{R}_{Ax} ve \underline{R}_{Ay} (iki bilinmeyen) olarak bileşenleri gösterilmiştir. Kirişin ağırlığı ve yük sebebiyle tel gerilir ve telde \underline{T} çekme kuvveti oluşur. Bu kuvvet tel boyunca, yatayla β açısı yapacak şekilde kirişe uygulanır. Başka bir deyişle \underline{T} 'nin yönünü biliyoruz ama büyüklüğünü (başka bir bilinmeyen) bilmiyoruz. Şekil 4.19b'de telin kirişe uyguladığı kuvvet T_x ve T_y skaler bileşenleri olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.19 Kirişin etkiyen kuvvetleri

R_{Ax} , R_{Ay} ve T olarak üç bilinmeyenimiz var. İlk olarak A noktasındaki dönme denge durumunu ele alalım. A noktasına göre, \underline{W}_1 , \underline{W}_2 ve \underline{T}_y 'nin oluşturduğu üç moment vardır, sırasıyla moment kolları $l/2$, $l/2$ ve l 'dir. Saat yönüne oluşan momentlerin pozitif olduğu varsayıldığında:

$$\sum M_A = 0 : \frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{2}W_2 - IT_y = 0$$

$$T_y = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

$$T_y = \frac{1}{2}(600 + 400) = 500 \text{ N } (\uparrow)$$

T_y , \underline{T} 'nin yatayla $\beta = 53^\circ$ açılı yapan dikey bileşenidir. Bu yüzden,

$$T = \frac{T_y}{\sin \beta} = \frac{500}{\sin 53^\circ} = 626,1 \text{ N}$$

Kablonun kirişe uyguladığı çekme kuvvetinin x bileşeni:

$$T_x = T \cos \beta = 626,1 \cos 53^\circ = 376,8 \text{ N } (\leftarrow)$$

Sonra, kirişin x yönündeki translasyonel dengesini ele aldığımızda:

$$\sum F_x = 0 : R_{Ax} - T_x = 0$$

$$R_{Ax} = T_x = 376,8 \text{ N } (\rightarrow)$$

Son olarak, kirişin y yönündeki translasyonel dengesini ele aldığımızda:

$$\sum F_y = 0 : R_{Ay} - W_1 - W_2 + T_y = 0$$

$$R_{Ay} = W_1 + W_2 - T_y$$

$$R_{Ay} = 600 + 400 - 500 = 500 \text{ N } (\uparrow)$$

A noktasındaki tepki kuvvetinin skaler bileşenlerini bulduktan sonra büyüklüğünü de hesaplayabiliriz:

$$R_A = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} = 626,1 \text{ N}$$

\underline{R}_A 'nın yatayla yaptığı açılı α ise:

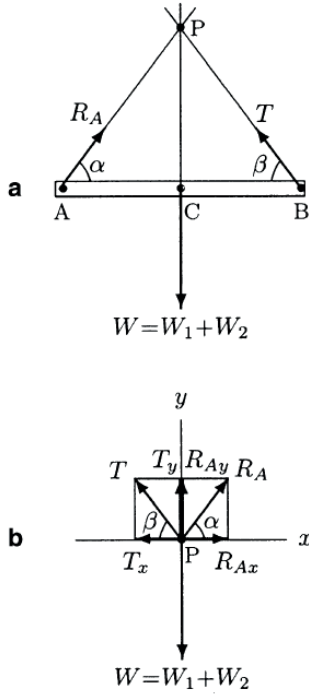
$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{500}{376,8} \right) = 53^\circ$$

Notlar

- Kirişin ağırlığının ve kiriş üzerindeki yükün ortak bir etki çizgisi vardır. Şekil 4.20a'da gösterildiği gibi kirişe etki eden kuvvetler tek bir ağırlık $W = W_1 + W_2 = 1000 \text{ N}$ şeklinde birleştirip ifade edilebilir. Kirişin ağırlık merkezinde hareket eden W 'ye ek olarak, kirişe \underline{R}_A ve \underline{T} etki eder. Başka bir deyişle, üç kuvvetli bir sistemimiz var. Bu kuvvetler paralel bir kuvvet sistemi oluşturmadığı için kesişiyor olmaları gerekir. Bu nedenle, kuvvetlerin etki çizgileri tek bir noktada (P noktası) toplanmalıdır. Şekil 4.20b'de gösterildiği gibi, kuvvetleri P noktasına kaydırır ve bileşenleri açısından ifade edersek, x ve y yönlerindeki dengeyi böyle gözlemleyebiliriz:

$$x \text{ yönünde: } R_{Ax} = T_x$$

$$y \text{ yönünde: } R_{Ay} + T_y = W$$



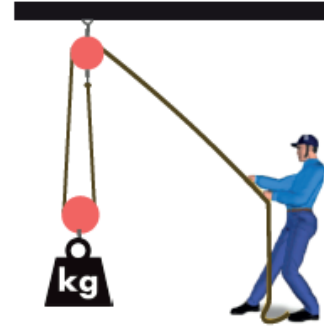
Şekil 4.20 Kesişen kuvvet sistemi

- R_A ve T 'nin eşit büyüklüğe sahip olması ve her ikisinin de yatayla 53° açı yapması, kirişin ağırlık merkezinden geçen, xy düzlemine dik olan bir düzlemden kaynaklı problemin simetrisinden dolayıdır.

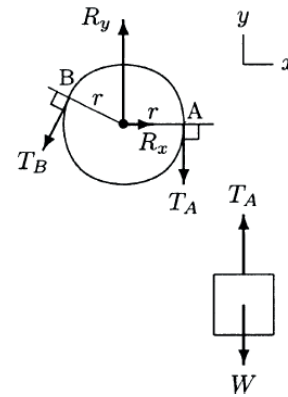
4.9 Kablo Makara Sistemleri ve Traksiyon Cihazları

Kablo makara düzenlemeleri, ağırlıkları yükseltmek ve hastanın rehabilitasyonunda kullanılan traksiyon cihazlarının tasarım uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Şekil 4.21'deki kablo-makara sistemini kullanarak yükü kaldırmaya çalışan bir kişinin olduğu basit yapıyı ele alalım. Yükü, yerden kaldırmaya

çalışan kişinin dengede tuttuğunu varsayalım. Kablo tavana asılı bir kutuda bulunan kasnağın etrafında sarılıdır. Şekil 4.22'de makara ve yükün serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. r , makaranın yarıçapıdır ve O , makara merkez hattı (aks veya mil) boyunca bir noktayı temsil eder. Kişi yükü kaldırmak için kabloyu çektiğinde, makarayı taşıyan kutu üzerinden tavana iletilen bir kuvvet uygulanır. Tepki olarak, tavan makarayı tutan kutuyu bağlayan şaft üzerinden makaraya bir kuvvet uygular. Başka bir deyişle, makara üzerinde bir R tepki kuvveti vardır. Şekil 4.22'de O noktasında tepki kuvveti, R_x ve R_y skaler bileşenleri ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.21 Kablo makara düzenlemesi



Şekil 4.22 Makara ve yük

Kablo, A ve B noktaları arasındaki makaranın etrafına sarılmıştır. Kablo ve makara arasındaki sürtünme etkilerini görmezden gelirse, kablodaki T çekme geriliminin büyüklüğü kabloda her noktada sabittir. Bu noktayı kanıtlamak için, kabloda üretilen gerilme kuvvetinin büyüklüğünün sabit olmadığını varsayalım. T_A ve T_B , sırasıyla makaranın A ve B noktalarındaki kablo tarafından uygulanan çekme kuvvetlerinin büyüklüğü olsun. Kablonun makara etrafına sarıldığı yoldan bağımsız olarak, kablo ilk ve son temas noktalarında makaranın çevresine teğettir. Bu da O noktasından A ve B noktalarına doğru çizilen düz çizgilerin kabloyu dik açılarda keseceği anlamına gelir. Bu nedenle, O noktasından ölçüldüğü gibi, kablo tarafından makaraya uygulanan kuvvetlerin moment kolları her zaman kasmağın yarıçapına eşittir. Şimdi, makaranın O noktasına göre rotasyonel dengeni ele aldığımızda:

$$\sum M_O = 0 : rT_B - rT_A = 0$$

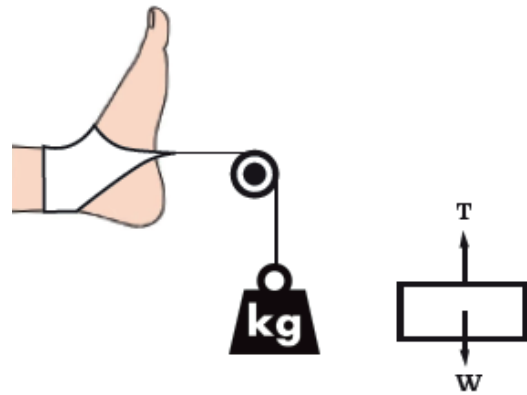
$$T_B = T_A$$

Sonuç olarak, kablonun iki tarafındaki çekme gerilimi T birbirine eşittir. Şekil 4.21 ve 4.22'de, yükün dikey dengesi, kablodaki gerilimi kaldırılacak olan W yükünün ağırlığına eşit olmasını gerektirir.

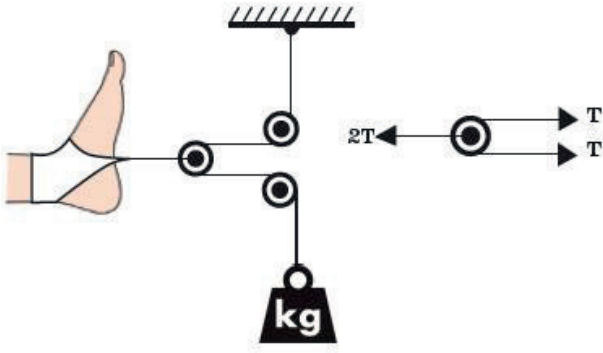
Tavanın makaraya uyguladığı R_x ve R_y 'nin, O noktasında herhangi bir moment oluşturmadığına dikkat edin. Gerektiğinde, bu

kuvvetler makaranın yatay ve dikey dengesi dikkate alınarak belirlenebilir.

Şekil 4.23 ve 4.24'de basit traksiyon cihazlarının örnekleri görselleştirilmiştir. Bu gibi cihazlar, insan vücudunun bazı bölümlerini iyileştirici amaçlarla belirli pozisyonlarda tutmak üzere tasarlanmıştır. Bu tür cihazların etkili olabilmesi için güç yönü ve büyüklüğü göz önünde bulundurularak kuvvetleri vücut üzerinde düzgün bir şekilde iletme üzere tasarlanması gerekmektedir. Farklı kablo ve makara düzenlemeleri, farklı kuvvet büyüklüklerini ve farklı yönlerdeki kuvvetleri iletir. Örneğin, Şekil 4.23'teki traksiyon, ayağa ağırlık kefesindeki ağırlığa eşit büyüklükte yatay bir kuvvet uygular. Diğer taraftan, Şekil 4.24'teki traksiyon, bacakta yatay kefedeki ağırlığın iki katı büyüklüğünde bir kuvvet uygular.

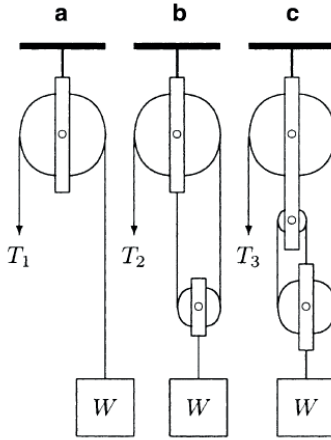


Şekil 4.23 Tek-makara traksiyonu



Şekil 4.24 Üç-makara traksiyonu

Örnek 4.4 Şekil 4.25'te gösterilen üç farklı kablo makara düzenlemesinin kullanılmasıyla, bir W ağırlık bloğu belli bir yüksekliğe yükseltilmektedir. Her sistem için, kabloyu tutan kişiye ne kadar kuvvet uygulandığını belirleyelim.

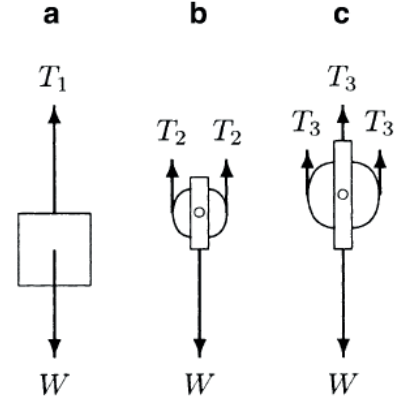


Şekil 4.25 Örnek 4.4

Çözümler

Şekil 4.25'teki her sistemi analiz etmek için gerekli serbest cisim diyagramları Şekil 4.26'da gösterilmiştir. Şekil 4.25a'daki sistemin analizi için tek ihtiyacımız olan bloğun serbest cisim diyagramıdır (Şekil 4.26a). Bloğun dikey dengesi için kablodaki gerilim $T_1 = W$

olmalıdır. Bu nedenle, kabloyu tutan kişiye bloğun ağırlığına eşit büyüklükte bir kuvvet uygulanır.



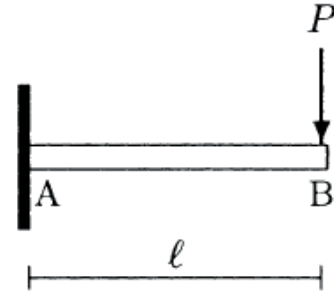
Şekil 4.26 Serbest cisim diyagramları

Şekil 4.25b'deki sistemin analizi için, bloğa en yakın bölgede yer alan makaranın serbest cisim diyagramını incelemeliyiz (Şekil 4.26b). Makaranın dikey dengesi için, kablodaki gerilim $T_2 = W/2$ olmalıdır. T_2 , iki makaranın etrafına sarılmış, kişi tarafından tutulan kablodaki çekme gerilimidir. Bu nedenle, kabloyu tutan kişiye bloğun ağırlığının yarısına eşit büyüklükte bir kuvvet uygulanır.

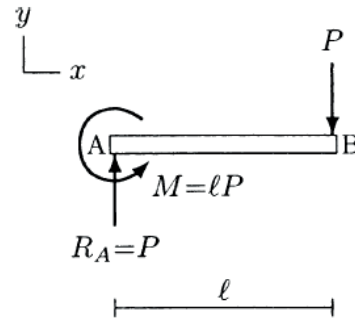
Şekil 4.25c'deki sistemin analizi için, bloğa en yakın olan makaranın serbest cisim diyagramını tekrar incelemek gerekir (Şekil 4.26c). Makaranın dikey dengesi için, kablodaki çekme gerilimi $T_3 = W/3$ olmalıdır. T_3 , üç makaranın etrafına sarılmış, kişi tarafından tutulan kablodaki çekme gerilimidir. Bu nedenle, kabloyu tutan kişiye bloğun ağırlığının üçte birine eşit büyüklükte bir kuvvet uygulanır.

4.10 Ankastre Yapılar

Şekilde gösterilen kiriş duvara gömülü ya da kaynaklanmış olup bu tip kirişe *ankastre kiriş* denir. Ankastre kirişler harici olarak uygulanan momentlere ve kuvvetlere dayanabilir. Şekil 4.27'deki kiriş, A noktasından duvara kaynaklanan kirişin serbest ucu olan B noktasından aşağı doğru P kuvveti uygulanmaktadır. Kirişin uzunluğu, l 'dir. Durumu basitleştirmek amacıyla kirişin ağırlığını ihmal edebiliriz. Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 4.28'de gösterilmiştir. Kaynak yerine kiriş A noktasından duvara menteşelenmişse uygulanan kuvvetin etkisi altında kiriş saat yönünde dönecektir. Kirişin dönmemesi, rotasyonel dengede olduğunu gösterir. Bu rotasyonel denge, kirişin sabit ucunda oluşan tepki momentinden kaynaklanır. Şekil 4.28'deki saat yönünün tersine olan M büyüklüğündeki moment A noktasındaki tepki momentini temsil eder. Buna ek olarak, uygulanan kuvvet, kirişi aşağıya doğru çevirme eğilimindedir. Ancak, kiriş çevrilemez. Bu durum, uygulanan kuvvetin etkisini dengeleyen A noktasında yukarı doğru bir tepki kuvvetinin varlığını gösterir. R_A kuvveti, A noktasındaki tepki kuvvetini temsil eder.



Şekil 4.27 Ankastre kiriş



Şekil 4.28 Ankastre kirişin serbest cisim diyagramı

Kiriş denge içinde olduğundan, reaksiyonları belirlemek için denge koşullarını kullanabiliriz. Örneğin, kirişin translasyonel dengesinin y yönünde olduğu düşünüldüğünde:

$$\sum F_y = 0 : R_A - P = 0$$

$$R_A = P$$

Şimdi, kirişin A noktasının dairesel dengesini dikkate alalım ve saat yönünün tersine momentlerinin pozitif olduğunu varsayıldığında:

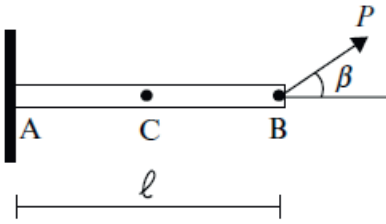
$$\sum M_A = 0 : M - lP = 0$$

$$M = lP$$

M büyüklüğündeki tepki momentinin, kiriş boyunca her yerde hareket eden “serbest bir vektör” olduğu unutulmamalıdır.

Örnek 4.5 Şekil 4.29'da homojen ve yatay bir kiriş gösterilmiştir. Kiriş A noktasından sabitlenmıştır. B noktasından yatayla $\beta = 60^\circ$ açı yaparak bir kuvvet uygulanmaktadır. Uygulanan kuvvetin büyüklüğü $P = 100$ N'dir. C noktası, kirişin ağırlık merkezidir. Kiriş $W = 50$ N ağırlığında ve uzunluğu $l = 2$ m'dir.

Kirişin sabit ucunda oluşturulan tepkileri belirleyin.



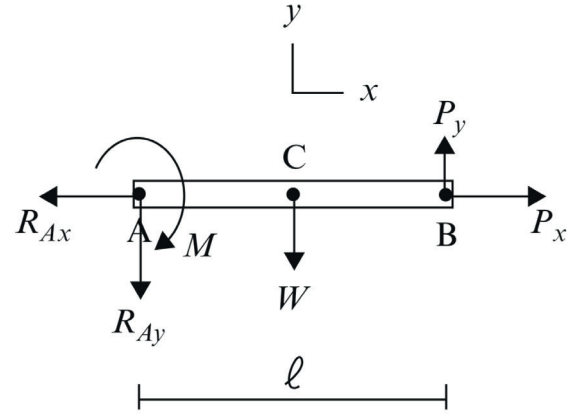
Şekil 4.29 Örnek 4.5

Çözüm

Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 4.30'da gösterilmiştir. Yatay ve dikey yönler, sırasıyla x ve y eksenleriyle gösterilmektedir. P_x ve P_y , uygulanan kuvvetin skaler bileşenleridir. P 'nin büyüklüğünü ve yönünü bildiğimiz için P_x ve P_y 'yi kolayca hesaplayabiliriz:

$$P_x = P \cos \beta = 100 \cos 60^\circ = 50 \text{ N (+x)}$$

$$P_y = P \sin \beta = 100 \sin 60^\circ = 86,6 \text{ N (+y)}$$



Şekil 4.30 Kirişin serbest cisim diyagramı

Şekil 4.30'da, A noktasındaki tepki kuvveti \underline{R}_A , skaler bileşenleri olan \underline{R}_{Ax} ve \underline{R}_{Ay} cinsinden gösterilmektedir. \underline{R}_A 'nın büyüklüğünü ve yönünü bilmiyoruz (iki bilinmeyen). Aynı zamanda A noktasında xy düzlemine dik bir yönde hareket eden M büyüklüğünde tepki momenti oluşmaktadır.

Bu problemde üç tane bilinmeyenimiz var; R_{Ax} , R_{Ay} ve M . Bu problemi çözmek için üç tane denge koşulunu uygulamalıyız. İlk olarak x yönündeki translasyonel dengesini uygulayalım:

$$\sum F_x = 0 : -R_{Ax} + P_x = 0$$

$$R_{Ax} = P_x = 50 \text{ N (-x)}$$

Ardından, y yönündeki translasyonel denge koşulunu uygulayalım:

$$\sum F_y = 0 : -R_{Ay} - W + P_y = 0$$

$$R_{Ay} = P_y - W$$

$$R_{Ay} = 86,6 - 50 = 36,6 \text{ N (-y)}$$

Tepki kuvvetinin (\underline{R}_A) bileşenlerinin büyüklüğü ve yönünü belirledikten sonra, A noktasındaki tepki kuvvetinin büyüklüğünü ve yönünü belirleyebiliriz:

$$R_A^2 = R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$$

$$R_A = \sqrt{50^2 + 36,6^2} = 62 \text{ N}$$

Son olarak, kirişin A noktasının rotasyonel dengeni dikkate alalım. Saat yönünün tersine momentlerinin pozitif olduğunu varsayarsak:

$$\sum M_A = 0 : M + W \times \frac{1}{2} - P_y \times l = 0$$

$$M = P_y \times l - W \times \frac{1}{2}$$

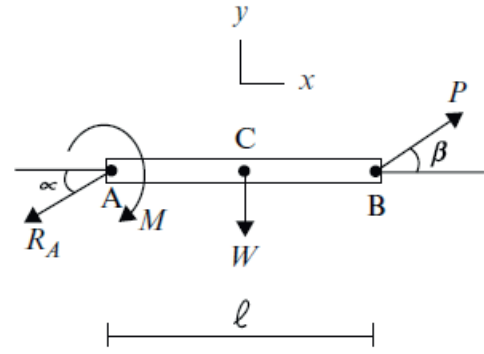
$$M = 86,6 \times 2 - 50 \times \frac{2}{2} = 123,2 \text{ Nm (saat yönünde)}$$

A noktasındaki reaksiyon kuvvetinin büyüklüğünü ve reaktif momentin büyüklüğünü ile yönünü belirlediğimizde, \underline{R}_A tepki kuvvetinin yönünü de belirleyebiliriz. α , \underline{R}_A tepki kuvveti etki çizgisinin yatayla yaptığı açı ise:

$$\tan \alpha = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}\right) = 36,2^\circ$$

Kirişin son serbest cisim diyagramı Şekil 4.31'de gösterilmiştir.

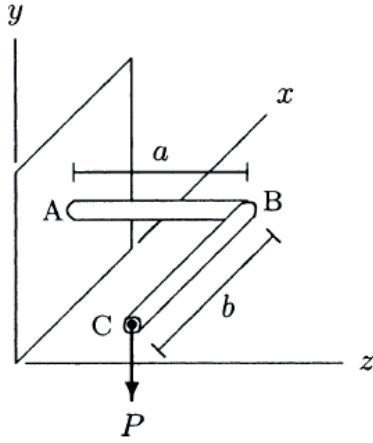


Şekil 4.31 Kiriş etkiyen kuvvetler ve momentler

Örnek 4.6 L şeklindeki kiriş Şekil 4.32'de gösterilmiştir. Kiriş A noktasından duvara sabitlenmiş, AB kolu z yönünde uzamakta ve BC kolu negatif x yönünde uzamaktadır. P kuvveti negatif y yönünde kirişin B noktasından uygulanmaktadır. AB ve BC kollarının uzunlukları sırasıyla $a = 20 \text{ cm}$ ve $b = 30 \text{ cm}$, uygulanan kuvvetin büyüklüğü de $P = 120 \text{ N}$ 'dir.

Kirişin ağırlığının uygulanan kuvvete kıyasla ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunu varsayalım. Kirişin sabit ucundaki tepkileri hesaplayalım.

Bu üç boyutlu bir problemdir ve analiz etmek için iki yöntem kullanılmalıdır. İlk yöntemde, bir önceki bölümde tanıtılan çift kavramı ve çift momenti kullanılmaktadır ve ikinci yöntemde, kuvvetlerin ve momentlerin vektör özellikleri kullanılmaktadır.

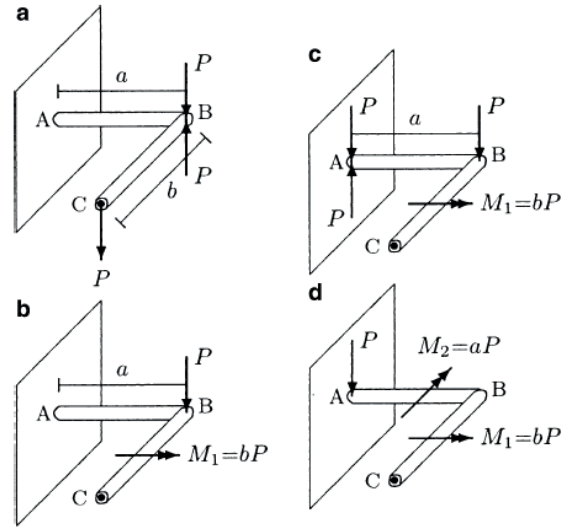


Şekil 4.32 Örnek 4.6

Çözüm A: Skaler yöntem

Şekil 4.33'te sorunun analiz edilmesine yönelik skaler yöntem açıklanmıştır ve kiriş üzerinde C noktasından A noktasına kadar uygulanan kuvvetin ötelenmesini içerir. İlk olarak, P 'nin C noktasından B noktasına taşınması için, B noktasına eş büyüklükte (P) ve zıt yönlere çift yerleştirilir. Yeni kuvvetlerin ortak etki çizgisi C noktasındaki merkezi kuvvetin hareket çizgisine paraleldir (Şekil 4.33a). C noktasındaki aşağı doğru kuvvet ve B noktasındaki yukarı doğru kuvvet bir çift oluşturur. Bu nedenle, Şekil 4.33b'de çift momenti, çift başlı ok ile gösterilmiştir. Çift momentinin büyüklüğü $M_1 = bP$ 'dir. Sağ el kuralını uygularsak, çift momentinin pozitif z yönünde etki ettiğini görebiliriz. Bu nedenle,

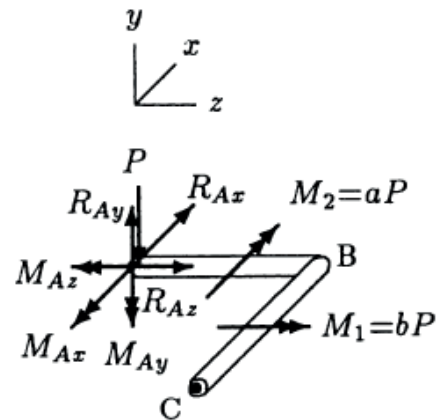
$$M_1 = bP = (0,30)(120) = 36 \text{ Nm } (+z)$$



Şekil 4.33 Skaler yöntem

Şekil 4.33c'de gösterildiği gibi kuvveti B noktasından A noktasına taşınması için A noktasına eş büyüklükte ve zıt yönlere çift yerleştirilir. Bu sefer aşağı doğru olan kuvvet, B noktasında, yukarı doğru olan kuvvet A'da olacak şekilde bir çifttir ve yine çift momenti ile değiştirilebilir (Şekil 4.33d). Bu çift momentin büyüklüğü $M_2 = aP$ 'dir ve pozitif x yönünde etki eder. Bu nedenle,

$$M_2 = aP = (0,20)(120) = 24 \text{ Nm } (+x)$$



Şekil 4.34 Kirişin serbest cisim diyagramı

Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 4.34'te gösterilmektedir. P, C noktasından uygulanan ve A noktasına aktarılan kuvvetin büyüklüğüdür. Çift momenti büyüklükleri M_1 ve M_2 'dir. R_{Ax} , R_{Ay} ve R_{Az} , A noktasındaki tepki kuvvetinin skaler bileşenleridir. M_{Ax} , M_{Ay} ve M_{Az} , A noktasındaki tepki momentinin skaler bileşenleridir. Kirişin x yönündeki translasyonel dengesini ele alalım:

$$\sum F_x = 0 : R_{Ax} = 0$$

Kirişin y yönündeki translasyonel dengesi sebebiyle:

$$\sum F_y = 0 : R_{Ay} = P = 120 \text{ N (+y)}$$

Kirişin z yönündeki translasyonel dengesi için,

$$\sum F_z = 0 : R_{Az} = 0$$

Bu sebeple, A noktasında sadece bir tane sıfır olmayan tepki kuvveti vardır ve pozitif y yönlüdür. Şimdi, kirişin x yönündeki rotasyonel dengeni ele alalım:

$$\sum M_x = 0 : M_{Ax} = M_2 = 24 \text{ Nm (-x)}$$

Kirişin y yönündeki rotasyonel denge için,

$$\sum M_y = 0 : M_{Ay} = 0$$

Son olarak, kirişin z yönündeki rotasyonel denge durumu sebebiyle:

$$\sum M_z = 0 : M_{Az} = M_1 = 36 \text{ Nm (-z)}$$

Bu sebeple A noktasında iki tane x ve y yönlerinde, sıfır olmayan tepki momentit vardır. A noktasının tepki kuvvetlerinin ve momentlerinin bileşenlerini hesapladığımızıza göre, A noktasındaki tepki kuvvetinin ve momentinin büyüklüğünü de hesaplayabiliriz:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = R_{Ay} = 120 \text{ N}$$

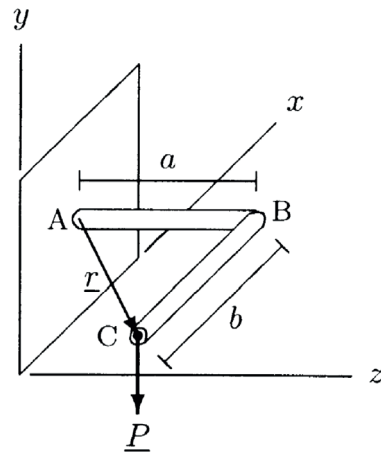
$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = 43,3 \text{ Nm}$$

Çözüm B: Vektör yöntemi

Aynı problemi analiz etmek için kullanılan ikinci yöntemde ilgili parametrelerin vektör özellikleri kullanılır. Örneğin, C noktasında uygulanan kuvvet ve C noktasının A noktasına göre pozisyon vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Şekil 4.35):

$$\underline{P} = -P\underline{j} = -120\underline{j}$$

$$\underline{r} = -b\underline{i} + a\underline{k} = -0,30\underline{i} + 0,20\underline{k}$$

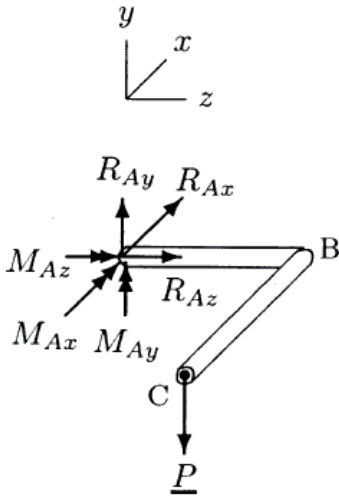


Şekil 4.35 Vektör yöntemi

Burada \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} , sırasıyla pozitif x , y ve z yönlerini gösteren birim vektörlerdir. Kirişin serbest cisim diyagramı, Şekil 4.36'da gösterilmektedir, burada tepki kuvvetleri ve momentleri, skaler bileşenleri tarafından gösterilmektedir.

$$\underline{R}_A = R_{Ax}\underline{i} + R_{Ay}\underline{j} + R_{Az}\underline{k}$$

$$\underline{M}_A = M_{Ax}\underline{i} + M_{Ay}\underline{j} + M_{Az}\underline{k}$$



Şekil 4.36 Kirişin serbest cisim diyagramı

İlk olarak, kirişin translasyonel dengesini ele alalım:

$$\sum \underline{F} = 0 : \underline{R}_A + \underline{P} = 0$$

$$(R_{Ax}\underline{i} + R_{Ay}\underline{j} + R_{Az}\underline{k}) + (-120\underline{j}) = 0$$

$$R_{Ax}\underline{i} + (R_{Ay}\underline{j} - 120\underline{j}) + R_{Az}\underline{k} = 0$$

Bu denge durumunun geçerli olması için,

$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ay} = 120 \text{ N (+y)}$$

$$R_{Az} = 0$$

Önceki bölümde anlatıldığı gibi, tanım olarak moment, konum ve kuvvet vektörlerinin vektör çarpımını sonucunda ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, A noktasına göre C noktasında P kuvveti sonucu oluşan moment \underline{M}_C :

$$\underline{M}_C = \underline{r} \times \underline{P}$$

$$= (-0.30\underline{i} + 0.20\underline{k}) \times (-120\underline{j})$$

$$(-0.30)(-120)(\underline{i} \times \underline{j}) + (0.20)(-120)(\underline{k} \times \underline{j})$$

$$= 36\underline{k} + 24\underline{i}$$

A noktasına göre kirişin rotasyonel dengede olduğunu ele alalım.

$$\sum \underline{M} = 0 := \underline{M}_A + \underline{M}_C = 0$$

$$= (M_{Ax}\underline{i} + M_{Ay}\underline{j} + M_{Az}\underline{k}) + (36\underline{k} + 24\underline{i}) = 0$$

$$= (M_{Ax} + 24)\underline{i} + M_{Ay}\underline{j} + (36 + M_{Az})\underline{k} = 0$$

Bu denge durumunun geçerli olması için,

$$M_{Ax} = 24 \text{ Nm (-x)}$$

$$M_{Ay} = 0$$

$$M_{Az} = 36 \text{ Nm (-z)}$$

Tüm bu sonuçlar skaler analiz yöntemi kullanılarak elde edilenler ile tutarlıdır.

Notlar

- Bu problemi iki şekilde analiz ettik. Skaler analiz yönteminin daha az matematiksel uygulama gerektirdiği açıktır. Yine de bu yöntemin de sınırlamaları vardır. Örneğin, bu örnekte, C noktasında uygulanan kuvvet sadece bir sıfır olmayan bileşene sahiptir. C

noktasında x ve z yönündeki sıfır olmayan bileşenlere sahip bir kuvvetimiz olsaydı ne olurdu? Skaler yöntem, bir seferde uygulanan kuvvetin tek bir bileşenini dikkate alarak, her bileşeni tek başına çözümlenerek, bunu üç bileşenin tamamı için tekrarlayarak ve sonrasında üç çözümü üst üste koyarak son çözümü elde etmek için adım adım uygulanabilir. Açıkçası, bu oldukça zaman alacaktır. Öte yandan, bu tür problemleri analiz etmek için vektör yönteminin uzantısı çok basittir. Yapılması gereken tek şey, uygulanan kuvvet vektörünü $\underline{P} = P_x \underline{i} + P_y \underline{j} + P_z \underline{k}$ olarak yeniden tanımlamak ve tam olarak yukarıda açıklanan prosedürü uygulamaktır.

- Bu örnekte, kirişin ağırlığının C noktasında uygulanan kuvvet ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir derecede küçük olduğu belirtilmektedir. Kirişin ağırlığı ihmal edilemezse ne olur? Şekil 4.37'de gösterildiği gibi, kirişin merkezlerinin AB ve BC kollarının W_1 ve W_2 ağırlıklarının, ağırlık merkezleri (D ve E noktaları) ile birlikte bildiğimizi varsayalım. Ayrıca, D'nin AB kolunun ortasında ve E'nin BC kolunun ortasında yer aldığını varsayalım. \underline{R}_A ve \underline{P} 'nin vektör gösterimini zaten tartıştık. \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 'nin vektör gösterimi

$$\underline{W}_1 = -W_1 \underline{j}$$

$$\underline{W}_2 = -W_2 \underline{j}$$

A noktasına göre D ve E noktalarının konum vektörleri

$$\underline{r}_1 = \frac{a}{2} \underline{k}$$

$$\underline{r}_2 = -\frac{b}{2} \underline{i} + a \underline{k}$$

Bu nedenle, A noktasına göre \underline{W}_1 ve \underline{W}_2 'ye bağlı momentler

$$\underline{M}_D = \underline{r}_1 \times \underline{W}_1 = \frac{aW_1}{2} \underline{i}$$

$$\underline{M}_E = \underline{r}_2 \times \underline{W}_2 = aW_2 \underline{i} - \frac{bW_2}{2} \underline{k}$$

Kirişin translasyonel dengesi

$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ay} = W_1 + W_2 + P$$

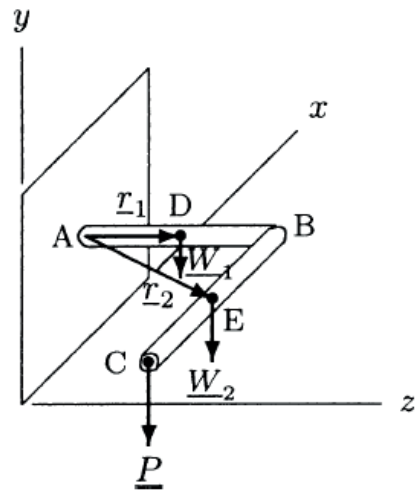
$$R_{Az} = 0$$

Kirişin rotasyonel denge

$$M_{Ax} = -\frac{aW_1}{2} - aW_2 + aP$$

$$M_{Ay} = 0$$

$$M_{Az} = \frac{bW_2}{2} - bP$$



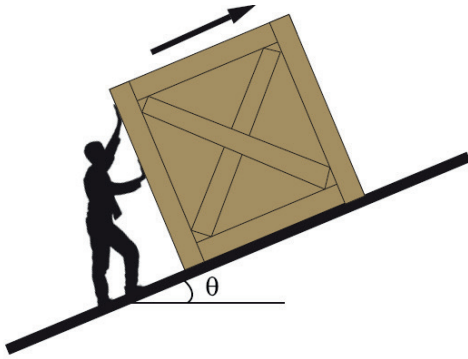
Şekil 4.37 Kol ağırlıklarının dahil olduğu durum

- Bu örnek ile bir önceki bölümde yer alan omuz örneği (Örnek 3.5) arasındaki benzerlikler unutulmamalıdır.

4.11 Sürtünmeli Sistemler

Sürtünme kuvvetleri, 2. Bölüm'de ayrıntılı olarak tartışılmıştı. Bu başlık altında, sürtünme kuvvetlerinin önemli bir rol oynadığı bir problemi analiz edeceğiz.

Örnek 4.7 Şekil 4.38'de bloğu yüzeye paralel kuvvet uygulayarak eğimli sürtünmeli bir yüzeyde yukarı doğru itirmeye çalışan bir adam görülmektedir. Bloğun ağırlığı W , sürtünme katsayısı μ , yüzey yatayla θ açısı yapmaktadır. Bloğun sürtünme ve yerçekimi etkilerinin üstesinden gelerek hareket etmeye başlaması için kişinin uygulaması gereken minimum kuvvetin büyüklüğünü (P)'yi W , μ ve θ cinsinden belirleyelim.



Şekil 4.38 Örnek 4.7

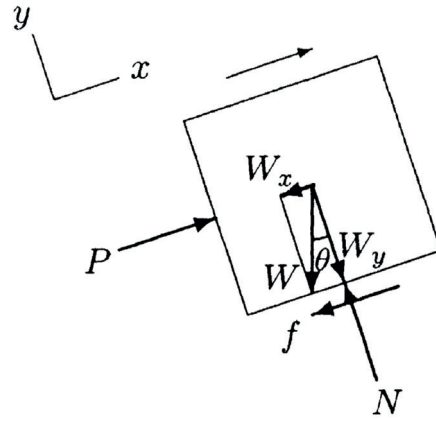
Çözüm

Kişi, bloğun tepesine daha yakın noktada kuvvet uygulayarak bloğu iterse, blok sağ alt kenarı üzerinde (saat yönünde) dönebilir. Bu noktada, böyle bir etkinin olmadığını ve bloğun alt yüzeyinin zeminle tam temas halinde olduğunu varsayacağız.

Bloğun serbest cisim diyagramı Şekil 4.39'da gösterilmiştir. x ve y , sırasıyla eğime paralel ve dik yönlerdir. P , kişinin bloğa uyguladığı x yönündeki kuvvetin büyüklüğü, f negatif x yönünde blok üzerindeki eğimli yüzeyin uyguladığı sürtünme kuvveti, N eğimli yüzey tarafından bloğa uygulanan pozitif y yönünde normal kuvvet ve W dikey olarak aşağı doğru etkiyen bloğun ağırlığıdır. Bloğun ağırlığının x ve y yönlerindeki bileşenleri problemin geometrik temsilinden belirlenebilir (Ek A'daki Şekil A.3'e bakınız):

$$W_x = W \sin \theta$$

$$W_y = W \cos \theta$$



Şekil 4.39 Bloğun serbest cisim diyagramı

Bloğun hedeflenen hareket yönü pozitif x yönünde olduğu için, blok üzerindeki sürtünme kuvveti, bloğun eğimi hareket ettirmesini durdurmak için negatif x yönünde etki eder. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü f , blok üzerindeki eğimli yüzey tarafından uygulanan normal kuvvetin N büyüklüğü ve sürtünme

katsayısı μ ile doğru orantılıdır. μ , orantılılık sabitidir. Bu nedenle, f , N ve μ ilişkisi;

$$f = \mu N \quad (i)$$

Bu örnekteki bilinmeyenler P ve N 'dir. F ve N ile ilgili bir gösterime sahip olduğumuzdan, N bilindiği için f 'de bulunabilir. Problemin çözümü için öncelikle bloğun y yönündeki dengesini göz önünde bulundurduğumuzda:

$$\sum F_y = 0 : N - W_y = 0$$

$$N = W_y = W \cos \theta \quad (ii)$$

N belirlendikten sonra,

$$f = \mu \times N = \mu \times W \cos \theta$$

Kişinin, bloğu hareket ettirmeye başlaması için sürtünme ve yerçekimi etkilerinin üstesinden gelmesi gereken minimum kuvveti belirlememiz istenmektedir. Hareket başlamadan hemen önce denge durumundadır. Bu nedenle, denge durumunu x yönünde uygulayabiliriz:

$$\sum F_x = 0 : P - f - W_x = 0$$

$$P = f + W_x \quad (iii)$$

$W_x = W \sin \theta$ ile birlikte (i) ve (ii) içine (iii) yerine konulursa;

$$P = \mu W \cos \theta + W \sin \theta$$

Bu, P için W , μ ve θ cinsinden genel bir çözümdür. Bu çözüm, düz yatay bir yüzeyi temsil eden (Şekil 4.40) $\theta = 0^\circ$ dâhil olmak

üzere, θ 'nın 90° 'den küçük herhangi bir değeri için geçerlidir. $\theta = 0$ durumu için, $\sin 0 = 0^\circ$ ve $\cos 0 = 0^\circ$ 'dir. Bu nedenle, aynı bloğu yatay bir yüzey üzerinde hareket ettirmek için gereken kuvvet:

$$P = f = \mu W$$



Şekil 4.40 Yatay yüzeyde bloğun itilmesi

Sayısal bir hesaplama yapabilmek için, $W = 1000$ N, $\mu = 0,3$ ve $\theta = 15^\circ$ olduğunu varsayıldığında;

$$P = (0,3)(1000)(\cos 15) + (1000)(\sin 15)$$

$$= 548,6 \text{ N}$$

Bunun sonucunda, 15° eğimli, $0,3$ yüzey sürtünme katsayısına sahip olan yüzeyde 1000 N'luk bloğu hareket ettirmeye başlatmak için kişi eğime paralel bir yönde $548,6$ N'den biraz daha büyük bir kuvvet uygulamalıdır.

Aynı bloğu aynı sürtünme katsayısına sahip yatay bir yüzey üzerinde hareket ettirmek için, kişi yatay bir kuvvet uygulamalıdır.

$$P = (0,3)(1000) = 300 \text{ N}$$

Yatay bir yüzeye kıyasla, kişi bloğun 15° eğimli yüzey üzerinde hareket ettirmek için bloğa %83 daha fazla kuvvet uygulamalıdır:

$$\frac{548,6 - 300}{300} \times 100 = 82,9$$

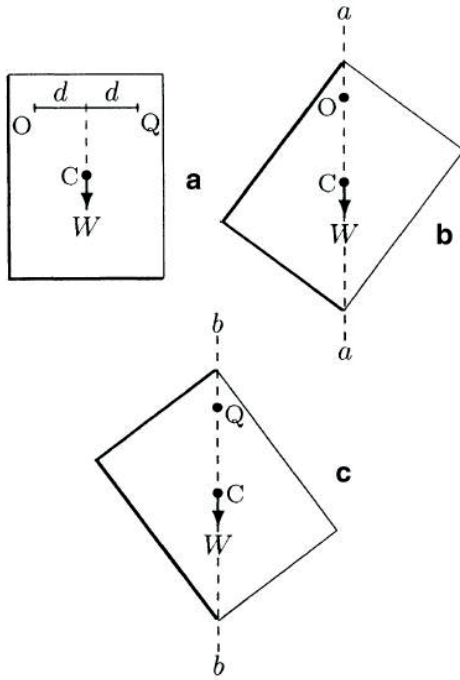
4.12 Ağırlık Merkezi Belirleme

Bölüm 2'de görüldüğü gibi, her nesne, yerçekimi kuvveti tarafından etkilenen sonsuz sayıda parçacıktan oluşmakta ve böylece yayılı bir kuvvet sistemi meydana getirmektedir. Bu kuvvetlerin veya parçacıkların bireysel ağırlıklarının bileşke kuvvetleri, nesnenin toplam ağırlığına eşittir ve nesnenin *ağırlık merkezinde* noktasal bir yük olarak işlev görür. Ağırlık merkezi ile ilgili bir kavram olan *kütle merkezi*, bir nesnenin tüm kütesinin yoğunlaştığı varsayılan bir noktadır. Genel olarak, bir cismin kütle ve yerçekimi merkezleri arasında bir fark vardır. Bu farklılık, nesnenin, cismin farklı bölümlerinde değişen yerçekimi ivmesinin yeterince büyük olması durumunda dikkate alınabilir. Bizim uygulamalarımız için, bir nesnenin kütle ve yerçekimi merkezleri aynı noktadır. Bunlara ek olarak, ağırlık merkezinin içinden geçen dikey çizgiyi ifade etmek için kullanılan yerçekimi çizgisi kavramı da vardır.

Bir nesne, ağırlık merkezinin içinden geçen herhangi bir dikey düzlem tarafından iki parça halinde kesilmesi durumunda, her parçanın

ağırlığı eşit olacaktır. Bu nedenle, nesne doğrudan kendi ağırlık merkezi ya da yerçekimi çizgisi altında bulunan bir basit üçgen destek ile dengelenebilir. Eğer bir nesne simetrik, iyi tanımlanmış bir geometriye ve homojen kompozisyona sahipse, o zaman ağırlık merkezi nesnenin geometrik merkezinde yer alır. Düzensiz şekilli nesnelerin ağırlık merkezlerini bulmak için farklı yöntemler vardır. Yöntemlerden biri nesneyi “askıya almak”tır. Örnek vermek gerekirse, Şekil 4.41'de gösterilen kağıt parçasını dikkate aldığımızda; kağıdın ağırlık merkezinin C noktasında olduğu belirlenmiştir. O ve Q'nun kağıt üzerindeki iki nokta olduğunu düşündüğümüzde; kağıt O noktasından duvara tutturulmuş, kağıdın ağırlık merkezinin O noktasının sağında kalmasından dolayı, kağıt üzerinde O noktasına göre saat yönünde bir moment oluşmuştur. Kağıt bırakıldığı an kağıdın ağırlığı (W), kağıdın saat yönünde dönmesine neden olur, salınım yapar ve son olarak O noktasından geçen dikey bir çizgi *aa* (yerçekimi çizgisi) boyunca uzanan C noktasında durur (Şekil 4.41b). Bu konumda, O noktasına göre net moment sıfırdır, çünkü W'nin moment noktasının O noktasına olan uzunluğu sıfırdır. Eğer kağıt Q noktasında sabitlenirse, kağıt saat yönünün tersi yönde dönecektir ve kısa bir süre sonra C noktasının doğrudan Q noktasının altında veya Q noktasından geçen dikey çizgi (*bb*) boyunca bulunduğu bir konumda duracaktır. (Şekil

4.41c). aa ve bb 'nin kesiştiği noktanın kağıdının ağırlık noktasını göstereceği nokta C noktasıdır.

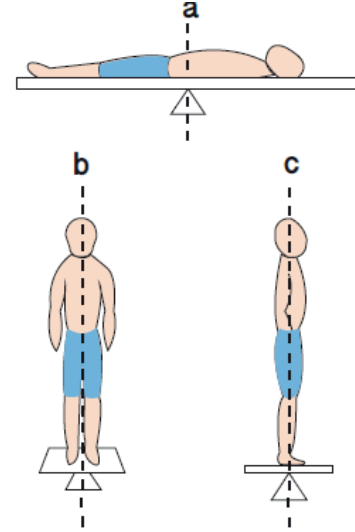


Şekil 4.41 Kağıdın ağırlık merkezi aa ve bb hatlarının kesişme noktasında bulunur (askı yöntemi)

Bir kağıdın göz ardı edilebilir kalınlığa sahip bir düzlem nesnesi olduğunu ve kağıdın iki noktayı askıya almasının, ağırlık merkezini bulmak için yeterli olduğu unutulmamalıdır. Üç boyutlu bir nesne için, nesne iki farklı düzlemde üç noktadan asılmalıdır.

Yerçekimi merkezini bulmak için bir başka yöntem, nesnenin basit bir üçgen destekte "dengelenmesi"dir. Şekil 4.42'de gösterildiği gibi, bir kişinin ağırlık merkezini belirlemek için, önce basit üçgen destekte bir tahta dengelenmelidir ve daha sonra kişi tahtaya sırtüstü yatırılmalıdır. Tahtanın tekrar

dengelenene kadar tahtadaki kişinin konumu ayarlanmalıdır (Şek. 4.42a). Kişinin ayakları ile basit üçgen destekle tahtanın temas noktası arasındaki yatay mesafe, kişinin ağırlık merkezinin yüksekliğidir.



Şekil 4.42 Denge yöntemi

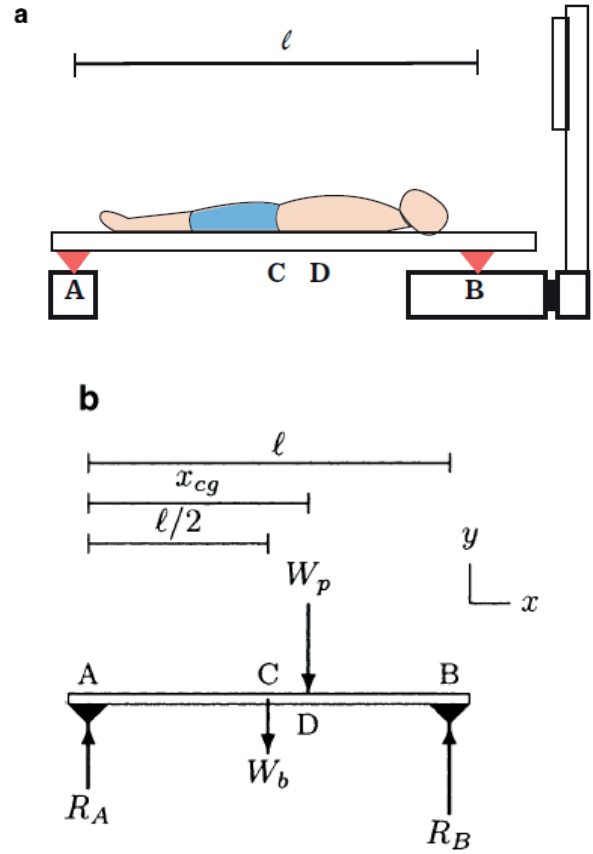
Basit üçgen destekle temas ettiği noktadan, Kişiyi tahta ile birlikte üst ve alt kısımlarına bölen bir düzlem olduğu düşünüldüğünde; kişinin ağırlık merkezinin bu düzlemde bir yerde olduğu bilinmektedir. İnsan gibi üç boyutlu bir cismin, ağırlık merkezinin üç koordinatı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle, aynı ağırlık merkezinin tam olarak belirlenmesi için aynı yöntem diğer iki düzlemde de tekrarlanmalıdır. Bu amaçla, resimde gösterildiği gibi iki ek düzlem verecek olan kişinin anteroposteriyor dengesi göz önünde bulundurulduğunda (Şekil 4.42b, c) bu düzlemlerin kesişimi, kişinin ağırlık merkezine karşılık gelecektir.

Bir cismin ağırlık merkezini bulmanın üçüncü yolu, alt yüzeyine sabitlenmiş iki basit üçgen destekli bir “reaksiyon tahtası” kullanılmasıdır (Şekil 4.43). Tahtanın ağırlığının (W_B) ve desteklerin arasındaki mesafenin (l) bilindiği varsayıldığında; iki kenardan biri olan A bir platform üzerinde durmaktadır, diğer kenar ise (B)’dir ve tahta yatay olarak durmaktadır. Bir kişinin ağırlık merkezinin yeri, kişinin tahtaya yerleştirilmesi ve ölçeğin üzerinde belirtilen ağırlığın kaydedilmesi ile belirlenebilir. Aslında B noktasında tahta üzerindeki tepki kuvveti R_B 'dir. Şekil 4.43b, tahtanın serbest cisim diyagramını göstermektedir. R_A , A noktasındaki tepki kuvvetinin büyüklüğüdür ve W_p , kişinin bilinen ağırlığıdır. Levhanın ağırlığı (W_B), A ve B noktalarından eşit mesafede olan levhanın geometrik merkezinden (C noktası) uygulanır. D, kişinin doğrudan ağırlık merkezi altındaki bir noktadır. A ve D noktaları arasındaki bilinmeyen mesafe x_{cg} ile belirlenir ve bu da tahtanın A noktasına göre rotasyonel dengi dikkate alarak belirlenebilir. Saat yönünde momentlerin pozitif olduğu varsayıldığında

$$\sum M_A = 0 : \frac{1}{2}W_b + x_{cg}W_p - lR_B = 0$$

x_{cg} için bu denklem çözümlerse

$$x_{cg} = \frac{l}{W_p} \left(R_B - \frac{W_b}{2} \right)$$



Şekil 4.43 Reaksiyon tahtası yöntemi

Kişi tahtaya yerleştirildiğinde, ayaklar A noktasındaki basit üçgen desteğin hemen üzerinde olacak, x_{cg} , ise kişinin ağırlık merkezinin zemin seviyesinden ölçülen yüksekliği olarak belirlenecektir.

Bazı durumlarda, bir bütün olarak sistemin ağırlık merkezini belirlemek için bilinen ağırlık merkezlerine sahip başka sistemleri göz önünde bulundurmalıyız. Bu durum ağırlık merkezinin tanımını kullanarak rahatlıkla sağlanabilir. Şekil 4.44'te gösterilen sistemin, çubuklar aracılığıyla birbirine bağlanan W_1 , W_2 ve W_3 ağırlıklarına sahip üç küreden oluştuğunu ve çubukların ağırlığının önemsiz

olduğunu varsayalım. x_1 , x_2 ve x_3 , her kürenin ağırlık merkezlerinin x koordinatları olsun. Kürelerin bireysel ağırlıklarından dolayı O noktasına göre net moment

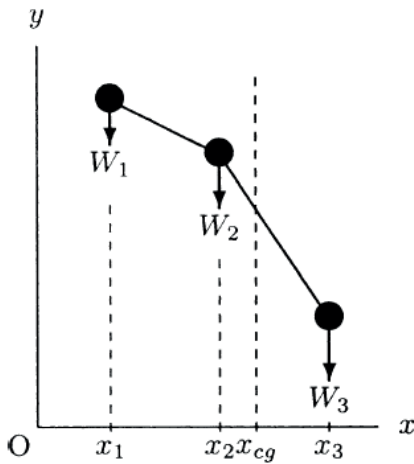
$$M_O = x_1W_1 + x_2W_2 + x_3W_3$$

Sistemin toplam ağırlığı, bir bütün olarak sistemin ağırlık merkezinde hareket ettiği varsayılan $W_1 + W_2 + W_3$ 'tür. x_{cg} , tüm sistemin ağırlık merkezinin x koordinatıysa, o zaman sistemin O noktasının toplam ağırlığının momentini;

$$M_O = x_{cg}(W_1 + W_2 + W_3)$$

Son iki denklem M_O 'yu ortadan kaldıracak şekilde bir araya getirilirse;

$$x_{cg} = \frac{x_1W_1 + x_2W_2 + x_3W_3}{W_1 + W_2 + W_3}$$



Şekil 4.44 x_{cg} , tüm sistemin ağırlık merkezinin x koordinatı

Bu sonuç n kadar parçadan oluşan herhangi bir sistem için genelleştirilebilir:

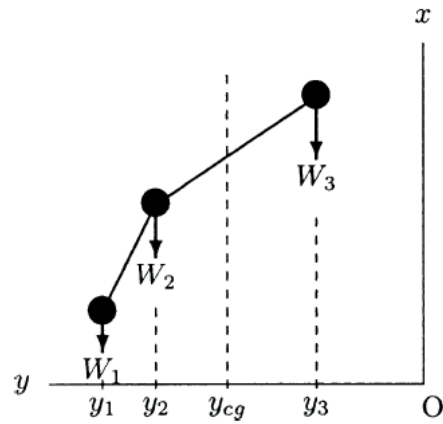
$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (4.12)$$

Denklem (4.12) sadece sistemin ağırlık merkezinin x koordinatını sağlar. Tam merkezini belirlemek için, ağırlık merkezinin y koordinatı da belirlenmelidir. Bunun için, tüm sistem Şekil 4.45'te gösterildiği gibi, 90° bir açı ile döndürülmelidir. y_1 , y_2 ve y_3 kürelerin ağırlık merkezlerinin y koordinatlarına karşılık geliyorsa, o zaman sistemin bütün ağırlık merkezinin y koordinatı:

$$y_{cg} = \frac{y_1W_1 + y_2W_2 + y_3W_3}{W_1 + W_2 + W_3}$$

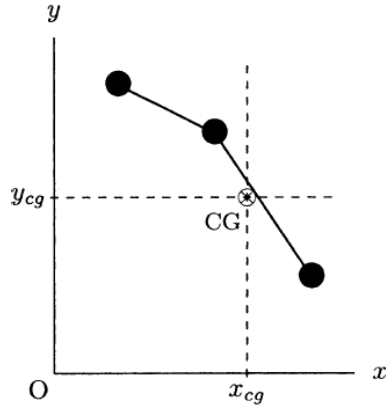
n kadar parçadan oluşan herhangi bir sistem için,

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (4.13)$$



Şekil 4.45 y_{cg} , tüm sistemin ağırlık merkezinin y koordinatı

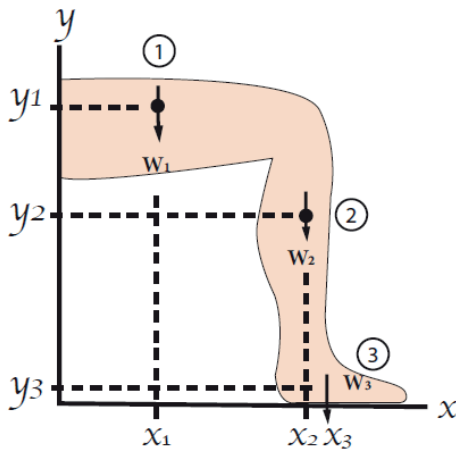
Şekil 4.46'da, tüm sistemin ağırlık merkezi x_{cg} ve y_{cg} 'den geçen dikey çizgilerin kesişme noktasında bulunur.



Şekil 4.46 X sisteminin ağırlık merkezidir

Örnek 4.8 Şekil 4.47'de gösterilen dik açılıya sahip bacak düşünülüğünde; bacağın kalça ve diz eklemleri (üst bacak), diz ve ayak bileği eklemleri ve ayak arasındaki ağırlık merkezlerinin koordinatları ve kalça eklemiyle direkt taban seviyesinden ölçülen değerleri Tablo 4.2'de verilmiştir. Bacağın parçalarının ağırlıkları, kişinin toplam W ağırlığının yüzdesi olarak da Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tüm bacağın ağırlık merkezinin konumunu belirleyin.



Şekil 4.47 Fleksiyon hareketi yapan bacağın ağırlık merkezini belirleme

Tablo 4.2 Örnek 4.8

Parça	x (cm)	y (cm)	W (%)
1	17,3	51,3	10,6
2	42,5	32,8	4,6
3	45,0	3,3	1,7

Çözüm

Tüm bacağın ağırlık merkezinin koordinatları (x_{cg} , y_{cg}) denklem (4.12) ve (4.13) kullanılarak belirlenebilir. Denklem (4.12) kullanılırsa

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

$$x_{cg} = \frac{(17,3)(0,106W) + (42,5)(0,046W) + (45,0)(0,017W)}{0,106W + 0,046W + 0,017W}$$

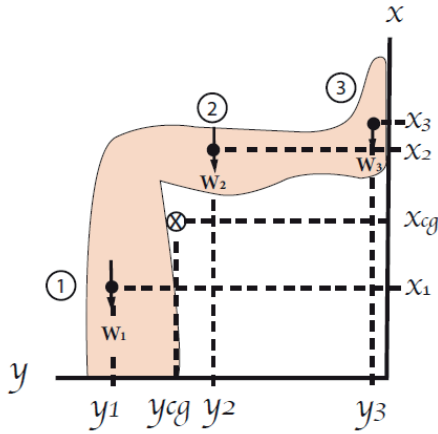
$$x_{cg} = 26,9 \text{ cm}$$

Bacağın ağırlık merkezinin y koordinatını belirlemek için, bacağı Şekil 4.48'de gösterildiği gibi 90° döndürülüp denklem (4.13) uygulanırsa:

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

$$y_{cg} = \frac{(51,3)(0,106W) + (32,8)(0,046W) + (3,3)(0,017W)}{0,106W + 0,046W + 0,017W}$$

$$y_{cg} = 41,4 \text{ cm}$$



Şekil 4.48 X bacağı'nın ağırlık merkezidir

Bu nedenle, dik açıda fleksiyondayken tüm alt ekstremitenin ağırlık merkezi, kalça ekleminin altına 26,9 cm mesafede ve zemin seviyesinden ölçülen 41,4 cm'lik bir yükseklikte yer alır.

Notlar

- Üst ekstremiteler düz iken ayakta duran bir kişinin ağırlık merkezi ikinci sakral vertebranın anteriorundaki pelvisin içinde yer alır. Dikdörtgen koordinat sistemi, kişinin ağırlık merkezine yerleştirilir, o zaman xy düzlemi frontal, koronal veya dikey düzleme karşılık gelir, yz düzlemi sagittal düzlem ve xz düzlemi yatay veya transvers düzlemdir. Frontal düzlem, vücudu ön ve arka kısımlara, sagittal düzlem, gövdeyi sağ ve sol kısımlara ve yatay düzlem, üst ve alt kısımlara ayırır.
- Tüm vücudun ağırlık merkezi, yapıya bağlı olarak kişiden kişiye değişir. Belirli bir kişi için ağırlık merkezinin konumu, belirli bir fiziksel aktivite sırasında ekstremitelerin

göreceli uyumundaki değişikliklere bağlı olarak değişebilirken üst ve alt ekstremitelerin ağırlık merkezlerinin yerleri de değişebilir. Örneğin, alt bacak kısmının ağırlık merkezi, diz fleksiyonda iken geriye doğru kayar. Dirseğin bükülmesiyle tüm kolun ağırlık merkezi ileriye doğru kayar. Bu gözlemler, diz büküldüğünde bacağın doğrudan ağırlık merkezinin kalça ekleminin altına çekileceğini öne sürmektedir. Dirsek büküldüğünde, kol ağırlık merkezini omuz ekleminin altına getirerek geriye doğru hareket etme eğiliminde olacaktır.

4.13 Örnek Problemler

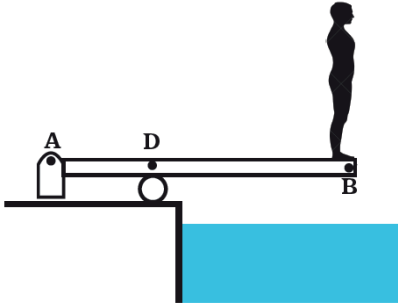
Problem 4.1 Şekil 4.12'de basit üçgen destek ve silindir destek üzerinde duran homojen yatay kiriş üzerinde ayakta duran bir kişi gösterilmektedir. A ve B noktası, sırasıyla basit üçgen destek ve silindirin temas noktalarını belirtmektedir. C noktası kirişin ağırlık merkezi olup A ve B noktalarına eşit uzaklıktadır. Kiriş ve kişinin ağırlıklarına bağlı olarak, A ve B noktalarında tepki oluşmaktadır. Kişinin ağırlığı $W = 625 \text{ N}$, A ve B noktalarındaki tepki büyüklükleri $R_A = 579,4 \text{ N}$ ve $R_B = 735,6 \text{ N}$ ise

- Kirişin ağırlığını (W),
- Kirişin uzunluğunu (l) hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $W = 690 \text{ N}$; (b) $l = 4 \text{ m}$

Problem 4.2 Şekil 4.49'da gösterildiği gibi, 80 kg'lık bir kişi havuza dalmaya hazırlanmaktadır. Dalış tahtası, A noktasından menteşelenmiş ve D noktasında sürtünmesiz bir silindir ile desteklenen homojen, yatay bir kirişle temsil edilmektedir. B, doğrudan kişinin ağırlık merkezi altındaki bir noktadır. A ve B noktaları arasındaki mesafe $l = 6$ m ve A ve D noktaları arasındaki mesafe $d = 2$ m'dir. (Tahtanın üçte biri silindir desteğinin solunda, üçte ikisi sağındadır. Bu nedenle, kuvvet analizleri için, D noktasına bağlı tahtanın iki farklı ağırlığa sahip iki panelden oluştuğunu varsayabiliriz.) Eğer dalış tahtasının toplam ağırlığı 1500 N ise; kiriş üzerindeki A ve D noktalarının tepkilerini belirleyiniz.

Cevaplar: $R_A = 2318$ N (\downarrow), $R_D = 4602$ N (\uparrow)

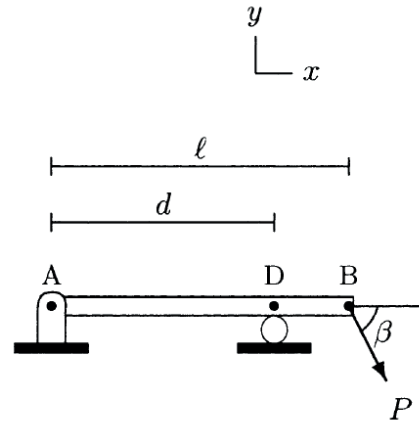


Şekil 4.49 Problem 4.2

Problem 4.3 Şekil 4.50'de homojen, yatay bir kiriş, A noktasından menteşelenmiş ve D noktasında sürtünmesiz bir silindir ile desteklenmektedir. A ve B noktaları arasındaki mesafe $l = 4$ m, A ve D noktaları arasındaki mesafe $d = 3$ m'dir. Kuvvet B noktasından yatayda $\beta = 60^\circ$ 'lik açı yapmaktadır.

Uygulanan kuvvetin büyüklüğü $P = 1000$ N'dir. Kirişin toplam ağırlığı $W = 400$ N'dir.

Kirişin dörtte üçünün silindir desteğinin solunda, dörtte birinin ise sağında olduğunu göz önünde bulundurarak kiriş üzerindeki A ve D noktalarının reaksiyon kuvvetlerinin x ve y bileşenlerini hesaplayınız.

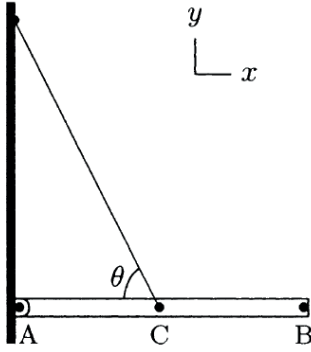


Şekil 4.50 Problem 4.3

Cevaplar:

$$R_D = 1421 \text{ N } (\uparrow), R_{Ax} = 500 \text{ N } (\leftarrow), R_{Ay} = 155 \text{ N } (\downarrow)$$

Problem 4.4 Şekil 4.51'de gösterilen homojen, yatay kiriş, A noktasından duvara menteşelenmiş ve kirişe C noktasından tutturulan bir kabloyla desteklenmektedir. C noktası kirişin ağırlık merkezini de temsil etmektedir. Kablo diğer ucundan, yatayla $\theta = 68^\circ$ açı yapacak şekilde duvara sabitlenmiştir. Kirişin uzunluğu $l = 4$ m ve kirişin ağırlığı $W = 400$ N ise, kablonun çekme kuvveti T'yi ve kiriş üzerindeki A noktasının tepki kuvvetinin bileşenlerini hesaplayınız.



Şekil 4.51 Problem 4.3

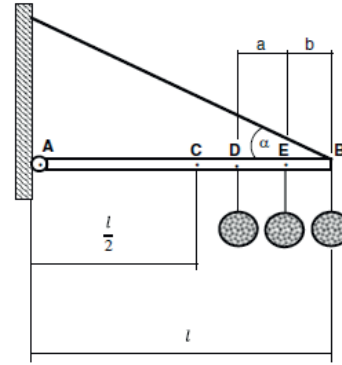
Cevaplar:

$$T = 431 \text{ N}, R_{Ax} = 162 \text{ N}(\rightarrow), R_{Ay} = 0$$

Problem 4.5 Şekil 4.52'de A noktasından duvara meteselenen yatay bir kiriş gösterilmektedir. Üç adet birebir aynı elektrikli aksesuarlar, B, D ve E noktalarından kirişe tutturulmuş ve B noktası aynı zamanda kirişin serbest ucunu temsil etmektedir. Tüm aksesuarlar arasındaki mesafe birbirine eşittir ($BD = DE = a = b = 35 \text{ cm}$). A ve B noktalarına eşit mesafede olan C noktası kirişin ağırlık merkezini ifade eder. Kirişin ağırlığı $W = 230 \text{ N}$, aksesuarların her biri ise 45 N 'dir ($W_1 = W_2 = W_3$). Kirişe B noktasından bir kablo tutturulmuş ve bu kablo yatay ile $\alpha = 45^\circ$ yapmaktadır. Kablonun diğer ucu ise kirişi yerinde tutmak için duvara tutturulmuştur. Eğer kirişin uzunluğu $l = 2,5 \text{ m}$ ise,

- Kablodaki gerilmeyi (T),
- A noktasındaki tepki kuvvetini (R_A),
- Kablo yatayla $\alpha = 65^\circ$ yaptığı zaman, kablodaki gerilmeyi (T_1)

- Kablo yatayla $\alpha = 65^\circ$ yaptığı zaman, A noktasındaki tepki kuvvetinin (R_A) büyüklüğündeki değişimi hesaplayınız.

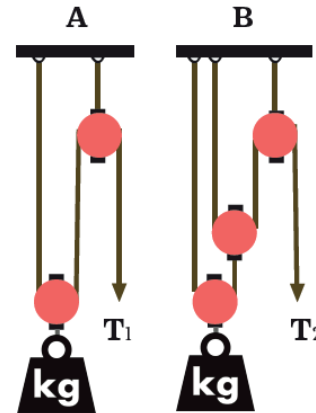


Şekil 4.52 Problem 4.5

Cevaplar:

- $T=817,2 \text{ N}$; (b) $R_A=615,7 \text{ N}$; (c) $T_1=634,8 \text{ N}$; (d) %44,6 azalma

Problem 4.6 Şekil 4.53'te gösterilen iki farklı kablo makara sistemini kullanarak, W ağırlığı belirli bir yüksekliğe çıkarılmaktadır. Her sistem için, kabloyu tutan kişiye ne kadar kuvvet uygulandığını belirleyiniz.



Şekil 4.53 Problem 4.6

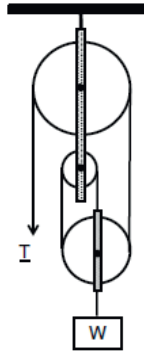
$$\text{Cevaplar: } T_1 = \frac{W}{2}, T_2 = \frac{W}{4}$$

Problem 4.7 Şekil 4.53b'de gösterilen makara kablo sistemini kullanarak belirli bir yükü belirli bir yüksekliğe kaldırmaya çalışan bir kişinin kabloya uyguladığı kuvvet $T=65$ N ise yükün ağırlığını hesaplayınız.

Cevap: $m=26.5$ kg

Problem 4.8

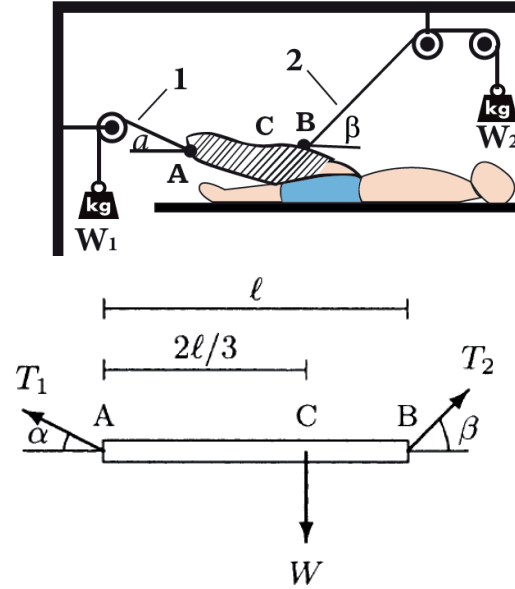
Şekil 4.54'te gösterilen makara kablo sistemini kullanarak $m=50$ kg'lık bir yükü belirli bir yüksekliğe kaldırmaya çalışan bir işçinin kabloya uyguladığı kuvvetin büyüklüğünü T hesaplayınız.



Şekil 4.54 Problem 4.8

Problem 4.9 Şekil 4.55'te Russel kırık traksiyon cihazı ve bacağın mekanik bir modeli gösterilmektedir. Bacak, iki kabloyla bacağa bağlı olan iki ağırlık ile gösterilen konumda tutulur. Bacağın ve alçının toplam ağırlığı $W = 300$ N'dur. l , kabloların bacağa tutturulduğu A ve B noktaları arasındaki yatay mesafedir. C noktası, A noktasından ölçülen l 'nin üçte ikisinde yer alan alçı ve bacağın ağırlık

merkezidir. Yatay ile kablo 2 arasındaki açı $\beta=45^\circ$ olarak ölçülür. Bacağın gösterilen konumda dengede kalması için gereken kablolarda oluşan T_1 ve T_2 çekme kuvvetlerini, W_1 ve W_2 'deki ağırlıklarını ve kablo 1'in yatay ile yaptığı α açısını belirleyiniz.



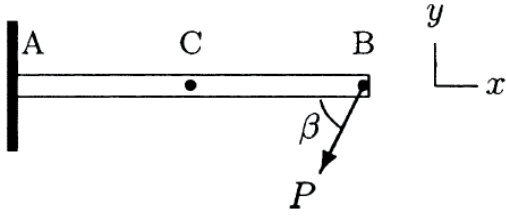
Şekil 4.55 Problem 4.9

Cevaplar:

$$T_1 = W_1 = 223,6 \text{ N}, T_2 = W_2 = 282,8 \text{ N}, \alpha = 26,6^\circ$$

Problem 4.10 Şekil 4.56'da homojen, yatay bir kiriş gösterilmektedir. Kiriş A noktasından sabitlenmiş olup B noktasından yatayla $\beta = 63^\circ$ açı yapan bir kuvvet etkimektedir. Uygulanan kuvvetin büyüklüğü $P = 80$ N'dur. C noktası kirişin ağırlık merkezidir ve kirişin ağırlığı $W = 40$ N, uzunluğu ise $l = 2$ m'dir.

Sabitlenmiş uçta oluşacak tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



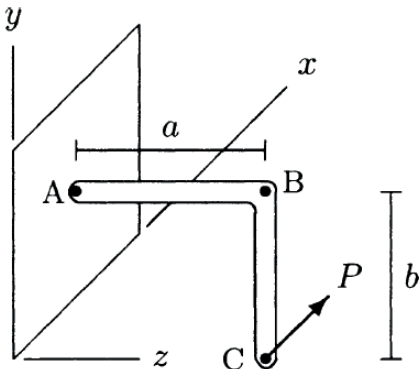
Şekil 4.56 Problem 4.10

Cevaplar:

$$R_{Ax} = 36,3 \text{ N } (+x), R_{Ay} = 111,3 \text{ N } (+y), M_A = 182,3 \text{ Nm (saat yönünün tersi)}$$

Problem 4.11 L şeklindeki kiriş Şekil 4.57’de gösterilmiştir. Kiriş A noktasından duvara sabitlenmiştir, AB kolu z yönünde, BC kolu ise negatif y yönünde uzamaktadır. P kuvveti pozitif x yönünde kirişin serbest ucundan (C noktası) uygulanmaktadır. AB ve BC kollarının uzunlukları a ve b, uygulanan kuvvetin büyüklüğü de P’dir.

Kirişin ağırlığının ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu varsayılırsa, kirişin sabitlenmiş ucunda oluşacak tepki kuvvetlerini a, b ve P cinsinden hesaplayınız.



Şekil 4.57 Problem 4.11 ve 4.12

Cevaplar: Sıfır olmayan kuvvet ve moment bileşenleri

$$R_{Ax} = P(-x), M_{Ay} = aP(-y), M_{Az} = bP(-z)$$

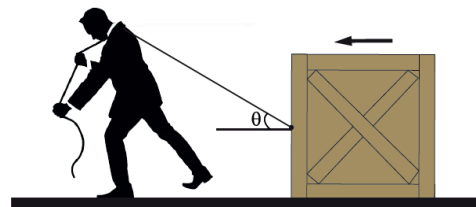
Problem 4.12 Şekil 4.57’de L şekilli kiriş görselleştirilmiştir. P kuvveti kirişin serbest ucundan (C noktası) uygulanmaktadır. Uygulanan P kuvvetinin pozitif x yönünde ve pozitif z yönünde $P = P_x i + P_y j$ şeklinde bileşenleri vardır. Kirişin sabitlenmiş ucunda (A noktası) oluşan tepki kuvvetlerini a, b, P_x , P_y cinsinden hesaplayınız.

Cevaplar:

$$R_{Ax} = P_x(-x); R_{Ay} = 0; R_{Az} = P_y(-z)$$

$$M_{Ax} = bP_z(+y); M_{Ay} = a; P_x(-y); M_{Az} = bP_x(-z)$$

Problem 4.13 Şekil 4.58’de yatay düzlemde halat kullanarak bloğu çekmeye çalışan bir kişi gösterilmiştir. Halat yatayla θ açı yapmaktadır. Bloğun ağırlığı (W) ve yüzey ve blok arasındaki maksimum sürtünme katsayısı (μ) iken kişinin bloğu harekete geçirmek için (sürtünme ve yer çekimi etkilerini yenerek) uygulaması gereken minimum P kuvvetini hesaplayınız.



Şekil 4.58 Problem 4.13 ve 4.14

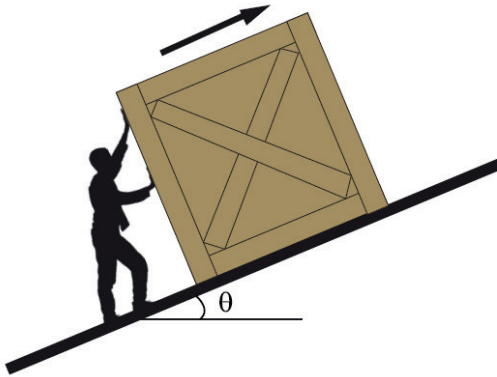
$$Cevaplar: P = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu \sin\theta}$$

Problem 4.14 Şekil 4.58’de yatay düzlemde halat kullanarak bloğu çekmeye çalışan bir kişi gösterilmiştir. Halat yatayla $\theta=15^\circ$ açı yapmaktadır. Eğer, bloğun kütlesi $m=50$ kg, işçi tarafından uygulanan kuvvet $P=156$ N ise yüzey ve blok arasındaki sürtünme katsayısını hesaplayınız.

Cevap: $\mu=0,34$

Problem 4.15 Şekil 4.59’da eğimli bir yüzeyde yatay kuvvet uygulayarak bloğu itmeye çalışan bir kişi gösterilmektedir. Bloğun ağırlığı W , blok ve eğimli yüzey arasındaki maksimum sürtünme katsayısı μ , yüzeyin yatayla yaptığı açı θ ’dır.

Kişinin sürtünme ve yer çekimi etkilerini yenerek bloğu harekete geçirmesi için uygulaması gereken minimum kuvveti (P) W , μ , θ cinsinden hesaplayınız.



Şekil 4.59 Problem 4.15 ve 4.16

$$\text{Cevap: } P = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} W$$

Problem 4.16 Şekil 4.59’da eğimli bir yüzeyde yatay kuvvet uygulayarak bloğu itmeye çalışan

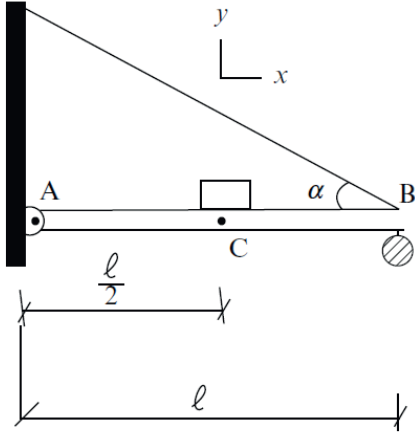
bir kişi gösterilmektedir. Yüzeyin yatayla yaptığı açı $\theta=35^\circ$, blok ve eğimli yüzey arasındaki maksimum sürtünme katsayısı $\mu=0,36$ ’dır. Kişinin sürtünme ve yer çekimi etkilerini yenerek bloğu harekete geçirmesi için uygulaması gereken kuvvet $P=99,8$ N ise,

- Bloğun ağırlığını (W),
- Yüzeyin yatayla yaptığı açı $\theta=25^\circ$ olduğunda kişinin sürtünme ve yer çekimi etkilerini yenerek bloğu harekete geçirmesi için uygulaması gereken kuvvetin büyüklüğündeki değişimi belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W=70$ N; (b) %30,8 azalma

Problem 4.17 Şekil 4.60’da A noktasından duvara menteşelenmiş yatay bir kiriş gösterilmektedir. Kirişin uzunluğu $l=2$ m ve ağırlığı $W=150$ N’dir. C noktası kirişin ağırlık merkezidir ve kirişin iki ucuna eş uzaklıktadır. Halat kirişe B noktasından yatayla $\alpha=50^\circ$ açı yapacak şekilde duvara sabitlenmiştir. Yerçekimi çizgisi C noktasından geçecek şekilde $W_1=50$ N yükü uygulanmaktadır. Başka bir yük $W_2=50$ N, B noktasından kirişe eklenmiştir.

Halattaki çekme kuvveti T ve A noktasında oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

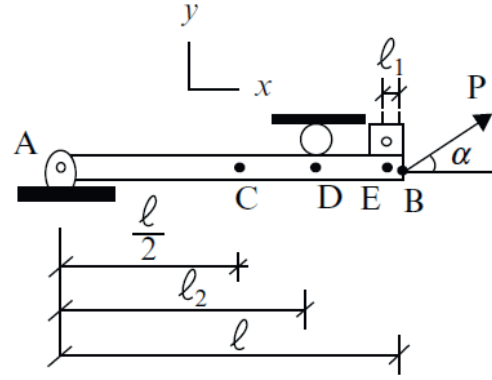


Şekil 4.60 Problem 4.17

Cevap: $T = 196 \text{ N}$, $R_A = 161 \text{ N}$

Problem 4.18 Şekil 4.61'de A noktasından yere menteşelenmiş yatay bir kiriş gösterilmektedir. Kirişin uzunluğu $l = 4,5 \text{ m}$ ve ağırlığı $W = 650 \text{ N}$ 'dir. C noktası kirişin ağırlık merkezini göstermektedir ve A noktasıyla kirişin serbest ucuna (B noktası) eş uzaklıktadır. $P = 850 \text{ N}$ kuvveti B noktasından yatayla $\alpha = 45^\circ$ açı yaparak uygulanmaktadır. Buna ek olarak $W_1 = 125 \text{ N}$ ağırlığı kirişin serbest ucundan yük uygulamaktadır. B noktasıyla yükün yerçekimi çizgisi arasındaki uzaklık $l_1 = 0,3 \text{ m}$ 'dir. Kirişin saat yönünün tersine oluşacak olan rotasyonunu engellemek için D noktasına sürtünmesiz silindir yerleştirilmiştir. A ve D noktası arasındaki uzaklık $l_2 = 3 \text{ m}$ 'dir.

Kirişin A ve D noktalarında oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

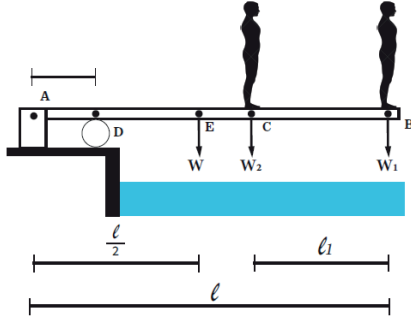


Şekil 4.61 Problem 4.18

Cevap: $R_A = 729 \text{ N}$, $R_D = 239 \text{ N}$

Problem 4.19 Şekil 4.62'de gösterilen iki dalıcı havuza sıralı atlama yapmaya hazırlanmaktadır. Dalıcılar düzgün, yatay dalış tahtasının B ve C noktasında durmaktadırlar. Dalış tahtası A noktasından yere sabitlenmiş ve D noktasındaki sürtünmesiz silindirle desteklenmiştir. Dalış tahtasının uzunluğu $l = 4 \text{ m}$ ve ağırlığı $W = 500 \text{ N}$ 'dir. A ve D noktaları arasındaki mesafe $l_2 = 1,3 \text{ m}$ 'dir. Dalış tahtasının ağırlık merkezi (E noktası) A ve B noktasına eş uzaklıktadır. B ve C noktalarında duran dalıcıların ağırlıkları $W_1 = 680 \text{ N}$ ve $W_2 = 710 \text{ N}$, birbirleri arasındaki mesafe $l_1 = 1,5 \text{ m}$ 'dir.

Dalış tahtasının A ve D noktasında oluşan reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.

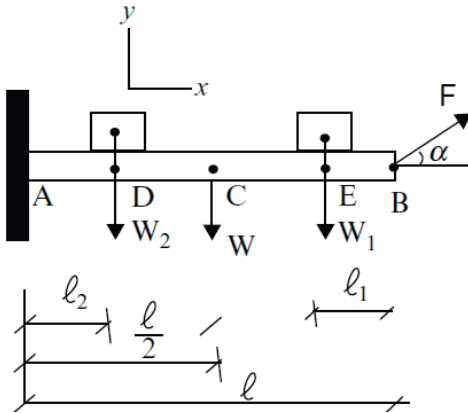


Şekil 4.62 Problem 4.19

Cevap: $R_A = 2337 \text{ N} (\downarrow)$, $R_D = 4227 \text{ N} (\uparrow)$

Problem 4.20 Şekil 4.63'te gösterilen düzgün, yatay kiriş A noktasından duvara sabitlenmiştir. Kirişin serbest ucundan (B noktası) yatayla $\alpha=65^\circ$ açı yapan $F = 135 \text{ N}$ kuvveti etkimektedir. Kirişin uzunluğu $l = 3 \text{ m}$ ve ağırlığı $W = 150 \text{ N}$ 'dir. A ve B noktasına eş uzaklıktaki C noktası kirişin ağırlık merkezidir. İki özdeş kutu $W_1 = W_2 = 80 \text{ N}$ A ve B noktalarından yerçekimi çizgileri $l_1 = l_2 = 0,75 \text{ m}$ uzaklıklarıyla yerleştirilmiştir.

Kirişin sabit ucundaki (A noktası) tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

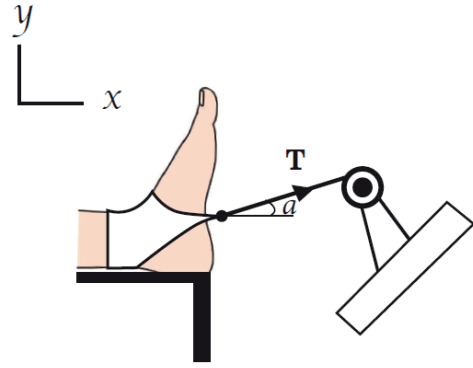


Şekil 4.63 Problem 4.20

Cevap: $R_A = 196 \text{ N}$, $M = 97,8 \text{ Nm}$

Problem 4.21 Şekil 4.64'te basit traksiyon cihazı hastanın bacağına yatayla $\alpha = 35^\circ$ açı yapan makara kablo sistemi gösterilmektedir. Bacak alçılıdır ve alçı ile yatak arasındaki sürtünme kuvveti katsayısı $\mu = 0,45$ 'dir. Bacağın ağırlığı $W = 180 \text{ N}$ 'dir.

Kablodaki çekme kuvvetini hesaplayınız.



Şekil 4.64 Problem 4.21

Cevap: $T = 75 \text{ N}$

Problem 4.22 Şekil 4.24'te gösterilen basit üçlü makara traksiyon sistemi hastanın bacağına yatay kuvvet iletmektedir. Bacak alçılıdır. Kablo makaraların etrafına biri tavana diğeri ağırlık kefesine bağlıdır. Ağırlık kefesinin ağırlığı $W = 12 \text{ N}$ 'dir.

Bacağa etkiyen yatay kuvvetin büyüklüğünü hesaplayınız.

Cevap: $F = 24 \text{ N}$

Bölüm 5

STATİĞİN BİYOMEKANİK UYGULAMALARI

Çeviren: Yunus Uslan

5.1 Eklemler

5.2 Çizgili Kaslar

5.3 Temel Hususlar

5.4 Temel Varsayımlar ve Kısıtlamalar

5.5 Dirseğin Mekanığı

5.6 Omuzun Mekanığı

5.7. Omurganın Mekanığı

5.8. Kalçanın Mekanığı

5.9 Dizin Mekanığı

5.10 Ayak Bileğinin Mekanığı

5.11 Örnek Problemler

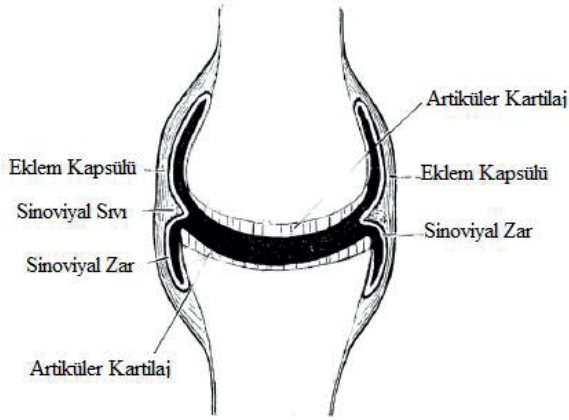
Kaynaklar

5.1 Eklemler

İnsan vücudu duruşunu koruması bakımından rijit, vücut pozisyonunu değiştirmesi ve hareket etmesiyle ise esnek bir yapıdır. İnsan vücudunun esnekliği, temel olarak iskelet sistemindeki eklemlerden kaynaklanır. Eklemlerin başlıca işlevi, iskelet-kas sistemine hareketlilik sağlamaktır. Hareketlilik sağlamanın yanı sıra, bir eklem belirli bir oranda stabiliteye de sahip olmalıdır. Farklı eklemlerin farklı işlevleri olduğu için, değişken hareketlilik ve stabilite derecelerine sahiptir. Bazı eklemler en uygun hareketliliği sağlayacak şekilde oluşmuştur. Örneğin, omuz eklemine (küresel mafsalsal) yapısı kolun üç düzlemde de hareket etmesine olanak sağlar (üç eksenli hareket). Ancak stabiliteyi azaltan bu yüksek hareket kabiliyeti, eklem çıkma gibi sakatlıklara karşı hassasiyetini arttırmaktadır. Bir diğer taraftan, dirsek eklemi esasen tek düzlemde hareket sağlar (tek eksenli hareket) fakat omuz eklemine nazaran daha stabil ve sakatlığa daha az yatkındır. Artmış stabilitenin uç örneği eklemi oluşturan kemikler arasında göreceli olarak harekete izin vermeyen eklemlerde görülür. Kafatasındaki kemiklerin temas yüzeyleri bu eklemlerin tipik örnekleridir.

İnsan iskelet sistemindeki eklemler yapıları ve/veya işlevlerine göre sınıflandırılabilir. Kafatasındaki eklemlerin örnek olarak gösterilebileceği *oynamaz eklemler*, birbirine

sıkı geçen kemiklerden oluşur ve bu kemiklerin göreceli hareketine izin vermez. Omurların arasındaki eklemlerin örnek verilebileceği *yarı oynar (yarı hareketli) eklemler*, hafif bir göreceli harekete izin verir ve kemiklerin birbirlerine doğrudan temasını ortadan kaldıran önleyici bir madde (kıkırdak veya ligament doku) özelliği gösterirler. Üçüncü ve mekanik açıdan en önemli eklem tipi *oynar (hareketli) eklem* olarak adlandırılır. Değişken göreceli hareket derecesine izin veren oynar eklemler; eklem boşlukları, ligament kapsülleri, eklem zarı ve eklem sıvısına sahiptirler. *Eklem boşluğu* eklem kemikleri arasındaki aralıktır. *Ligament kapsülü* eklem kemiklerini bir arada tutar. *Sinoviyal zarı*, yağlayıcı madde olarak görev yapan *sinoviyal sıvıyı* içine alan ligament kapsülünün iç duvarıdır. Sürtünmeyi, aşınmayı ve eklem yüzeyleri arasındaki doğrudan teması kısıtlayarak yırtılmayı azaltma ile yüzeyleri çevreleyen eklem kıkırdağını beslemek işlevleri olan sinoviyal sıvı, akışkan bir malzemedir. Bunun yanı sıra, *artiküler kartilaj*, eklemler üzerindeki yük dağılımını arttırmak ve şokları sönmeyen aşınma-dirençli bir yüzey sağlamak üzere özelleşmiş dokudur. Oynar eklemler; kayar (vertebral fasetler), menteşe (dirsek ve ayak bileği), pivot (proksimal radioulnar), kondiloid (el bileği), eyer (el baş parmağının karpometakarpali) ve küresel mafsalsal (omuz ve kalça) tipi şeklinde alt kategorilere ayrılabilirler.



Şekil 5.1 Hareketli eklem: (1) kemik, (2) ligament kapsülü, (3, 4) sinoviyal zar ve sıvı, (5, 6) artiküler kartilaj ve boşluğu

Bir oynar eklem hareketinin doğası ve eklem stabilitesi; eklem yüzeylerinin birbirine uyumu, eklem kapsülünün özellikleri, eklem etrafındaki ligamentlerin yapısı ve uzunluğu, eklemlerin üzerinden geçen kasların sayısı ve yönünü de içeren birçok etkene bağlıdır.

5.2 Çizgili Kaslar

Genel olarak, insan vücudunda vücut ağırlığının yaklaşık %45'ine karşılık gelen 600'ü aşkın kas bulunmaktadır.

Kalp kası, düz kas ve çizgili kas olmak üzere üç tip kas vardır. *Kalp kası*, kan dolaşımı için kanı pompalayan kalpte bulunan kasılan dokulardır. *Düz kaslar* midede, bağırsak yollarında ve kan damarlarının iç çeperlerinde bulunurlar. *Çizgili kaslar* vücuttaki kemiklere bağlıdır ve kasıldıkları zaman vücudun hareketini sağlarlar.

İnsan vücudunun hareketi, iskelet kaslarının kimyasal enerjiyi mekanik işe çevirerek ürettikleri kuvvetin bir sonucu olarak gerçekleşir. İskelet kaslarının yapısal birimi myofibrillerin bir araya gelmesiyle oluşan kas lifleridir. Myofibriller aktin ve miyozin iplikçiklerden oluşurlar. Kaslar viskoelastik malzeme davranışı gösterirler. Bu, kasların hem katı hem de sıvı benzeri malzeme özellikleri gösterdiği anlamına gelir. Kaslar; gerilip salındıktan sonra merkezde (gerilmemiş) boyut ve şeklini devam ettirmeleri bakımından elastik, harekete karşı sahip oldukları direnç bakımından da *viskoz*durlar.

Bir iskelet kası; bir segmentin diğerine göre göreceli hareketini kontrol eden en az iki farklı kemiğe, aponözler ve/veya tendonlar gibi yumuşak dokular aracılığıyla bağlanırlar. Bir sinirin uyarılmasıyla liflerin kasılması sonucu, kas tutunduğu kemik üzerinde çekme etkisi oluşturur. *Kasılma*, kas dokusunun sahip olduğu eşsiz bir özelliktir. Mühendislik mekaniğinde kasılma, basma yükü altında kısalmaya işaret eder. Kasların mekaniğinde kasılma; kasın kısalması veya uzaması ile olabileceği gibi. Kasın boyunda herhangi bir değişiklik olmadan da gerçekleşebilir. Ayrıca, bir kasın kasılmasının sonucu her zaman çekmedir. Kaslar itme kuvveti uygulayamaz.

Kas kasılmalarının çeşitli türleri vardır. *Konsantrik kasılma*, kas boyunun kısalmasıyla eş zamanlı olarak gerçekleşir (Ör: Ön kolun

fleksiyonu esnasında biceps). *Statik kasılma*, kas uzunluğunun değişmediği zamanlarda gerçekleşir. (Ör: Ön kolun fleksiyondan sonra hareket ettirilmeden tutulması sırasında biceps). *Eksantrik kasılma*, kas boyunun uzamasıyla gerçekleşir (Ön kolun ekstansiyonu esnasında biceps). Bir kas, sadece boyunda kısalma olduğu zaman harekete sebep olabilir (konsetrik kasılma). Belirli bir aktivite esnasında kasın boyu uzuyorsa; kasılmayla oluşan gerilme kasın ilişkili olduğu vücut segmentinin hareketinin kontrolünü amaçlar (eksantrik kasılma). Kas kasılmasına rağmen segmentte hareket oluşmuyorsa; kastaki gerilme, yer çekimi gibi, uygulanan kuvvetlerin, etkisini dengeler.

Çizgili kaslar belirli bir aktivite sırasındaki işlevlerine göre de isimlendirilebilir. Örneğin bir kas, kasılmasıyla harekete sebep oluyorsa *agonist* olarak tanımlanır. Agonist kaslar belirli bir hareketin oluşmasından sorumlu temel kaslardır. Bir *antagonist* kas, başka bir kasın eylemine karşı koyar. *Sinerjik* kas ise aynı eklem hareketinin gerçekleşmesinde agonist kasa yardımcı olan kastır.

5.3 Temel Hususlar

Bu bölümde, insan vücudu ve segmentlerinin çeşitli duruş pozisyonları için kas gruplarında ve eklemlerindeki kuvvetleri irdelemek adına statik prensipler uygulanacaktır. Öncelikli

olarak; başı belirli bir pozisyonda tutabilmek için boyun ekstensör kasları başa ne kadarlık bir gerilme uygulamalıdır, bir kişi eğildiğinde beşinci lomber vertebrada erektör spina kası tarafından uygulan kuvvet ne kadar olur, dirsek, diz ve bilek eklemlerindeki basma, uygulanan dış kuvvetlerle ve farklı segmental dizilimlerle nasıl değişir, femur başına etki eden kuvvet elde taşınan yüklerle nasıl değişir, farklı egzersiz koşulları sırasında çeşitli kas grupları ve eklemlere etki eden kuvvetler nelerdir gibi soruların cevaplanması amaçlanmıştır.

İnsan vücuduna etki eden kuvvetler iç ve dış olarak gruplandırılabilir. İç kuvvetler kaslar, ligamentler, tendonlar ve eklemlerle ilişkilidir. Uygulanan dış kuvvetler; yer çekimi ivmesinin vücut veya segmentlerinin üzerindeki etkisini, egzersiz ve esneme sırasında vücuda şahsen ve/veya mekanik olarak uygulanan kuvvetler, vücuda protezler ve cihazlar tarafından uygulanan kuvvetleri kapsamaktadır.

İskelet kas sistemini içeren statik problemlerde bilinmeyenler genel olarak eklem tepkileri ve kas gerilmeleridir. Bir eklem mekanik analizinin gerçekleştirilmesi için kas bağlantılarının gerçek konumu, vücut segmentlerinin ağırlık veya kütleleri, vücut segmentlerinin ağırlık merkezi, eklem anatomik dönme eksenini gibi kastaki gerilmenin vektör karakteristiklerinin bilinmesi gerekmektedir.

5.4 Temel Varsayımlar ve Kısıtlamalar

Çeşitli duruş pozisyonlarını sürdürmek için gereken kas kuvvetlerinin eksiksiz analizi, kasların insan vücudu içerisindeki karmaşık dizilimleri ve sınırlı bilgi sebebiyle zordur. Vücut segmentlerinin belirli bir eklem etrafındaki göreceli hareketi genel olarak birden fazla kas grubu tarafından kontrol edilir.

Belirli bir biyomekanik problemi statik olarak belirli hale indirgemek ve denge denklemlerini uygulayabilmek adına, eklem etrafındaki kontrolün ana kaynağı olan bir tek kas grubu göz önünde bulundurulabilir. Diğer kas gruplarının eklem yük taşıma mekanizmasına yaptığı muhtemel katkılar ihmal edilmelidir. Bununla birlikte; diğer kasların yaklaşık etkileri, kesit alanları ve ilgili oldukları eklemlerle göreceli konumları göz önünde bulundurularak değerlendirilebilir. Ayrıca, kasın fazik aktivitesi kas sinyallerinin elektromiyografi (EMG) ölçümleri gibi çeşitli deneyler aracılığıyla biliniyorsa farklı kas gruplarındaki gerilmeler de tahmin edilebilir.

İnsan eklemlerinin mekanik analizinde statik ilkeleri uygulayabilmek için aşağıdaki varsayım ve kısıtlamalar benimsenmelidir.

- Eklemlerin anatomik dönme eksenleri bilinmektedir.
- Kas bağlantılarının konumları bilinmektedir.
- Kas gerilmesinin doğrultusu bilinmektedir.

- Segment ağırlıkları ve ağırlık merkezleri bilinmektedir.
- Eklemdeki sürtünme etkenleri ihmal edilebilir.
- Problemlerin dinamik boyutları ihmal edilecektir.
- Sadece iki boyutlu problemler göz önünde bulundurulacaktır.

Bu analizler, analiz edilecek olan segmentin antropometrik verilerinin mevcut olmasını gerekli kılmaktadır. Bu amaçla; vücut segmentlerinin ortalama ağırlık, uzunluk, ağırlık merkezi gibi antropometrik bilgilerin sıralandığı tablolar bulunmaktadır. Mevcut antropometrik verilerinin incelemesi için Chaffin ve ark. (1999), Roebuck (1995) ve Winter ve ark. (2004) tarafından gerçekleştirilen çalışmalar incelenebilir.

Buna istinaden, biyomekanikğin belirli idealleştirilmiş problemlerinin analiz edilmesi gerektiği açıktır. Elde edilen sonuç ve edinilen tecrübelerle dayanarak, bu modeller ilave etkenlerin göz önüne alınmasıyla genişletebilir. Fakat, daha çok etken göz önünde bulunduruldukça verilen problem daha karmaşık bir hal alacaktır.

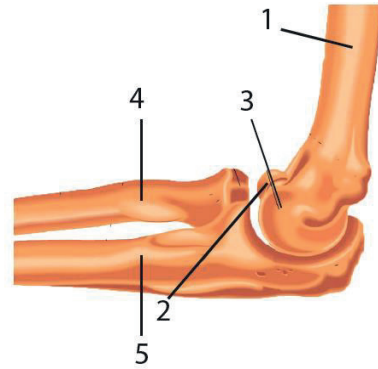
Takip eden kısımlarda, insan vücudunun büyük eklemleri üzerinde ve etrafındaki kuvvetleri analiz edebilmek için statik ilkeleri uygulanmıştır. Öncelikle, her bir eklem ve ilgili kasların işlevsel anatomileri özetlenmiş ve

özgül biyomekanik problemler kurulmuştur. Eklemlerin işlevsel anatomileri hakkında daha bütün bir irdeleme için Nordin ve Frankel'in (2012) ve Thompson'ın (1989) çalışmaları gibi metinler incelenebilir. Daha sonra; kas, kemik ve insan eklemleri ile kablo, kiriş ve mekanik mafsallar gibi bazı mekanik elemanlar arasında bir analogi kurulmuştur. Bu analogi, incelenen biyolojik sistemin mekanik modelinin oluşturulmasını sağlar. Son olarak, Bölüm 4'te "Dengedeki Sistemlerin Analiz Yöntemleri" kısmında özetlenen prosedürler oluşturulan mekanik modelin analizinde uygulanmıştır. Statik ilkelerin biyomekanik uygulamalarına ait ilave örnekler için Le Veau (1992) tarafından gerçekleştirilen çalışma incelenebilir.

5.5 Dirseğin Mekanığı

Dirsek eklemi üç ayrı artikülasyondan oluşur (Şekil 5.2). *Humeroulnar eklem* humerusun distalinde yer alan makara şeklindeki troklea ile ulnanın proksimalindeki içbükey troklea çukurcuğu arasındaki artikülasyondan oluşan bir menteşe (tek düzlemlî) eklemdir. *Humeroulnar eklem*in yapısı, hareketleri dirsek eklemi etrafında fleksiyon (ön kolun üst kola doğru hareketi) ve ekstansiyon (ön kolun üst koldan uzaklaşma hareketi) olarak kısıtlayan tek eksenli bir dönmeye izin verir. *Humeroradial eklem* de humerusun distalindeki kapitulum ile radiusun başı

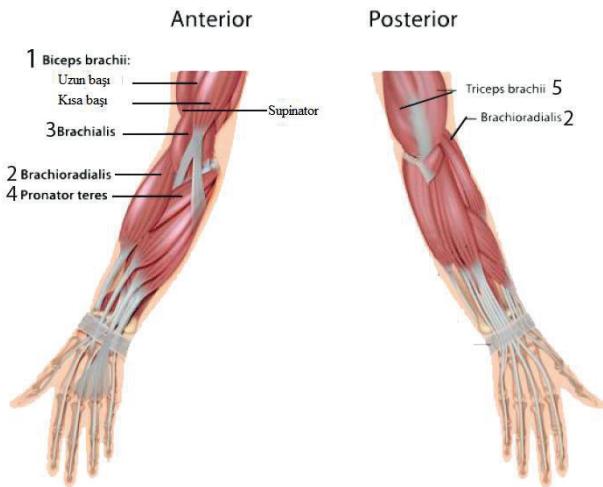
arasında oluşan bir menteşe eklemdir. *Proksimal radioulnar eklem* radiusun başı ile proksimal ulnanın radial çentiği arasında oluşan bir pivot eklemdir. Bu artikülasyon; radius ve ulnanın bir veya diğer kemiğin boylamsal eksenini etrafında pronasyon (avuç içi yukarı bakar konumdan aşağı bakar konuma geçerken gözlemlenen hareket) ve supinasyonunu (avuç içi aşağı bakar konumdan yukarı bakar konuma geçerken gözlemlenen hareket) sağlayan göreceli rotasyon hareketine izin verir.



Şekil 5.2 Dirseğin kemikleri: (1) humerus, (2) kapitulum, (3) troklea, (4) radius, (5) ulna

Dirsek eklemine hareketini koordine ve kontrol eden kaslar Şekil 5.3'te gösterilmiştir. *Biceps brachii* kası, dirsek eklemine, özellikle dirsek eklemi supinasyon pozisyonundayken, güçlü fleksör kaslarından. Ön kolun en güçlü supinatörüdür. *Biceps* kası; distal kısımda radiusun tüberozitesine, proksimal kısımda korokoid çıkıntının üst kısmı ile glenoid çukurun üst dudağına bağlanır. Ön kolun yönünden bağımsız olarak, dirsekte fleksiyona neden olabilen *brachialis* kası bir başka önemli

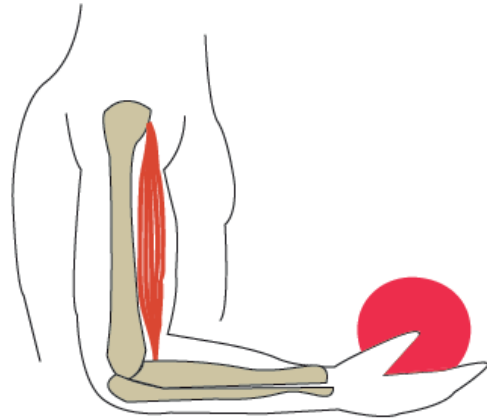
flexördür. Dirseğin en kuvvetli fleksörüdür. Humerusun anterior kısmının aşağı yarısında ve ulnanın koronoid çıkıntısında bağlantıları vardır. Radiusa tutunmadığı için, pronasyon ve supinasyon hareketlerine katılamaz. Dirseğin ekstansiyon hareketini kontrol eden en önemli kas, triseps braki kasıdır. Kürek kemiğinin glenoid boşluğunun alt başına, humerusun posteriyor yüzeyinin üst yarısına, humerusun posterior yüzünün aşağı üçte ikisine ve ulnanın olekranon çıkıntısına bağlanır. Ön kolun pronasyon ve supinasyon hareketleri sırasıyla pronator teres ve supinatör kaslar tarafından gerçekleştirilir. Pronator teres, humerusun iç kondiloid sırtının alt kısımlarına, ulnanın medial kısmına ve radiusun dış yüzeyinin ortasına bağlanır. Supinatör kasının humerusun dış kondiloid sırtında, ulnanın komşu bölgelerinde ve radiusun üst bölümünün dış yüzeyinde bağlantıları vardır.



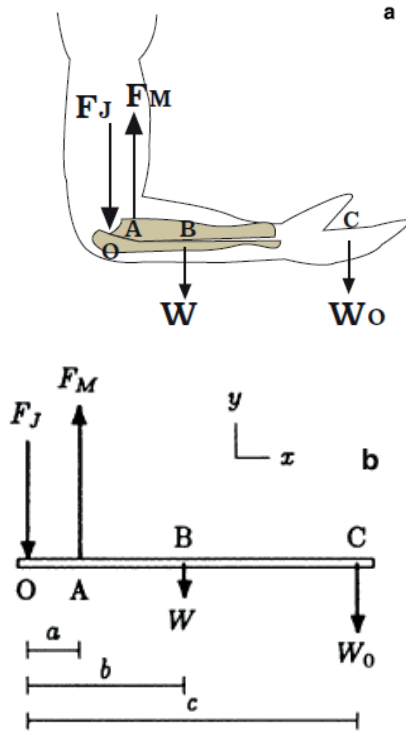
Şekil 5.3 Dirseğin kasları: (1) biceps, (2) brakioradialis, (3) brakialis, (4) pronator teres, (5) triseps braki, (6) ankoneus, (7) supinator

Sık görülen dirsek sakatlıkları kırık ve çıkıklardır. Kırıklar genellikle humerusun epikondiloidlerinde ve ulnanın olekranon çıkıntısında görülür. Dirsek sakatlıklarının bir başka grubu ise tekrarlı hareketler sonucu zarar gören dirsek tendonlarının iltihaplanmasına sebep olan aşırı kullanımla ilişkilidir. Tenisçi dirseği ve golfçü dirseği sendromu bu sınıftadır.

Örnek 5.1 Şekil 5.4'te gösterilen kolu ele aldığımızda; dirsek dik açı yapacak şekilde fleksiyonda ve elde bir cisim tutulmaktadır. Ön kola etki eden kuvvetler Şekil 5.5a'da, ön kolun serbest cisim diyagramı mekanik bir model üzerinde Şekil 5.5b'de gösterilmiştir. Bu model biceps kasının ana fleksör olduğunu ve bispsteki gerilmenin uygulama yönünün dikey olduğunu varsaymaktadır.



Şekil 5.4 Örnek 5.1



Şekil 5.5 Ön kola etki eden kuvvetler

O noktası pratik sebeplerden dolayı sabit kabul edilen dirsek ekleminin dönme eksenini belirtir. A noktası, biceps kasının radius üzerine bağlandığı nokta, B noktası ön kolun ağırlık merkezi, C noktası eldeki ağırlığın ağırlık merkezinden geçen dik çizgi boyunca uzanan ön kol üzerindeki bir noktadır. O noktasıyla A, B ve C noktaları arasındaki mesafeler sırasıyla a , b ve c olarak ölçülmüştür. W_o elde tutulan objenin ağırlığı, W ön kolun toplam ağırlığıdır. F_M biceps tarafından radius üzerine etki eden kuvvetin, F_J dirsek eklemindeki tepki kuvvetinin büyüklüğüdür. Kas kuvvetinin etki çizgisinin dikey olduğuna dikkat edilmelidir. Benzer şekilde, çekim kuvvetleri de dikeydir. Bu sebeple ön kolun dengesi için, eklem tepki kuvvetinin etki çizgisi de dikey olmalıdır (paralel kuvvet sistemi).

Bu örnekte görev, dirsekteki kas gerilmesi ve eklem tepki kuvvetinin büyüklüklerinin belirlenmesidir.

Çözüm

Paralel kuvvet sistemindeki bilinmeyenler F_M ve F_J kas ve eklem tepki kuvvetlerinin büyüklükleridir. Ön kolun dirsek etrafındaki rotasyonel dengesi saat yönünü pozitif olacak şekilde ele aldığımızda:

$$\sum M_o = 0$$

$$cW_o + bW - aF_M = 0$$

$$F_M = \frac{1}{a}(cW_o + bW) \quad (i)$$

Ön kolun y eksenindeki kuvvet dengesi için,

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_J + F_M - W - W_o = 0$$

$$F_J = F_M - W - W_o \quad (ii)$$

Verilen a , b ve c geometrik parametreleri ile W ve W_o ağırlıklarıyla, (i) ve (ii) denklemleri kas ve eklem tepki kuvvetlerinin büyüklükleri için çözülebilir. Örneğin, bu parametrelerin $a=4\text{cm}$, $b=15\text{cm}$, $c=35\text{cm}$, $W=20\text{N}$ ve $W_o=80\text{N}$ şeklinde verildiği varsayıldığında (i) ve (ii) denklemleri;

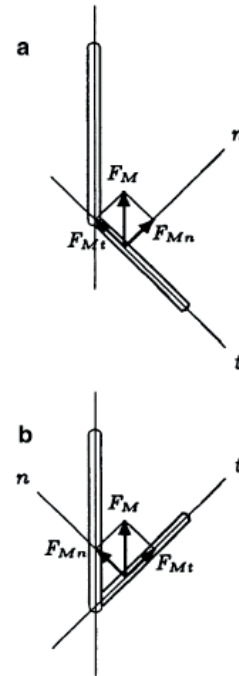
$$F_M = \frac{1}{0.04} [(0.15)(20) + (0.35)(80)] = 775 \text{ N } (+y)$$

$$F_J = 775 - 20 - 80 = 675 \text{ N } (-y)$$

Notlar

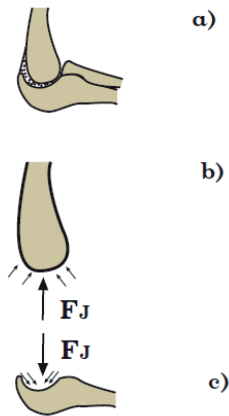
- Sayısal sonuçlar biceps kasının ürettiği kuvvetin, dikkate alınan pozisyonda tutulan cismin ağırlığından yaklaşık on kat daha büyük olduğunu göstermektedir. Dirsek ekleminin eksenine göre; a kas kuvvetinin kuvvet kolu uzunluğu, c elde tutulan yükün kuvvet kolu uzunluğundan çok daha küçüktür. Kuvvet kolu kısaltıkça yükün dirsek ekleminin etrafında saat yönündeki dönme etkisini dengelemek için gereken kas gerilmesi artar. Bu sebeple, dirsek eklemine yakın kas bağlantısına sahip olmak kaldırma sırasında dezavantajlıdır. Bununla birlikte kas eklemeye yaklaştıkça, dirseğin fleksiyon-ekstansiyon hareket açıklığı ve ön kolun distal ucunun (el) üst kol veya omuza doğru hareket amacına ulaşma hızı artar.
- Kas kuvvetinin etki çizgisi ile kas kuvvetinin uygulandığı kemiğin uzunlamasına eksenindeki açı, çekme açısı olarak tanımlanır ve kas kuvvetinin verimliliğinin belirlenmesinde ciddi önem arz eder. Ön kol dik açıyla fleksiyondayken; ön kol üzerindeki kas gerilmesi, kas kuvvetinin uygulama yönüyle ön kolun uzunlamasına eksenine birbirine dik olduğu için, dirsek ekleminin etrafında sadece dönme etkisine sahiptir. Ön kolun diğer fleksiyon pozisyonları için, kas kuvveti translasyonel bileşeninin yanı sıra dönme (sabitleyen veya kayan) bileşenine de sahip olabilir. Şekil 5.6a’da gösterilen bağlantı sisteminin ön kolun üst kola göre göreceli konumunu göstermektedir. n ön kolun uzun eksenine dik (normal) olan yönü gösterirken, t teğet yönü ifade eder. Kas

kuvvetinin uygulama yönünün humerusun uzun eksenine paralel kaldığı varsayıldığında; F_M , F_{Mn} ve F_{Mt} olmak üzere iki dik açılı bileşene ayrılabilir. Bu durumda F_{Mn} , ana işlevi ön kolü dirsek eklemi etrafında döndürmek olmasından dolayı kas kuvvetinin dönme bileşeni olarak adlandırılır. Kas kuvvetinin teğet bileşeni F_{Mt} ise dirsek eklemine sıkıştırarak şekilde hareket eder ve kas kuvvetinin sabitleyici bileşeni olarak adlandırılır. Çekme açısı 90° 'ye yaklaştıkça, kas kuvvetinin sabitleyici bileşeni azalır, dönme bileşeni artar ve böylece dirsek eklemine sıkıştırmak için çok daha az enerji “boşa harcanmış” olur. Şekil 5.6b’de gösterildiği üzere, ön kol ile üst kolun uzun eksenleri arasındaki açı 90° 'nin altında olduğu zaman F_{Mt} kuvvetinin sabitleyici rolü yerini kayma veya yerinden çıkmaya bırakır.



Şekil 5.6 Kas kuvvetinin dönme (F_{Mn}) ve sabitleyici veya kayma (F_{Mt}) bileşenleri

- Dirsek hareketli (sinoviyal) bir eklemdir. Ligament kapsülü, içi eklem sıvısıyla dolu olan eklem boşluğunu çevreler. Eklem sıvısının temel işlevi eklem yüzeylerini yağlayarak, bir eklem yüzeyinin diğeri üzerinde kayarken oluşacak sürtünme kuvvetlerini azaltan viskoz bir malzeme olmasıdır. Eklem sıvısı ayrıca eklem kırırdağını besler. Akışkanların ortak özelliği temas ettikleri yüzeylerde yayılan bir basınç (birim alana düşen kuvvet) oluşturmaktır. Eklem sıvısı temas ettikleri yüzeye doğru dik yönde basma etkisi oluşturacak şekilde davranır. Şekil 5.7'de gösterilen küçük vektörler akışkanın basıncının yatay ve dikey bileşenleri olduğunu göstermektedir. Dirsekteki eklem tepki kuvvetinin ulnayı aşağı dikey bir yönde etkilediği belirlenmiştir. Bu durum, vektörlerin yatay bileşenlerinin birbirini dengelerken (yarısı sol tarafı, yarısı sağ tarafı işaret etmektedir), dikey bileşenlerin birbirlerine eklenerek (Şekil 5.7c'de kesikli ok ile gösterilen) F_J bileşke kuvvetini oluşturduğuna işaret etmektedir. Bu nedenle F_J eklem tepki kuvveti, eklem sıvısı aracılığıyla uygulanan yayılı kuvvet sisteminin (basınç) bileşkesine karşılık gelmektedir.



Şekil 5.7 Dirsekteki eklem tepki kuvvetinin açıklanması

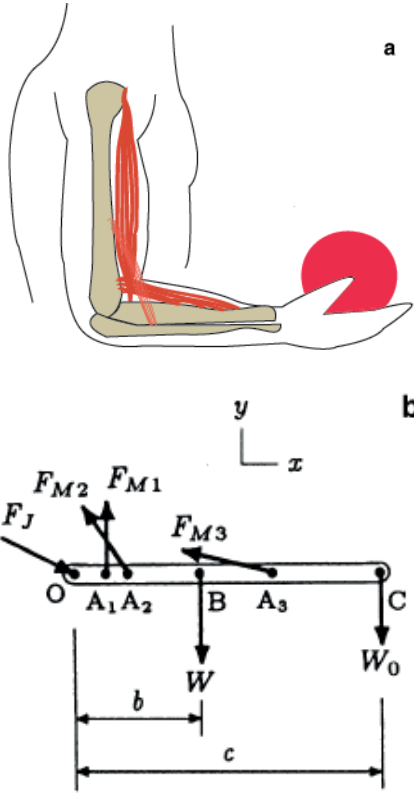
- Bu örnekte yapılan en kritik sadeleştirme bicepsin ön kolun fleksiyonunun devamından sorumlu tek kas grubu olduğu varsayımıdır. Bu varsayımın sebebi incelenen sistemi statik olarak belirli bir sisteme indirgemektir. Gerçekte bicepsin yanı sıra, brakialis ve brakioradialis de dirseğin temel fleksor kaslarındanndır.

Kolun Şekil 5.8a'da gösterildiği gibi kasılı pozisyonu ele alındığında; ön kolun serbest cisim diyagramı Şekil 5.8b'de gösterilmiştir. F_{M1} , F_{M2} ve F_{M3} , ön kolun üzerinde sırasıyla A_1 , A_2 ve A_3 bağlantı noktalarından biceps, brakialis ve brakioradialis kasları tarafından uygulanan kuvvetlerin büyüklükleridir. θ_1 , θ_2 ve θ_3 biceps, brakialis ve brakioradialis kaslarının ön kolun uzun ekseniyle yaptıkları açılarıdır. Üç kaslı bu sistemin analizi iki bilinmeyen (F_M ve F_J) içeren tek kaslı sistemle karşılaştırıldığında çok daha karmaşıktır. Her şeyden önce bu basit bir paralel kuvvet sistemi değildir. Kas bağlantı yerlerinin (A_1 , A_2 ve A_3), çekme açılarının (θ_1 , θ_2 ve θ_3) ve moment kollarının dirsek eklemine olan uzaklıklarının (a_1 , a_2 ve a_3) bilindiği varsayıldığında bile, problemde hala beş bilinmeyen bulunmaktadır. (F_{M1} , F_{M2} , F_{M3} , F_J ve ön kolun uzun ekseniyle F_J arasındaki açı olan β) Statikten elde edebilen denklemlerin toplam sayısı üçtür:

$$\sum M_0 = 0 : a_1 F_{M1} + a_2 F_{M2} + a_3 F_{M3} = bW + cW_0 \quad (i)$$

$$\sum F_X = 0 : F_{Jx} = F_{M1x} + F_{M2x} + F_{M3x} \quad (ii)$$

$$\sum F_Y = 0 : F_{Jy} = F_{M1y} + F_{M2y} + F_{M3y} - W - W_0 \quad (iii)$$



Şekil 5.8 Üç kaslı sistem

Öncelikle kas kuvvetleri belirlenmelidir. (iv) ve (v) denklemleri eklem tepki kuvvetinin bileşenlerinin hesaplanmasında kullanılır. Yalnızca kas kuvvetleriyle ilgileniliyorsa, sadece üç bilinmeyenli denklem (iii)'ten yararlanılabilir. Bir başka deyişle, bu problem statik olarak belirsiz bir denklemdir. Çözümün elde edilebilmesi için F_{M1} , F_{M2} , F_{M3} ile ilişkili ilave bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu problemin çözümü için izlenebilecek birden fazla yaklaşım vardır. Farklı kas grupları arasındaki kuvvet dağılımının tahmini için (1) kasların kesit alanı kullanılarak, (2) kas sinyallerinin EMG ölçümüyle, (3) belirli optimizasyon teknikleri kullanılarak bir kriter belirlenebilir. Her kasın kendi kesit alanıyla orantılı olarak bir kuvvet oluşturduğu varsayılabilir. Biceps, brakialis ve brakioradialisin kesit alanları S_1 , S_2 ve S_3 ise; bu kriter, kas kuvvetleri aşağıda gösterilen şekilde ifade edildiğinde uygulanabilir.

$$F_{M2} = k_{21} F_{M1} \quad \text{with} \quad k_{21} = \frac{S_1}{S_2} \quad (vi)$$

$$F_{M3} = k_{31} F_{M1} \quad \text{with} \quad k_{31} = \frac{S_3}{S_2} \quad (vii)$$

Eğer k_{21} ve k_{31} sabitleri biliniyorsa (vi) ve (vii) denklemleri, Denklem (iii)'te yerine konulabilir ve F_{M1} için çözüldüğünde:

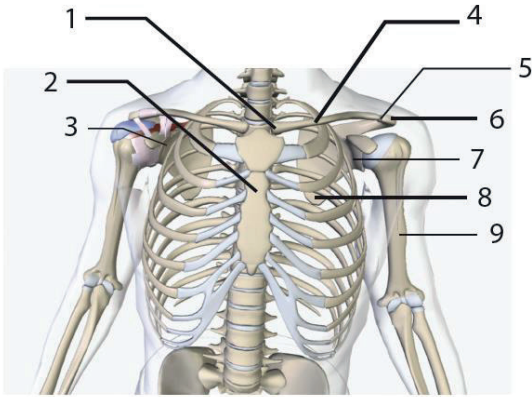
$$F_{M1} = \frac{bW + cW_0}{a_1 + a_2 k_{21} + a_3 k_{31}}$$

F_{M1} , Denklem (vi) ve (vii) tekrar yerine konulduğunda, brakialis ve brakioradialis kaslarındaki kuvvetlerin büyüklüklerini verir. k_{21} ve k_{31} değerleri, kasların EMG sinyallerinin genlikleri kullanılarak tahmin edilebilir. Statik olarak belirsiz problemler bazı optimizasyon tekniklerinin göz önüne alınmasıyla da çözülebilir. Eğer belirli bir işin (statik veya dinamik) en verimli şekilde gerçekleştirilmesi amaçlanıyorsa; vücuttaki kaslar üretilen kuvvetleri, eklemlerin etrafındaki momentleri

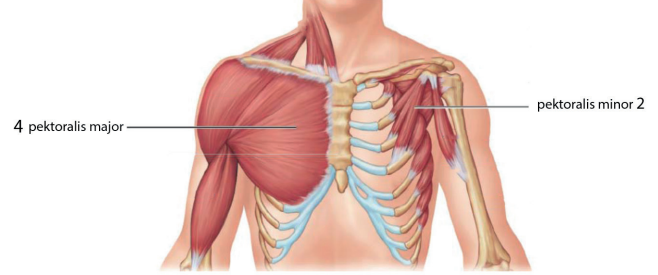
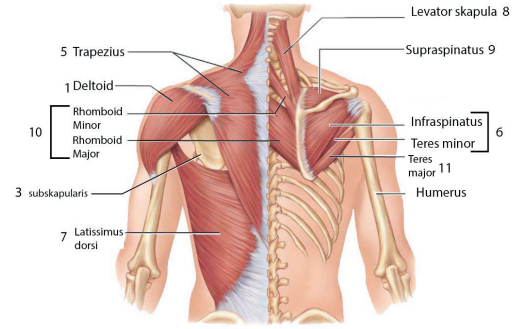
(dinamik durumlar için) ve/veya kaslar tarafından yapılan işi en aza indirecek şekilde çalışırlar. Bu durumda, çeşitli kaslar arasında nasıl bir kuvvet dağılımının en yüksek verime olanak sağladığı sorulabilir. Bu kavramlar ve kaynaklar bölüm 5.11’de kısaca tartışılacaktır.

5.6 Omuzun Mekanığı

Omuz kompleksinin kemikli yapısı ve kasları Şekil 5.9 ve Şekil 5.10’da gösterilmektedir. Omuz üst ekstremitenin bütün hareketlerine temel oluşturur. Omuzun karmaşık yapısı, omuz eklemi ve omuz kemeri olmak üzere ikiye ayrılabilir.



Şekil 5.9 Omuz: (1) sternoklavikular eklem, (2) sternum, (3) glenohumeral eklem, (4) klavikula, (5) akromioklavikular eklem, (6) akromion çıkıntısı, (7) glenoid fossa, (8) skapula, (9) humerus



Şekil 5.10 Omzun kasları: (1) deltoideus, (2) pectoralis minör, (3) subskapularis, (4) pectoralis major, (5) trapezius, (6) infraspinatus ve teres minor, (7) latissimus dorsi, (8) levator skaskapulae, (9) supraspinatus, (10) rhomboideus, (11) teres major

Glenohumeral eklem olarak da bilinen omuz eklemi, hemen hemen yarım küre olan humeral baş (küre) ile skapulanın derin olmayan konkav glenoid fossası (soket) arasında bulunan küresel mafsallık bir eklemdir. Glenoid fossanın sığılığı humeral başa glenoidin eklem yüzeyi üzerinde önemli bir hareket serbestliği sağlar. Omuz, sagittal düzlemde fleksiyon (humerusun öne hareketi- ileri yukarı hareket) ve ekstansiyon (fleksiyondan geri dönüş), koronal düzlemde abduksiyon (humerusun yana doğru yukarıya yatay hareketi) ve adduksiyon (abduksiyondan geri dönüş), transvers

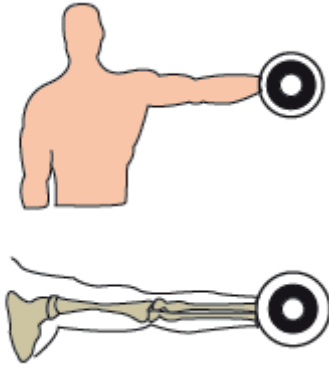
düzlemde dışa rotasyon (humerusun uzun eksenini etrafında lateral tarafa hareketi) ve içe rotasyon (dışa rotasyondan dönüş) hareketlerine izin verir. Omuz ekleminin hareket yüzeylerinin yapısı, eklemi çıkma gibi instabilite ve sakatlıklara daha yatkın kılar. Eklem stabilitesi, glenohumeral ve korakohumeral eklemler ile eklem üzerinden geçen kaslarla sağlanır. Omuz ekleminin başlıca kasları deltoid, supraspinatus, pektoralis major, korakobrakialis, latissimus dorsi, teres major, teres minor, infraspinatus ve subskapularistir.

Omuz kemerinin kemikli yapısı klavikula (köprücük kemiği) ve skapuladan (kürek kemiği) oluşur. Akromioklavikular eklem, klavikulanın distali ile skapulanın akromion çıkıntısı arasında yer alan küçük bir sinoviyal eklemdir. Bu eklem stabilitesi korakoklavikular ligamentler tarafından desteklenir. Sternoklavikular eklem, sternum manubriumu ile klavikulanın proksimali arasında yer alan bir eklemdir. Bu eklem stabilitesi kostaklavikular ligamentler aracılığıyla artar. Akromioklavikular ve sternoklavikular eklemlerin ikisi de kemik yüzeyleri arasında konumlanmış *menisküs* adı verilen kıkırdak katmanına sahiptir.

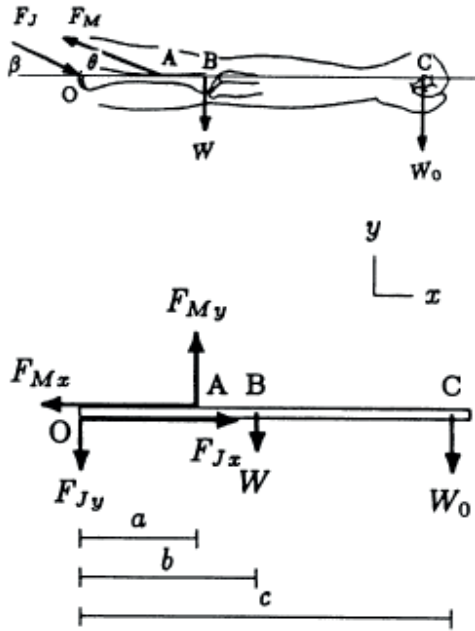
Dört çift skapular hareket bulunmaktadır. Bu hareketler, elevasyon (skapulanın frontal düzlemdeki hareketi) ve depresyon (elevasyondan dönüş), yukarı rotasyon

(glenoid fossanın yukarı dönmesi ve skapulanın alt medial sınırının omurgadan uzaklaşması) ve aşağı rotasyon (yukarı rotasyondan dönüş), protraksiyon (klavikulanın distal ucunun ileri hareketi) ve retraksiyon (protraksiyondan dönüş), ileri ve geri rotasyon (skapulanın, klavikulanın uzun eksenini etrafında dönmesi) olarak adlandırılmaktadır. Bu hareketlerin kontrol ve koordinasyonunu sağlayan ana kaslardan bazıları trapezius, levator skapula, romboid, pektoralis minor, serratus anterior ve subklaviustur.

Örnek 5.2. Şekil 5.11’de ağırlık kaldırma egzersizi ile omuz kaslarını güçlendiren bir kişinin kolu yatayda tam abduksiyundayken, sol kolun konumunu göstermektedir. Kolun serbest cisim diyagramı ve mekanik modeli Şekil 5.12’de gösterilmiştir. Şekil 5.12’de ayrıca kola etki eden kuvvetlerin yatay ve dikey doğrultudaki dik birleşenleri de belirtilmiştir. O noktası omuz ekleminin dönme merkezini, A noktası deltoid kasının humerusa bağlandığı noktayı, B noktası bütün kolun ağırlık merkezini, C noktası kaldırılan ağırlığın ağırlık merkezini belirtmektedir. W kolun ağırlığını, W_O dambılın ağırlığını, F_M deltoid kasındaki gerilmenin büyüklüğüne, F_J omuzdaki eklem tepki kuvvetini göstermektedir. Deltoid kasındaki kuvvetlerin bileşkesi, dikeyli bir θ açısı yapmaktadır. O noktasıyla A, B ve C noktaları arasındaki mesafeler sırasıyla a , b ve c olarak verilmiştir.



Şekil 5.11 Yatayda abduksiyon durumundaki kol



Şekil 5.12 Kola etki eden kuvvetler ve kolu gösteren bir mekanik model

Kolu gösterilen konumda tutabilmek için deltoid kası tarafından üretilen F_M kuvvetinin büyüklüğünü belirleyiniz. Ayrıca, omuz eklemindeki tepki kuvvetinin büyüklüğünü ve yönünü belirli parametreler cinsinden belirtiniz.

Çözüm

xy koordinat sistemine göre; kol ve kaldırılan ağırlık negatif y yönünde etki eder. Kasın ve eklem tepki kuvvetlerinin iki bileşenleri bulunmaktadır. Kas kuvvetinin bileşenleri:

$$F_{Mx} = F_M \cos \theta \quad (-x) \quad (i)$$

$$F_{My} = F_M \sin \theta \quad (+y) \quad (ii)$$

Eklem tepki kuvvetinin bileşenleri:

$$F_{Jx} = F_J \cos \beta \quad (+x) \quad (iii)$$

$$F_{Jy} = F_J \sin \beta \quad (-y) \quad (iv)$$

β açısı eklem tepki kuvvetinin yatay ile yaptığı açıdır. Kasın kol üzerinde oluşturduğu kuvvetin etki çizgisi ve yönü (θ cinsinden) bilinmektedir. Bununla birlikte; kas kuvveti F_M 'in büyüklüğü, F_J 'nin büyüklüğü ve eklem tepki kuvvetinin yönü (β) bilinmeyenlerdir. F_M , F_J ve β (veya F_M , F_{Jx} ve F_{Jy}) olmak üzere toplam üç bilinmeyen bulunmaktadır. İki boyutlu bu problemin çözümünü gerçekleştirebilmek için, üç denge denkleminden de faydalanılması gerekir.

Öncelikle kolun O noktasında omuz eklemi etrafındaki rotasyonel denge ele alınır. Eklem tepki kuvvetlerinin etki çizgisi O noktasından geçtiği için bu nokta etrafında tork oluşturmazlar. Pratik olması açısından, kas kuvvetinin yatay bileşenin etki çizgisinin O noktasından geçtiği varsayılarak bu nokta etrafındaki muhtemel dönme etkisi ihmal

edilebilir. Bu varsayımın problemin çözümünde kritik veya gerekli olmadığı not edilmelidir. Eğer moment kolunun (O ve A noktaları arasındaki dikey mesafe) uzunluğu biliniyorsa, F_{Mx} kuvvetinin o noktası etrafında oluşturduğu tork analize kolaylıkla dahil edilebilir. Bu değerlendirmeler göz önünde bulundurulduğunda, O noktası etrafında moment oluşturan sadece üç kuvvet bulunmaktadır. Kolun rotasyonel dengenin sağlanması için O noktası etrafındaki net moment sifra eşit olmalıdır. Saat yönünün tersindeki momentler pozitif alındığında:

$$\sum M = 0 : aF_{My} - bW - cW_0 = 0$$

$$F_{My} = \frac{1}{a}(bW + cW_0) \quad (v)$$

Verilen a, b, c, W ve W_0 değerleri için, deltoid kası tarafından oluşturulan kuvvetin dikey bileşenini hesaplamak için Denklem (v) kullanılabilir. Devamında, denklem (ii) kullanılarak kas tarafından oluşturulan toplam kuvvet belirlenebilir.

$$F_M = \frac{F_{My}}{\sin\theta} \quad (vi)$$

F_M 'nin bilinmesiyle, Denklem (i) kas gerilmesinin yatay bileşenini belirlemesini sağlar.

$$F_{Mx} = F_M \cos\theta \quad (vii)$$

Eklem tepki kuvvetlerinin bileşenleri kolun yatay ve dikey yönlerindeki translasyonel dengesi göz önüne alınarak belirlenebilir.

$$\sum F_x = 0 \text{ Bu da, } F_{Jx} - F_{Mx} = 0, \text{ ve } F_{Jx} = F_{Mx} \quad (viii)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ Bu da, } -F_{Jy} + F_{My} - W - W_0 = 0,$$

$$\text{ve } F_{Jy} = F_{My} - W - W_0 \quad (ix)$$

Eklem tepki kuvvetlerinin dik bileşenlerinin bilinmesi, kuvvetin büyüklüğünü ve yatayla yaptığı açının hesaplanmasını mümkün kılar.

$$F_J = \sqrt{(F_{Jx})^2 + (F_{Jy})^2} \quad (x)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Jy}}{F_{Jx}}\right) \quad (xi)$$

Eğer, a = 15 cm, b = 30 cm, c = 60 cm, $\theta = 15^\circ$, W = 40 N ve $W_0 = 60$ N olduğu düşünülürse:

$$F_{My} = \frac{1}{0.15} [(0.30)(40) + (0.60)(60)]$$

$$= 320 \text{ N } (+y)$$

$$F_M = \frac{320}{\sin 15^\circ} = 1,236 \text{ N}$$

$$F_{Mx} = (1,236)(\cos 15^\circ) = 1,194 \text{ N } (-x)$$

$$F_{Jx} = 1,194 \text{ N } (+x)$$

$$F_{Jy} = 320 - 40 - 60 = 220 \text{ N } (-y)$$

$$F_J = \sqrt{1,194^2 + 220^2} = 1,214 \text{ N}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{220}{1,194}\right) = 10^\circ$$

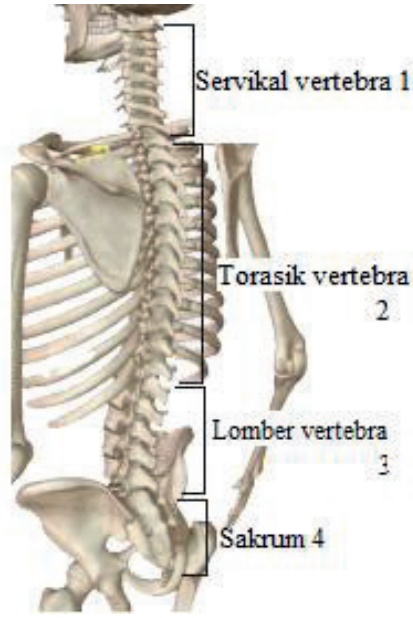
Notlar

- Deltoid kasının sabitleyici bileşeni FMx, dönme bileşeni FMy 'dir. FMx, FMy'den yaklaşık olarak dört kat daha büyüktür. Sabitleyici bileşenin büyük olması, kolun yatay pozisyonunun stabil olmadığı ve bu pozisyonu stabil hale getirmek için kasın yüksek bir yatay kuvvet oluşturduğunu gösterir.
- İnsan omzu sakatlıklara oldukça yatkındır. En yaygın sakatlıklar omuz ekleminin çıkması ve humerus kırıklarıdır. Glunohumeral eklemin çukuru sığ olduğu için, humerusun başı glenoid fossanın eklem yüzeyi etrafında göreceli olarak serbest bir rotasyon hareketi gerçekleştirir. Bu hareket serbestliği eklem stabilitesinin azalması ile sağlanır. Humeral baş; omuzun kas ve ligament yapısının gücü veya zayıflığına ve fiziksel aktiviteye bağlı olarak farklı yollarla yerinden çıkabilir. Humeral kırıklar bir diğer yaygın sakatlık türüdür. Humerus korumasız yapısı sebebiyle sakatlıklara yatkındır.
- Kolun omuz eklemi etrafındaki ortalama hareket açıklığı fleksiyon-ekstansiyon esnasında 230°, abduksiyon-adduksiyon ve içe-dışa dönme hareketlerinde 170°'dir.

5.7. Omurganın Mekanığı

Omurga, insan iskelet-kas sistemindeki en karmaşık bölümdür. Omurganın temel işlevleri; omuriliği korumak, baş, boyun ve üst ekstremiteye destek olmak, baştan gövde ve kalça kemiğine kadar yük aktarımını sağlamak ve çeşitli hareketlere izin vermektir. Omurga servikal (boyun), torasik (göğüs), lumber (bel), sakral ve koksigeal bölgelerden oluşur. Omurganın torasik ve lumber kısımları gövdeyi oluşturur. Sakral ve koksigeal bölgeler pelvisle kaynamış halde bulunur ve pelvis kemerinin parçası olarak sayılabilir.

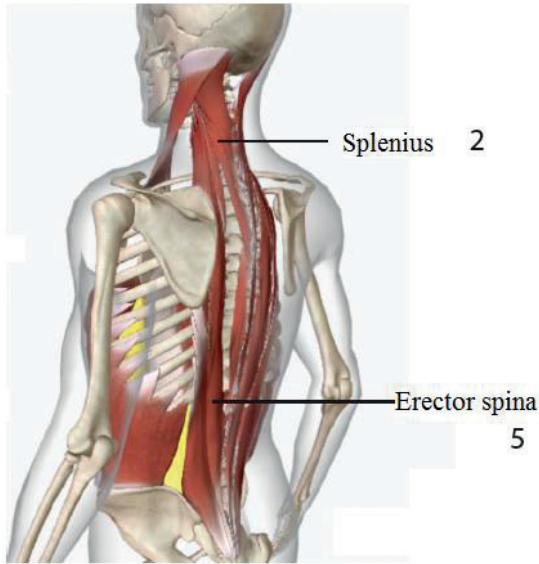
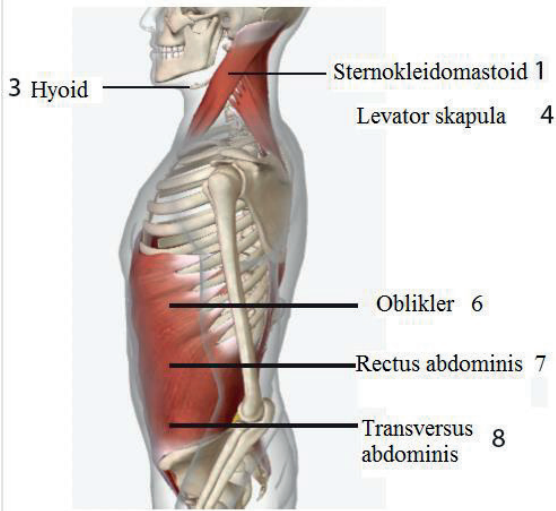
Vertebral kolon 24 düzensiz yapıda omurdan oluşur (Şekil 5.13). Omurlar arasındaki eklemler yarı oynar eklemlerdir. Her omur arasında birer fibrokartilaj disk yer alır. Omurlar arası disklerin temel işlevleri üstteki segmentlerden taşınan yükün iletimini sağlamak, şok sönümleyici görevini üstlenmek, kemiklerin birbirine temasını önlemek ve çarpma kuvvetlerinin etkilerini, omurların kemiksi yapılarının birbiriyle doğrudan temasını önleyerek azaltmaktır. Her bir omurun komşu omurlarla oluşturduğu eklemler üç düzlemde harekete izin verirler ve bütün omurga bir küresel mafsalsal gibi görev yapar. Omurganın yapısı fleksiyon-ekstansiyon, lateral fleksiyon ve dönme gibi pek çok harekete izin verir.



Şekil 5.13 Omurga: (1) Servikal Omurlar, (2) Torasik Omurlar, (3) Lomber Omurlar, (4) Sakrum

Omurganın özellikle iki eklemi baş (kafatasının oksiput kemiği) ile birinci servikal omur, atlas, ve atlas ile ikinci omur, aksis, arasında yer alır. *Atlantoksipital eklem* birinci servikal omur (atlas) ile başın oksipital kemiği arasındaki eklemdir. Bu eklem başın sagittal ve frontal düzlemlerde hareketine izin veren çift kondiloid bir eklemdir. *Atlantoaksiyal eklem* atlas ile başın odontoid çıkıntısı arasındaki eklemdir. Bu eklem başın transvers düzlemde dönmesini sağlayan bir pivot eklemdir. Başın ve boynun hareketlerinin kontrolünü ve koordinasyonunu sağlayan kas grupları prevertebraller (anteriyor), hiyoidler (anteriyor), sternokleidomastoid (anteriyor-lateral), skalen (lateral), levator skapula (lateral), subokspitaller (posteriyor) ve spleni (posteriyor) olarak sıralanır.

Omurga stabilitesi, intervertebral diskler ile omurgayı çevreleyen ligament ve kaslarla sağlanır (Şekil 5.14). Diskler ve ligamentler iç stabiliteyi sağlarken kaslar dış destek sağlar. Omurgadaki kaslar çiftler halinde yer alırlar. Omurganın anterior bölgesindeki kaslar abdominal kasları içerir. Bunlar rektus abdominis, transvers abdominus, dış ve iç oblik kaslarıdır. Bu kaslar gövdenin fleksiyonunda gereken kuvveti ve iç organların düzgün bir şekilde konumlanmasını sağlar. Gövdenin posteriyorunda üç katman kas bulunmaktadır. Bunlar; erektör spina, semispinalis ve derin posteriyor spinal kas gruplarıdır. Omurganın posteriyor kısmında yer alan kasların temel işlevleri gövdenin ekstansiyonunu sağlamaktır. Bu kaslar ayrıca omurgayı yer çekiminin etkilerine karşı desteklemektedir. Kuadratus lumborum kası lateral gövde fleksiyonunda önemli bir yere sahiptir. Bu kas ayrıca pelvis ve lomber omurganın stabil olmasını sağlar. Gövdenin lateral fleksiyonu, abdominal ve posteriyor kas gruplarının eyleminin bir sonucudur. Gövdenin rotasyon hareketi ise anterior ve posteriyor kasların eş zamanlı hareketi ile sağlanır.

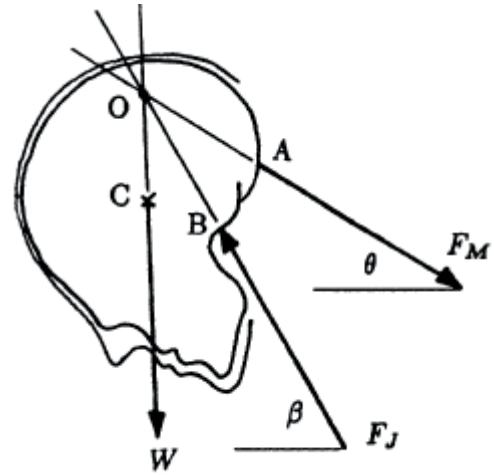


Şekil 5.14 Boyun ve omurganın seçilmiş kasları: (1) splenius, (2) sternokleidomastoid, (3) hiyoid, (4) levator skapula, (5) erektor spina, (6) oblikler, (7) rektus abdominis, (8) transvers abdominus

Omurga çeşitli sakatlıklara yatkındır. Sıvı içinde yer alan ve kemik yapısıyla korunan spinal kordu etkileyen sakatlıklar en ciddi sakatlıklardır. Vertebra kırıkları ve fitik diğer kritik sakatlıklardır. Bel ağrısı da omurganın bel bölgesindeki gerinmelerden kaynaklanabilir.

Örnek 5.3 Şekil 5.15'te baş ve boynun konumu ve başa etki eden kuvvetler gösterilmiştir. 50 N ağırlığındaki başın ağırlık merkezi C noktasında yer almaktadır. F_M boyun ekstensör kasları tarafından kafatasına A noktasından uygulanan kuvvetin şiddetidir. Atlantookspital eklemin merkezi B noktasında yer almaktadır. Başın fleksiyon konumu için boyun kas kuvvetlerinin etki çizgisi yatayla $\beta = 60^\circ$ açı yapmaktadır.

Boyun ekstensör kaslarının başı desteklemek için uygulaması gereken gerilme ne kadardır? Atlantookspital eklemden birinci servikal omur üzerindeki basma kuvveti ne kadardır?



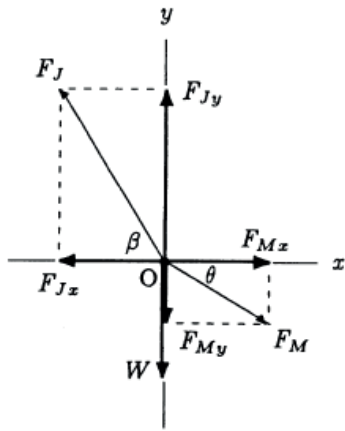
Şekil 5.15 Kafatası üzerindeki kesişen kuvvetler sistemi

Çözüm

Üç kuvvetli bir sistem ile F_M kas kuvveti ve F_J eklem tepki kuvveti olmak üzere iki bilinmeyen bulunmaktadır. Soru nispeten karmaşık bir geometriye sahip olduğu için, üzerine etki eden

kuvvetlerin kesişen veya paralel olduğu durumda dengede olacağı koşulunun kullanılması elverişli olacaktır. Bu soru için, paralel kuvvet sisteminin sağlanamayacağı açıktır. Bu sebeple, kuvvet sistemi kesişen kuvvetlerden oluşmalıdır. Kuvvet sisteminin kesişen olması, bütün kuvvetlerin etki çizgisinin ortak bir kesişim noktası olduğu anlamına geldiği unutulmamalıdır.

Şekil 5.15'te başa etki eden üç kuvvetin de uygulama doğrultuları O noktasında kesişecek şekilde uzatılmıştır. Şekil 5.16'da kafatasına etki eden W , F_M , F_J kuvvetleri xy koordinat sisteminin merkezi seçilen O noktasına ötelenmiştir. Kas ve eklem tepki kuvvetlerinin x ve y dik bileşenlerini aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 5.16 Başa etki eden kuvvetlerin bileşenleri

$$F_{Mx} = F_M \cos \theta \quad (i)$$

$$F_{My} = F_M \sin \theta \quad (ii)$$

$$F_{Jx} = F_J \cos \beta \quad (iii)$$

$$F_{Jy} = F_J \sin \beta \quad (iv)$$

x ve y yönlerindeki kuvvet dengesinden yararlanılarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\sum F_x = 0 \text{ Bu da, } -F_{Jx} + F_{Mx} = 0, \text{ ve } F_{Jx} = F_{Mx} \quad (v)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ Bu da, } -W - F_{My} + F_{Jy} = 0, \text{ ve } F_{Jy} = W + F_{My} \quad (vi)$$

Denklem (i) ve denklem (iii), denklem (v)'te yerine konulduğunda:

$$F_J \cos \beta = F_M \cos \theta \quad (vii)$$

Denklem (ii) ve denklem (iv), denklem (vi)'te yerine konulduğunda:

$$F_J \sin \beta = W + F_M \sin \theta \quad (viii)$$

Bu eşitlikler denklem (viii)'de kullanıldığında:

$$\frac{F_M \times \cos \theta}{\cos \beta} \times \sin \beta = W + F_M \sin \theta$$

$$F_M \times \cos \theta \times \tan \beta = W + F_M \sin \theta$$

$$\tan \beta = \frac{W + F_M \sin \theta}{F_M \cos \theta} \quad (ix)$$

Denklem (ix) bilinmeyen F_M kuvveti için çözüldüğünde:

$$F_M \cos \theta \tan \beta = W + F_M \sin \theta$$

$$F_M (\cos \theta \tan \beta - \sin \theta) = W$$

$$F_M = \frac{W}{\cos \theta \tan \beta - \sin \theta} \quad (x)$$

Denklem (x) kastaki gerilmeyi başın W ağırlığı ile kas ve eklem tepki kuvvetlerinin yatayla yaptıkları θ ve β açılarının bir fonksiyonu

olarak vermektedir. W , θ ve β 'nin sayısal değerleri yerine konulduğunda:

$$F_M = \frac{50}{(\cos 30^\circ)(\tan 60^\circ) - (\sin 30^\circ)} = 50 \text{ N}$$

(i) ve (ii) numaralı denklemlerden:

$$F_{M_x} = (50)(\cos 30^\circ) = 43 \text{ N (+x)}$$

$$F_{M_y} = (50)(\sin 30^\circ) = 25 \text{ N (-y)}$$

(v) ve (vi) numaralı denklemlerden:

$$F_{J_x} = 43 \text{ N (-x)}$$

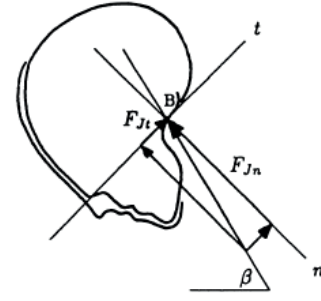
$$F_{J_y} = 50 + 25 = 75 \text{ N (+y)}$$

Eklem tepki kuvvetinin bileşkesi denklem (iii) veya denklem (iv) kullanılarak hesaplanabilir. Denklem (iii) kullanıldığında:

$$F_J = \frac{F_{J_x}}{\cos \beta} = \frac{43}{\cos 60^\circ} = 86 \text{ N}$$

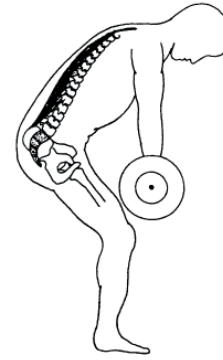
Notlar

- Başın ekstensor kasları, başı gösterilen konumda tutabilmek için 50 N büyüklüğünde bir kuvvet uygulamalıdır. Atlantookspital eklemden oluşan eklem tepki kuvveti yaklaşık 86 N büyüklüğündedir.
- Eklem tepki kuvveti Şekil 5.17'de gösterildiği üzere iki dik bileşene ayrılabilir. F_{J_n} , F_J kuvvetinin eklem yüzeyine baskı uygulayan normal bileşeninin büyüklüğüdür. F_{J_t} ise F_J kuvvetinin eklem yüzeyinde kesme etkisine sahip teğet bileşeninin büyüklüğüdür. Boyun kas ve ligamentlerindeki kuvvetler bu kesme etkisini dengeleyecek şekilde çalışırlar.



Şekil 5.17 Eklem tepki kuvvetinin normal ve teğet bileşenleri

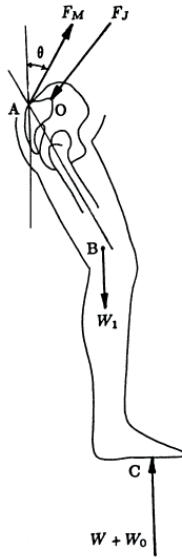
Örnek 5.4. Şekil 5.18'de öne eğilip W_0 ağırlığını kaldıran bir halterci resmedilmiştir. Gösterilen konumda sporcunun gövdesi dikey konumla θ açısı yapacak şekilde fleksiyondadır.



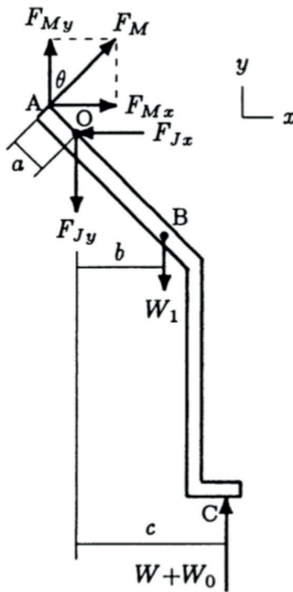
Şekil 5.18 Halterci

Sporcunun vücudunun alt bölümüne etki eden kuvvetler beşinci lomber omur üzerinden geçen bir kesit ele alınarak Şekil 5.19'da gösterilmiştir. Sporcunun alt gövdesinin (pelvis ve bacaklar) mekanik modeli, göz önüne alınacak geometrik parametrelerle beraber Şekil 5.20'de gösterilmiştir. W sporcunun toplam ağırlığı, W_1 kalça ve bacakların ağırlığı, $(W + W_0)$ ayaklarından (C noktası) sporcuya uygulanan yerin toplam tepki kuvveti, F_M erektor spina kaslarının oluşturduğu gövdeyi destekleyen bileşke kuvvet, F_J ise sakrum ve

beşinci lomber omurun birleşiminde (O noktası) oluşan basma kuvvetinin büyüklüğüdür. Bacaklar ve pelvisin ağırlık merkezi B noktasında yer almaktadır. O noktasına göre; kas kuvvetinin, vücudun alt kısmının ağırlığının ve yer tepki kuvvetlerinin kuvvet kolları sırasıyla a, b ve c olarak ölçülmüştür.



Şekil 5.19 Sporcunun vücudunun alt kısmına etki eden kuvvetler.



Şekil 5.20 Serbest cisim diyagramı

Erektor spina kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetin çekme doğrultusunun gövdeye paralel olduğu (dikeyle θ açısı yaptığı) varsayılarak F_M ve F_J kuvvetlerini b, c, θ , W_0 , W_1 ve W cinsinden belirleyiniz.

Çözüm

Bu durum için F_M , F_{Jx} ve F_{Jy} olmak üzere üç bilinmeyen bulunmaktadır. Kas kuvveti, yer tepki kuvveti, bacaklar ve pelvisin ağırlığını oluşturan kuvvetlerin kuvvet kolları O noktasından ölçülerek verilmiştir. Böylelikle, O noktasındaki rotasyonel denge koşulu uygulanarak erektor spina kaslarının oluşturduğu F_M bileşke kuvveti belirlenebilir. Saat yönündeki momentler pozitif varsayıldığında:

$$\sum M = 0 : aF_M + bW_1 - c(W + W_0) = 0$$

Bu denklem F_M için çözüldüğünde:

$$F_M = \frac{c(W+W_0)-bW_1}{a} \quad (i)$$

Sayısal değerleri verilen b, c, θ , W_0 , W_1 ve W için, Denklem (i) kullanılarak bileşke kas kuvvetinin büyüklüğü belirlenebilir. F_M hesaplandıktan sonra aşağıdaki denklemler kullanılarak bu kuvvetin x ve y yönlerindeki bileşenleri de belirlenebilir.

$$F_{Mx} = F_M \sin \theta \quad (ii)$$

$$F_{My} = F_M \cos \theta \quad (iii)$$

Sakrumda oluşan tepki kuvvetlerinin yatay ve dikey bileşenleri, sporcunun vücudunun alt kısmında x ve y yönlerindeki translasyonel denge koşulundan yararlanılarak hesaplanabilir.

$$\sum F_x = 0 \text{ Bu da, } F_{Mx} - F_{Jx} = 0, \text{ ve } F_{Jx} = F_{Mx} \quad (iv)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ Bu da, } F_{My} - F_{Jy} - W_1 + (W + W_0) = 0, \\ \text{ve } F_{Jy} = F_{My} + W + W_0 - W_1 \quad (v)$$

Haltercinin gövdesi dikeyle 45° açı yapacak şekilde eğildiği bir an varsayılır; kuvvet kolları atletin h yüksekliği, ağırlıklar atletin W ağırlığı cinsinden $a = 0.02h$, $b = 0.08h$, $c = 0.12h$, $W_0 = W$ ve $W_1 = 0.4W$ olarak verilirse denklem (i) kullanıldığında:

$$F_M = \frac{(0.12h)(W + W) - (0.08h)(0.4W)}{0.02h} = 10.4 W$$

Denklem (ii) ve (iii)'ten:

$$F_{Mx} = (10.4 W)(\sin 45^\circ) = 7.4 W$$

$$F_{My} = (10.4 W)(\cos 45^\circ) = 7.4 W$$

Denklem (iv) ve (v)'ten:

$$F_{Jx} = 7.4 W$$

$$F_{Jy} = 7.4 W + W + W - 0.4 W = 9.0 W$$

Böylece sakrumdaki eklem tepki kuvvetinin büyüklüğü:

$$F_J = \sqrt{(F_{Jx})^2 + (F_{Jy})^2} = 11.7 W$$

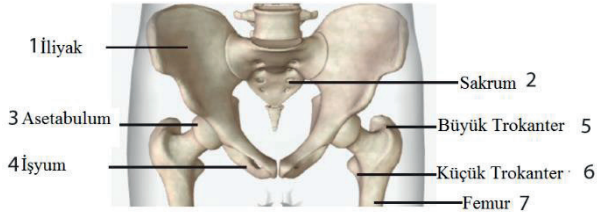
Not

- Elde edilen sonuçlar oldukça büyüktür. Halterci 45° öne eğildiğinde ve kendi vücut ağırlığına eşit büyüklükteki bir ağırlığı kaldırdığında, erektor spina kasları sporcunun ağırlığından on kat daha büyük bir kuvvet üretir ve sakrum ile beşinci lomber omurun birleşimine vücut ağırlığının yaklaşık 12 katı kuvvet uygulanır.

5.8. Kalçanın Mekanik

Femur başı ve pelvisin asetabulumu arasındaki eklem (Şekil 5.21) hareketli bir eklemdir. Kalça eklemine stabilitesi nispeten rijit olan küresel mafsalsal tipi yapısı, ligamentleri ve etrafındaki büyük ve güçlü kasları sayesinde sağlanmaktadır. Femoral baş, asetabulumun derin çukuruna oturmuştur. Labrum (düz bir fibrokartilaj kenarlık) ile birlikte kalça eklemine ligamentleri de femoral başın hareketi esnasında femoral başın asetabulumun içinde kalmasını ve desteklenmesini sağlarlar. Kalça eklemine yapısı oldukça stabildir ve yüksek hareket kabiliyetine sahiptir. Dolayısıyla yürüme, oturma ve çömelme gibi geniş hareket açıklığı gerektiren aktivitelere izin verir. Femurun kalça eklemine hareketleri fleksiyon, ekstansiyon, abduksiyon, adduksiyon, içe ve dışa dönmeyi içermektedir. Bazı durumlarda bu hareketler; ligamentler, kaslar, ve/veya kalçanın kemik yapısı tarafından engellenebilir. Femoral baş ve asetabulumun eklem yüzeyleri hiyalin kıkırdak ile kaplıdır.

Kalçadaki dengesizlikler, eklem kırırdağındaki kuvvet dağılımının bozulmasına ve böylece dejeneratif artrite neden olabilir.

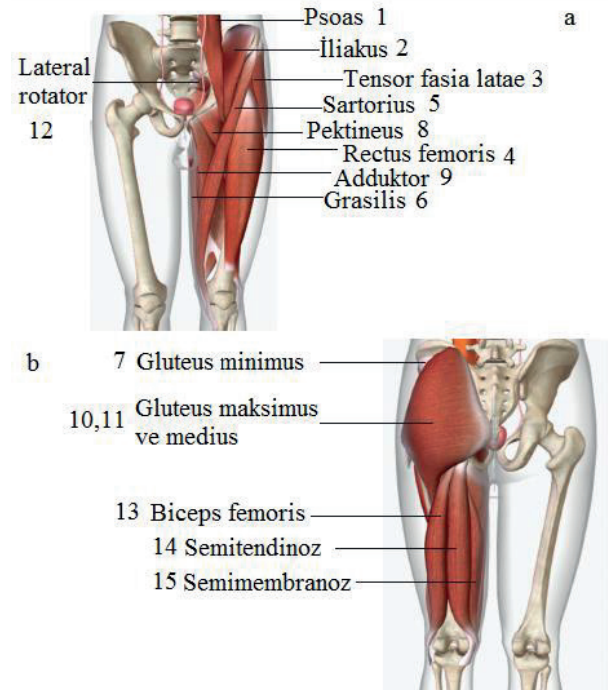


Şekil 5.21 Pelvis ve kalça: (1) iliyak, (2) sakrum, (3) asetabulum, (4) işyum, (5) büyük trokanter, (6) küçük trokanter, (7) femur.

Pelvis; iliyum, işyum, pubis kemikleri ve sakrumdan oluşur. Bu kemikler, doğumda ve büyüme boyunca birbirlerinden ayırılırlar. Yetişkinlerde ise pelvis kemikleri kaynar ve harekete izin vermeyecek şekilde hareketsiz bir ekleme dönüşürler. Pelvis, omurga ve iki femur kemiğinin arasında yer alır. Pelvisin konumu onu nispeten daha az stabil yapar. Pelvisin hareketleri omurga ve femurun hareketlerinin gerçekleşmesi sırasında oluşur. Temel amacı pelvisi hareket ettirmek olan bir kas grubu bulunmamaktadır. Pelvisin hareketi, gövde ve kalçanın kasları aracılığıyla gerçekleşir.

Kalça eklemine kasları temel görevlerine göre birkaç gruba ayrılabilir (Şekil 5.22). Psoas, iliakus, rektus femoris, pektineus ve tensor fascia latae temel kalça fleksorleridir. Bu kaslar aynı zamanda koşma ve yürüme gibi aktivitelerin gerçekleştirilmesinde de kullanılır. Gluteus maksimus, hamstring kasları (biceps femoris, semitendinoz ve semimembranoz kasları) kalça ekstensorleridir. Bunlardan biceps femoris,

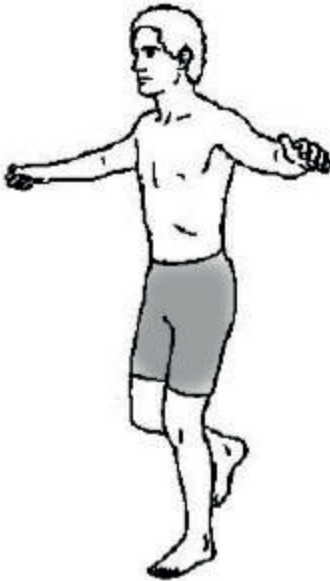
semitendinoz ve semimembranoz ayrıcalık diz fleksorleridir. Gluteus medius ve gluteus minimus femurun içe rotasyonunu sağlayan kalça abduktörleridir. Gluteus medius ayrıca pelvisin frontal düzlemde stabilitesini sağlayan temel kas grubudur. Adduktor longus, adduktor brevis, adduktor magnus ve grasilis kasları kalça abduktörleridir. Bu kaslar ayrıca küçük, derine yerleşmiş femurun dışa rotasyonunu sağlayan kaslardır.



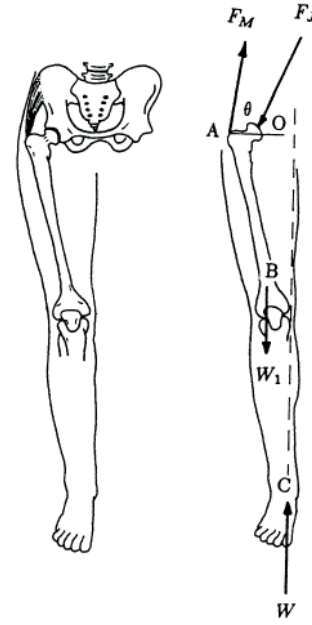
Şekil 5.22 Kalçanın kasları (a) anterior ve (b) posterior görünüşleri: (1) psoas, (2) iliakus, (3) tensor fascia latae, (4) rektus femoris, (5) sartorius, (6) grasilis, (7) gluteus minimus, (8) pektineus, (9) adduktorler, (10), (11) gluteus maksimus ve medius, (12) lateral rotator, (13) biceps femoris, (14) semitendinoz, (15) semimembranoz

Kalça kasları genelde pelvis bölgesindeki oluşan kontüzyon ve gerilmelerden zarar görür.

Örnek 5.5 Yürüme ve koşma esnasında vücut ağırlığı anlık olarak bir bacağın üzerine biner (Şekil 5.23'te sağ ayak). Bu şekilde tek ayak üzerinde duruşta toplam vücut ağırlığını taşıyan bacak üzerine etki eden kuvvetler Şekil 5.24'te gösterilmiştir. F_M kalça abduktör kasları tarafından üretilen bileşke kuvvetin büyüklüğü, F_J femur üzerine pelvis tarafından uygulanan eklem tepki kuvvetinin büyüklüğü, W_1 bacağın ağırlığı, W bacağına yerden tepki kuvveti olarak uygulanan toplam vücut ağırlığıdır. Bileşke kas kuvvetinin etki çizgisinin yatayla yaptığı açı θ olarak ifade edilmiştir.

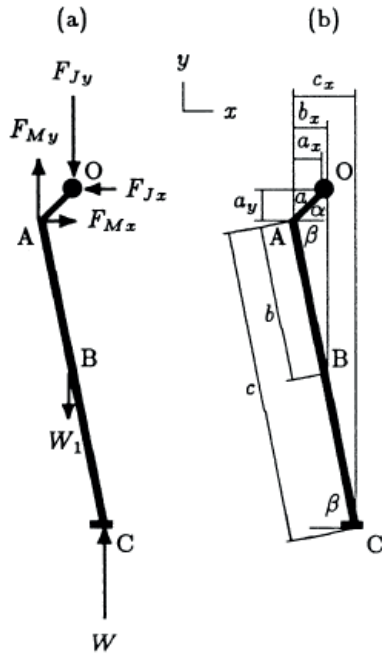


Şekil 5.23 Tek ayak üzerinde duruş



Şekil 5.24 Vücudun bütün ağırlığını taşıyan sağ ayak üzerine etki eden kuvvetler

Bacağın mekanik modeli, üzerine etki eden kuvvetlerin dikey bileşenleri ve sorunun geometrisini tanımlamada gerekli parametreler Şekil 5.25'te gösterilmiştir. O noktası kalça ekleminin anlık dönme ekseninin uzandığı nokta, A noktası kalça abduktör kaslarının femura bağlandıkları nokta, B noktası bacağın ağırlık merkezi, C noktası yer tepki kuvvetinin ayağa uygulandığı noktadır. A noktası ile O, B ve C noktaları arasındaki mesafe sırasıyla a, b ve c olarak tanımlanmıştır. α femoral boyununun, β femoral shaftın uzun ekseninin yatayla yaptıkları açılarıdır. Bu sebeple $\alpha + \beta$ yaklaşık olarak femurun boynuyla shaftı arasındaki açıya eşittir.



Şekil 5.25 Bacağın serbest cisim diyagramı

(a), ve geometrik parametreler (b)

Kalça abduktör kasları tarafından üretilen kuvveti, bacağı ve kalçayı gösterilen konumda destekleyen eklem tepki kuvvetini belirleyiniz.

Çözüm 1: Bacağın serbest cisim diyagramı kullanılarak

Problemin çözümü için kişinin bütün ağırlığını taşıyan sağ ayağın serbest cisim diyagramından yararlanılabilir. Şekil 5.25a'da kas ve eklem tepki kuvvetlerinin x ve y yönlerindeki bileşenleri gösterilmiştir. Bileşke kas kuvvetinin etki çizgisi yatayla θ açısı yapmaktadır. Bu sebeple,

$$F_{Mx} = F_M \cos \theta \quad (i)$$

$$F_{My} = F_M \sin \theta \quad (ii)$$

θ açısı belirli (ölçülen bir büyüklük olarak verilmiştir) olduğu için, kas kuvveti için tek

bilinmeyen F_M büyüklüğüdür. Eklem tepki kuvveti için ne kuvvetin büyüklüğü ne de yönü bilinmemektedir. O noktasında bulunan kalça ekleminin dönme eksenine göre moment kolu; Şekil. 5.25b'de gösterildiği üzere dikey F_{My} bileşeni için a_x , yatay F_{Mx} bileşeni için a_y 'dir. Benzer şekilde W_1 ($b_x - a_x$); W yerden bacağına uygulanan tepki kuvvetidir ($c_x - a_x$);

$$a_x = a \cdot \cos \alpha \quad (iii)$$

$$a_y = a \cdot \sin \alpha \quad (iv)$$

$$b_x = b \cdot \cos \beta \quad (v)$$

$$c_x = c \cdot \cos \beta \quad (vi)$$

Sorudaki bütün kuvvetlerin yatay ve dikey bileşenleri, O noktasına göre moment kolları tespit edilip, A noktasına etki eden bileşke kuvvetin büyüklüğünü belirlemek için bacağın O noktası etrafındaki rotasyonel denge koşulu sağlanmıştır. Saat yönündeki momentlerin pozitif olduğu varsayıldığında:

$$\sum M = 0 : a_x F_{My} + a_y F_{Mx} - (c_x + a_x) W + (b_x - a_x) W_1 = 0$$

Denklem (i)'den Denklem (vi)'ya kadar olan eşitlikleri yukarıdaki denklemde yerine koyunca:

$$\begin{aligned} & (a \cos \alpha)(F_M \sin \theta) \\ & - (a \sin \alpha)(F_M \cos \theta) \\ & - (c \cos \beta) W \\ & - a \cos \alpha) W \\ & + (b \cos \beta - a \cos \alpha) W_1 = 0 \end{aligned}$$

Bu denklem kas kuvveti için çözüldüğünde:

$$F_M = \frac{(cW - bW_1) \cos \beta - a(W - W_1) \cos \alpha}{a(\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)} \quad (vi)$$

Denklem (vii)'in paydasının $a \sin(\theta - \alpha)$ olarak sadeleştirilebilir. Eklem tepki kuvvetlerinin bileşenlerinin hesaplanması için bacağın yatay ve dikeydeki denge koşulu kullanılır:

$$\sum F_x = 0 : F_{Jx} = F_{Mx} = F_M \cos \theta \quad (vii)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Jy} = F_{My} + W - W_1 = F_M \sin \theta + W - W_1 \quad (viii)$$

Böylece kalça eklemine etki eden bileşke kuvvet:

$$F_J = \sqrt{(F_{Jx})^2 + (F_{Jy})^2} \quad (x)$$

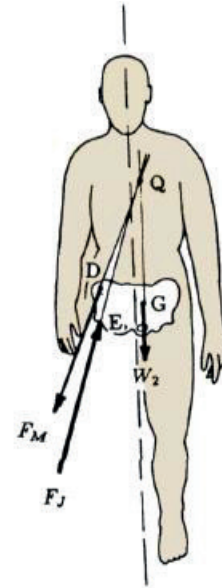
Geometrik parametreler ve bacak ağırlığının, kişinin uzunluğu h ve kişinin ağırlığı W cinsinden

$a = 0.05h$, $b = 0.20h$, $c = 0.52h$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 80^\circ$
 $\theta = 70^\circ$ ve $W_1 = 0.17W$ şeklinde ölçüldüğü varsayalım. Yukarıdaki denklemler için kas ve eklem tepki kuvvetleri $F_M = 2.6W$ ve $F_J = 3.4W$; eklem tepki kuvvetinin yatayla yaptığı açı $\varphi = \tan^{-1}(F_{Jy} / F_{Jx})$ olarak hesaplanır.

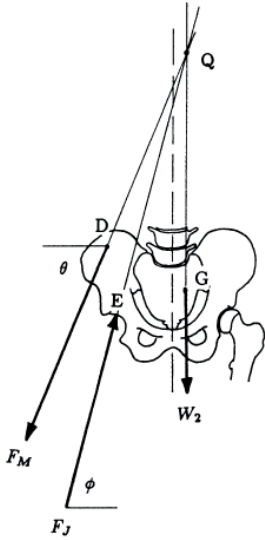
Çözüm 2: Üst gövdenin serbest cisim diyagramı kullanılarak

Aynı probleme alternatif olarak sunulan bu çözüm yolunda, sağ bacağın serbest cisim diyagramı yerine üst gövdenin (sol bacak dahil) serbest cisim diyagramı kullanılır. Üst gövdeye etki eden kuvvetler Şekil 5.26 ve Şekil 5.27'de

gösterilmiştir. F_M , D noktasında kalça abduktör kasları tarafından pelvise uygulanan bileşke kuvvetin büyüklüğüdür. θ bileşke kas kuvvetinin etki çizgisi ile yatay eksen arasındaki açıdır. F_J , E noktasında femur başının kalça eklemi üzerindeki eklem tepki kuvvetinin büyüklüğüdür. $W_2 = W - W_1$ (toplam vücut ağırlığı ile sağ ayağın ağırlığının farkı) üst gövde ve sol ayağın ağırlıklarının G noktası üzerindeki bileşkeleridir. G noktasının tüm vücudun ağırlık merkezi olmadığına dikkat edilmelidir. Serbest cisim diyagramına sağ ayak dahil olmadığı için vücudun sol tarafı sağ tarafından daha "ağırdır". Bu sebeple G noktası, (Şekil 5.27'de kesikli dikey çizgi üzerinde bir nokta olan) merkezal ağırlık merkezinin solunda yer alır. G noktasının konumu Bölüm 4.12'de gösterilen bilgiler ışığında belirlenebilir.



Şekil 5.26 Tek ayak üzerinde (sağ ayak) duruş esnasında pelvis üzerindeki kuvvetler



Şekil 5.27 Kesişen kuvvetler sistemindeki kuvvetler

Vücutu oluşturan parçaların kendi ağırlıkları birleştirilerek, soru üçlü kuvvet sistemine indirgenebilir. Problemin geometrisinden kuvvetlerin paralel bir sistem oluşturmadıkları açıkça görünmektedir. Bu sebeple, vücudun dengesi için bu kuvvetler kesişen kuvvet sistemi oluşturmalıdır. Bu ifade kuvvetlerin uygulama doğrultularının ortak bir kesişim noktasına sahip olmaları gerektiğine işaret eder (Şekil 5.27’de Q noktası). Bu soru için bu nokta W_2 ve F_M kuvvetlerinin uygulama doğrultularının uzantılarından belirlenebilir. Q ve E noktalarından geçen doğru F_J eklem tepki kuvvetinin etki çizgisini işaret eder. F_J kuvvetinin yatayla yaptığı ϕ açısı problemin geometrisinden ölçülebilmektedir. F_J kuvvetinin yönü belirli geometrik kaidelerle belirlenerek bilinmeyenlerin sayısı bir azalmaktadır. Şekil 5.28’de gösterildiği üzere F_M kas kuvveti ve F_J eklem tepki kuvvetinin

büyüklikleri W_2 , F_M ve F_J olan kuvvetlerinin Q noktasına basit bir şekilde ötelenip, yatay (x) ve dikey (y) yönlerdeki bileşenlerine ayrılmasıyla belirlenebilir:

$$F_{Mx} = F_M \cos \theta$$

$$F_{My} = F_M \sin \theta$$

$$F_{Jx} = F_J \cos \phi$$

$$F_{Jy} = F_J \sin \phi \quad (xi)$$

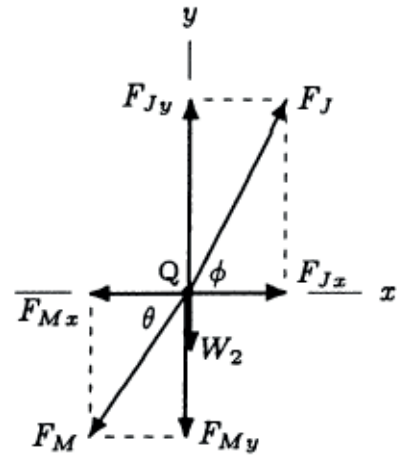
x ve y yönlerindeki translasyonel dengesi için

$$\sum F_x = 0 : F_{Jx} - F_{Mx} = 0$$

$$F_{Jx} = F_{Mx}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Jy} - W_2 - F_{My} = 0$$

$$F_{Jy} = F_{My} + W_2$$



Şekil 5.28 Kuvvetlerin bileşenlerine ayrılması

Denklem (xi) göz önüne alınır,

$$F_J \cos \phi = F_M \cos \theta \quad (xii)$$

$$F_J \sin \phi = F_M \sin \theta + W_2 \quad (iii)$$

Denklem (xii)'den

$$F_J = \frac{F_M \cos \theta}{\cos \varphi}$$

Bu sonuç Denklem (xiii)'de yerine koyulursa

$$\frac{F_M \cos \theta}{\cos \varphi} \sin \varphi = F_M \sin \theta + W_2$$

$$\frac{F_M \cos \theta}{\cos \varphi} \sin \varphi - F_M \sin \theta = W_2$$

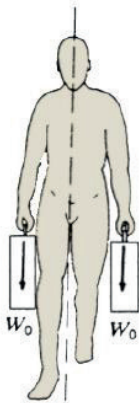
$$F_M \left(\frac{\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = W_2$$

$$F_M = \frac{\cos \varphi W_2}{\sin(\varphi - \theta)}$$

$$F_J = \frac{\cos \theta W_2}{\sin(\varphi - \theta)}$$

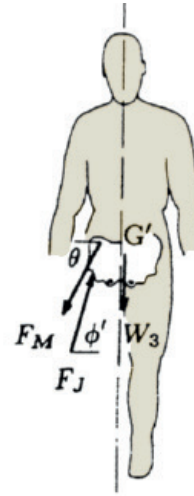
Örneğin $\theta = 70^\circ$, $\varphi = 74.8^\circ$ ve $W_2 = 0.83 \text{ W}$ (W kişinin toplam ağırlığıdır) olsaydı, son iki eşitlik $F_M = 2.6 \text{ W}$ ve $F_J = 3.4 \text{ W}$ sonuçlarını verecekti.

Eğer bir kişi tek ayak üzerinde dururken her iki elinde de birer W_0 yükü taşıyorsa kas ve eklem tepki kuvvetleri nasıl değişirdi (Şekil 5.29)?

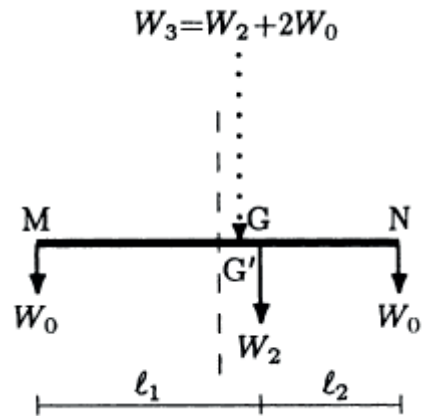


Şekil 5.29 Her iki elde de yük taşınması durumu

Kişi iki elinde de W_0 yükünü taşıırken üst gövdesinin serbest cisim diyagramı Şekil 5.30'da gösterilmiştir. Analizi gerçekleştirilecek olan sistem kişinin üst gövdesini (sol bacak dahil) ve ellerinde taşıdığı yükleri içermektedir. Ek yüklerin dönme ve translasyonel (aşağı doğru) etkilerini dengelemek için, kalça abduktör kasları ilave kuvvet üretecek, bu sebeple kalça ekleminde daha büyük basma kuvvetleri oluşacaktır.



Şekil 5.30 Üst gövdeye etki eden kuvvetler



Şekil 5.31 W_3 üçlü kuvvet sisteminin bileşkesidir

Bu koşulda beş adet kuvvet bulunmaktadır. Üst gövde üzerindeki yerçekiminden kaynaklı çekme (W_2) ve elde taşınan ağırlıklar (W_0) bir paralel kuvvet sistemi oluşturur. Eğer bu paralel kuvvetler, tek bir bileşke kuvvet olarak yazılırsa kuvvetlerin sayısı üçe düşmekte ve soru yukarıda (Çözüm 2) açıklanan tekniğin uygulanması ile çözülebilir. Bu amaç doğrultusunda, Şekil 5.31'de gösterilen kuvvet sistemi ele alınabilir. M ve N noktaları eşit büyüklükteki dış kuvvetlerin (W_0) uygulandığı kişinin sağ ve sol elleridir. G noktası, kişinin sol bacağı ve üst gövdesinin ortak ağırlık merkezidir. Kesikli dikey çizgi kişinin frontal düzlemde simetri eksenini (orta çizgi) göstermektedir ve G noktası bu çizginin solunda yer almaktadır. M ve G noktaları arasındaki l_1 mesafesinin N ve G arasındaki l_2 mesafesinden daha büyük olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer l_1 , l_2 , W_2 ve W_0 verilirse yeni ağırlık merkezi (G' noktası) ağırlık merkezleri bilinen parçalardan oluşan bir sistemin ağırlık merkezinin belirlenmesi tekniği ile belirlenebilir (Bölüm 4.12). G' noktasının simetri eksenine G noktası arasında bir yerde bulunduğu öngörülmektedir. Bir başka deyişle, G' noktası sağ kalça eklemine daha yakın olup bu nedenle toplam ağırlığın sağ kalça ekleminden ölçülen moment kolu yük taşınmayan koşula göre daha kısadır. Bir diğer yandan, moment kolunun kısalmasıyla kazanılan avantajı fazlasıyla telafi eden bileşke ağırlığın büyüklüğü $W_3 = W_2 + 2W_0$ değerine eşittir.

Üst gövdenin sol ayağı ve taşınan yükleri de içine alan yeni ağırlık merkezi belirlendikten sonra, Denklem (xi) ve Denklem (xii) kalça abduktör kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvet ile kalça ekleminde oluşan tepki kuvvetinin hesaplanmasında kullanılabilir.

$$F_M = \frac{\cos\phi'(W_2 + 2W_0)}{\cos\theta \sin\phi' - \sin\theta \cos\phi'}$$

$$F_J = \frac{\cos\theta(W_2 + 2W_0)}{\cos\theta \sin\phi' - \sin\theta \cos\phi'}$$

Burada, (xi) ve (xii) numaralı denklemler üst gövdenin W_2 ağırlığı yeni $W_3 = W_2 + 2W_0$ toplam ağırlığıyla ve eklem tepki kuvvetinin etki çizgisinin yatayla yaptığı ϕ' açısı yeni ϕ' açısıyla (Şekil 5.32) yer değiştirilerek düzenlenmiştir. ϕ' açısı kişinin ağırlık merkezinin G noktasından G' noktasına kaymasından dolayı ϕ açısından biraz daha büyüktür. Ayrıca kas kuvvetlerinin uygulama açısıyla yatayın yaptığı θ açısının değişmediği varsayılmıştır.



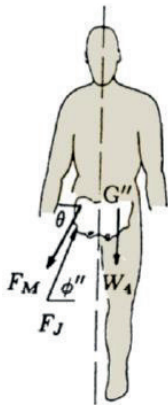
Şekil 5.32 Sorunun üç kuvvetli bir sisteme indirgenmiş formu

Sağ ayak üzerinde duran bir kişi sol eliyle W_0 yükü taşırsa ne olur (Şekil 5.33)?



Şekil 5.33 Tek elde yük taşıma

Analiz edilen sistemin üst gövde, sol bacak ve eldeki yükten oluştuğu varsayılırsa, sol elde taşınan ilave W_0 yükü sistemin ağırlık merkezini G noktasından G'' noktasına, yani kişinin soluna doğru kaydıracaktır. Sonuç olarak, toplam yer çekim kuvvetinin $W_4 = W_2 + W_0$ şeklinde sağ kalça ekleminden (Şekil 5.34) ölçülen kuvvet kolu artacaktır. Bu durum, W_4 'ün saat yönünde dönme etkisini dengelemek için daha büyük kalça abduktör kas kuvveti gerektirecek ve sağ kalça eklemindeki basma kuvvetlerini arttıracaktır.



Şekil 5.34 Üst gövdeye etki eden kuvvetler

Analiz edilen sistemin geometrisinden gözlemlenebileceği üzere ağırlık merkezinde kişinin soluna doğru G noktasından G'' noktasına gerçekleşen kayma, eklem tepki kuvvetinin etki çizgisiyle yatay arasındaki açıyı φ 'dan φ'' ye azaltacaktır. Serbest cisim diyagramının Şekil 5.34'te gösterilen yeni konfigürasyonda sağ kalça eklemine (yük taşınan tarafın karşısı) üretilen eklem tepki kuvveti ve gerekli kalça abduktör kas kuvvetinin hesaplanabilmesi için Denklem (xi) ve (xii) yeniden yazılabilir.

$$F_M = \frac{\cos \varphi'' (W_2 + W_0)}{\cos \theta \sin \varphi'' - \sin \theta \cos \varphi''}$$

$$F_J = \frac{\cos \theta (W_2 + W_0)}{\cos \theta \sin \varphi'' - \sin \theta \cos \varphi''}$$

Notlar

- Vücut ağırlığı iki ayak üzerinde eşit olarak desteklendiği zaman suprafemoral ağırlığın yarısı her bir kalça eklemine üzerine düşer. Yürüme ve koşma esnasında, vücut ağırlığının tamamı anlık olarak tek bir eklem tarafından desteklenir ve bu koşulların bazıları analiz edilmiştir.
- Yukarıdaki analizler, kalça eklemine gerekli olan destek kuvvetlerinin, her iki tarafa da dağıtıldığında yükün taşınması için gerekli olan kuvvetlere kıyasla, gövdenin karşı tarafında bir yük taşınırken daha büyük olduğunu göstermektedir. İki elle yük taşınması ve yüklerin vücudun orta hattına yakın taşınması iskelet kas kuvvetlerinin azaltılmasında etkili bir yoldur.

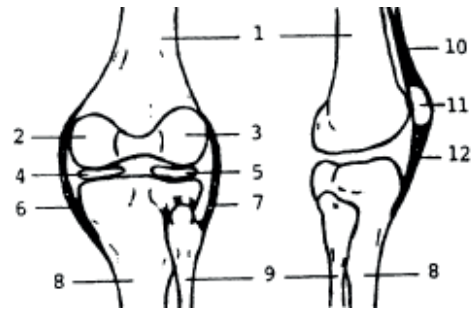
- Bir tarafla yük taşınırken, kişi diğer tarafa eğilme eğilimindedir. Bu, üst gövdenin yerçekimi merkezini ve eldeki taşınan yükü, vücudun orta hattına yaklaştırarak kalça eklemine distali ve yük arasından ölçülen bileşke yerçekimi kuvvetinin moment kolunun uzunluğunu azaltır.
- Zayıf kalça abduktör kasları olanlar ve/veya kalça eklemine ağırlı duyanlar genelde zayıf taraflarına eğilerek yürürler ve sözde abduktör yürüyüşüne sahiptirler. Gövdenin yan taraflarını ağırlı kalçaya doğru yaslamak, gövdenin ağırlık merkezini o kalçaya yaklaştırır ve sonuçta moment kolunu kısaltarak vücut ağırlığının kalça eklemi etrafındaki dönme momentini azaltır. Bu da, pelvisi stabilize etmek için gerekli olan kalça abduktör kaslarının uyguladığı kuvvetlerin büyüklüğünü azaltır.
- Abduktör yürüyüşü, zayıf kalça ile aynı taraftaki eldeki bastonla karşılaştırıldığında, zayıf kalçanın karşısındaki elle tutulan bir baston yardımıyla daha etkili bir şekilde düzeltilebilir.

5.9 Dizin Mekanikliği

Diz, vücudun en büyük eklemidir. Modifiye menteşe eklemidir. Bacağın sagittal düzlemde fleksiyon ve ekstansiyon hareketine ek olarak diz eklemi, içeriye ve dışarıya doğru otomatik bir dönüş de izin verir. Diz eklemi büyük yükleri taşımak için tasarlanmıştır. İnsan hareketlerinden sorumlu olan bağlantı

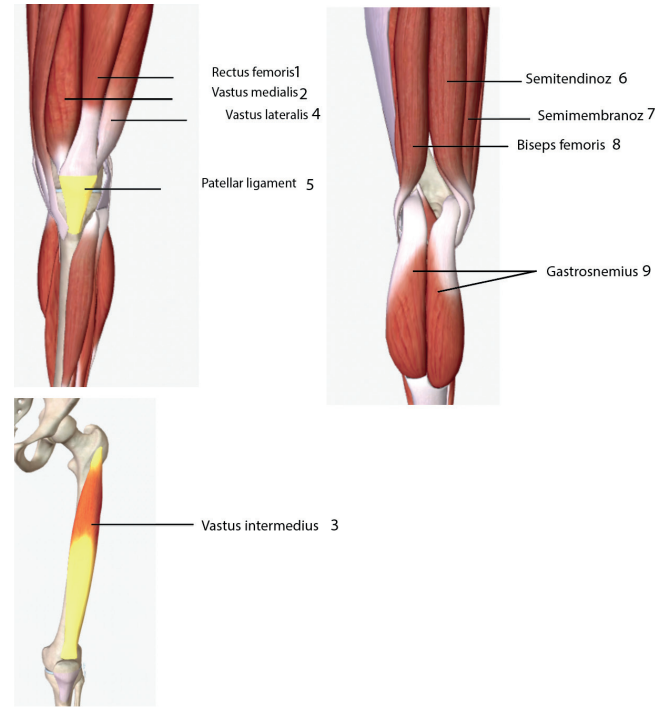
sisteminin temel bir bileşenidir. Diz, hasara karşı oldukça hassastır.

Diz tibiofemoral ve patellofemoral eklemlerden oluşan iki eklemli bir yapıdır (Şekil 5.35). *Tibiofemoral eklem*, femurun medial ve lateral kondilleri ile tibia arasında belirgin iki artikülasyona sahiptir. Bu artikülasyonlar *menüsküs* kıkırdak katmanlarıyla birbirlerinden ayrılır. Lateral ve medial menüsküs, femur ve tibia arasında kemik kemiğe teması önler ve şok sönümleyici olarak işlev görürler. *Patellofemoral eklem*, patella ile femoral kondillerin anterior uçları arasındaki artikülasyondur. Patella kuadriseps tendonu ve patellar ligament ile konumunda tutulan “yüzen” bir kemiktir. Dizin stabilitesi, karmaşık bir ligament yapı, menüsküs ve eklemde geçen kaslar tarafından sağlanır. Çoğu diz yaralanmaları medial tarafta meydana gelen ligament ve kıkırdak hasarı ile karakterizedir.



Şekil 5.35 Diz: (1) femur, (2) medial kondil, (3) lateral kondil, (4) medial menüsküs, (5) lateral menüsküs, (6) tibial kollateral ligament, (7) fibular kollateral ligament, (8) tibia, (9) fibula, (10) kuadriseps tendonu, (11) patella, (12) patellar ligament

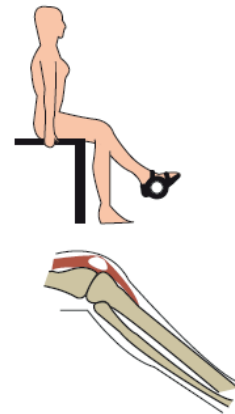
Dizi çevreleyen kaslar; dizi korur, hareketi için iç kuvvetleri sağlar ve/veya hareketlerini kontrol eder. Dizin kas ile kontrolü temel olarak kuadriseps kasları ve hamstring kas grubu tarafından sağlanır (Şekil 5.36). Kuadriseps kas grubu; rektus femoris, vastus lateralis, vastus medialis ve vastus intermedius kaslarından oluşur. Rektus femoris kasının anterior-inferiyor iliyak omurgada ve patellada bağlantıları vardır ve bu kasın temel işlevleri kalçanın fleksiyonu ve dizin ekstansiyonudur. Vastus lateralis, medialis ve intermedius kasları femur ve tibiya patella yoluyla bağlanırlar ve hepsi diz ekstensörleridir. Biseps femoris, semitendinoz ve semimebranoz kasları, kalçanın ekstansiyonuna, dizin fleksiyonuna ve tibianın bazı iç-dış rotasyonuna yardımcı olan hamstring kas grubunu oluştururlar. Semitendinoz ve semimebranoz kasları pelvis kemiği üzerinde proksimal, tibia üzerinde distal bağlantıya sahiptir. Biseps femoris, pelvis ve femur kemikleri üzerinde proksimal, fibula üzerinde distal bağlantıya sahiptir. Bunların dışında yer alan popliteus kasının femur ve tibia üzerinde bağlantıları vardır. Bu kasın birinci işlevi dizin fleksiyonudur. Dizin diğer kasları ise sartorius, grasilis, gastrocnemius ve plantaristir.



Şekil 5.36 Dizin kasları: (1) rektus femoris, (2) vastus medialis, (3) vastus intermedius, (4) vastus lateralis, (5) patellar ligament, (6) semitendinoz, (7) semimebranoz, (8) biseps femoris, (9) gastrocnemius

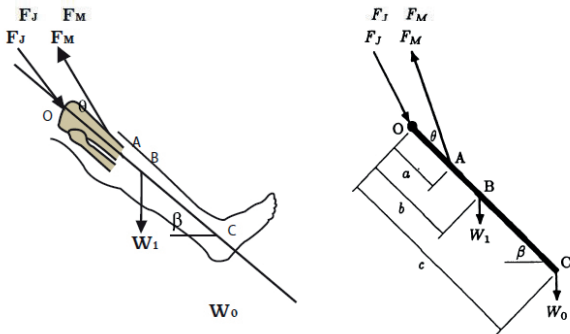
Örnek 5.6

Ağırlık botu giyerek, kuadriseps kaslarını güçlendirmek için oturma pozisyonunda alt bacak fleksiyon/ekstansiyon egzersizi yapan bir kişi Şekil 5.37’de gösterilmiştir.



Şekil 5.37 Diz çevresindeki kasların egzersizi

Alt bacak üzerine etki eden kuvvetler ve bacağın basit bir mekanik modeli Şekil 5.38’te gösterilmiştir. W_1 alt bacağın ağırlığı, W_0 botun ağırlığı, F_M patellar tendon aracılığıyla kuadriseps kasları tarafından tibiaya uygulanan çekme kuvvetinin büyüklüğü, F_J femurun tibial plato üzerine uyguladığı tibiofemoral eklem tepki kuvvetinin büyüklüğüdür. Tibiofemoral eklem merkezi O noktasında bulunur, patellar tendon A noktasındaki tibiaya bağlanır, alt bacağın ağırlık merkezi B noktasında bulunur ve ağırlık botunun ağırlık merkezi C noktasında bulunur. O noktası ile A, B ve C noktaları arasındaki mesafeler sırasıyla a, b ve c olarak ölçülür. Gösterilen alt bacağın konumu için, tibianın uzun eksenini yatayla bir β açısı yapar ve kuadriseps kas kuvvetinin etki çizgisi tibianın uzun eksenini ile θ açısı yapar.



Şekil 5.38 Alt bacak üzerine etki eden kuvvetler

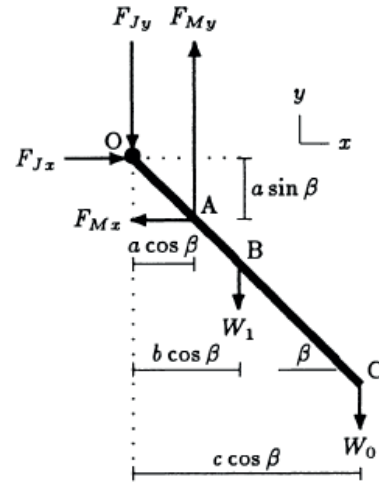
O, A, B ve C noktalarının düz bir çizgi boyunca uzandığını varsayılırsa, F_M ve F_J 'i a, b, c, θ , β , W_1 ve W_0 cinsinden hesaplanabilir.

Çözüm

Bacak üzerine etki eden kuvvetlerin yatay (x) ve dikey (y) bileşenleri ve kuvvet kolları, O noktasında bulunan diz ekleminden Şekil 5.39'da gösterildiği şekilde ölçülebilir. Kas kuvvetinin bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$F_{Mx} = F_M \cos(\theta + \beta) \quad (i)$$

$$F_{My} = F_M \sin(\theta + \beta) \quad (ii)$$



Şekil 5.39 Kuvvet bileşenleri ve kuvvet kolları

F_M , F_{Jx} ve F_{Jy} olmak üzere üç bilinmeyen bulunmaktadır. Bu iki boyutlu problemin çözümü için tüm üç denge koşulundan da yararlanılmalıdır. Saat yönünün tersi yönünde momentler pozitif varsayılarak, O noktası etrafında alt bacağın rotasyonel denge göz önüne alındığında:

$$\begin{aligned} \sum M = 0 : & (a \cos \beta) F_{My} \\ & - (a \sin \beta) F_{Mx} \\ & - (b \cos \beta) W_1 \\ & - (c \cos \beta) W_0 = 0 \end{aligned}$$

Kuvvet bileşenleri yukarıdaki denklemde yerine konulup F_M için çözüldüğünde:

$$F_M = \frac{(bW_1 + cW_0) \cos \beta}{a[\cos \beta \sin(\theta + \beta) - \sin \beta \cos(\theta + \beta)]} \quad (iii)$$

Bu denklem $[\cos \beta \sin(\theta + \beta) - \sin \beta \cos(\theta + \beta)] = \sin \theta$ eşitliğinden yararlanılarak sadeleştirildiğinde:

$$F_M = \frac{bW_1 + cW_0 \cos \beta}{a \sin(\theta)}$$

Denklem (iii), bacak ileriye doğru yatayla β açısını yapacak şekilde uzatıldığında bacağı desteklemek için kuadriseps kasları tarafından uygulanacak kuvvetin büyüklüğünü verir. F_M belirlendikten sonra, diz ekleminde yatay ve düşey doğrultuda gelişen tepki kuvvetinin bileşenleri, x ve y yönlerinde alt bacağın translasyonel dengesi dikkate alınarak hesaplanabilir.

$$\sum F_x = 0 : F_{Jx} = F_{Mx} = F_M \cos(\theta + \beta)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Jy} = F_{My} - W_0 - W_1 = 0$$

$$F_{Jy} = F_M \sin(\theta + \beta) - W_0 - W_1$$

Diz ekleminde tibial platoya uygulanan bileşke basma kuvvetinin büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$F_J = \sqrt{(F_{Jx})^2 + (F_{Jy})^2}$$

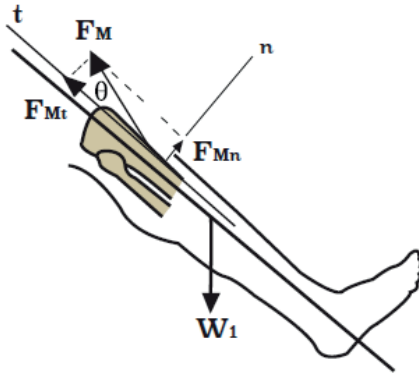
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Jy}}{F_{Jx}}\right)$$

Eğer geometrik parametrelerinin ve ağırlıklarının $a = 12$ cm, $b = 22$ cm, $c = 50$ cm, $W_1 = 150$ N, $W_0 = 100$ N, $\theta = 15^\circ$ ve $\beta = 45^\circ$ olduğu varsayılırsa (iii) ve (iv) denklemleri kullanılarak hesaplamalar yapılırsa sonuçlar;

$$F_M = 1,839 \text{ N}, \quad F_J = 1,681 \text{ N}, \quad \varphi = 55.7^\circ$$

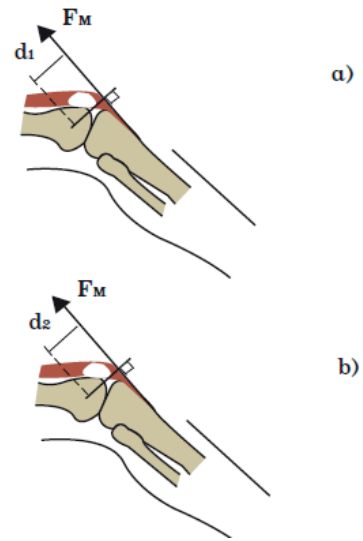
Notlar

- Patellar tendondan tibia üzerine kuadriseps kasının uyguladığı F_M kuvveti, tibianın uzun eksenine normal ve teğet olarak iki bileşenle ifade edilebilir (Şekil 5.40). Kas kuvvetinin normal bileşeninin, F_{Mn} , birincil işlevi tibianın diz eklemi etrafında dönmesi sağlamak iken, teğetsel bileşen F_{Mt} tibianın uzun eksenine aynı yöne çevirme eğilimindedir ve tibiofemoral eklem yüzeyine bir basma kuvveti uygular. Normal bileşen F_{Mn} , θ açısının sinüs fonksiyonu olduğu için, patellar tendon ile tibianın uzun eksenindeki açının büyük olması kasın daha büyük bir dönme etkisine sahip olacağına işaret eder. Böylelikle büyük θ değerleri için diz ekleminde basma oluşturarak kaybolan kas kuvveti daha az olacak, kas gerilmesinin büyük bir bölümünde alt bacağın diz eklemi etrafında dönmesinde yararlanılacaktır.



Şekil 5.40 F_M kuvvetinin dönme ve translasyonel bileşenleri

- Patellanın en önemli biyomekanik fonksiyonlarından biri, kuadriseps ve patellar tendonların anterior yer değiştirmesini sağlamaktır, böylece θ açısını artırarak diz ekstansör kas kuvvetlerinin kuvvet kolunu dizin dönme merkezi yönüne göre uzatırlar. (Şekil 5.41a). Patellanın cerrahi olarak çıkarılması patellar tendonu dizin dönme merkezine (şekil 5.41b) yaklaştırarak kas kuvvetinin kuvvet kolu uzunluğunun azalmasına sebep olacaktır ($d_2 < d_1$). Nispeten daha uzun bir kuvvet koluna sahip olmanın avantajını yitiren kuadriseps kasları alt bacağı diz ekleminin etrafında döndürmek için normalden daha büyük bir kuvvet üretmek zorunda kalacaktır.

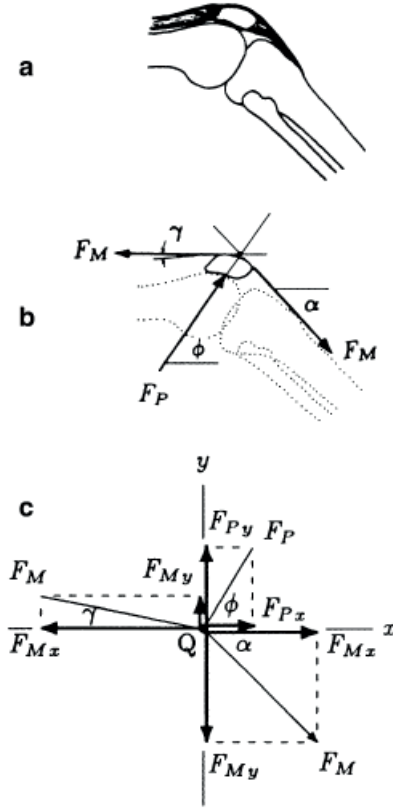


Şekil 5.41 Patella kuvvet kolunun uzunluğunu artırır

- İnsan dizinde tibiofemoral ve patellofemoral eklemlerden oluşan iki eklemlilik bir yapı vardır. Kuadriseps kasının patellanın üzerinden geçtiği ve patellanın ve kasın kasnak-ip düzenini oluşturduğu unutulmamalıdır. Kastaki gerginlik arttıkça, patellanın patellofemoral eklem üzerinde uyguladığı basma kuvveti de (basınç) artar.

Alt bacağın serbest cisim diyagramı göz önüne alınarak tibiofemoral eklem etrafındaki kuvvetler analiz edilmiştir. Patellar tendon üzerindeki gerilme belirlenerek ve kuadriseps boyunca gerilmenin düzenli dağıldığı varsayılmıştır. Patellanın serbest cisim diyagramı ile patellofemoral eklem üzerine uygulanan basma kuvveti hesaplanabilir (Şekil 5.42). F_M patellar ve kuadriseps tendonlarındaki homojen çekme kuvvetinin büyüklüğü, F_P patellofemoral eklem üzerine uygulanan

kuvvetin büyüklüğü, α patellar tendonla yatay arasındaki açı, γ kuadriseps tendonuyla yatay arasındaki açı ve φ basma tepki kuvvetinin etki çizgisiyle yatay arasındaki bilinmeyen açı olsun (Şekil 5.42b). Patellanın dengesi için kesişen üç kuvvetli bir sistem olmalıdır.



Şekil 5.42 Patella üzerine etki eden kuvvetlerin statik analizi

Öncelikle patellar ve kuadriseps tendon kuvvetlerinin etki çizgileri uzatılarak ortak kesişim noktası Q belirlenir. Q noktasıyla F_P kuvvetinin uygulandığı noktayı birleştiren çizgi F_P kuvvetinin etki çizgisine karşılık gelecektir. Kuvvetler Q noktasına ötelenerek denge denklemleri uygulanabilir (Şekil 5.42c). Patellanın x ve y yönlerindeki dengesi için:

$$\sum F_x = 0 : F_P \cos \varphi = F_M (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (v)$$

$$\sum F_y = 0 : F_P \sin \varphi = F_M (\sin \alpha - \sin \varphi) \quad (vi)$$

Bu denklemler φ açısı ve femurun patellafemoral eklem üzerinde patellaya uyguladığı basma kuvvetinin F_P büyüklüğü için çözülebilir.

Denklem (v) ile;

$$F_P = \frac{F_M (\cos \gamma - \cos \alpha)}{\cos \varphi}$$

Denklem (vi) ile;

$$F_P = \frac{F_M (\sin \alpha - \sin \gamma)}{\sin \varphi}$$

$$\frac{F_M (\cos \gamma - \cos \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{F_M (\sin \alpha - \sin \gamma)}{\sin \varphi}$$

$$\sin \varphi (\cos \gamma - \cos \alpha) = \cos \varphi (\sin \alpha - \sin \gamma)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\cos \gamma - \cos \alpha}$$

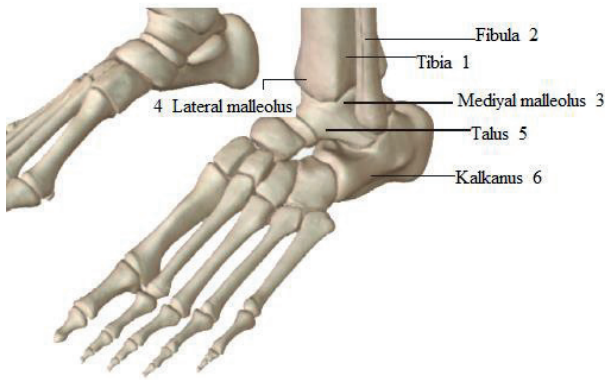
$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\cos \gamma - \cos \alpha} \right)$$

φ açısı belirlendikten sonra, F_P kuvveti de belirlenebilir.

$$F_P = F_M \left(\frac{\cos \gamma - \cos \alpha}{\cos \varphi} \right)$$

5.10 Ayak Bileğinin Mekanığı

Ayak bileği üç kemikten oluşur; tibia, fibula ve talustur (Şekil 5.43). Alt ekstremitedeki diğer ana eklemler gibi, ayak bileği yük taşıma ve kinematik fonksiyonlardan sorumludur. Ayak bileği eklemi, diz ekleminden daha stabildir ve stabilitesi için bağ ve kas kısıtlamaları gerektirir.

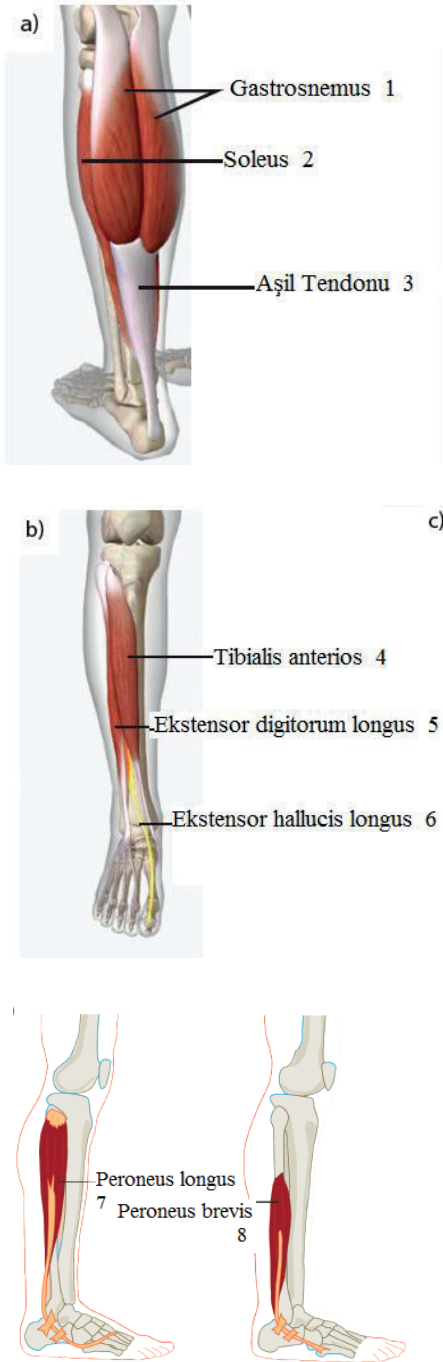


Şekil 5.43 Ayak bileği ve ayak: (1) tibia, (2) fibula, (3) medial malleolus, (4) lateral malleolus, (5) talus, (6) kalkanus

Ayak bileği eklemi kompleksi tibiotalar, fibulotalar ve distal tibiofibular eklemlerinden oluşur. *Ayak bileği (tibiotalar) eklemi*, talusun trokleasinın makara benzeri dışbükey yüzeyi ile tibianın içbükey distal ucu arasında bir menteşe tipi eklemdir. Menteşe tipi bir eklem olmasından dolayı ayak bileği, ayağın yalnızca sagittal düzlemde fleksiyon-ekstansiyon (dorsifleksiyon-plantar fleksiyon) hareketini yapmasına izin verir. Ayağın diğer hareketleri, inversiyon ve eversiyon, içe ve dışa rotasyon ile pronasyon ve supinasyondur. Bu hareketler, talus ile kalkanus arasındaki subtalar eklem,

transvers tarsal eklemler, talonavikular ve kalkanokuboid gibi ayak eklemleri etrafında gerçekleşir.

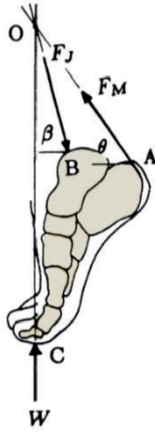
Ayak bileği, üç eklemli şekli ve eklemden geçen kas ve ligamentlerle devamlılığını sağlar. Ayak bileğini geçen çok sayıda kas grubu vardır. En önemli ayak bileği plantar fleksörleri, gastroknemius ve soleus kaslarıdır (Şekil 5.44). Hem gastroknemius hem de soleus kasları, bacağın arka bölümünde yer alır ve Aşil tendonu üzerinden kalkanusun arka yüzeyine tutunur. Gastroknemius diz ve ayak bileği eklemlerinden geçer ve her ikisinde de fonksiyonları vardır. Dizde, diz fleksiyonu ile iş birliği yaparken, ayak bileğinde ana plantar fleksördür. Plantar ekstansörler veya dorsifleksörler anterior kaslardır. Bunlar tibialis anterior, ekstensor digitorum longus, ekstensor hallucis longus ve peroneus tertius kaslarıdır. Lateral kasların (peroneus longus ve peroneus brevis) temel işlevi ayak bileğinde plantar fleksiyon hareketini gerçekleştirmektir.



Şekil 5.44 Ayak bileği kasları, (a) posteriyor, (b) anterior ve (c) lateral görüntüler: (1) gastroknemius, (2) soleus, (3) Aşil tendonu, (4) tibialis anterior, (5) ekstensör digitorum longus, (6) ekstensör hallukis longus, (7) peronöz longus, (8) peronöz brevis

Ayak bileği eklemi, anatomik konfigürasyonundaki küçük değişikliklere olumsuz yanıt verir. Ağır burkulmalara bağlı kinematik kayıp ve yapısal kısıtlamalar, ayak bileği stabilitesini ciddi şekilde etkileyebilir ve ayak bileği eklem yüzeylerinin yanlış hizalanmasına neden olabilir. En sık görülen ayak bileği hasarı, inversiyon burkulması, ayak inversiyondayken (ayak tabanın içe baktığı zaman) vücut ağırlığının ayak bileğine kuvvetle iletilmesiyle oluşur.

Örnek 5.7 Tek ayağının parmak ucunda duran bir kişi olduğu varsayıldığında (gösterilen zor pozisyon) ayak üzerine etki eden kuvvetler Şekil 5.45'te gösterilmiştir. W yer tepkisi olarak ayağa uygulanan kişinin ağırlığı, F_M gastrocnemius ve soleus kaslarının Aşil tendonu aracılığıyla kalkanusa uyguladıkları çekme kuvvetinin büyüklüğü ve F_J talusun konkav yüzeyine tibia tarafından uygulanan eklem tepki kuvvetidir. Ayağın ağırlığı toplam vücut ağırlığının yanında çok küçük olduğu için ihmal edilmiştir. Aşil tendonu, A noktasında kalkanusa bağlanır, ayak bileği eklemi merkezi B noktasında bulunur ve zemin tepki kuvveti C noktasında ayağa uygulanır. Ayağın bu pozisyonu için Aşil tendonundaki çekme kuvveti etki çizgisinin yatayla θ , eklem tepki kuvvetinin etki çizgisinin yatayla β açısı yaptığı tahmin edilmektedir.



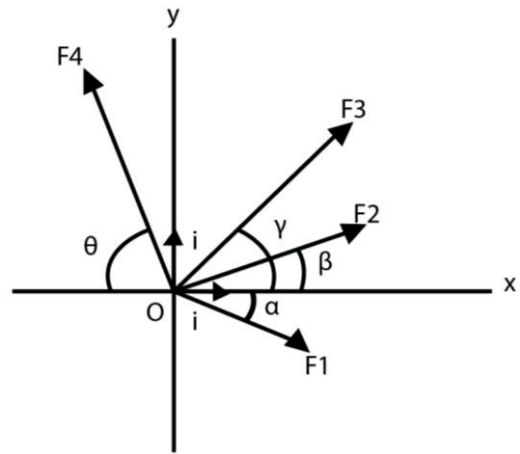
Şekil 5.45 Kesişen kuvvet sisteminde ayak üzerine etki eden kuvvetler

A, B ve C noktalarının göreceli konumlarının bilindiği varsayılırsa, ayak bileğinde Aşil tendonundaki gerilme ve eklem tepki kuvvetinin büyüklüğü ifade edilebilir.

Çözüm

F_M kas kuvveti, F_J eklem tepki kuvveti ve yerin tepki kuvveti W 'den oluşan üç kuvvetli bir sistem bulunmaktadır. Sorunun geometrisinde, ayağın gösterilen konumunda kuvvetlerin paralel bir kuvvet sistemi oluşturmayacağı açıktır. Bu sebeple kuvvet sistemi kesişen kuvvetlerden oluşmalıdır. Bu kuvvetlerin ortak kesişim noktası (Şekil 5.45'te O noktası) W ve F_M kuvvetlerinin etki çizgilerinin uzatılmasıyla bulunabilir. O ve B noktalarının ikisinden de geçen düz çizgi, eklem tepki kuvvetinin etki çizgisini temsil etmektedir. Soruda belirtildiği üzere A, B ve C noktalarının göreceli konumlarının bilindiği varsayılırsa, eklem tepki kuvvetinin etki çizgisinin açısı (β) ölçülebilir.

Eklem tepki kuvvetinin etki çizgisi grafiksel araçlarla belirlendikten sonra, eklem tepki ve kas kuvvetlerinin büyüklükleri, ortak kesişme noktasında yer alan her üç kuvvetin O noktasına (Şekil 5.46) ötelenmesiyle hesaplanabilir. Böylelikle F_M ve F_J bilinmeyenleri yatay (x) ve dikey (y) yönlerde translasyonel dengesi uygulanılarak hesaplanabilir. Bu amaçla öncelikle, eklem tepki ve kas kuvvetleri dik bileşenlerine ayrılmalıdır.



Şekil 5.46 Ayağa etki eden kuvvetlerin bileşenleri

$$F_{Mx} = F_M \cos \theta$$

$$F_{My} = F_M \sin \theta$$

$$F_{Jx} = F_J \cos \beta$$

$$F_{Jy} = F_J \sin \beta$$

$$\sum F_x = 0 : F_{Jx} = F_{Mx} \text{ ve de, } F_J \cos \beta = F_M \cos \theta$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Jy} = F_{My} + W \text{ ve de, } F_J \sin \beta = F_M \sin \theta + W$$

Bu denklemler birlikte çözüldüğünde:

$$F_M = \frac{W \cos \beta}{\cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta}$$

$$F_M = \frac{W \cos \beta}{\sin(\beta - \theta)}$$

$$F_J = \frac{W \cos \theta}{\cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta}$$

$$F_J = \frac{W \cos \theta}{\sin(\beta - \theta)}$$

Örneğin, $\theta = 45^\circ$ ve $\beta = 60^\circ$ olduğu varsayıldığında, sonuç:

$$F_M = 1.93 W \quad F_J = 2.73 W$$

5.11 Örnek Sorular

Problem 5.1. Dirseği üst kola göre dik açıyla fleksiyon hareketini yapan bir kişi elinde bir cisim tutmaktadır (Şekil 5.4). Ön kola etki eden kuvvetler ve sistemin mekanik modeli Şekil 5.5a, b'de gösterilmiştir. Bu sistemde major fleksor biceps kası olduğu ve bu kasın kuvvet uygulama doğrultusunun ön kolun uzun eksenine dik açı yaptığı varsayılmıştır. O noktası dirsek eklemindeki dönme eksenini, A noktası biceps kasının radiusa bağlantı noktasını, B noktası ön kolun ağırlık merkezini, C noktası ise elde tutulan cismin ağırlık merkezini temsil etmektedir. Dirsek ekleminin dönme eksenin (O noktası), A, B ve C noktalarıyla arasındaki mesafeler sırasıyla $a = 4.5$ cm, $b = 16.5$ cm ve $c = 37$ cm'dir. Ön kolun ağırlığı $W = 83$ N, kas kuvvetin büyüklüğü $F_M = 780$ N ise:

- Eldeki cismin ağırlığını (W_0) belirleyiniz.
- Dirsek eklemindeki tepki kuvvetinin (F_J) büyüklüğünü belirleyiniz.
- Taşınan cismin ağırlığı 5 N arttırılırsa kas (F_{M1}) ve eklem tepki (F_{J1}) kuvvetlerinin büyüklüklerini belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W_0 = 57.8$ N; (b) $F_J = 639.2$ N; (c) $F_{M1} = 820$ N, $F_{J1} = 674.2$ N

Problem 5.2 Bir sporcu halterle omuz egzersizi yapmaktadır (Şekil 5.11). Kola etki eden kuvvetler ve sistemin mekanik modeli Şekil 5.12'de gösterilmiştir. Sporcunun kolu yatay ekseninde düz bir şekilde uzanmaktadır. O noktası omuz eklemindeki dönme eksenini, A noktası deltoid kasının humerusa bağlantı noktasını, B noktası kolun ağırlık merkezini, C noktası ise halterin ağırlık merkezini temsil etmektedir. Omuz ekleminin dönme eksenin (O noktası), A, B ve C noktalarıyla arasındaki mesafeler sırasıyla $a = 17$ cm, $b = 33$ cm ve $c = 63$ cm'dir. Halterin ağırlığı $W_0 = 64$ N, kas kuvvetin büyüklüğü $F_M = 1051$ N'dur. Kas kuvvetinin ve eklemdeki tepki kuvvetinin uygulama doğrultuları yatayla sırasıyla $\theta = 18^\circ$ ve $\beta = 12^\circ$ açılarını yapmaktadır.

- Omuz eklemindeki tepki kuvvetinin (F_J) büyüklüğünü belirleyiniz.
- Kolun toplam ağırlığını (W) belirleyiniz.
- Halterin ağırlığı 5 N arttırılırsa kas (F_{M1}) ve eklem tepki (F_{J1}) kuvvetlerinin büyüklüklerini belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $F_J = 1021.9 \text{ N}$; (b) $W = 47.3 \text{ N}$;
(c) $F_{M1} = 1136.5 \text{ N}$, $F_{J1} = 1105 \text{ N}$

Problem 5.3 Şekil 5.15'te gösterilen baş ve boyun konumuyla üzerine etki eden kuvvetler ele alınsın. Denge koşulunun sağlanması için kuvvetlerin bir kesişen kuvvetler sistemi oluşturduğu varsayılmaktadır. C noktası başın ağırlık merkezini, A noktası boyun ekstensor kaslarının oluşturduğu kuvvetin (F_M) baş üzerinde uygulandığı noktayı, B noktası atlantookspital eklem döne merkezini temsil etmektedir. Başın bu konumu için boyun ekstensor kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetin büyüklüğü $F_M = 57 \text{ N}$, kas bileşke kuvvetinin ve eklem tepki kuvvetinin yatayla yaptığı açılar sırasıyla $\theta = 36^\circ$ ve $\beta = 63^\circ$ 'dir. Baş üzerine etki eden yer çekimi kuvvetinin büyüklüğünü belirleyiniz.

Cevap: $W = 47 \text{ N}$.

Problem 5.4 Halter kaldırmaya çalışan bir atlet ele alınsın. Atletin alt ekstremitesine etki eden kuvvetler ve sistemin mekanik modeli Şekil 5.19 ve Şekil 5.20'de sırasıyla gösterilmiştir. O noktası sakrum ve beşinci lomber omurdan oluşan eklem döne eksenini, A noktası sırt kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetin uygulandığı yeri, B noktası alt ekstremitenin ağırlık merkezini, C noktası is zeminin tepki kuvvetinin uygulandığı yeri temsil etmektedir. Sırt kaslarının kuvvetinin, alt ekstremitenin ağırlığının ve zeminin tepki kuvvetinin O noktasına olan en kısa uzaklıkları sırasıyla $a =$

3.6 cm , $b = 14.6 \text{ cm}$ ve $c = 22 \text{ cm}$ 'dir. Bu konumdaki sporcunun sırt kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetin büyüklüğü $F_M = 6856 \text{ N}$, bu kuvvetin uygulama doğrultusunun yatayla yaptığı açı $\theta = 43^\circ$ olarak öngörülmektedir. Buna göre; halterin ağırlığının $W_0 = 637 \text{ N}$, alt ekstremitenin ağırlığının $W_1 = 333 \text{ N}$ olması durumunda:

- Atletin ağırlığını (W) belirleyiniz.
- Eklem tepki kuvvetinin (F_J) büyüklüğünü belirleyiniz.
- Eklem tepki kuvvetinin yatayla yaptığı α açısını belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W = 705.9 \text{ N}$; (b) $F_J = 7625.8 \text{ N}$;
(c) $\alpha = 52^\circ$

Problem 5.5 Yürüme veya koşma sırasında vücudunun bütün ağırlığını anlık olarak tek bir bacağının üzerine veren bir kişi ele alınsın. Bu bacağına etki eden kuvvetler ve sistemin mekanik modeli sırasıyla Şekil 5.24 ve Şekil 5.25'te gösterilmiştir. O noktası kalça eklem döne merkezini, A noktası kalça abduktör kaslarının femura bağlandığı noktayı, B noktası bacağın ağırlık merkezini, C noktası ise yerin tepki kuvvetinin uygulandığı noktayı temsil etmektedir. A noktasının O, B ve C noktalarıyla arasındaki mesafe sırasıyla $a = 8.6 \text{ cm}$, $b = 34.3 \text{ cm}$ ve $c = 89.4 \text{ cm}$ 'dir. Femur boynunun ve femoral shaftın yatayla yaptıkları açılar sırasıyla $\alpha = 43^\circ$, ve $\beta = 79^\circ$ 'dir. Bacağın bu konumunda kalça abduktör kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetin $F_M = 2062.6 \text{ N}$, bu kuvvetin uygulama doğrultusunun yatayla

yaptığı açının $\theta = 69^\circ$ olduğu bilinmektedir. Bacağın ağırlığının $W_1 = 125$ N olması durumunda:

- Kişinin toplam ağırlığını (W) belirleyiniz.
- Kalça ekleminde eklem tepki kuvvetini (F_J) belirleyiniz.
- Eklem tepki kuvvetinin uygulama doğrultusunun yatayla yaptığı γ açığı belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W = 729$ N; (b) (F_J) = 2636.1 N; (c) $\gamma = 73.7$.

Problem 5.6 Bir ağırlık botu giyen ve oturma pozisyonunda alt bacak fleksiyon-ekstensiyon egzersizi yapan bir kişi ele alınsın. Bacağa etki eden kuvvetler ve sistemin mekanik modeli Şekil 5.38'de gösterilmiştir. O noktası tibiofemoral eklemin dönme merkezini, A noktası patellar tendonun tibia kemiğine bağlanma noktasını, B noktası alt bacağın ağırlık merkezini, C noktası ağırlık botunun ağırlık merkezini temsil etmektedir. Bu sistem için O, A, B ve C noktalarının düz bir çizgi üzerinde yer aldığı varsayılmaktadır. O noktasının A, B ve C noktaları ile arasındaki mesafeler sırasıyla $a = 13$ cm, $b = 23.5$ cm, $c = 53$ cm'dir. Bacağın bu konumunda tibianın uzun eksenini yatayla $\beta = 47^\circ$, kuadriseps kaslarının uygulama doğrultusu tibianın uzun eksenine $\theta = 17^\circ$ açı yapmaktadır. Ayrıca, kuadriseps kaslarının oluşturduğu bileşke kuvvetinin büyüklüğü $F_M = 1940$ N olarak verilmiştir.

Alt bacağın ağırlığı $W_1 = 163$ N ise:

- Ağırlık botunun ağırlığını (W_0) belirleyiniz.
- Tibiofemoral eklemdaki tepki kuvvetinin (F_J) büyüklüğünü belirleyiniz.
- Eklem tepki kuvvetinin uygulama doğrultusunun yatayla yaptığı açığı (ϕ) belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W_0 = 98.4$ N; (b) $F_J = 1707.5$ N; (c) $\phi = 60.2^\circ$

Problem 5.7 Tek ayağının baş parmağı üzerinde duran bir kişi ele alınsın. Bu duruş pozisyonunda ayağa etki eden kuvvetler Şekil 5.45'te gösterilmiştir. A noktası gastrocnemius ve soleus kaslarının oluşturduğu kuvvetlerinin aşıl tendonu üzerinden kalkaneusa ilettiği noktayı, B noktası ayak bilek ekleminin dönme merkezini, C noktası ise yer tepki kuvvetinin uygulandığı noktayı temsil etmektedir. Vücudun toplam ağırlığıyla karşılaştırıldığında ayağın ağırlığı ihmal edilebilir. Ayağın bu konumu için, Aşıl tendonundaki çekme kuvvetinin ve bilek ekleminin tepki kuvvetinin (F_J) uygulama doğrultuları yatayla sırasıyla $\theta = 49^\circ$ ve $\beta = 65^\circ$ açı yapmaktadır. Ayrıca, ayağın bu konumunda gastrocnemius ve soleus kaslarının kalkaneus üzerinde oluşturduğu kuvvetinin büyüklüğü $F_M = 1275.4$ N olarak verilmiştir.

- (a) Kişinin toplam vücut ağırlığını (W) belirleyiniz.
- (b) Bilekteki tepki kuvvetinin (F_J) büyüklüğünü belirleyiniz.

Cevaplar: (a) $W = 831.8 \text{ N}$; (b) $F_J = 1980.3 \text{ N}$

Referanslar

Chaffin, D.B., Andersson, G.B.J., & Martin, B.J. 1999. Occupational Biomechanics (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.

LeVeau, B.F., 2010. Biomechanics of Human Motion: Basics and Beyond for the Health Professions. Thorofare, NJ. SLACK Incorporated.

Nordin, M., & Frankel, V.H (Eds.). 2011. Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System (4th ed.). Philadelphia, PA: Lippincott Williams & Wilkins.

Thompson, CW, 1989, Manual of Structural Kinesiology, 11th Ed. St. Louis, MO: Times-Mirror/Mosby.

Winter, D.A. 2004. Biomechanics and Motor Control of Human Movement (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Bölüm 6

DİNAMIĞE GİRİŞ

Çeviren: Merve Öztürk

6.1 Dinamik

6.2 Kinematik ve Kinetik

6.3 Doğrusal, Açısal ve Genel Hareketler

6.4 Uzaklık ve Yer değiştirme

6.5 Sürat ve Hız

6.6 İvme

6.7 Atalet ve Momentum

6.8 Serbestlik Derecesi

6.9 Parçacık Kavramı

6.10 Referans Düzlemleri ve Koordinat Sistemleri

6.11 Dinamik Analizler için Önkoşullar

6.12 İşlenecek Konular

6.1 Dinamik

Dinamik, hareket halindeki cisimlerin incelenmesidir. Dinamik, hareketi tanımlama ve sebeplerini açıklama ile ilgilidir. Dinamik 2 ana alandan oluşur; kinematik ve kinetik. Bu alanlardan her biri, cisimlerin doğrusal, açısız veya genel hareketlerini tanımlamak ve açıklamak için daha da bölünebilir. Dinamikteki önemli kavramlar; uzay (göreceli konum veya yer değiştirme), zaman, kütle ve kuvvettir. Diğer önemli kavramlar; hız, ivme, tork, moment, iş, enerji, güç, impuls ve momentumdur.

Dinamikteki temel terimlerin ve kavramların geniş tanımları bu bölümde tanıtılacaktır. Hareketli cisimlerin kinematik ve kinetik özelliklerinin detayları ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır.

6.2 Kinematik ve Kinetik

Kinematik harekete sebep olan kuvvetleri göz önüne almadan, sadece hareketin geometrisini ve zamana bağlı oluşumlarını inceler. Kinematik analizler yer değiştirme, hız ve ivme vektörleri arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. Bu ilişkiler, diferansiyel ve integral denklemler şeklinde görülür.

Kinetik ise harekete sebep olan kuvvetler ile birlikte hareketi inceler. Kinetik alanı, kinematik üzerine kuruludur ve hareketleri oluşturan kuvvetlerin ve torkların etkilerini

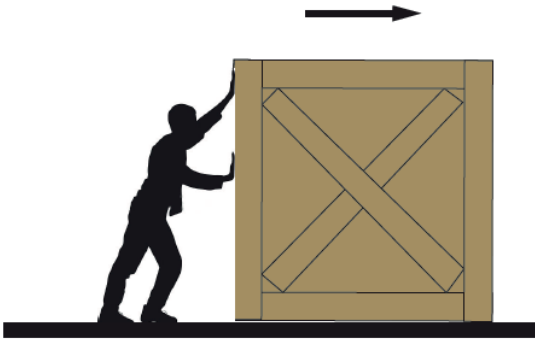
analizlere dahil eder. Kinetik analizler, çeşitli matematiksel formlarda olan Newton'un ikinci hareket yasasını kullanır. Kinetik problemlerin çözümlerine yönelik bir dizi farklı yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar hareket, iş ve enerji yöntemlerinin denklemlerine, impuls ve momentum yöntemlerine dayanır. Farklı durumlara ya da belirlenecek olan parametreye bağlı olarak farklı yöntemler uygulanabilir. Örneğin, hareket denklemleri, ivme analizini gerektiren problemler için kullanılır. Enerji yöntemleri hızdaki değişimlere bağlı kuvvetlerin analizini gerektirdiğinde uygundur. Momentum yöntemleri, çarpma ve çarpışma sırasında gerçekleşen itici kuvvetlerde uygulanır.

İnsan hareket özellikleri, eklem ve kas güçleri ve insan hareketinin çalışılmasında önemli olabilecek nörolojik ve diğer faktörlerin araştırılmasıyla ilgili *kineziyoloji* alanı da vardır. “Kineziyoloji” terimi mekanik değil, tıbbi bir terimdir. İnsan hareketinin biyomekaniğine değinmek için yaygın olarak kullanılır.

6.3 Doğrusal, Açısız ve Genel Hareketler

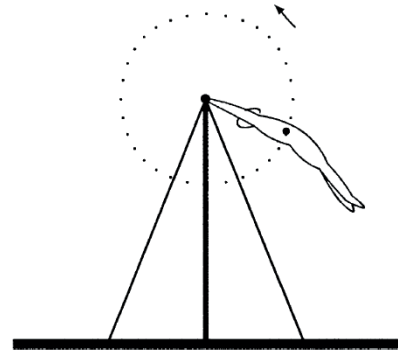
Hareketin translasyonel, dairesel veya genel olup olmadığına göre dallara ayrılması, hem kinematiği hem de kinetiği düzenli bir şekilde incelemek için yaygın kullanılan bir yöntemdir. *Translasyonel veya doğrusal hareket*, bir cismin tüm parçaları aynı mesafede, aynı yönde

ve aynı zamanda hareket ederse oluşur. Örneğin bir blok yatay bir yüzeyde itilirse, blok yalnızca translasyonel harekete maruz kalır (Şekil 6.1). Translasyonel hareketin bir başka tipik örneği, şafttaki bir asansörün dikey hareketidir. Bununla birlikte, doğrusal hareketin düz bir çizgi boyunca hareket anlamına gelmediğine dikkat edilmelidir. Belirli bir zaman aralığında, bir nesne bir yönde yer değiştirebilirken, farklı bir zaman aralığında farklı bir yönde yer değiştirebilir.



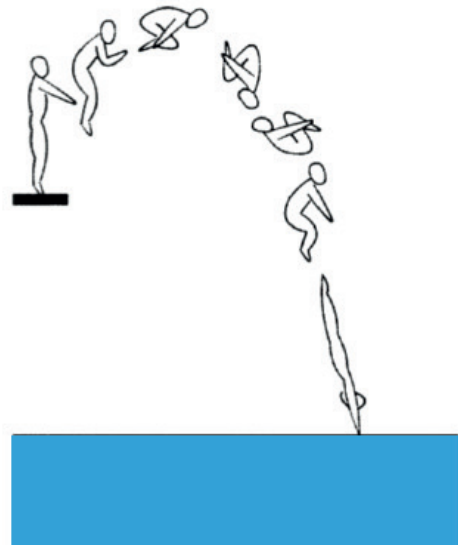
Şekil 6.1 Dışardan yük uygulanan nesne

Dairesel veya açısal hareket, bir cismin dairesel bir yoldan hareket etmesi ile oluşur, böylece cismin tüm parçaları aynı yönde aynı açı boyunca ve aynı zamanda hareket eder. Örneğin, büyük daireler çizerek dönen bir jimnastikçi, çubuğun merkez çizgisi hareketin dönme eksenini olarak alır ve ağırlık merkezine göre hareket ederek rotasyon hareketi yapabilir (Şekil 6.2).



Şekil 6.2 Bileşenlerine ayırma yöntemi

Hareketin üçüncü ve son çeşidi, cismin aynı anda translasyonel ve dairesel harekete maruz kalması ile oluşan *genel harekettir*. Yalnızca translasyonel ya da yalnızca dairesel harekete kıyasla, hem translasyonel hem de dairesel hareketten oluşan hareketleri analiz etmek daha karmaşıktır. Şekil 6.3'te gösterilen dalgıç genel harekete maruz kalan bir cisim örneğidir. İnsan vücudunun çoğu bölümünün hareketi genel tiptedir. Örneğin, yürürken, alt ekstremiteler hem translasyon hem de rotasyon hareketi yaparlar.



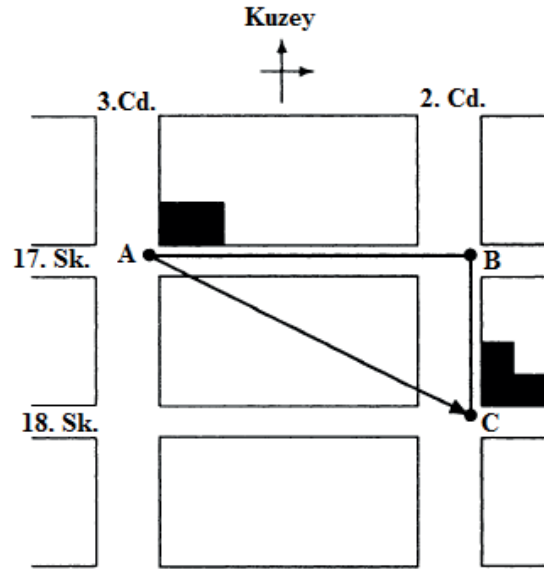
Şekil 6.3 İç kuvvetler ve momentleri

Translasyonel hareketin tanımıyla ilgilenen kinematik dalı, doğrusal kinematik olarak bilinirken, dairesel hareket ile ilgilenen dal, açısal kinematiktir. Benzer şekilde, kinetik konusu da doğrusal ve açısal olarak ayrılabilir. Doğrusal hareketler, uygulanan kuvvetlerin doğrudan sonucudur. Cismin doğrusal hareketi, cisim üzerine etki eden net kuvvet yönünde oluşur. Diğer yandan ise, açısal hareketler, tork olarak bilinen, uygulanan kuvvetlerin dönme etkilerinden kaynaklanır. Doğrusal ve açısal hareketleri incelemek için sırasıyla doğrusal ve açısal büyüklükler tanımlanmıştır. Örneğin, doğrusal ve açısal yer değiştirmeler, doğrusal- açısal hızlar ve doğrusal- açısal ivmeler vardır. Doğrusal ve açısal büyüklüklerin birbirinden bağımsız olmadığı unutulmamalıdır. Yani, eğer açısal büyüklük biliniyorsa doğrusal miktarlarda belirlenebilir, aynı durum tersi için de geçerlidir.

6.4 Uzaklık ve Yer değiştirme

Mekanikte; *uzaklık*, bir noktadan diğerine ilerledikçe takip edilen yolun toplam uzunluğu olarak tanımlanır ve *yer değiştirme*, iki noktayı birleştiren düz çizginin uzunluğu ile ilgili yön göstergesidir. Uzaklık, skaler bir niceliktir (yalnızca bir büyüklüğe sahiptir), yer değiştirme, vektörel bir niceliktir (hem büyüklüğe hem de bir yöne sahiptir).

Uzaklık ve yer değiştirme arasındaki farkı anlamak için, 3. sokak ve 18. cadde'nin köşesinde bir apartmanda yaşayan bir kişinin New York City'deki 2. sokak ve 17. caddenin köşesinde bir binadaki işine yürüdüğünü düşünün. Şekil 6.4'te A noktası, 3. sokak ve 18. caddenin köşesini temsil eder, B noktası, 2. sokak ve 18. caddenin köşesini temsil eder ve C noktası, 2.sokak ve 17. caddenin köşesini temsil eder. Her sabah bu kişi A'dan doğuya doğru B'ye, sonra da B'den güneye C'ye doğru yürür. A ve B arasındaki düz çizginin uzunluğunun 100 m ve B ile C arasında ki uzunluğun ise 50 m olduğunu varsayın. Bu nedenle, kişinin her sabah yürüdüğü toplam mesafe 150 metredir.



Şekil 6.4 Uzaklık ve yer değiştirme

Öte yandan, kişinin güneydoğu yönünde kapıdan kapıya doğru yer değiştirmesi, A ve C arasında düz çizgi birleştirmenin uzunluğuna eşittir, bu da; $\sqrt{(100)^2 + (50)^2} = 112m$ 'dir.

6.5 Sürat ve Hız

Hız ve sürat birbirinin yerine kullanılabilen kelimeler olsa da mekanikte farklı anlamlara sahiptirler. *Hız*, konum değişiminin zamana oranı olarak tanımlanır. Hız hem büyüklük hem de yöne sahip olan vektörel bir niceliktir. *Sürat*, hız vektörünün büyüklüğüne eşit skaler bir niceliktir.

6.6 İvme

İvme, hızın zamana göre türevi olarak tanımlanır ve vektörel bir niceliktir. “Hızlanma” terimi, zaman içinde hızın arttığı ve “yavaşlama” terimi zaman içinde azalan hızı belirtmek için daha yaygın olarak kullanılsa da, ikisinin de matematiksel tanımları aynıdır.

6.7 Atalet ve Momentum

Atalet, sürmekte olan hareketin veya duruşun korunması eğilimidir. Atalet, aynı zamanda bir cismin hareketindeki değişime karşı direnç olarak tanımlanabilir. Bir cismin ataleti ne kadar büyükse, hareket ettirmeye veya hareket halini değiştirmeye başlamak o kadar zor olur. Nesnenin kütlesi ne kadar büyük olursa, atalet de o kadar büyük olur. Örneğin, kütlelerinin farkı nedeniyle; bir kamyonun, bir yolcu arabasından daha büyük bir ataleti vardır. Her ikisi de aynı hızda seyahat ediyorsa, kamyonu arabaya göre durdurmak her zaman daha zordur.

Atalet gibi, *momentum* da mevcut durumun korunması eğilimidir, kütle ve hızın çarpımı

olarak tanımlanır. Sadece hareketli cisimler momentuma sahipken, sabit veya hareketli olan her cisim bir atalet taşır. Aynı kütleyle sahip iki hareketli cisimden daha yüksek hızdaki cismin momentumu daha büyüktür. Aynı hıza sahip iki hareketli cisimden, daha yüksek kütleli cismin momenti daha büyüktür.

6.8 Serbestlik Derecesi

Serbestlik derecesi, bir nesnenin boşlukta hareket etme yeteneğini tanımlar. Top gibi tamamen kontrolsüz bir cisim altı serbestlik derecesine sahiptir (üçü, karşılıklı olarak dik üç eksen boyunca ve üçü de aynı eksenler etrafında rotasyon hareketine bağlı olarak). İnsan kalça eklemine alt ekstremitenin bir eksen etrafında dönmesine ve iki düzlemde açısal hareketlerine izin veren üç serbestlik derecesi vardır. Diğer taraftan, dirsek ve ön kol sistemi iki serbestlik derecesine sahiptir, çünkü alt kolun bir eksen etrafında dönmesine ve bir düzlemde açısal harekete geçmesine izin verir.

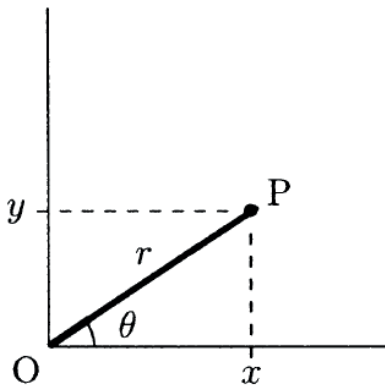
6.9 Parçacık Kavramı

Mekanikte “parçacık” kavramı oldukça varsayımsaldır. Cismin boyut ve şeklini dikkate almadan, cismin toplam kütlesine eşit bir kütle ve cismin ağırlık merkezinde bulunan bir parçacık olduğunu varsayar. Bazı problemlerde, incelenen nesnenin şekli, hareketinin belirli yönlerinin tartışılmasıyla ilgili olmayabilir. Bu durum özellikle nesne,

yalnızca translasyonel bir hareket halinde ise doğrudur. Örneğin, tekerlekli sandalyeyi iten bir kişi için önemli olan tekerlekli sandalyenin toplam kütesidir, boyutu veya şekli değildir. Dolayısıyla, tekerlekli sandalye, tekerlekli sandalyenin toplam kütesine eşit bir kütleli bir parçacık olarak muamele görebilir ve nispeten basit analizlerle incelenebilir. Nesnenin rotasyon hareketine girmesi durumunda boyutu ve şekli önem kazanabilir.

6.10 Referans Düzlemleri ve Koordinat Sistemleri

Bir cismin hareketini doğru bir şekilde tarif edebilmek için bir referans düzlem kullanılmalıdır. Doğrusal hareketleri tanımlamak için birbirine dik üç yönden oluşan *dikdörtgen* veya *kartezyen koordinat sistemi* en uygun referans düzlemidir. Bu sistemin eksenleri genellikle x , y ve z ile gösterilmiştir. İki boyutlu problemler için, z eksenini ortadan kaldırılarak eksen sayısı azaltılabilir (Şekil 6.5).



Şekil 6.5 Bir noktanın dikdörtgen (x,y) ve kutupsal (r,θ) koordinatları

Bir diğer yaygın olarak kullanılan referans düzlemi, açısal hareketleri analiz etmek için daha uygun olan *kutupsal koordinat sistemidir*. Şekil 6.5'te gösterildiği gibi, bir P noktasının kutup koordinatları r ve θ parametreleri tarafından tanımlanır. r , koordinat düzleminin merkezi O ile P noktası arasındaki mesafedir ve θ , OP'nin yatay ile oluşturduğu açı çizgisidir. Kutupsal koordinatların detayları daha sonraki bölümlerde anlatılacaktır.

6.11 Dinamik Analizler için Önkoşullar

Dinamik analizin önkoşulları vektör matematiği, diferansiyel hesap ve integral hesabıdır. Vektör matematiği, Ek B'de ele alınmıştır. Diferansiyel ve integral hesaplamasının ilkeleri genel olarak Calculus'un temelini oluşturan yaygın olarak karşılaşılan fonksiyonların tanımları ve özellikleri ile Ek C'de sunulmuştur. İlerleyen bölümlere devam etmeden önce Ek B ve C gözden geçirilmelidir. Dinamik analizlerde de önemli olan, sırasıyla Bölüm 2 ve Bölüm 3'te ele alınan kuvvet ve tork vektörlerinin özellikleridir. Bölüm 4 ve Bölüm 5'te ele alınan statik analizlerin, ivmenin sıfır olduğu özel dinamik analiz durumları olduğu unutulmamalıdır.

6.12 İşlenecek Konular

Bu ders kitabının ikinci kısmı, Bölüm 6 ile Bölüm 11 arasındaki bölümler, hareketli

sistemlerin analizlerine ayrılmıştır. Bölüm 7, yer değiştirme, hız ve ivme vektörlerinin matematiksel tanımları tanıtılmış, lineer büyüklükler arasındaki kinematik ilişkiler tanımlanmış, tek eksenli ve iki eksenli hareket analizleri tartışılmış ve spor biyomekaniğinin problemlerine uygulanan kavramlar anlatılmıştır. Doğrusal kinetik Bölüm 8'de incelenmiştir. Hareket denklemleri kullanılarak kinetik problemlerini çözme ve iş ve enerji yöntemleri Bölüm 8'de tartışılmıştır. Açısal kinematik ve kinetik sırasıyla Bölüm 9 ve Bölüm 10'da ele alınmış ve biyomekaniğin bazı problemlerini araştırmak için uygulanan kavramlar ve prosedürler incelenmiştir. İmpuls momentum, çarpma ve çarpışma gibi konular Bölüm 11'de ele alınmıştır.

Bölüm 7

DOĞRUSAL KİNEMATİK

Çeviren: Merve Öztürk

- 7.1 Tek Eksenli Hareket**
- 7.2 Konum, Yer Değişirme, Hız ve İvme**
- 7.3 Boyutlar ve Birimler**
- 7.4 Ölçülen ve Türetilen Büyüklükler**
- 7.5 Sabit İvme ile Tek Eksenli Hareket**
- 7.6 Tek Eksenli Hareket Örnekleri**
- 7.7 Çift Eksenli Hareket**
- 7.8 Konum, Hız ve İvme Vektörleri**
- 7.9 Sabit İvme ile Çift Eksenli Hareket**
- 7.10 Eğik hareket**
- 7.11 Atletizm Uygulamaları**
- 7.12 Örnek Problemler**

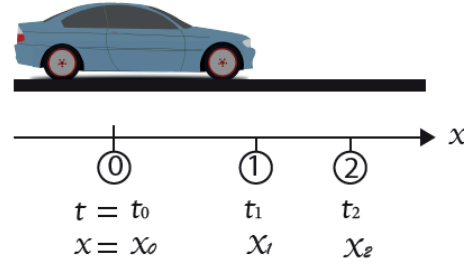
7.1 Tek Eksenli Hareket

Tek eksenli hareket, hareketin yalnızca bir yönde olduğu ve en basit doğrusal hareket şeklidir. Düz bir karayolu üzerinde seyreden bir araba ve 100 metre yarış kısa mesafe koşucusu, tek eksenli hareket örnekleridir.

Kinematik analizler; konum, hız ve ivme vektörleri arasındaki ilişkileri değerlendirir. Tek eksenli hareket analizleri için, hareket yönü ile örtüşen x gibi bir yönü tanımlamak, bu yöndeki kinematik parametreleri tanımlamak ve deplasman, hız ve ivme skaler büyüklüklermiş gibi analizleri yürütmek için daha pratiktir.

7.2 Konum, Yer Değiştirme, Hız ve İvme

Şekil 7.1’de gösterilen arabayı düşünün. Aracın başlangıçta hareketsiz olduğunu ve 0 noktasında olduğunu varsayınız. t_0 zamanında, araç düz yatay bir yoldan sağa doğru hareket etmeye başlıyor. Bir süre sonra t_1 anında otomobilin 1 noktasında olduğu ve daha sonra t_2 anında 2 noktasında bulunduğu tespit edilmiştir. 0, 1 ve 2, otomobilin farklı zamanlarındaki *konumlarını* temsil eder ve 0 noktası aracın *başlangıç konumunu* temsil eder.



↳ **Pozitif yer değiştirme**

Şekil 7.1 Otomobilin t_0 , t_1 ve t_2 zamanlarında 0, 1 ve 2 konumları

Aracın farklı zamanlarda konumu, uzayda bir noktaya göre ölçülmelidir. X aracın ilk konumuna göre yatay mesafelerin bir ölçüsü olsun. Eğer x_0 aracın başlangıç konumunu gösterirse, $x_1 = 0$ olur. Eğer 1 ve 2, x_1 ve x_2 mesafelerinde 0'dan uzakta, x_1 ve x_2 sırasıyla t_1 ve t_2 zamanlarında nesnenin göreceli konumlarını tanımlar. Aracın göreceli konumu zamanla değiştiği için, x t 'nin bir fonksiyonudur veya $x = f(t)$. t_1 ve t_2 zaman aralığında, aracın konumu $\Delta x = x_2 - x_1$, Δ (büyük delta) değişimi ifade eder. Konumdaki bu değişiklik, arabanın $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında yer değiştirmesidir.

Tek eksenli bir yatay hareket sırasında, araç x ekseninin merkezinin 0, sağında veya solunda bulunabilir. Pozitif x ekseninin sağa doğru olduğunu varsayarsak, aracın konumu 0'ın sağında ise pozitif ve 0'ın solunda ise negatiftir. Benzer şekilde, eğer araç sağa doğru hareket ederse aracın yer değiştirmesi de pozitiftir ve araç sola doğru hareket ederse yer değiştirme negatif olur.

Hız, göreceli konumun değişiminin zamana oranı olarak tanımlanır. X yönünde hareket eden bir nesnenin konumu zamanın bir fonksiyonu olarak biliniyorsa, nesnenin anlık hızı v , t 'ye göre x türevi dikkate alınarak belirlenebilir;

$$\Delta v = \frac{dx}{dt} \quad (7.1)$$

Herhangi bir zaman aralığında cismin ortalama hızı, \bar{v} , cismin konumundaki değişim oranı (yer değiştirme) ve bu değişikliği gerçekleştirmek için geçen süre ile bulunur. Örneğin Şekil 7.1'deki aracın t_1 ve t_2 zaman aralığındaki ortalama hızı;

$$\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (7.2)$$

Denklem 7.2'de v 'nin üzerindeki çizgi, ortalamayı gösterir ve x_1 ve x_2 , sırasıyla, t_1 ve t_2 zamanlarında aracın göreceli konumlarıdır.

Hız, vektörel bir büyüklüktür, pozitif ve negatif değerleri hareketin yönünü gösterir. Hız pozitif değer çıktıysa, cisim pozitif x ekseninde merkezden uzaklaşıyordur. Eğer negatif ise cisim negatif x yönünde hareket ediyordur. Hız vektörünün büyüklüğü *sürat* olarak adlandırılır ve her zaman pozitif bir miktardır.

Nesnenin anlık hızı belli bir hareket sırasında değişebilir. Başka bir deyişle, hız zamanın bir fonksiyonu olabilir ya da $v=f(t)$. İvme, hız değişiminin zamana oranı olarak tanımlanır. Bir nesnenin hızının zamanın bir fonksiyonu

olarak bilinmesi durumunda, anlık ivmesi, a , v 'nin t 'ye göre türevi alınarak belirlenebilir:

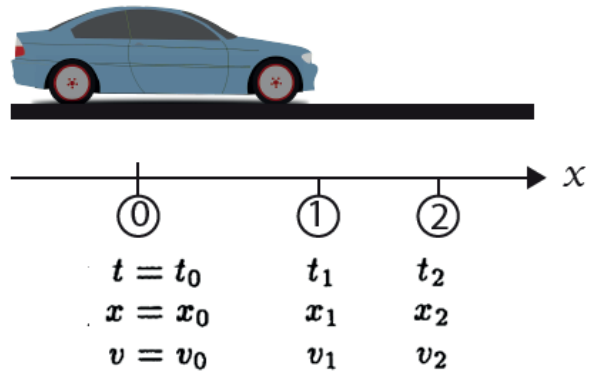
$$a = \frac{dv}{dt} \quad (7.3)$$

Genel olarak, hareketli bir cismin ivmesi zamanla değişebilir. Diğer bir deyişle, ivme zamanın bir fonksiyonu olabilir ya da $a=f(t)$.

Nesnenin hızındaki değişimin ve o değişim sırasında geçen süre oranını dikkate alarak belirlenebilen bir *ortalama ivme*, \bar{a} , vardır.

Örneğin, Şekil 7.2'deki otomobilin t_1 ve t_2 zamanlarındaki anlık hızları v_1 ve v_2 biliniyorsa, t_1 ile t_2 arasındaki zaman aralığında aracın ortalama ivmesi hesaplanabilir:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (7.4)$$



Şekil 7.2 Otomobilin başlangıç hızı v_0 , t_1 ve t_2 zamanlarındaki hızları sırasıyla v_1 ve v_2

İvme vektörel bir büyüklüktür. Pozitif ve negatif değerler alabilir, her zaman pozitif ivme cismin hızlandığı; negatif ivme cismin yavaşladığı anlamına gelmez. Eğer, verilen bir anda, hız ve ivme ikisi de pozitif ya da negatif

ise, o zaman nesnenin hızlandığı veya ivmelendiği söylenir. x yönünde tek eksenli bir hareket için, hız ve ivme ikisi de pozitifse, cisim artan bir hızla pozitif x yönünde hareket ediyor. Hız ve ivme ikisi de negatifse, cisim artan bir hızda negatif x yönünde hareket ediyor. Eğer hız ve ivme ters işaretlere sahipse, cisim yavaşlar. Örneğin, x yönünde tek eksenli bir hareket için, hız pozitifse ve ivme negatifse, cisim azalan bir hız ile pozitif x yönünde hareket ediyor. Hız negatif ve ivme pozitifse, cisim azalan bir hız ile negatif x yönünde hareket eder. Son olarak, ivme sıfır ise, o zaman nesnenin sabit veya tek bir hıza sahip olduğu söylenir. Bütün bu olasılıklar Tablo 7.1'de özetlenmiştir.

Tablo 7.1 Hızlanma, yavaşlama ve sabit hız koşulları

	V	A
Artan sürat	+	+
veya hızlanma	-	-
Azalan sürat	+	-
veya yavaşlama	-	+
Sabit sürat	±	0

İvme hızdan türetilmiştir, hız ise konumdan türetilmiştir. Dolayısıyla, ivme ve konumu doğrudan 7.1 ve 7.3 denklemlerinden ilişkilendirebiliriz;

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Yukardaki eşitliklerdeki x' in üzerindeki "nokta", zamana göre türevi ifade eder. Bir nokta, zamana göre ilk türevi ve iki noktayı ikinci türevi ifade eder.

7.3 Boyutlar ve Birimler

Göreceli konum uzunluk birimleri cinsinden ölçülür. Tanım olarak, yer değiştirme, konum değişikliğine eşittir, hız, göreceli konumun değişiminin zamana oranıdır ve ivme, hız değişiminin zamana oranıdır. Bu nedenle, göreceli konum ve yer değiştirme, uzunluk boyutuna sahiptir, hız, zamana bölünmüş uzunluk boyutuna sahiptir ve ivme, zamana bölünmüş hız boyutuna sahiptir:

$$[\text{KONUM}] = L$$

$$[\text{YER DEĞİŞTİRME}] = L$$

$$[\text{HIZ}] = \frac{[\text{YER DEĞİŞTİRME}]}{[\text{ZAMAN}]} = \frac{L}{T}$$

$$[\text{İVME}] = \frac{[\text{HIZ}]}{[\text{ZAMAN}]} = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2}$$

Bu boyutlara dayanarak, farklı birim sistemlerinde yer değiştirme, hız ve ivme birimleri belirlenebilir. Bu birimlerden bazıları Tablo 7.2'de listelenmiştir.

Tablo 7.2 Yer değiştirme, hız ve ivmenin birimleri

Sistem	Uzunluk	Hız	İvme
SI	Metre (m)	m/s	m/s ²
CGS	Santimetre (cm)	cm/s	cm/s ²
British	Foot (ft)	ft/s	ft/s ²

7.4 Ölçülen ve Türetilen Büyüklükler

Uygulamada, zamanla konum, hız ve ivmeyi bulmak mümkündür. Bu üçünden herhangi biri, diğer iki nicelik, uygun türev ve / veya integral yöntemleri kullanılarak veya grafiksel ve sayısal teknikler kullanılarak belirlenebilir. x yönünde tek eksenli hareket eden bir nesnenin konumu ölçülürse kaydedilen konum, zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir, $x = f(t)$. Cismin konumunu temsil eden fonksiyon belirlendikten sonra, farklı zamanlarda cismin hızı ve ivmesi aşağıdaki eşitlikler kullanılarak bulunabilir;

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (7.5)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (7.6)$$

x yönündeki tek eksenli hareketin yapıldığı bir cismin hızı ölçülür ve zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edilirse, $v = f(t)$, daha sonra başlangıç konumuna göre cismin konumu ve cismin anlık ivmesi aşağıdaki eşitlikler kullanılarak bulunabilir;

$$x = x_0 + \int_{t_0}^1 v dt \quad (7.7)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (7.8)$$

Denklemin alt sınırı, t_0 , Denklem (7.7), ilk ölçümlerin alındığı zamana karşılık gelir ve üst sınır herhangi bir t zamanına karşılık gelir. x_0 , nesnenin t_0 zamanında başlangıç pozisyonudur. Pratik amaçlar için, t_0 sıfır olarak alınabilir. Bu, hareketin başladığı andaki tüm zaman ölçümlerinin anlık olarak yapıldığı anlamına

gelir. Ayrıca, tüm konum ölçümleri, nesnenin başlangıç konumuna göre yapılmışsa, $x_0 = 0$.

Bir nesnenin ivmesi ölçülür ve zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edilirse, $a = f(t)$, cismin başlangıç hızı ve konumuna göre cismin anlık hız ve konumu aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanabilir:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt \quad (7.9)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt \quad (7.10)$$

Denklem (7.9) ve (7.10) 'da x_0 ve v_0 , t_0 anındaki nesnenin başlangıç pozisyonuna ve başlangıç hızına karşılık gelir. Bu denklemlerin, hareket eden nesnenin başlangıç pozisyonuna ve hızına göre pozisyon ve hız değişimini gösterdiğine dikkat edilmelidir. Bununla birlikte, bu denklemler, herhangi bir zamanda, nesnenin konumuna ve hızına göre doğrudur. Örneğin, x_1 ve v_1 , t_1 anındaki nesnenin konumunu ve hızını temsil ederse, denklem (7.9) ve (7.10) aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$v = v_1 + \int_{t_1}^t a dt$$

$$x = x_1 + \int_{t_1}^t v dt$$

7.5 Sabit İvme ile Tek Eksenli Hareket

İvme sabit olduğunda ortak bir tek eksenli hareket tipi oluşur. Eğer a_0 bir nesnenin sabit ivmesini temsil ediyorsa, v_0 başlangıç hızıdır

ve $x_0, t_0 = 0$ anındaki başlangıç konumudur, daha sonra denklem (7.9) ve (7.10) aşağıdakileri verecektir:

$$v = v_1 + a_0 t \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + a_0) dt \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a_0 dt \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2. \end{aligned} \quad (7.12)$$

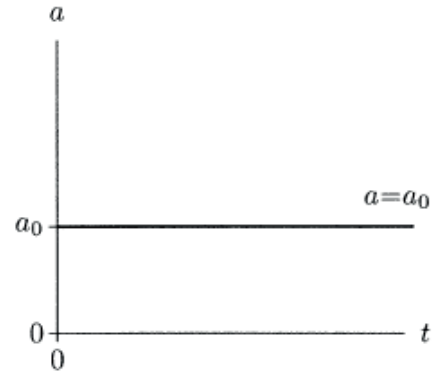
Belirli bir başlangıç konumundan, başlangıç hızı ve sabit ivme ile x yönünde tek eksenli harekete geçen bir nesnenin, denklem (7.11) ve (7.12), başlangıç hızına ve konumuna göre zamanın bir fonksiyonu olarak nesnenin hızını ve konumunu belirlemek için kullanılabilir. Denklem (7.11) ve (7.12), diğer zaman ve konumlara göre ifade edilebilir. Örneğin, x_1 ve v_1, t_1 zamanındaki nesnenin bilinen konumunu ve hızını temsil ediyorsa;

$$v = v_1 + a_0(t - t_1),$$

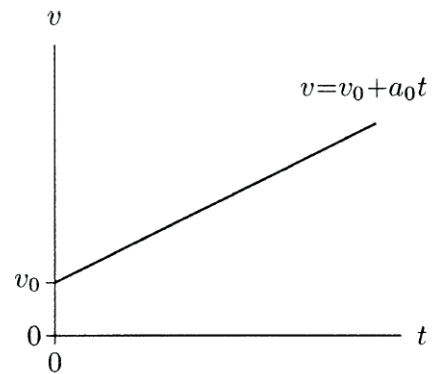
$$x = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a_0(t - t_1)^2,$$

Şekil 7.3, sabit bir ivme ile hareket eden bir cisim için zamana karşı ivme grafiğini göstermektedir. Denklem (7.11) 'e göre hız, zamanın doğrusal bir fonksiyonudur. Şekil 7.4'te gösterildiği gibi, zamana karşı hız grafiği,

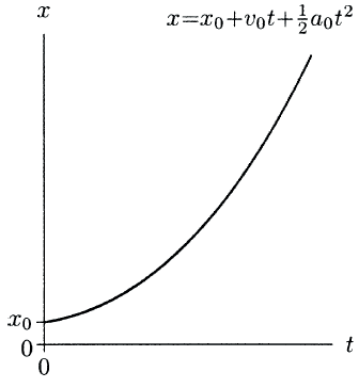
sabit ivmenin büyüklüğüne eşit olan sabit eğime sahip düz bir çizgidir. Bu, bir fonksiyonun eğiminin o fonksiyonun türevine eşit olması ve zamana göre hız türevinin ivme ile aynı olması gerçeğiyle tutarlıdır. Denklem (7.12)'de, yer değiştirme zamanının ikinci dereceden bir fonksiyonudur ve Şekil 7.5'de gösterildiği gibi, bu fonksiyonun grafiği bir paraboldür. Herhangi bir zamanda, bu fonksiyonun eğimi o andaki nesnenin hızına eşittir.



Şekil 7.3 Sabit ivme



Şekil 7.4 İvme sabitse, hız zamanın doğrusal fonksiyonudur



Şekil 7.5 İvme sabitse, konumun değişimi zamanın ikinci dereceden fonksiyonudur

a_0 için denklem 7.11 kullanılıp, 7.12' de yerine konulduğunda; sabit ivmeli tek eksenli bir hareket için; hız, yer değiştirme ve zaman arasında bir eşitlik yazmak mümkündür;

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t \quad (7.13)$$

Benzer şekilde, Denklem 7.11' den t elde edilip denklem 7.12' de yerine konulduğunda; hız, yer değiştirme ve ivme arasında bir eşitlik yazmak mümkündür;

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0) \quad (7.14)$$

Not İvme sabit ise (7.11) ile (7.14) arasındaki denklemler geçerlidir. Ayrıca, ilgili parametrelerin yönü uygun şekilde ele alınmalıdır. Örneğin, ivme yönü pozitif x yönünün tersine ise, o zaman ivme teriminin önündeki “artı” işareti “eksi” işareti ile değiştirilmelidir.

7.6 Tek Eksenli Hareket Örnekleri

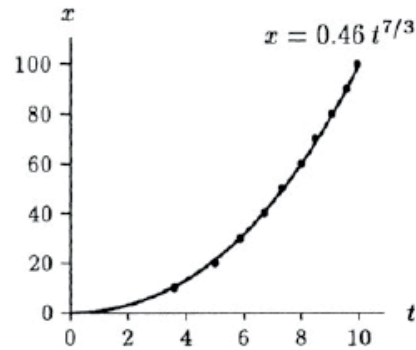
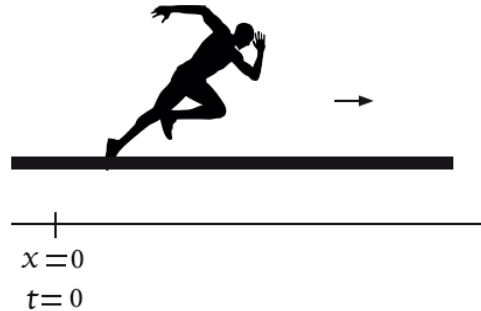
Aşağıdaki örnekler, (7.5) ile (7.10) arası kinematik denklemlerin kullanımını göstermeyi amaçlamaktadır.

Örnek 7.1: Şekil 7.6' da gösterilen kısa mesafe koşucusu 10 saniyede 100 metre yarışını tamamlamıştır. Koşucunun ilk 10 metreye ulaşması için geçen süre ve her 10 metre işareti, on gözlemci tarafından kronometreler kullanılarak kaydedilmiştir. Daha sonra toplanan veriler, Şekil 7.6' da gösterilen konuma karşı zamana ait grafik elde etmek için kullanılmıştır. Veriler, aşağıdaki fonksiyonla ifade edilebilir;

$$x = 0.46t^{7/3}$$

Burada konumun değişimi metre cinsinden, zaman ise saniye cinsinden ölçülmüştür.

Koşucunun hızını ve ivmesini, zamanın bir fonksiyonu olarak ve başlangıçtan 5 saniye sonra anlık hız ve ivmeyi belirleyiniz.



Şekil 7.6 Konum (metre) - zaman (saniye)

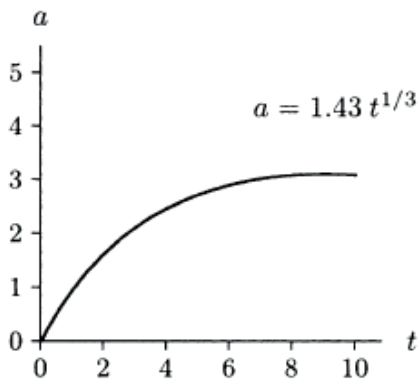
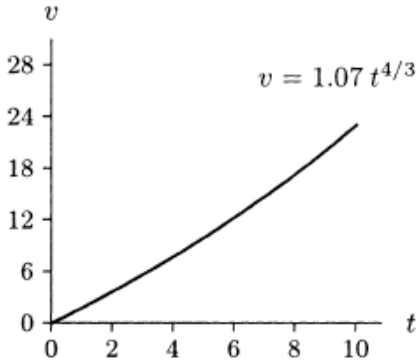
Çözüm:

Koşucunun konumunu belirten fonksiyonu biliyoruz, bu fonksiyonun 1. türevi hızı, ikinci türevi ise ivmeyi verir.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (0.46t^{7/3}) = 1.07t^{4/3}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (1.07t^{4/3}) = 1.43t^{1/3}$$

Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 7.7' de gösterilmektedir.



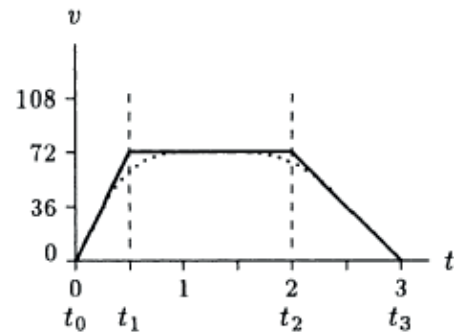
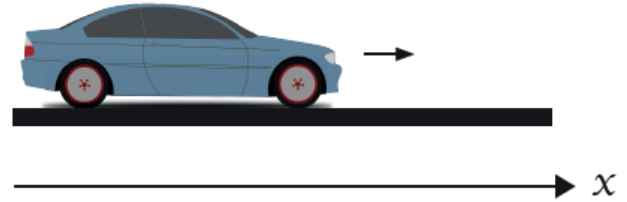
Şekil 7.7 Koşucunun, Hız (m/sn) ve İvme (m/sn²) ile Konum (m) ve Zaman (sn) grafikleri

Koşucunun yarışa başlamasından 5 saniye sonraki hız ve ivmesini bulmak için yukarıda bulunan denklemlerde $t=5$ yazarsak,

$$v = 9.15\text{m/s,}$$

$$a = 9.15\text{m/s.}$$

Örnek 7.2: Düz bir otoyolda sürülen bir otomobilin hız göstergesi, toplam 3 dakika süreyle kaydedilmiştir. Toplanan veriler, Şekil 7.8' de hız zaman grafiği ile ifade edilmiştir. Şekil 7.8' de gösterilen grafiğe göre, otomobilin hızı 0-30 saniye aralığında, $v_0=0$ ' dan $v_1=72$ km/saat'e kadar doğrusal bir şekilde artmaktadır. 30-120 saniye aralığında 72 km/saat' de sabit, 120. saniyede frene basarak yavaşlamaya başlıyor, zamanla hızı doğrusal bir şekilde azalıyor, 60 saniye sonra duruyor.



Şekil 7.8 Otomobil için Sürat, v , (km/saat) – Zaman, t , (dak) grafiği

Aracın hız, yer değiştirme ve ivme ifadelerini zamanın bir fonksiyonu olarak belirleyiniz. Aracın 3 dakika içinde seyahat ettiği toplam mesafeyi hesaplayınız.

Çözüm:

Soruda verilen, km/saat cinsinden hız değerlerini m/s' ye çevirelim;

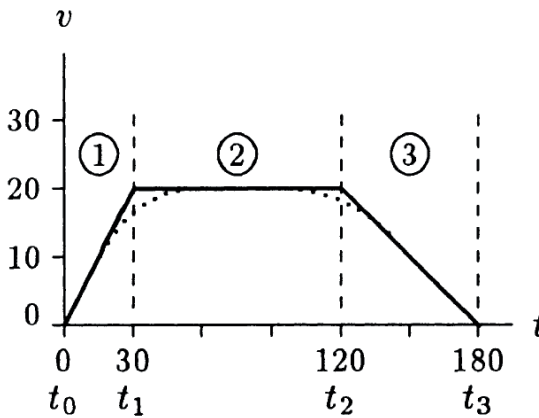
$$1 \text{ km}=1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ saat}=3600 \text{ s}$$

$$72\text{km/h} = 72 \times \frac{1000}{3600} = 20\text{m/s.}$$

Şekil 7.8'de gösterilen sürat – zaman grafiği, süratin metre/sn zamanın ise saniye cinsinden değerleriyle Şekil 7.9'da tekrar çizilmiştir.

Yapılan yaklaşımlar nedeniyle, Şekil 7.9'daki zaman grafiğine karşı hız grafiği üç ayrı bölgeye sahiptir ve tüm grafiği temsil edebilecek tek bir fonksiyon yoktur. Bu nedenle, bu problem üç aşamada analiz edilmelidir.



Şekil 7.9 Otomobil için Sürat, v, (m/s) – Zaman, t, (sn) grafiği

1.aşama;

$t_0=0$ ve $t_1=30$ saniye aralığında, hız 0'dan 20m/s' ye kadar doğrusal artmaktadır. Ek C'de tartışıldığı gibi, bütün doğrusal fonksiyonlar $X= A + BY$ olarak tanımlanır. Bu denklemde Y bağımsız değişken, X bağımlı değişken, A ve B sabit katsayılardır. Bu durumda, zaman bağımsız değişken, sürat ise bağımlı değişkendir. Bu yüzden, 1. aşamada zaman ve arabanın sürati arasındaki ilişki doğrusaldır;

$$v = A + Bt \quad (i)$$

A ve B katsayılarının henüz belirlenememesinden dolayı, verilen Denklem (i) fonksiyonu, v ve t arasındaki genel ifadedir. A ve B bilinmeyenlerini (2 bilinmeyen) hesaplayabilmek için 2 koşula ihtiyacımız var. Bu koşullar Şekil 7.9'dan temin edilebilir. Araç ilk hareket ettiğinde $t=0$ sn ve $v=0$ m/s'dir. $T=30$ sn iken $v=20$ m/s'dir. Denklem (i)'de başlangıç noktasına baktığımızda, $A=0$ iken, ikinci durumda ($v=20$ m/s, $t=30$ sn) $B=0,667$ 'dir. Bu değerleri, denklem (i)'de yerine koyduğumuzda, 1.aşamada otomobilin zaman ve sürati arasındaki bağlantının fonksiyonu;

$$v = 0.667t \quad (ii)$$

Biz daha öncesinde sürat hesaplamalarını m/s ve saniye birimlerine çevirdiğimiz için, denklem (ii)'de sürat bu birimler cinsindedir.

Denklem 7.7 ve 7.8, 1.aşamada otomobilin ivmesi ve yer değiştirmesini belirlemede kullanılabilir. Başlangıç noktasına göre yer değiştirme ölçülecekse, otomobilin başlangıç konumu $x_0=0$ 'dır. Bu sebeple;

$$x = x_0 + \int_0^t v dt = \int_0^t (0.667t) dt = 0.667t \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t = 0.333t^2 \quad (iii)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.667t) = 0.667 \quad (iv)$$

Denklem (iv)'den 1.aşamada otomobilin ivmesi sabittir ve büyüklüğü 0.667 m/s^2 'dir. Grafiğin 1. aşamasının sonunda araba ile seyahat edilen toplam mesafe (iii) denkleminde t yerine 30 s konularak bulunur:

$$x_1 = 0.333t^2 = 0.333(30)^2 = 300 \text{ m}$$

2.aşama;

Bu aşama $t_1=30$ sn olduğunda başlar ve $t_2=120$ sn olduğunda biter. 2.aşamada arabanın sürati 20m/s 'dir. Bu aşamada süratin fonksiyonu;

$$v = 20 \quad (v)$$

1.aşamada otomobil tarafından toplam alınan yol, $x_1=300\text{m}$ 'dir. Bu değer aynı zamanda 2.aşama için arabanın başlangıç konumunu da belirtir. 1.aşama $t_1=30$ sn iken bitmiş ve 2. aşama başlamıştır. t_1 ve x_1 'e göre denklem 7.7 yazıldığında;

$$x = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v dt = 300 + \int_{30}^{t_2} 20 dt = 300 + 20[t]_{t_1}^{t_2}$$

$$x = 300 + 20(t_2 - t_1) \quad (vi)$$

2.aşamada ivme, denklem 7.8 kullanılarak çözülebilir;

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (vii)$$

2. aşamada otomobilin ivmesi denklem (vii)'den o sıfır çıkar. 2.aşamanın sonunda otomobil ile seyahat edilen toplam mesafe (vi) denkleminde t yerine 120 s konularak bulunur:

$$x_2 = 300 + 20(120 - 30) = 300 + 1800 = 2100\text{m}$$

3. aşama ;

Bu aşama $t_2=120$ sn ve $t_3=180$ sn aralığındadır, arabanın sürati zamanla doğrusal olarak azalır ve 60sn içinde sıfıra düşer. 3.aşamada zaman ve otomobilin sürati arasındaki ilişkinin fonksiyonu, denklem (i) kullanılarak belirlenir. Bu denklemdeki, A ve B katsayıları ise 3.aşamadaki 2 koşul dikkate alınarak hesaplanabilir. Örneğin, 120. saniyede aracın hızı 20m/s , 180. saniyede aracın hızı 0 m/s 'dir. Denklem (i)'de ikinci koşul yerine konulduğunda $A+180B = 0$ veya $A=-180B$ 'dir. İlk koşul ve $A=-180B$, denklem (i) 'de yerine konulduğunda $B = -0,333$ bulunacaktır. $A = -180B$ ve $B = -0,333$ ise $A = 60$ 'dır. Bu sebeple, 3.aşamada zaman ve otomobilin sürat fonksiyonu;

$$v = 60 - 0.333t \quad (viii)$$

3. aşama $t_2=120$ sn'de başlar ve otomobilin bu aşamadaki başlangıç pozisyonu $x_2=2100$ m'dir. Denklem 7.7'yi kullanarak;

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + \int_{t_2}^{t_3} v dt = 2100 + \int_{t_2}^{t_3} (60 - 0,333t) dt \\ &= 2100 + \int_{t_2}^{t_3} 60 dt - \int_{t_2}^{t_3} 0,333t dt \\ &= 2100 + [t]_{t_2}^{t_3} - \frac{0,333}{2} [t^2]_{t_2}^{t_3} \end{aligned}$$

$$x_3 = 2100 + 60[t]_{120}^{180} - 0,167[t^2]_{120}^{180} \quad (ix)$$

Denklem 7.8'i kullanarak;

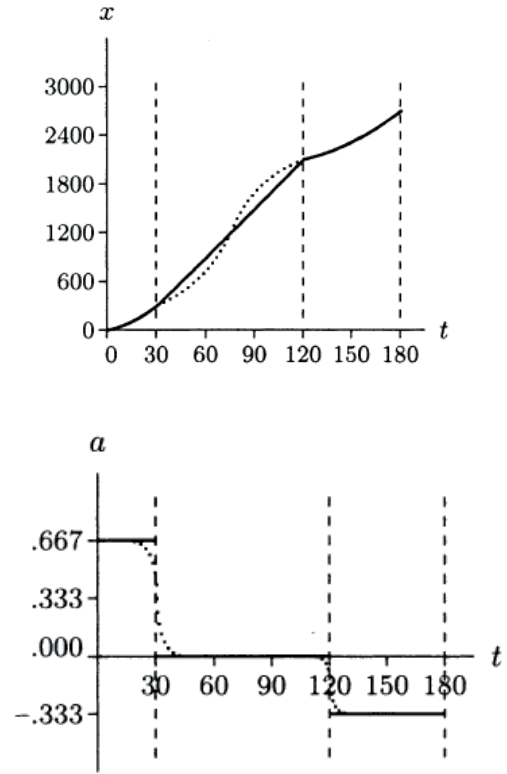
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (60 - 0,333t) = -0,333 \quad (x)$$

Grafiğin 3. bölümünün sonunda araba ile seyahat edilen toplam mesafe (ix) denklemi ile belirlenir;

$$\begin{aligned} x_3 &= 2100 + 60(180-120) - 0,167(180^2 - 120^2) \\ &= 2100 + 3600 - 3006 = 2694 \text{ m} \end{aligned}$$

Şekil 7.10' da farklı aşamalarda aracın yer değiştirme ve ivmesi için fonksiyonları yer değiştirme ve ivme - zamana göre grafiklerini çizdirmek için kullanılmıştır (çizgi şeklindeki eğriler). Grafiğim tüm aşamalarında araç pozitif x yönünde hareket etmektedir. Böylece aracın yer değiştirmesi de pozitiftir. Grafiğin 1. bölümünde aracın ivmesi pozitiftir, pozitif x yönünde sürati artmaktadır. Grafiğin 2. bölümünde aracın ivmesi sıfırdır, araç sabit sürata sahiptir. Grafiğin 3. bölümünde aracın

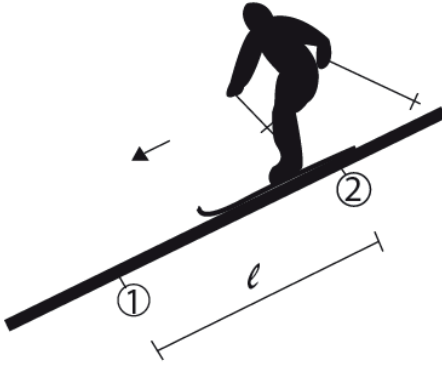
ivmesi negatiftir (pozitif x yönünde hız azalmaktadır).



Şekil 7.10 Yer değiştirme, x (m) ve ivme, a (m/s²) – zaman, t (sn) grafikleri

Şekil 7.10'daki yer değiştirme zaman ve ivme zaman grafiklerinin sürekli olmadığı unutulmamalıdır. Örneğin, faz 1'in sonundaki x-t eğrisinin eğimi, 2. aşamanın başlangıcında x-t eğrisinin eğimine eşit olmak zorunda değildir. Süreksizlik, a-t grafiğinde daha önemlidir. Bunun nedeni, aracın gerçek hızına karşı zaman grafiğini üç bölgede üç düz çizgi ile daha benzerini çizemememizdir. Gerçekte, Şekil 7.10'daki noktalı eğriler ile gösterildiği gibi, bu eğrilerin eğimlerindeki değişiklikler daha az belirgin ve daha sürekli olacaktır.

Örnek 7.3: Şekil 7.11'de gösterilen kayakçı, düz yamaçtan 2 m/s^2 sabit ivme ile aşağıya doğru hareket etmektedir. Kayakçının 0 konumundaki gözlemlenen sürati 10 m/s ' dir. Kayakçının 1 konumundaki v_1 süratini ve kayakçının 0 ve 1 konumları arasındaki mesafeyi ($l=100 \text{ m}$) alabilmesi için geçen süreyi (t_1) hesaplayınız.

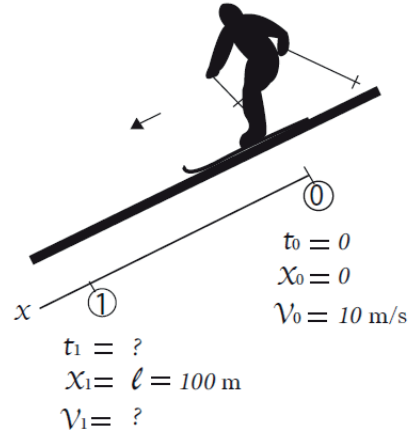


Şekil 7.11 $a_0=2 \text{ m/s}^2$ ivme ile aşağı kayan kayakçı

Çözüm:

Kayakçı sabit ivme ile aşağı doğru hareket ettiği için bu sorunun analizinde denklem (7.11) ve (7.12) kullanılabilir. Şekil 7.12' de gösterildiği gibi, ivme yönü eğime paralel veya x eksenini tanımlanan kayakçının hareket yönüdür. Çözümü basitleştirmek adına x ekseninin orijini konum 0' a yerleştirilmiştir ve $x_0=0$ 'dır. Dahası, kayakçı 0 konumundayken, ana göre tüm zaman ölçümlerini yapabiliriz. Bu da $t_0=0$ demek olur. Şekil 7.12' de gösterildiği üzere, o konumunda kayakçının sürati $v_0=10 \text{ m/s}$ 'dir. Konum 1 hakkında bildiğimiz tek şey, 0 konumunda $l=100 \text{ m}$ uzaklıkta olduğudur.

Dolayısıyla, $x_1=l=100 \text{ m}$ 'dir. Konum 0'dan konum 1'e gitmek için geçen süre t_1 ve aracın sürati v_1 hesaplanması gereken bilinmeyenlerdir.



Şekil 7.12 Konum 0 ve konum 1'deki koşullar

Denklem 7.12 kullanılarak, konum 0 ve konum 1 arasındaki denklem yazılmıştır;

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t_1^2$$

$x_0=0$, $v_0=10 \text{ m/s}$ ve $a_0=2 \text{ m/s}^2$ denkleme yerleştirildiğinde;

$$t_1^2 + 10t_1 - 100 = 0$$

İkinci dereceden denklem elde edilir. İkinci dereceden denklemlerin çözümü Ek C'de tartışılmıştır. t_1 için, bu denklemin iki çözümü (bir pozitif, bir negatif) vardır. Negatif bir zaman olamayacağı için çözüme pozitif çözümden ilerleyeceğiz, bunun sonucunda $t_1=6,18 \text{ sn}$ olan sonuç bizim için uygun olmaktadır. Yani diğer bir deyişle, konum 0'dan konum 1'e gitmek $6,18 \text{ sn}$ sürmektedir.

Denklem 7.11 'i kayakçının 1 konumundaki v_1 hızını hesaplamak için kullanacağız;

$$v_1 = v_0 + a_0 t_1$$

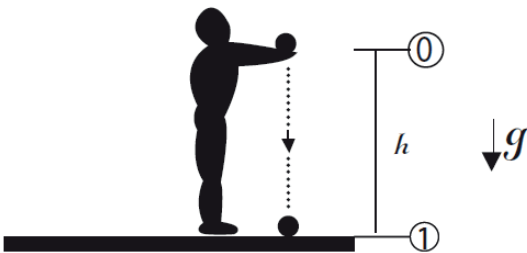
Bilinen parametreleri, $v_0=10$ m/s, ve $a_0=2$ m/s² ve $t_1=6,18$ sn denklemde yerine koyduğumuzda;

$$v_1=22,36$$
 m/s,

Örnek 7.4:

Düzgün olarak ivmeli hareketin en yaygın örneklerinden biri, düşme olarak adlandırılan, düşey olarak aşağıya düşmesine izin verilen bir nesnenin olmasıdır. Serbest düşüş, yerçekimi ivmesinin nesnenin kütlesi üzerindeki etkisinin bir sonucudur. Hava direncinin muhtemel etkileri göz ardı edilirse (hareketin vakumda gerçekleştiği varsayılarak), o zaman bir yükseklikten salınan nesne yaklaşık 9,8 m/s² olan yerçekimi ivmesinin büyüklüğüne eşit bir sabit hızlanma ile aşağı doğru hareket eder.

Şekil 7.13'te gösterildiği gibi, $h=1.5$ m yükseklikte top tutan bir kişiyi düşünün. Top düşmek üzere serbest bırakılırsa, topun yere çarpması ne kadar zaman alacak ve çarpma hızı ne olacaktır?

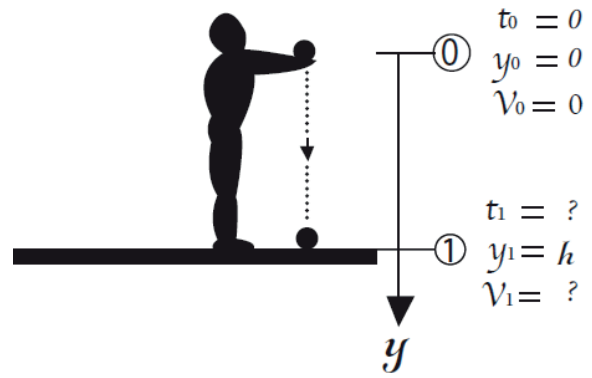


Şekil 7.13 Serbest düşme

Çözüm:

Top serbest bırakıldıktan sonra yerçekimi ivmesinin büyüklüğü olan $a_0= 9,8$ m/s² sabit ivmesi ile aşağı doğru hareket eder.

Şekil 7.14'te, topun hareket yönü, negatif y yönü olarak tanımlanır. Yerçekimi ivmesinin yönü de aşağıya doğru olduğundan, topun ivmesi pozitiftir.



Şekil 7.14 0 ve 1 konumlarındaki koşullar

Şekil 7.14'de y ekseninin merkezi topun başlangıç noktası, konum 0, ile örtüşmektedir. Bu sebeple, topun başlangıç konumu $y_0=0$ 'dir. Topun serbest bırakıldığı andaki zamana bağlı olarak tüm zaman ölçümleri yapıldığı için başlangıç zamanı $t_0= 0$ 'dir. Başlangıçta top sabit olduğu için topun başlangıç sürati, $v_0= 0$ 'dir. Yer olarak tanımlanan konum 1'in konum 0'a göre uzaklığı $h=1,5$ m'dir. Konum 0'dan konum 1'e kadar geçen süreyi t_1 ve topun çarpma hızını v_1 hesaplayınız.

İvme sabit olduğu için $a_0=9,8 \text{ m/s}^2$, denklem 7.11 ve 7.12 çözümde kullanılabilir. Ancak denklemlerde x yerine y yazılmalıdır. Konum 0 ve konum 1 arasındaki 7.12 denklemi;

$$y_1 = y_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_0 t_1^2.$$

Denkleminde bilinenleri $y_1 = 1.5\text{m}$, $y_0 = 0$, $V_0 = 0$, $a_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ yerine koyduğumuzda; $t_1=0,55$ sn olarak bulunur. Yani, topun 1.5 m yükseklikten yere çarpmasına kadar geçen süre hava direnci yok sayıldığında 0,55 sn'dir.

Topun yere çarpma hızı denklem 7.11 kullanılarak bulunur;

$$v_1 = v_0 + a_0 t_1$$

Bilinen değerleri $V_0 = 0$, $a_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$, $t_1=0.55\text{s}$, denklemde yerine konulduğunda;

$V_1 = 5.39 \text{ m/s}$ bulunur.

7.7 Çift Eksenli Hareket

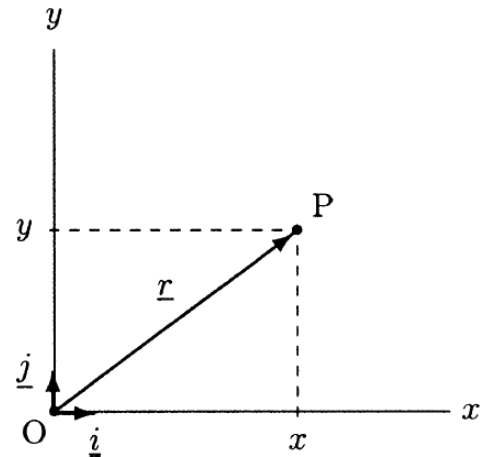
İki eksenli veya iki boyutlu hareket, hareketin meydana geldiği bir düzlem yüzeyinde oluşur. Bir nesnenin tek boyutlu doğrusal hareket özellikleri, örneğin nesnenin hareket yönündeki konumu zamanın bir fonksiyonu olarak bilinirse, tamamen bilinir. Tek eksenli hareket analizi için daha önce tanıtılan kavramlar, iki ve üç boyutlu doğrusal hareketleri analiz etmek için genişletilebilir.

Bu, yer değiştirme, hız ve vektörel nicelik olarak ivmenin özelliklerini göz önüne getirerek başarılabilir.

7.8 Konum, Hız ve İvme Vektörleri

Tek boyutlu problemler için, bir cismin konumu tek koordinat eksenini kullanılarak tanımlanır. Düzlem problemleri için, cismin konumunu tanımlamada iki koordinat belirtilmelidir. Şekil 7.15'de görüldüğü gibi x ve y, sırasıyla pozitif x ve y yönlerini belirten birim vektörleri \underline{i} ve \underline{j} ile normal Kartezyen (dikdörtgen) koordinat yönlerini belirtir. Koordinat sisteminin merkezi O'da bulunur. Bu xy düzlemindeki P noktasının konum vektörü \underline{r} , O'dan P'ye doğru çizilen bir vektördür. Konum vektörü, P noktasının x ve y koordinatları ile ifade edilebilir.

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} \quad (7.15)$$



Şekil 7.15 P noktasının konum vektörü, \underline{r}

Konum vektörünün büyüklüğü, O ve P noktalarını birbirine bağlayan çizginin uzunluğuna eşittir ve bu, aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.16)$$

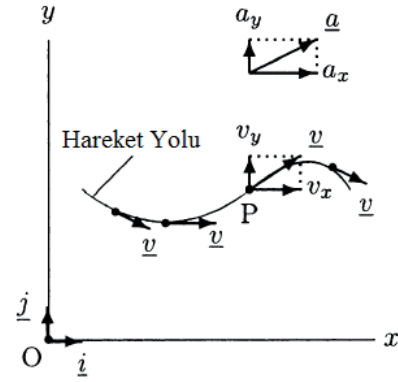
Eğer P noktası, hareketli bir nesnenin t zamanındaki konumunu temsil ediyorsa, \underline{r} nesnenin o andaki anlık konumunu temsil eder. Bu, \underline{r} 'nin zamanla değişebileceğini veya hareketli nesnenin x ve y koordinatlarının zamanın fonksiyonları olduğunu gösterir.

Tanım olarak, hız, konum değişikliğinin zamana oranıdır. Bu nedenle, hız vektörü zamana göre konum vektörünün türevine eşittir:

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}(\underline{r}) = \frac{d}{dt}(x\underline{i} + y\underline{j}) = \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} \quad (7.17)$$

İki boyutlu problemler için, hız vektörü iki bileşene sahip olabilir (Şekil 7.16). v_x ve v_y sırasıyla x ve y yönlerinde \underline{v} 'nin skaler bileşenlerini belirtiyorsa, hız vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} \quad (7.18)$$



Şekil 7.16 Hız vektörü hareket yoluna her zaman teğettir

Denklem 7.17 ve 7.18'i kıyaslarsak, sonuç olarak;

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (7.19)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (7.20)$$

v_x ve v_y , \underline{v} 'nin dikdörtgen bileşenleri olarak da bilinir ve nesnenin sırasıyla x ve y yönlerinde ne kadar hızlı hareket ettiğini belirtir. Hız vektörünün v_x ve v_y bileşenleri biliniyorsa, bunların bileşke büyüklüğü de belirlenebilir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7.21)$$

v 'nin sürat olarak da bilinen skaler bir büyüklük olduğu unutulmamalıdır. Şekil 7.16'da gösterildiği gibi, hız vektörünün yönünün her zaman hareket yoluna teğet olduğu ve hareket yönünü işaret ettiği de unutulmamalıdır.

Hız vektörünün yönü, yatay ve dikey yönlerdeki skaler bileşenleri biliniyorsa da belirlenebilir:

α , hız vektörünün yatay eksenle yaptığı bir açıdır ve $\tan \alpha = \sigma_y / \sigma_x$, $\alpha = \tan^{-1}(\sigma_y / \sigma_x)$ 'dir. Tanım olarak, ivme hız değişiminin zamana oranıdır. Bu nedenle, bir nesnenin hız vektörü zamanın fonksiyonu olarak biliniyorsa, ivme vektörü, \underline{v} ' nin zaman göre türevi alınarak bulunabilir:

$$\underline{a} = \frac{d}{dt}(\underline{v}) = \frac{d}{dt}(v_x \underline{i} + v_y \underline{j}) = \frac{dv_x}{dt} \underline{i} + \frac{dv_y}{dt} \underline{j} \quad (7.22)$$

İvme vektörü, x ve y yönlerindeki bileşenleri ile de ifade edilebilir (Şekil 7.16):

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} \quad (7.23)$$

Denklem 7.22 ve 7.23 kullanılarak, ivme vektörünün bileşenleri şu şekilde yazılabilir;

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (7.24)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \quad (7.25)$$

Gerekirse, ivme vektörünün, a, büyüklüğü şu şekilde hesaplanabilir:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (7.26)$$

Üç boyutlu hareketleri analiz etmek için bu kavramların açılımı basittir. Üç boyutlu hareket analizleri için, üçüncü bir boyuta, yani z'ye ihtiyaç vardır. Örneğin, uzayda bir noktanın konum vektörü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}.$$

Burada \underline{k} , pozitif z yönünü gösteren birim vektördür. Benzer şekilde, uzayda hız ve ivme vektörleri şu şekilde ifade edilebilir:

$$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$$

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

Örneğin, v_z cismin z yönündeki hızıdır ve z yönündeki konum değişikliğinin zamana oranına eşittir, ve a_z ise ivme vektörünün z yönündeki skaler bileşenidir ve cismin z yönündeki hızının değişiminin zamana oranına eşittir.

7.9 Sabit İvme ile Çift Eksenli Hareket

xy düzlemindeki bir cismin iki boyutlu doğrusal hareketi, ilk önce x ve y yönündeki hareketini ayrı ayrı ele alıp, daha sonra ilgili parametrelerin vektörel özelliklerini kullanıp sonuçları birleştirerek iki aşamada analiz edilebilir. x yönündeki hareketi tanımlayan parametreler, x, birinci türevi v_x ve zamana bağlı ikinci türev a_x 'dir. Benzer şekilde, y, v_y ve a_y cismin y yönündeki hareketini tanımlayan parametrelerdir. İki boyutlu doğrusal hareket gerçekleştiren bir nesnenin hızlanması sabit ise, a_x ve a_y sabit olmalıdır. Sabit ivmeli tek eksenli hareketin detayları önceki bölümlerde analiz edilmiştir. Bu analizlerin sonuçları sabit hızlanma ile iki boyutlu hareketleri analiz etmek için kolayca kullanılabilir.

x yönünde, denklem (7.11) ve (7.12) aşağıdaki daha özel formlarda yeniden yazılabilir:

$$v_x = v_{x_0} + a_{x_0} t \quad (7.27)$$

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_{x_0} t^2 \quad (7.28)$$

Benzer şekilde y yönünde;

$$v_y = v_{y_0} + a_{y_0} t \quad (7.29)$$

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_{y_0} t^2 \quad (7.30)$$

Burada, x_0 ve y_0 , nesnenin başlangıçtaki koordinatlarıdır, v_{x_0} ve v_{y_0} , x ve y yönlerinde başlangıç hız bileşenleridir ve a_{x_0} ve a_{y_0} , sırasıyla x ve y yönlerindeki ivme vektörünün sabit bileşenleridir. Verilen x_0 , y_0 , v_{x_0} , v_{y_0} , a_{x_0} ve a_{y_0} için, (7.27) ile (7.30) arasındaki denklemler herhangi bir t zamanında hareket eden nesnenin göreceli konumunu ve hız bileşenlerini hesaplamak için kullanılabilir.

Ayrıca, eğer ivme sabitse ve yönü hareket yönü ile aynıysa, bu denklemler geçerlidir. İvme yönü hareket yönünün tersi ise, ivmeyi taşıyan terimlerin önündeki işaret eksi (-) olarak değiştirilmelidir. x yönünde, denklem (7.11) ve (7.12) aşağıdaki formlarda yeniden yazılabilir:

$$v_x = v_{x_0} - a_{x_0} t$$

$$x = x_0 + v_{x_0} t - \frac{1}{2} a_{x_0} t^2$$

Benzer şekilde y yönünde;

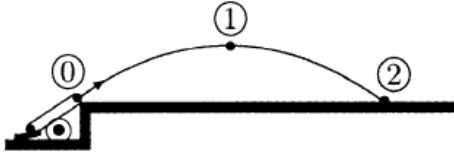
$$v_y = v_{y_0} - a_{y_0} t$$

$$y = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} a_{y_0} t^2$$

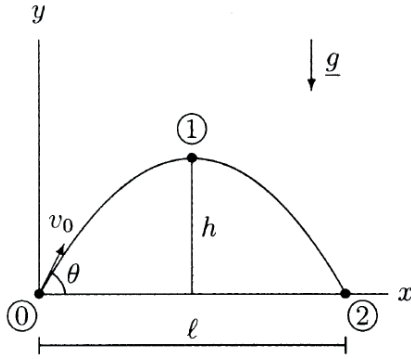
7.10 Eğik Hareket

Bir cisim havaya dikeyden başka herhangi bir yönde atıldığında, yerçekimi ve hava direncinin etkisi altında eğimli bir yoldan hareket edecektir. Dünyanın yer çekimi, cismi aşağıya doğru, 9.8 m/s^2 'lik sabit bir yerçekimi ivmesi ile çeker ve hava direnci, hareketi hareket yönüne zıt yönde yavaşlatır. Eğik hareket olarak adlandırılan bu çok yaygın hareket şekli, hava direncinin etkisi göz ardı edildiğinde analiz edilmesi nispeten kolaydır.

Eğik hareket, sabit ivmeli iki boyutlu doğrusal hareketin özel bir şeklidir. Tüm eğik hareketlere ait temel parametreleri tanımlayabilmek için, havaya atılan bir top mermisinin hareketini göz önünde bulundurun (Şekil 7.17). Top mermisinin namluyu terk ettiğini ve aynı yükseklikte yere indiğini varsayalım. Şekil 7.18'de gösterildiği gibi, top yükselir, bir zirveye ulaşır, inmeye başlar ve sonunda yere düşer. Top mermisinin eğimli uçuş yoluna hareketin yörüngesi denir. 0, top mermisinin ilk pozisyonunu, 1 ulaştığı zirveyi ve 2 iniş yerini gösterir. v_0 , serbest bırakma sürati veya kalkış sürati olarak adlandırılan top mermisinin başlangıç hızının büyüklüğüdür. θ , ilk hız vektörünün yatay ile yaptığı açıdır ve serbest bırakma açısı olarak adlandırılır. 0 ile 1 arasındaki dikey mesafe h, top mermisinin ulaştığı maksimum yüksekliktir ve 0 ile 2 arasındaki yatay mesafe l, yatay hareket aralığı olarak adlandırılır. Topun havada kaldığı toplam süre, uçuş süresi olarak adlandırılır.



Şekil 7.17 Havaya atılan top mermisinin eğik hareketi



Şekil 7.18 Eğik hareket

Eğik hareketleri analiz etmek için gerekli olan denklemler, (7.27)' den (7.30) 'a kadar olan denklemlerden çıkarılabilir. Örneğin, merminin sürati ve salınım açısı biliniyorsa, hız vektörünün x (yatay) ve y (dikey) bileşenleri hesaplanabilir:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta$$

Top mermisi üzerindeki hava direncinin ihmal edilebileceği varsayıldığında, hareket boyunca x yönünde top mermisinin ivmesi sıfırdır. Yani, $a_{x0} = 0$. Yerçekimi ivmesi g aşağı doğru hareket eder. Y ekseninin pozitif olduğunu varsayarsak, yerçekimi ivmesi negatif y yönünde hareket eder. Yerçekimi ivmesinin negatif yönünü hesaba katmak için denklem

(7.29) ve (7.30) 'da a_{y0} taşıyan terimlerin önündeki artı işaretlerinin eksi olarak değiştirilmesi gerekir. Bu varsayımlar altında, (7.27) ile (7.30) arasındaki denklemler mermi hareketi için aşağıdaki özel formları alır:

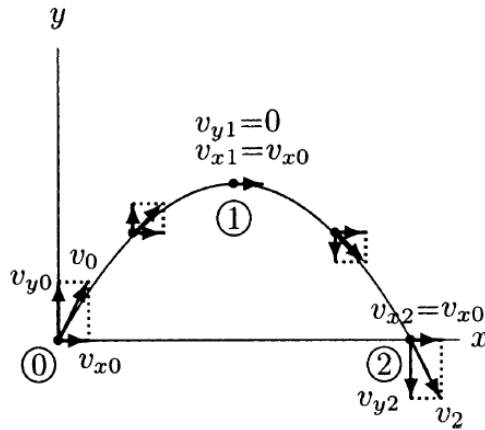
$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)t \quad (7.31)$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (7.32)$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \quad (7.33)$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt \quad (7.34)$$

Burada, xy koordinat çerçevesinin merkezi, topun başlangıç pozisyonuna denk gelecek şekilde seçilirse, o zaman $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ olur. Denklem (7.33) 'ten gelen hız vektörünün yatay bileşeninin büyüklüğü zamanın bir fonksiyonu olmadığı için, $v_x = v_{x0}$, mermi hareketi boyunca sabit kalır (Şekil 7.19). Hız vektörünün dikey bileşeninin büyüklüğü, zamanın doğrusal bir fonksiyonudur. Başlangıçta pozitifdir (yukarı doğru), nesne yükseldikçe zaman içinde azalır ve zirvede sıfıra düşer. Zirveye ulaştıktan sonra, hız vektörünün dikey bileşeni, yönünü yukarıdan aşağıya doğru değiştirirken, büyüklüğü yere inene kadar artar. Uçuş sırasında herhangi bir anda, sonuçtaki hız vektörü, mermi hareketinin yörüngesine teğettir.



Şekil 7.19 Hızın yatay eksen bileşeni hareket boyunca sabittir. Hız vektörü, hareket yörüngesine her zaman teğettir.

Eğik hareketin bir başka önemli yönü ise, hem kalkış hem de inişin aynı yükseklikte gerçekleşmesiyle ortaya çıkar. O zaman hareket, en yüksek noktadan geçen ve hareket düzlemini dik açıda kesen bir düzleme göre simetriktir. Diğer bir deyişle, nesnenin yükselmesi için gereken süre, inmesi için gereken süreye eşittir.

Kayakla atlama gibi bazı durumlarda, eğik hareketin amacı yatay hareket aralığını maksimum seviyeye çıkarmak olabilir. Diğer durumlar, yükseklik üzerinde kontrol gerektiren uzun atlayıcılar için geçerli olabilir. Bu nedenle, eğik hareketin yatay aralık ve maksimum yüksekliği için bazı çıkarımlar elde etmek yararlı olabilir. Bu çıkarımlar aşağıdaki örnek problem kapsamında gerçekleştirilecektir.

Örnek 7.5 Şekil 7.20' ye göre, t_1 tepeye ulaşmak için gereken süre, t_2 toplam uçuş süresidir. Zirvede $y_1=h$, $v_{y1}=0$, $x_1=1/2$; cisim 2

konumundayken $x_2=l$, $y_2=0$ ' dır. 0 ve 1 arasındaki denklem 7.34;

$$v_{y1} = v_0 \sin\theta - gt_1$$

$$0 = v_0 \sin\theta - gt_1$$

Bu denklemden t_1 ' i çekersek,

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \quad (i)$$

0 ve 1 konumları arası için 7.32 denklemini uygulayalım;

$$h = 0 + (v_0 \sin\theta)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Denklem (i)'i bu eşitlikte kullanırsak;

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad (ii)$$

Hareketin simetrisinden dolayı, çıkış ve iniş zamanları birbirine eşittir. Diğer bir deyişle, $t_2=2t_1$. 0 ve 2 arasındaki denklem 7.32, t_2 için çözüldüğünde;

$$y_2 = y_0 + (v_0 \sin\theta)t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$0 = 0 + (v_0 \sin\theta)t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$0 = (v_0 \sin\theta)t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

t_2 için çözüldüğünde;

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \quad (iii)$$

Denklem (iii)'ü denklem (i) ile karşılaştırdığımızda, sonuç olarak;

$$t_2 = 2t_1 \text{ 'dir.}$$

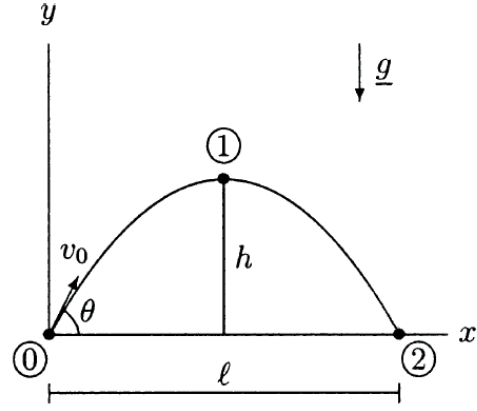
0 ve 2 konumları arası için denklem 7.31 yazılırsa;

$$l = 0 + (v_0 \cos \theta) t_2$$

Denklem (iii)'i, yukarıda bulunan denklemde yerine koyarsak ($2 \cos \theta \sin \theta = \sin (2\theta)$) olduğu unutulmamalıdır, bakınız ek C.4);

$$l = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (iv)$$

(i) ile (iv) arasındaki denklemler, eğik hareketler için denklem (7.31) 'den (7.34)' e kadar verilen daha genel denklemlerin özel formlarıdır. (ii) ve (iv) denklemlerinden, belli bir v_0 için, merminin maksimum yüksekliğinin ve yatay hareket aralığının, θ serbest bırakma açısının fonksiyonları olduğu açıktır. h ve l ' nin θ ile nasıl değiştiğini görmek için $\sin^2 \theta$ ve $\sin 2\theta$, 0° ve 90° arasındaki θ için hesaplanır. Hesaplanan değerler tablo 7.3' te yer almaktadır. Şekil 7.21'de v_0 'a 10 m / sn'lik bir değer verilmiş ve ilgili yörüngeler $\theta = 30^\circ$, 45° ve 60° için hesaplanmıştır. Bu sonuçların anlamı, v_0 için, $\theta = 45^\circ$ olduğunda, l hareket aralığı maksimumdur. Bu nedenle, eğer amaç merminin yatay hareket alanını en üst düzeye çıkarmaksa, o zaman kalkış açısı 45° ye yakın olmalıdır.



Şekil 7.20 h , maksimum yükselme ve maksimum yatay hareket aralığıdır

Bazen, hareket menzilini ve merminin maksimum h yüksekliğini ölçmek daha kolaydır. Bu gibi durumlarda, bilinmeyenler kalkış hızı v_0 ve serbest bırakma açısı θ 'dır. Bu parametreler arasındaki ilişki şu şekilde türetilebilir:

$$\theta = \arctan\left(\frac{4h}{l}\right) \quad (7.35)$$

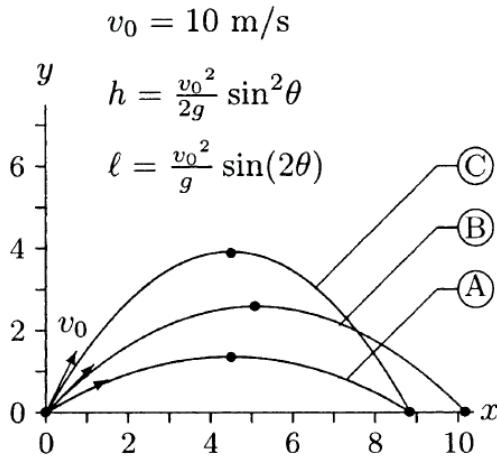
$$v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \theta} \quad (7.36)$$

Bu örnekte elde edilen sonuçların, aynı yükseklikte kalkış ve iniş olaylarının meydana geldiği durumlar için geçerli olduğunu unutmayın. Ayrıca, bu sonuçların amacı "hafızaya alınması" ndan ziyade eğik hareketleri ifade edebilecek denklemlerin (7.31) (7.34) üzerinden nasıl uygulanacağını göstermektir.

Tablo 7.3 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ için $\sin^2 \theta$ ve $\sin(2\theta)$ 'nin değişimi

θ	$\sin^2 \theta$	$\sin(2\theta)$
0°	0,000	0,000
15°	0,067	0,500
30°	0,250	0,866
45°	0,500	1,000
60°	0,750	0,866
75°	0,933	0,500
90°	1,000	0,000

Eğik atışta en büyük yükseklik $\sin^2 \theta$ 'nin fonksiyonu olup hareket aralığı $\sin(2\theta)$ 'a bağlıdır.



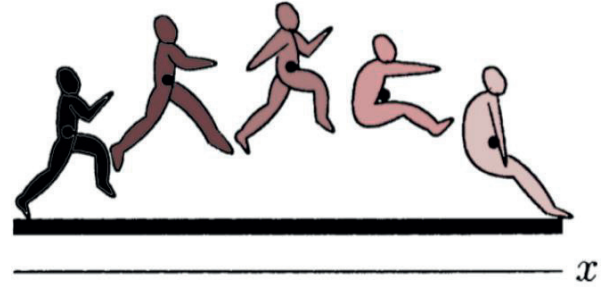
şekil 7.21 $v_0=10 \text{ m/s}$ ve $\theta = 30^\circ, 45^\circ, \text{ ve } 60^\circ$ (sirasıyla, A, B ve C olarak gösterilmiştir) için yörüngeler

7.11 Atletizm Uygulamaları

Eğik hareket kavramı atletizm ve spor mekaniğinde birçok uygulamaya sahip olabilir. Bu uygulamalar arasında uzun atlama, yüksek atlama, kayakla atlama, dalış ve jimnastik yapan sporcuların hareket analizleri ve disk atma, cirit, beysbol, basketbol, futbol ve golf

topu hareket analizi yer almaktadır. Aşağıda bu uygulamalardan bazılarını örnekleme amaçlanmıştır. Burada eğik hareket analizlerinde, hava direncinin olası etkilerinin hareket özelliklerini etkileyebileceğine dair temel yaklaşımı göz ardı ettiğimiz tekrarlanmalıdır.

rnek 7.6 Hava direncinin ihmal edildiği bir ortamda şekil 7.22' de görülen uzun atlayıcı 8 m yatay bir mesafeyi atlıyor. Eğer sporcu havada 1 sn kalırsa, kalkış hızı, serbest bırakma açısı ve atletin ağırlık merkezinin ulaştığı maksimum yüksekliği hesaplayınız.

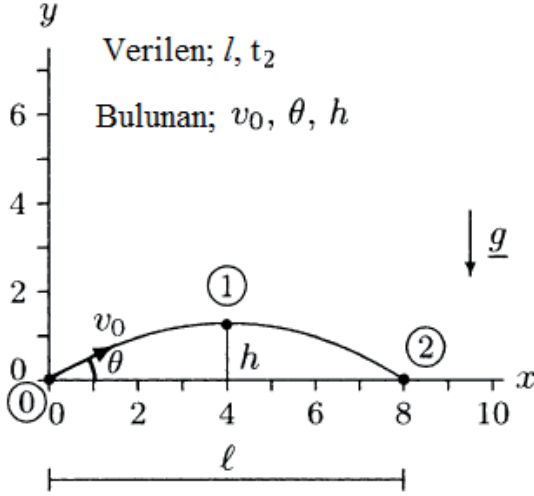


şekil 7.22 Uzun atlama

zm

şekil 7.23, uzun atlayıcının ağırlık merkezinin hareketini göstermektedir. 0, kalkış, 1, en yüksek nokta, 2 ise yere inmesini temsil etmektedir. xy koordinat sisteminin orjininin 0'a yerleştirildiğine dikkat edin, böylece tüm yatay mesafe ve yükseklik ölçümleri kalkışta sporcunun ağırlık merkezinin konumuna göredir. $x_2=l=8\text{m}$ yatay hareket açıklığıdır ve t_2 sporcunun havada kaldığı toplam zamandır. Kalkış hızı v_0 , kalkış açısı θ ve maksimum

yükseklik h hesaplamaktır. t_2 'nin bilinmesi ve hareketin maksimum yüksekliğe göre simetrik olması nedeniyle, sporcunun zirveye ulaşması için geçen sürenin $t_1 = t_2 / 2 = 0,5$ sn olduğunu unutmayın.



Şekil 7.23 Atletin ağırlık merkezinin yörüngesi (x ve y birimi metre)

l ve t_2 'yi biliyoruz. Yatay (x) doğrultuda yer değiştirmeyi düzenleyen denklem (7.31)'dir. 2. konum için bu denklemin 0 pozisyonuna göre yazılması ile;

$$x_2 = x_0 + v_{x_0} t_2$$

$$l = 0 + v_{x_0} t_2$$

$$8 = v_{x_0} (1)$$

Kalkış hızının yatay bileşeni, $v_{x_0} = 8.0$ m/s olarak bulunur.

Ayrıca inişte ağırlık merkezinin yükselmesinin sıfır olduğunu biliyoruz. Yani, $y_2 = 0$ 'dır. Yer

değiştirmeyi dikey (y) doğrultuda yönlendiren denklem (7.32)'dir. 2. konum için bu denklemin 0 pozisyonuna göre yazılması;

$$y_2 = y_0 + v_{y_0} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

$$0 = 0 + v_{y_0} (1) - \frac{1}{2} (9,8) (1)^2,$$

$$0 = v_{y_0} - 4,9$$

Kalkış hızının dikey bileşeni için bu denklemi çözüldüğünde, $v_{y_0} = 4.9$ m/s olarak bulunur.

Artık kalkış hızının yatay ve dikey bileşenlerinin büyüklüğünü bildiğimize göre, kalkış hızını hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} = \sqrt{(8.0)^2 + (4.9)^2} \\ &= 9.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$v_{x_0} = v_0 \cos \theta$ denklemindeki v_{x_0} ve v_0 bilindiği için kalkış açısı bulunabilir;

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{v_{x_0}}{v_0} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{8,0}{9,4} \right) = \cos^{-1}(0,85) = 31,7^\circ$$

Maksimum yüksekliği bulmak için denklem 7.32 kullanılmaktadır. 0'a göre konum 1 için bu denklem yazılır ve h için çözülürse;

$$y_1 = y_0 + v_{y_0} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2,$$

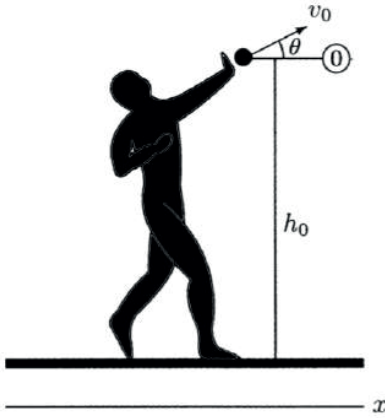
$$h = 0 + (4,9)(0,5) - \frac{1}{2} (9,8)(0,5)^2$$

$$h = 1,2 \text{ m}$$

Bu nedenle, zirvede sporcunun ağırlık merkezi, kalkış seviyesinden 1.2 m yüksekliktedir.

Örnek 7.7 Antrenman sırasında, gülle atıcısı $l=6$ m uzaklığa gülleyi atıyor. Atışı yaptığı anda, atışın yerden yüksekliği $h_0 = 1,8$ m, atış açısı ise $\theta = 30^\circ$ 'dir (Şekil 7.24).

Atıcının, gülleyi serbest bırakma hızını, güllenin iniş hızını ve hava kaldığı süreyi hesaplayınız.



Şekil 7.24 Gülle atıcısı

Çözüm

Denklem 7.31 ve 7.32 bu soruyu çözmek için kullanılabilir. Şekil 7.25'te, xy koordinat çerçevesinin merkezi, doğrudan 0 olarak gösterilen atış noktası altındaki zemin seviyesine yerleştirilir. Atış yükselir, 1'de bir zirveye ulaşır ve 2'de zemine düşer. Kabul edilen koordinat çerçevesinde, çekimin başlangıç ve iniş koordinatları şunlardır; $x_0 = 0, y_0 = h_0, x_2 = l$ ve $y_2 = 0$. t_2 , toplam havada kalış süresini belirtiyorsa, 0 ve 2 arasında denklem 7.31 şu şekilde yazılır;

$$x_2 = x_0 + (v_0 \cos \theta) t_2$$

$$l = 0 + (v_0 \cos \theta) t_2$$

t_2 için bu denklemin çözümünde bilinen parametreler yerine konulduğunda;

$$t_2 = \frac{l}{v_0 \cos \theta} = \frac{6}{v_0 \cos 30^\circ} = \frac{6,93}{v_0} \quad (i)$$

Benzer şekilde, 0 ve 2 arasında denklem 7.32'nin yazılması ve bilinen parametrelerin yerine konulması ile;

$$y_2 = y_0 + (v_0 \sin \theta) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$0 = h_0 + (v_0 \sin \theta) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$0 = 1,8 + (v_0 \sin 30^\circ) t_2 - \frac{1}{2} (9,8) t_2^2$$

$$0 = 1,8 + 0,5 v_0 t_2 = 4,9 t_2^2 \quad (ii)$$

Denklem (i)'i denklem (ii)'e yerleştirdiğimizde;

$$0 = 1,8 + 0,5 v_0 \left(\frac{6,93}{v_0} \right) - 4,9 \left(\frac{6,93}{v_0} \right)^2$$

İkinci terimin, denklemin sağ tarafında v_0 'ı ortadan kaldırarak basitleştirilmesi, devam eden hesaplamaların yapılması ile elde edilen v_0 ;

$$v_0 = 6,69 \text{ m/s}$$

Bulunan v_0 , denklem (i)'de yerine konulduğunda $t_2 = 1,04$ sn olarak hesaplanır.

İniş sürati olan v_2 'yi hesaplamak için denklem (7.33) ve (7.34) kullanılabilir. Hız vektörünün yatay bileşeni, eğik hareket boyunca sabit olduğundan;

$$v_{x_2} = v_{x_0} = v_0 \cos \theta = (6,69)(\cos 30^\circ) = 5,79 \text{ m/s}$$

0 ve 2 arasındaki denklem 7.34;

$$v_{y_2} = v_{y_0} - g t_2 = v_0 \sin \theta - g t_2$$

Bilinen değerler denklemde yerine konulduğunda;

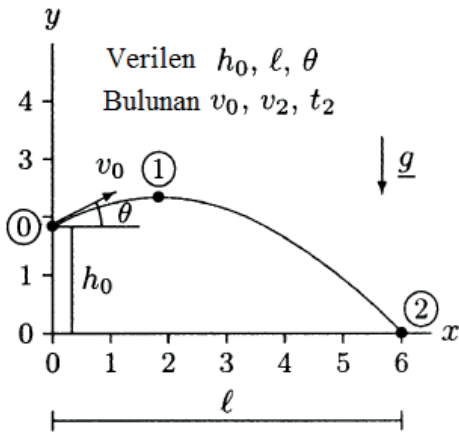
$$v_{y_2} = (6,69)(\sin 30^\circ) - (9,8)(1,04) = -6,85 \text{ m/s}$$

Skaler büyüklük için negatif bir değer elde ettiğimizi unutmayın. Burada, negatif işaret yönü gösterir. Y eksenini için yukarı yönlü yönü pozitif olarak belirledik. Yukarıda hesaplanan negatif değer iniş hızının dikey bileşeninin yönünün aşağıya doğru olduğunu gösterir (pozitif y ekseninin tersi). v_{y_2} 'i tekrar yazdığımızda;

$$v_{y_2} = 6.85 \text{ m/s } (\downarrow)$$

İniş hızının yatay ve dikey bileşenlerinin büyüklüğünü bildiğimiz için, iniş sürati;

$$v_2 = \sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2} = \sqrt{(5.79)^2 + (6.85)^2} = 8.97 \text{ m/s' dir.}$$

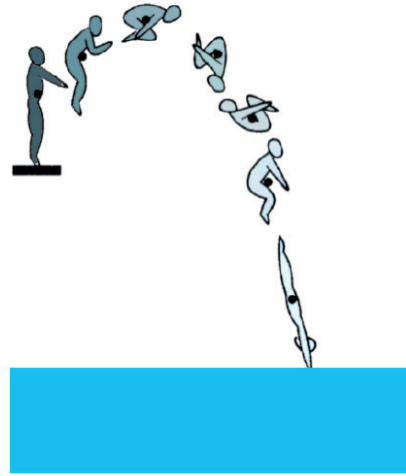


Şekil 7.25 Atışın yörüngesi (x ve y metre cinsindedir)

Örnek 7.8 Şekil 7.26'da gösterilen dalgıç, hem translasyonel hem de dairesel yani genel hareket gerçekleştirmektedir. Dalgıcın genel hareketi, eğik hareket yapan dalgıcın ağırlık

merkezinin yörüngesi izlenerek analiz edilebilir.

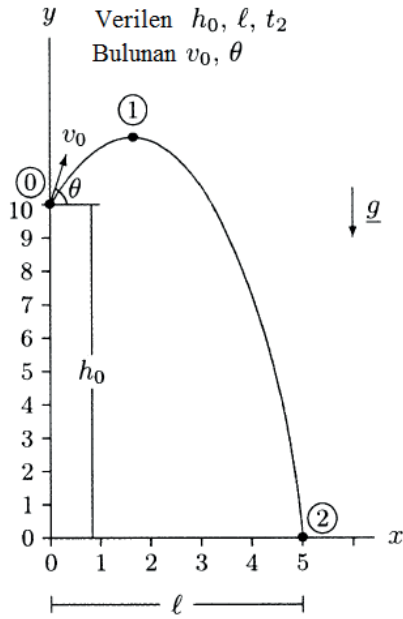
Dalgıç h₀ = 10 m yüksekliğinde bulunan bir dalış tahtasından suya atılıyor, suya girişi yatay mesafe olarak l=5m' dir. Dalgıcın havadaki toplam süresi t₂= 2,5 sn ise dalgıcın kalkış hızı ve açısını bulunuz.



Şekil 7.26 Dalgıç

Çözüm

Dalgıcın ağırlık merkezinin yörüngesi, Şekil 7.27'de gösterilmiştir. Bu durumda, kalkış hızı ve açısı (v₀ ve θ) bilinmemektedir, ancak tespit edilmelidir. Şekil 7.27'de 0, 1 ve 2 sırasıyla kalkış, tepe noktası ve suya girişini temsil eder. xy koordinat çerçevesinin merkezi doğrudan 0'ın altındaki su seviyesinde bulunur. Bu nedenle, 0 pozisyonunun koordinatları: x₀= 0 ve y₀=h₀=10 m'dir. Konum 2'nin koordinatlarını da biliyoruz: x₂ = l = 5m ve y₂ = 0. Konum 2 ile ilişkili bildiğimiz bir diğer parametre ise t₂ = 2,5sn'dir.



Şekil 7.27 Dalgıcın ağırlık merkezinin yörüngesi (x ve y metre cinsindedir)

Denklem (7.31) ve (7.32)'yi kullanabiliriz. 0 ve 2 arasında denklem (7.31)'i kullanıp bilinen parametreleri yazdığımızda;

$$x_2 = x_0 + (v_0 \cos \theta) t_2$$

$$5 = 0 + (v_0 \cos \theta)(2,5)$$

Bu denklemi $v_0 \cos \theta$ için çözdüğümüzde;

$$v_0 \cos \theta = \frac{5}{2,5} = 2 \quad (i)$$

Benzer olarak 0 ve 2 arasında denklem (7.32)'de bilinen parametreleri yerine koyduğumuzda;

$$y_2 = y_0 + (v_0 \sin \theta) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

$$0 = 10 + (v_0 \sin \theta)(2,5) - \frac{1}{2} (9,8)(2,5)^2$$

Bu denklemi $v_0 \sin \theta$ için çözdüğümüzde;

$$v_0 \sin \theta = 8,25 \quad (ii)$$

$v_0 \sin \theta$ 'yı $v_0 \cos \theta$ 'a böldüğümüzde $\tan \theta$ elde ederiz, ii numaralı denklemi i numaralı denkleme bölersek,

$$\tan \theta = \frac{8,25}{2} = 4,125$$

Yukarda yazılan denklemde ters tanjant alındığında;

$\theta = 76,4^\circ$ elde edilir.

Denklem (i)' den kalkış hızı (v_0) artık elde edilebilir;

$$v_0 = \frac{2}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos 76,4^\circ} = 8,5 \text{ m/s}$$

7.12 Örnek Problemler

Problem 7.1 Şekil 7.11'de gösterildiği gibi, kayakçının düz bir eğimden indiğini düşünün. Kayakçının, yokuş aşağı sabit bir ivme a_0 ile hareket ettiğini varsayalım. Ayrıca, kayakçının (0) ve (1) konumlarındaki süratlerinin sırasıyla $V_0=12 \text{ m/s}$ ve $V_1=21 \text{ m/s}$ olduğu görülmektedir. Ayrıca, kayakçının (0) ve (1) arasındaki l mesafesini ilerlemesi için geçen sürenin $t_1=6,18 \text{ sn}$ olduğu ölçülmüştür. Yokuş aşağı inerken kayakçının sabit ivmesini ve (0) ve (1) puanları arasındaki l mesafesini hesaplayınız.

Cevaplar: $a_0=1,94 \text{ m/s}^2$; $l=111,2 \text{ m}$

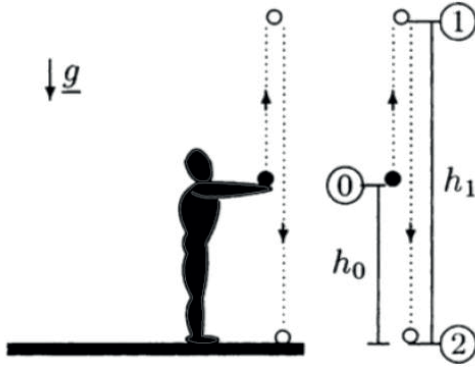
Problem 7.2 Şekil 7.13'te gösterildiği gibi, topu yerden belli bir yükseklikte tutan bir kişi düşünün. Top serbest bırakıldığında, $V_1=5,8$

m/s hızla iner ve yere vurur. Top aşağı inerken hava direncinin önemsiz olduğunu varsayalım. Topun zemine ulaşması için harcanan süreyi t_1 ve topun h yüksekliğini yerin üzerindeki ilk konumuna göre hesaplayınız.

Cevaplar: $t_1 = 0,59$ sn; $h = 1,7$ m

Problem 7.3 Şekil 7.28'de görülen kişi $v_0 = 10$ m/s başlangıç hızıyla topu yukarıya doğru atmaktadır. Topu attığı anda elinin yerden yüksekliği $h_0 = 1,5$ m olduğunu varsayalım.

Hava direncini önemsiz kabul edersek, Maksimum yükseklik h_1 'i, topun yükselmesi ve inmesi sırasında geçen toplam süre t_2 ve topun yere çarpmadan hemen önceki hızı v_2 'yi bulunuz.



Şekil 7.28 Problem 7.3

Problemin çözümünde çıkış ve iniş olmak üzere 2 aşama ele alınmalıdır. Tepede topun süratinin sıfır olduğu unutulmamalıdır.

Cevaplar: $h_1 = 6,6$ m; $t_2 = 1,16$ sn; $v_2 = 11,4$ m/s

Problem 7.4 Şekil 7.28'de gösterildiği gibi, bir başka denemede bir kişinin topu yukarı fırlattığını ve maksimum yükseklik olan h_1 'e

ulaşmanın $1,06$ sn sürdüğünü varsayın. Top zirveye ulaştıktan sonra, alçalmaya başlar ve yere çarpar. Topun yükselip alçalması için geçen toplam süre $t = 2,24$ s'dir. Hava direncinin olası etkilerini göz ardı ederek, topun havaya atıldığı ilk V_0 hızını, ulaştığı maksimum yükseklik h_1 'i, tepe noktasıyla yer arasında topun aldığı dikey mesafe h_2 , topun V_2 hızını ve topun ilk yüksekliği h_0 hesaplayınız. Bu soru, çıkış ve iniş olmak üzere iki aşamada çözülmelidir. Ayrıca, zirvede topun hızının sıfır olduğu unutulmamalıdır.

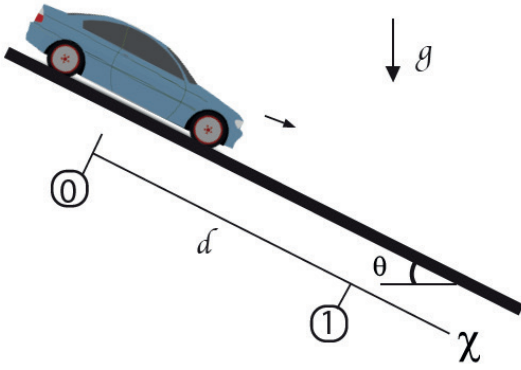
Cevaplar: $V_0 = 10,4$ m/s; $h_1 = 5,5$ m; $h_2 = 6,8$ m; $V_2 = 11,6$ m/s; $h_0 = 1,3$ m

Problem 7.5 Şekil 7.29'da gösterilen araç, 0 konumunda, yatay ile θ açısı yapan bir tepe üzerinde durur. Otomobilin vitesinin "boş" konumunda olduğunu ve $t_0 = 0$ zamanında otomobilin frenlerinin serbest bırakıldığını varsayın. Yerçekimi ivmesinin g etkisiyle, araba tepeden aşağı hareket etmeye başlayacaktır. Bir süre sonra, araç, tepeye paralel olarak ölçülen 0 konumundan d kadar uzaklıkta olan 1 konumunda olacaktır.

0 ve 1 konumları arasındaki mesafeyi kapsayacak şekilde t_1 zamanı ve 1. konumda aracın v_1 hızı aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini gösterin;

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$$

$$v_1 = \sqrt{2gd \sin \theta}$$



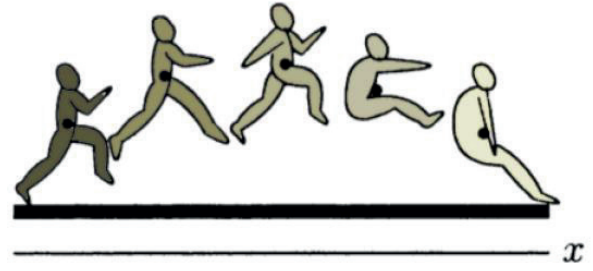
Şekil 7.29 Problem 7.5 ve 7.6

Problem 7.6 (0) konumunda, Şekil 7.29'daki araba yatay ile θ açısı yapan bir tepe üzerinde durmaktadır. $t_0=0$ anında, aracın frenleri serbest bırakılır ve yerçekimi ivmesi etkisiyle araç tepeden aşağı doğru hareket etmeye başlar. Hava direncinin ihmal edildiği varsayılırsa, bir süre arabanın tepeye paralel olarak ölçülen (0) konumundan $d=50$ m mesafe ileride olan (1) konumunda olduğu gözlemlenir. Ayrıca, otomobilin bu mesafeyi alırken geçen süre 3.8 sn'dir. Tepenin yatay konumda yaptığı açığı θ ve aracın (1). konumdaki V_1 hızını belirleyiniz.

Cevaplar: $\theta=45^\circ$; $V_1=26,3$ m/s

Problem 7.7 Hava direncinin ihmal edilebilir olduğu varsayımına dayanarak, uzun atlayıcının hareketinin analizi için sporcunun ağırlık merkezinin eğik hareket gerçekleştirdiği varsayılmaktadır (Şekil 7.30).

1,5m maksimum yüksekliğe ulaştıktan s 9m yatay bir mesafeyi atlayan bir atletin kalkış hızı v_0 hızını nedir? Atlet performansını nasıl arttırabilir tartışın.

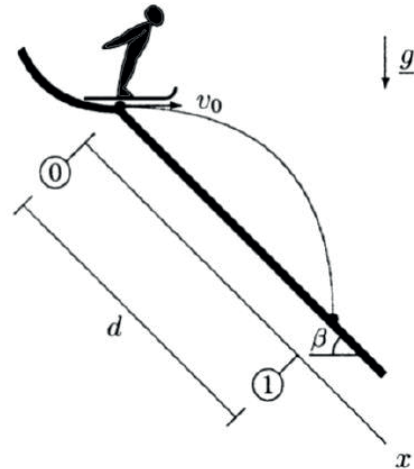


Şekil 7.30 Problem 7.7

Cevap: $v_0=9,8$ m/s

Problem 7.8 Şekil 7.31'de gösterilen kayak atlayıcı, rampadan yatay süratle v_0 ile ayrılır ve yatayda $\beta=45^\circ$ açı yapan bir yokuşa iner.

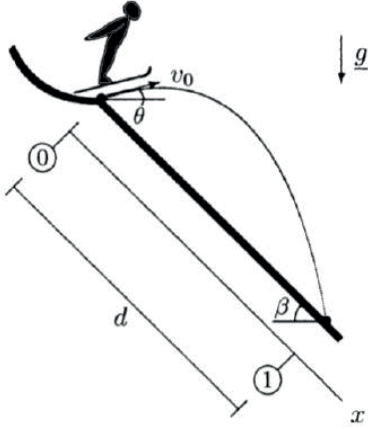
Hava direncini ihmal ederek (etkisi oldukça önemli olabilir), kalkış hızını v_0 , iniş hızını v_1 ve kayakçı havalandıktan sonra, rampadan, yokuşa paralel olarak ölçülen $d = 50$ m mesafeden aşağıya dokunduğunda toplam t_1 süresini belirleyiniz.



Şekil 7.31 Problem 7.8

Cevaplar: $v_0=13,2$ m/s; $v_1=29,6$ m/s; $t_1=2,7$ sn

Problem 7.9 Başka bir denemede, önceki problemdeki kayak atlamacı kalkış hızını $v_0=13,2\text{m/s}$ 'de tutmayı başardığı, ancak rampadan yatay yönde $\theta=10^\circ$ açıyla ayrıldığı varsayılmıştır (Şekil 7.32).

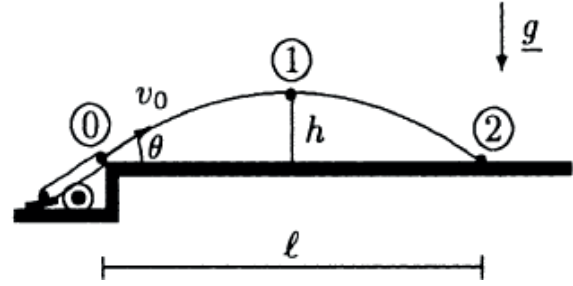


Şekil 7.32 Problem 7.9

Rampadan ne kadar uzakta kayak atlayıcı yamaca inecektir? Problem 7.4'teki denemeye kıyasla kayak atlayıcının performansını arttırıp arttırmadığını tartışın. Evet ise, ne kadar arttırmıştır?

Cevaplar: $d=57\text{ m}$, %14 arttırmıştır.

Problem 7.10 Şekil 7.33, bir top mermisinin yörüngesini göstermektedir. Top mermisinin havaya ilk olarak 0. Konumda $v_0 = 100\text{m/s}$ hızıyla ateşlendiğini varsayalım. Top mermisi, 0 konumundan ölçülen yatay uzaklığı $l = 1000\text{m}$ olan 2. konumda inmiştir.



Şekil 7.33 Problem 7.10 ve 7.11

Kalkış açısı θ , uçuş zamanı t_2 , ve top mermisinin ulaştığı maksimum yükseklik h 'yi hesaplayınız.

$2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$ ve g 'yi 10 m/s^2 olarak alınız.

Cevaplar: $\theta=45^\circ$; $t_2=14\text{ sn}$; $h=250\text{ m}$

Problem 7.11 Bir kez havaya ateş açıldığını varsayalım, Şekil 7.33'teki top mermisi bir eğik hareket gerçekleştirdi ve (2) noktasında yere çarptı. Uçuşun toplam süresi $t_2 = 15\text{ sn}$ 'dir. Ayrıca, top mermisinin serbest bırakma açısı $\theta = 45^\circ$; ve yatay hareket aralığı $l = 1250\text{ m}$ 'dir. Top mermisinin atış noktasındaki (0) V_0 hızını, (1) noktasına uçuş sırasında ulaştığı maksimum yükseklik h_1 'i hesaplayınız.

Cevaplar: $V_1=117,9\text{ m/s}$; $h_1=349,5\text{ m}$

Bölüm 8

DOĞRUSAL KİNETİK

Çeviren: Semih Küçükşen

8.1 Genel Bakış

8.2 Hareket Denklemleri

8.3 Translasyonel Hareketin Özel Durumları

8.3.1 Sabit Kuvvet

8.3.2 Zamanın Fonksiyonu Olarak Kuvvet

8.3.3 Yer Değiştirmenin Fonksiyonu olarak Kuvvet

8.4 Kinetikte Problem Çözümü için Yöntem

8.5 İş ve Enerji Metotları

8.6 Mekanik İş

8.6.1 Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan İş

8.6.2 Değişken Kuvvet Tarafından Yapılan İş

8.6.3 İş'in Skaler Çarpım Olarak Hesaplanması

8.7 Mekanik Enerji

8.7.1 Potansiyel Enerji

8.7.2 Kinetik Enerji

8.8 İş-Enerji Teoremi

8.9 Enerjinin Korunumu İlkesi

8.10 İş ve Enerjinin Birimi ve Boyutu

8.11 Güç

8.12 Enerji Yöntemlerinin Uygulamaları

8.13 Örnek Problemler

8.1 Genel Bakış

Önceki bölümde incelendiği gibi, kinematik analizler, harekete sebep olan faktörler göz önünde bulundurulmaksızın hareketin, geometrik ve zamana bağlı olarak yer değiştirme, hız ve ivme açısından tanımlanması ile ilgilidir. Diğer taraftan *kinetik* ise kinematik üzerine kuruludur ve harekete sebep olan kuvvetleri analiz eder.

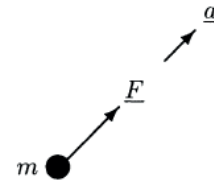
Hareket tipine bağlı olarak kinetik kendi içerisinde lineer (translasyonel) ve açısal (rotasyonel) olmak üzere ikiye ayrılır. Translasyonel, obje üzerine uygulanan net kuvvet sebebiyle oluşurken, rotasyon ise net torkun sonucu oluşur. Bir obje üzerine hem net kuvvet hem de net moment uygulanırsa, obje aynı anda döner ve ötelenir (genel hareket uygulaması). Hareketin translasyonel, dairesel ve genel sınıflandırılmasına ek olarak kinetik, *parçacıkların kinetiği* ve *rijit cisimlerin kinetiği* olarak da ayrılabilir. Parçacık kinetiği, analizi yapılan parçanın boyut ve şeklini de kapsayan rijit cisim kinetiğine göre daha kolay uygulanan bir yöntemdir. Özellikle cisim dairesel hareket halindeyse, parçacık ve rijit cisim arasındaki ayrım önemlidir. Cisim yeterince küçük veya translasyonel hareket etkisinde ise cismin geometrik özellikleri ihmal edilebilir ve cismin toplam kütlesi yer çekimi doğrultusunda ağırlık merkezinde kabul edilebilir. Örneğin, düz bir yüzeyde bir bloğu iten birisi için önemli olan bloğun boyutu veya şekli değil toplam kütlesidir.

Kinetik analizler çeşitli şekillerde formüle edilebilen Newton'nun ikinci hareket yasasını kullanır. Newton'un ikinci hareket yasasını temsil etmenin bir yolu, özellikle ivme analizini gerektiren problemleri çözmek için uygun olan hareket denklemleridir. Doğrusal kinetik için hareket denklemlerinin kullanımı ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır. Newton'nun ikinci yasası başka bir şekilde formüle edilmesi, bu bölümde doğrusal kinetik bağlamında anlatılacak iş ve enerji yöntemleri üzerinden de olur. İmpuls ve momentuma bağlı olan yöntemler de bulunmaktadır, bu yöntemlerden Bölüm 11'de bahsedilecektir.

8.2 Hareket Denklemleri

Üzerine sıfırdan farklı bir net kuvvet uygulanan parça hızlanır. Newton'nun ikinci hareket yasası, bir cismin ivmesinin büyüklüğünün bileşke kuvvetin büyüklüğü ile doğru orantılı ve kütlesi ile ters orantılı olduğunu belirtmektedir. İvmenin yönü bileşke kuvvetin yönü ile aynıdır. \underline{F} kuvvetine maruz kalmış, \underline{a} bileşke ivmesine sahip ve m kütleli bir cismi ele alalım (Şekil 8.1). Newton'nun ikinci hareket yasası şu şekilde ifade edilebilir;

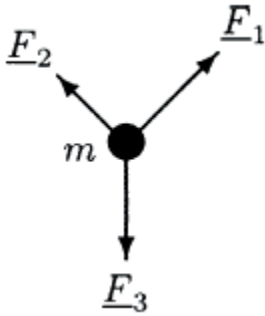
$$\underline{F} = m\underline{a}. \quad (8.1)$$



Şekil 8.1 Bir cisim ona uygulanan kuvvetin doğrultusunda ivmelenecektir

Cisim üzerine uygulanan birden fazla kuvvet var ise (Şekil 8.2) denklem (8.1)'de bulunan \underline{F} kuvveti; net veya etki eden tüm kuvvetlerin bileşkesi olarak değiştirilmelidir. Bir kuvvetler sisteminin sonucu tüm kuvvetlerin vektörel toplamı dikkate alınarak hesaplanabilir. Bu nedenle;

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \quad (8.2)$$

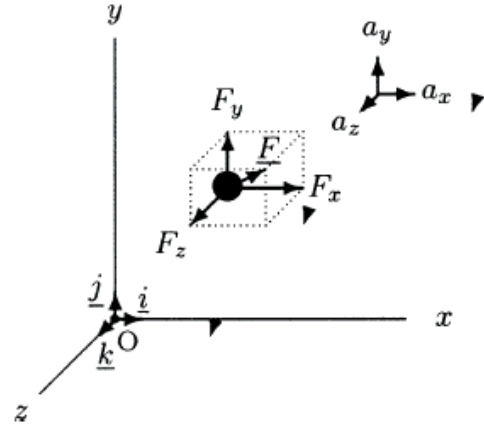


Şekil 8.2 Net kuvvet bir cisme etki eden bütün kuvvetlerin vektörel toplamıdır

Bu durum *hareket denklemi* olarak bilinir. Kuvvet ve ivme vektörel niceliklere sahip olduğu için referans olarak seçilen bir koordinat sisteminde bileşenleri ifade edilebilir. Translasyonel hareket analizi için sırasıyla pozitif x , y ve z yönünü belirten; \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} birim vektörlerine sahip; x , y ve z eksenlerinden oluşan Kartezyen (dikdörtgen) koordinat sistemini kullanmak en uygundur (Şekil 8.3). Bir cisim tek bir kuvvet altındaysa, kuvvet vektörü ve bileşke ivme vektörü dikdörtgen koordinat eksenleri üzerinde bulunan bileşenleri ile ifade edilebilir;

$$\underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}, \quad (8.3)$$

$$\underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}, \quad (8.4)$$



Şekil 8.3 Kuvvet ve ivme vektörlerinin Kartezyen bileşenleri

Denklem (8.3) ve (8.4)'ü denklem (8.1)'de yerine yazarsak;

$$F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k} = ma_x\underline{i} + ma_y\underline{j} + ma_z\underline{k} \quad (8.5)$$

Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise bu vektör denklemi geçerlidir;

$$F_x = ma_x,$$

$$F_y = ma_y, \quad (8.6)$$

$$F_z = ma_z,$$

Cisim üzerine birden fazla kuvvet etki ediyor ise F_x , F_y ve F_z sırasıyla x , y , ve z yönünde etki eden tüm kuvvetlerin toplamıyla değiştirilmelidir.

$$\sum F_x = ma_x,$$

$$\sum F_y = ma_y, \quad (8.7)$$

$$\sum F_z = ma_z,$$

(8.7) içerisinde bulunan denklemler, aynı yönde etki eden bütün kuvvetlerin bileşkesi, kütle ve yine kuvvet ile aynı yönde bulunan ivmenin çarpımına eşit olduğunu belirtmektedir. Tek boyutlu hareket analizi için bu denklemlerden yalnızca birinin dikkate alınması gerektiği unutulmamalıdır. İki boyutlu bir durum için yukarıda bulunan denklemlerden iki tanesi problemin analizi için yeterli olacaktır.

8.3 Translasyonel Hareketin Özel Durumları

Kuvvet çeşitli şekillerde uygulanabilir. Örneğin uygulanan kuvvet sabit olabilir veya zamanla değişebilir. Uygulanan kuvvetler de çeşitli şekillerde ölçülebilir. Bir kuvvet vektörünün büyüklüğü nesnenin göreceli konumunun bir fonksiyonu ya da zamanın bir fonksiyonu olarak ölçülebilir. Bunlardan bazılarını daha ileriki konularda değinilecektir. Bu konuları kısaca ele almak için, hareketin x doğrultusunda düz bir çizgi boyunca ve üzerinde yalnızca tek bir kuvvetin etkisi altında olduğu kabul edilecektir. Birden fazla kuvvetin etkisi altında olan iki ve üç boyutlu translasyonel hareketleri kolaylıkla analiz etmek için içerdikleri parametrelerin vektörel özellikleri kullanılarak kullanılan metotlar genişletilebilir.

Bu bölümde verilen türevlerin, farklı durumların uygun matematiksel manipülasyonlar yolu ile elde edilebileceğini göstermeyi hedeflediği unutulmamalıdır. Uygulanan kuvvetin yer değiştirmenin bir fonksiyonu olduğunu belirten matematik, bu metnin konusu dışında olabilir ve konunun devamlılığının bozulmaması için bu matematik üzerinde durulmayabilir.

8.3.1 Sabit Kuvvet

Bir cisim üzerine uygulanan kuvvet sabit bir büyüklük ve yöne sahip ise cisim kuvvetin uygulandığı yönde sabit ivme ile hareket edecektir. Kütle m olan bir cisme F_x kuvvetinin uygulandığını varsayalım. Bu cismin x yönünde oluşacak olan sabit büyüklüğe sahip a_x ivmesi aşağıda verilmiş olan hareket denklemi ile hesaplanabilir;

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \text{constant.}$$

Cismin ivmesi belirlendikten sonra kinematik denklemler cismin hızı ve yer değiştirmesinin bulunması için kullanılabilir;

$$v_x = v_{x_0} + \int_{t_0}^t a_x dt = v_{x_0} + \frac{F_x}{m} t, \quad (8.8)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2, \quad (8.9)$$

Burada v_{x_0} ve x_0 sırası ile $t=0$ anında cismin x yönünde sahip olduğu başlangıç hızı ve yer değiştirmesidir. Bu sonuçların üzerine ikincil sabit bir F_y kuvveti uygulanırsa, y yönünde hareket eden bir cismin durumu yukarıdaki formüllerde x değerlerinin y ile değiştirilerek elde edilebileceği unutulmamalıdır.

8.3.2 Zamanın Fonksiyonu olarak Kuvvet

Bir cismin üzerine etkiyen kuvvet büyüklüğü zamanın bir fonksiyonu ise o zaman $F_x=F_x(t)$ olmalıdır. Buna bağlı olarak cisimde oluşan ivme de zamanın bir fonksiyonu olacaktır;

$$a_x(t) = \frac{F_x(t)}{m}$$

Şimdi kinematik ilişkiler kullanılarak cismin hızı ve yer değiştirmesi belirlenebilir;

$$v_x = v_{x_0} + \int_{t_0}^t a_x(t)dt \quad (8.10)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t)dt \quad (8.11)$$

$F_x(t)$ fonksiyonu (8.10) denklemi içerisindeki integral ile sağlanmış olur.

8.3.3 Yer Değiştirmenin Fonksiyonu olarak Kuvvet

Bazen, kuvveti yer değiştirmenin bir fonksiyonu olarak yazmak daha uygun olacaktır, bu durumda $F_x=F_x(x)$ olacaktır.

Tanım olarak, ivme hızın zamana göre değişimine eşittir. Dolayısıyla x yönündeki hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(x)}{m}$$

Zincir kuralı ile ayırma metodu kullanılarak (Ek C.2.6'ya bakınız), hızın zaman türevi şu şekilde ifade edilebilir;

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x$$

Bu nedenle x yönündeki hareket denklemi;

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{F_x(x)}{m}$$

Her taraf dx ile çarpılırsa;

$$v_x dv_x = \frac{F_x(x)}{m} dx$$

Bu denklemin sol tarafı sadece v_x 'in bir fonksiyonudur, v_x 'e göre integrali alınabilir ve denklemin sağ tarafı sadece x in fonksiyonudur ve x 'e göre integrali alınabilir;

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x_0}^x \frac{F_x(x)}{m} dx$$

Denklemin sol tarafı düzenlenirse;

$$\frac{1}{2}(v_x^2 - v_{x_0}^2) = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx.$$

Terimlerin yerleri düzenlenirse;

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx \quad (8.12)$$

Denklem (8.12) de bulunan integral değerinin çözülebilmesi için F_x , x 'in bir fonksiyonu

olarak sağlanmalıdır. Bilinen $F_x(x)$ değeri için denklem (8.13), v_x değerini belirleyebilecektir. F_x değeri bilindiği takdirde cismin ivmesi aşağıdaki denklem kullanılarak bulunabilir;

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}. \quad (8.13)$$

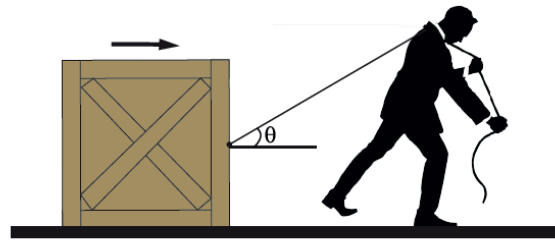
8.4 Kinetikte Problem Çözümü İçin Yöntem

Hareket denklemleri kullanılarak, translasyonel harekete sahip cisimlerin kinetik özelliklerini analiz etme yöntemi aşağıda verildiği gibi özetlenebilir;

- Analizi yapılacak sistemin basit ve anlaşılır bir diyagramını çizin.
- Kullanılacak olan kısmı ayırarak, cisim üzerine etkiyen tüm dış kuvvetleri göstererek serbest cisim diyagramını çizin. Bilinen kuvvetlerin yönlerini doğru tayin edin. Bilinmeyen kuvvetlerin yönlerini pozitif kabul edin. Pozitif kabul edilen kuvvet sonuçlarda negatif yönlü çıkıyor ise tayin edilen yönün yanlış olduğu anlaşılır.
- Her bir cismin hareket yönünü belirleyin (serbest cisim diyagramından bağımsız olarak). Analiz esnasında hareketin belirlenen yön ile uyumlu olması özellikle önem arz eder.
- Uygun koordinat sistemi seçin. İki boyutlu durumlar için genellikle x ve y eksenlerine sahip dikdörtgen koordinat sistemi en uygun olandır.

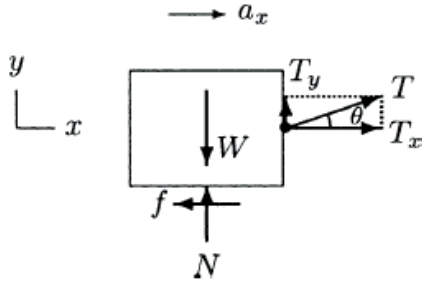
- Hareket denklemlerini uygulayın. İki boyutlu hareket analizi için iki adet denklem bulunur bu yüzden belirlenecek olan bilinmeyen sayısı ikiden fazla olamaz. Doğrusal kinetikte bilinmeyenler kuvvetler veya ivmelerdir.
- Çözümlerdeki ivme ve kuvvetleri birimleri ile birlikte belirtin.
- Konum, hız ve ivme arasındaki kinematik ilişki, analiz edilen cismin hızı ve/veya konumu hakkında bilgi biliniyorsa ya da talep edilirse kullanılır.

Örnek 8.1 Şekil 8.4'te gösterildiği gibi bir kişi tarafından ip yardımı ile sert bir yüzeyde çekilen $m = 50$ kg'lık bir blok olduğunu ele alalım. Kişinin bloğa $T = 150$ N'luk sabit bir kuvvet uyguladığını, ipin yatay ile yaptığı açının $\theta = 30^\circ$ ve blok ile yatay yüzey arasındaki sürtünme katsayısının $\mu = 0,2$ olduğunu varsayalım.



Şekil 8.4 Yatay düzlemde çekilen bir blok

Hareket boyunca bloğun alt yüzeyi ile yerin tamamen temas halinde olduğunu göz önünde bulundurarak bloğun ivmesini belirleyin.



Şekil 8.5 Bloğun serbest cisim diyagramı

Çözüm

Bloğun serbest cisim diyagramı Şekil 8.5'te gösterilmiştir. Pozitif x yönü bloğun hareket yönü ile aynı seçilmiştir. W bloğun ağırlığı, f harekete ters yönde etki eden sürtünme kuvvetinin büyüklüğü ve N yerin bloğa taban kısmından uyguladığı reaksiyon kuvvetinin büyüklüğüdür. T , kişinin halat ile bloğa uyguladığı kuvvettir. Halat yatay ile $\theta = 30^\circ$ açı yapmaktadır. Bu nedenle T 'nin x ve y bileşenleri vardır;

$$T_x = T \cos \theta \quad (\rightarrow),$$

$$T_y = T \sin \theta \quad (\uparrow).$$

Bloğun ağırlığı yer çekimi etkisinde olduğu için şu şekilde ifade edilebilir;

$$W = mg \quad (\downarrow).$$

Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü; normal kuvvetinin büyüklüğü ve temas halinde bulunan yüzeyler arasındaki sürtünme katsayısı ile ilişkilidir;

$$f = \mu N \quad (\leftarrow). \quad (i)$$

x ve y yönlerindeki hareket denklemleri bloğun ivmesi için bir ifade bulmakta uygulanabilir. Blok y yönünde bir harekete sahip değildir ve bu yüzden bloğun y yönündeki ivmesi sıfırdır ($a_y = 0$). y yönündeki hareket denklemi;

$$\sum F_y = 0 : \quad N + T_y - W = 0.$$

Bu denge denkleminin N için çözülmesi şu sonuçları verecektir;

$$N = W - T_y = mg - T \sin \theta. \quad (ii)$$

Denklem (ii) denklem (i) de yerine koyulursa;

$$f = \mu (mg - T \sin \theta). \quad (iii)$$

Şimdi x yönündeki hareket incelenirse;

$$\sum F_x = ma_x : \quad T_x - f = ma_x.$$

a_x için bu denklem çözülürse;

$$a_x = \frac{1}{m} (T_x - f). \quad (iv)$$

Denklem (iii) ve $T_x = T \cos \theta$ denklem (iv)'te yerine yazılırsa;

$$a_x = \frac{1}{m} [T \cos \theta - \mu (mg - T \sin \theta)].$$

Sayısal değerler yerlerine yazıldığında, $m = 50 \text{ kg}$, $T = 150 \text{ N}$, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0,2$ ve $g = 9.8 \text{ m/s}$. Ve gerekli hesaplamalar yapıldığında $a_x = 0.94 \text{ m/s}^2$ (\rightarrow) olarak bulunur.

8.5 İş ve Enerji Metotları

Cisimlerin kinetik özelliklerinin analiz etmenin en temel yolu, Newton'nun ikinci hareket yasasını matematiksel olarak temsil eden hareket denklemleridir. Hareket denklemleri kullanılarak ivmeler belirlenebilir. Bazı durumlarda, özellikle üzerinde çalışılacak olan kuvvetlerin sabit olmadığı durumlarda, hareket denklemlerinin çözümü zor olabilir. Bu gibi durumlarda sonuca ulaşabilmek için iş ve enerji kavramlarına dayanan alternatif yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler, Newton yasalarından da türetilir ve göreceli olarak karmaşık sistemlerde yer alan kuvvetleri, hızları ve yer değiştirmeleri hareket denklemlerine başvurmadan analiz etmek için uygulanabilir.

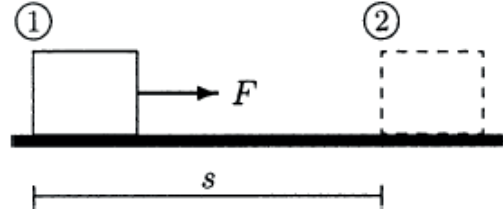
8.6 Mekanik İş

Tanımı gereği *mekanik iş* üretilen kuvvet ve buna karşılık gelen yer değiştirmedir. İş skaler bir büyüklüktür. İşin yön ile bir ilgisi bulunmamaktadır.

8.6.1 Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan İş

İşin tanımını anlayabilmek için Şekil 8.6'daki bloğa göz atılmalıdır. Cisim üzerine sabit, yatay bir kuvvet \underline{F} uygulandığını varsayalım ve bu kuvvet etkisinde bloğun 1 konumundan s uzaklığındaki 2. konuma ulaştığını düşünelim.

\underline{F} kuvveti tarafından bloğu 1 konumundan 2 konumuna taşımak için yapılan iş W ise bu iş, kuvvet vektörünün büyüklüğü çarpı yer değiştirmeye eşit olacaktır.

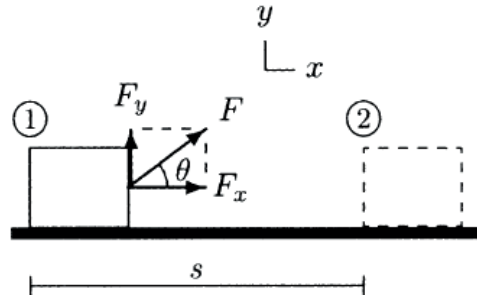


Şekil 8.6 Bloğa uygulanan sabit kuvvet bloğu 1 konumundan 2 konumuna taşır

$$W = Fs. \quad (8.14)$$

Şekil 8.7 de aynı blok üzerine θ açısına sahip başka bir \underline{F} kuvveti ile 1 konumundan 2 konumuna çekildiğini düşünelim. Blok üzerinde yapılan iş \underline{F} kuvvetinin yer değiştirme yönündeki büyüklüğü ile yer değiştirme miktarının çarpılmasına eşittir. Hareket boyunca \underline{F} kuvvetinin bileşeni $F_x = F \cos\theta$ olduğundan, bloğun 1 konumundan 2 konumuna taşınması için \underline{F} tarafından yapılan iş şu şekilde olacaktır;

$$W = F_x s = F \cos\theta s. \quad (8.15)$$

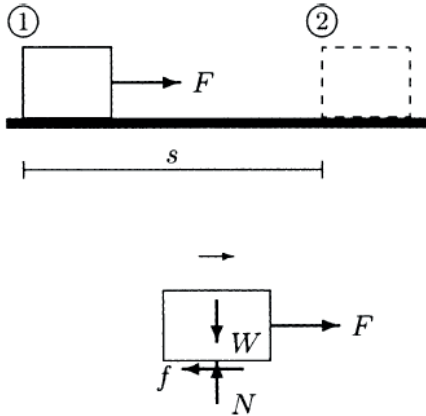


Şekil 8.7 Yatay ile θ açısı yaparak bloğa uygulanan kuvvet

(8.14) ile (8.15) denklemlerinin kendi aralarında tutarlı olabilmeleri için $\theta = 0^\circ$ ve $\cos \theta = 1$ iken aynı değere sahip olmalıdırlar.

Bir kuvvetin iş yapması için, kuvvetin uygulandığı cisim yer değiştirmelidir ve kuvvet vektörünün yer değiştirme yönünde bileşeni olmalıdır. Örneğin Şekil 8.7'de F kuvvetinin dik bileşeni $F_y = F \sin \theta$ iş yapmaz, çünkü blok dik yönde yer değiştirmeye sahip değildir.

Yapılan iş pozitif veya negatif olabilir. Uygulanan kuvvet yer değiştirme ile aynı yönlü ise kuvvet tarafından yapılan iş pozitifdir. Eğer ki uygulanan kuvvet ve yer değiştirme ters yönlü ise kuvvet tarafından yapılan iş negatiftir. Negatif işin en tipik örneği sürtünme kuvvetidir. Şekil 8.8'de gösterildiği gibi \underline{F} kuvveti tarafından sağa doğru çekilerek s mesafesi kat ettiğini varsayalım.



Şekil 8.8 Sürtünme kuvvetleri negatif iş yaparlar

Blok s mesafesi kadar yer değiştirirken sürtünme kuvveti \underline{f} tarafından yapılan iş W_f olacaktır;

$$W_f = -fs. \quad \text{CCC} \quad (8.16)$$

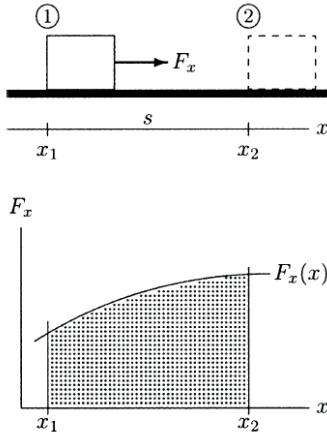
Birden fazla dış kuvvet bloğa etkiyor ise her kuvvet için yapılan bir iş vardır. Yapılan net iş, bireysel olarak kuvvetlerin yapmış oldukları işin cebirsel olarak toplamıdır. Örneğin Şekil 8.8'de yapılan net iş;

$$W = F_s - f_s.$$

8.6.2 Değişken Kuvvet Tarafından Yapılan İş

Denklem (8.14) sadece sabit kuvvet tarafından yapılan işi hesaplamak için kullanılır. Uygulanan kuvvet yer değiştirmenin bir fonksiyonu ise, yapılan iş, uygulandığı mesafe boyunca kuvvetin integrali alınarak hesaplanabilir.

Şekil 8.9 da gösterildiği gibi bloğun x yönü boyunca değişken bir F_x kuvveti ile çekildiğini düşünelim. Yani $F_x = F_x(x)$. Başlangıç konumu 1 olan bloğun s mesafesini alarak 2 konumuna geldiğini varsayalım. x_1 ve x_2 'nin sırasıyla bloğun başlangıç ve son konumları olduğunu varsayalım.



Şekil 8.9 İş, kuvvet-yer değiştirme eğrisinin altında kalan alana eşittir

F_x kuvvetinin x 'e göre değişimi biliniyorsa, bloğun 1'den 2 konumuna taşınması için F_x tarafından yapılan iş şu şekilde hesaplanabilir;

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (8.17)$$

Denklem (8.17)'de verilen integralin kuvvete karşı pozisyon eğrisinin ($x = x_1$ ve $x = x_2$) altında kalan alan olduğunu unutmayınız (Şekil 8.9'da verilen taralı bölge). Ayrıca F_x kuvveti sabit ise (8.17) denkleminin integral sonucu $W = F_x(x_2 - x_1) = F_x s$ (8.14) denklemini sağlamaktadır.

8.6.3 İşin Skaler Çarpım Olarak Hesaplanması

Bazı uygulamalar için, iş kuvvet vektörleri ile yer değiştirme vektörünün skaler olarak çarpılması ile hesaplanması uygun olabilir. Ek B.14 bölümünde bahsedildiği gibi herhangi iki vektörün skaler çarpımı büyüklükleri çarpımı

ve bu çarpımı aralarında oluşan dar açının kosinüsünün çarpımı ile mümkündür. Yer değiştirme vektörü \underline{s} olarak verilen ve sabit kuvvet \underline{F} tarafından yapılan iş için;

$$W = \underline{F} \cdot \underline{s}. \quad (8.18)$$

θ açısı \underline{F} ve \underline{s} vektörleri arasındaki dar açı ise;

$$W = \underline{F} \cdot \underline{s} = F s \cos \theta. \quad (8.19)$$

Kuvvet ve yer değiştirme vektörleri dikdörtgen bileşenler olarak ifade edilirse;

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}, \quad (8.20)$$

$$\underline{s} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}. \quad (8.21)$$

Birim vektörlerin noktasal çarpımı şu şekildedir: $\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$ ve $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0$. Denklem(8.20) ve (8.21)'i denklem (8.18)'de yerine yazarak gerekli birim vektörel işlemleri yaparsak;

$$W = F_x x + F_y y + F_z z. \quad (8.22)$$

Denklem (8.22) x , y ve z yönlerinde bulunan kuvvet vektörleri tarafından yapılan toplam işi temsil etmesinden dolayı önemlidir. Örneğin, x yönünde yapılan iş, x yönünde bulunan kuvvet bileşenlerinin toplamı ile aynı yöndeki yer değiştirme vektörünün çarpımına eşittir. xy düzleminde iki eksenli bir hareket için denklem (8.22) $W = F_x x + F_y y$, x yönünde tek yönlü hareket için ise $W = F_x x$ olarak almak unutulmamalıdır.

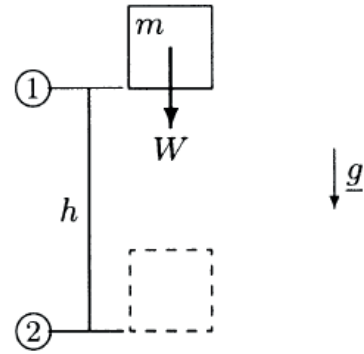
8.7 Mekanik Enerji

Enerji terimi, bir sistemin diğer bir sistem üzerinde yaptırabildiği iş kapasitesi olarak tanımlanır. Enerji; mekanik, termal, kimyasal ve nükleer gibi çeşitli biçimlerde olabilir. Mekanik alanı, öncelikle mekanik enerji formu ile ilgilenir. Mekanik enerji, potansiyel ve kinetik olmak üzere kategorize edilebilir. Ayrıca enerji skaler bir büyüklüktür.

8.7.1 Potansiyel Enerji

Potansiyel enerji bir sistemin konumu veya yüksekliği ile ilgilenir. Sistem içerisinde depolanır ve kinetik enerjiye dönüştürülebilir. Potansiyel enerji algısı, bir yüksekliğe yerleştirilmiş bloğun eğer ki inmesine izin verilirse yararlı bir iş yapacağı kavramından gelir. Bir bloğun ağırlık merkezinin yüksekliğe sahip olmasından kaynaklı iş yapabilme potansiyeli, *yer çekimi potansiyel enerjisi* olarak tanımlanabilir. Şekil 8.10'da gösterilen, ağırlığı $W = mg$ olan bloğu ele alalım. Cisim konum 2'ye göre h mesafesi kadar yükseklikte bulunmaktadır. 2 konumuna göre 1 pozisyonundaki potansiyel enerjisi ϵ_p dir;

$$\epsilon_p = Wh = mgh. \quad (8.23)$$



Şekil 8.10 Yer çekimi potansiyel enerjisi

Dikkat edilirse Wh yer çekimi etkisi altında bulunan bloğu h mesafesi boyunca bloğu 1 konumundan 2 konumuna getirmek için yapılan iştir.

8.7.2 Kinetik Enerji

Kinetik enerji harekete bağlıdır. Hareket eden her cisim bir kinetik enerjiye sahiptir. Kinetik enerji ϵ_K v hızı ile hareket eden m kütleli cismin; kütesinin yarısı ile hızının karesinin çarpımına eşittir.

$$\epsilon_K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.24)$$

8.8 İş-Enerji Teoremi

Kinetik enerji ile yapılan iş arasında bir ilişki bulunmaktadır. Bir cisim 1 konumundan 2 konumuna götürmek için yapılan net iş W_{12} , cismin 1 ve 2 konumu arasındaki kinetik enerjisindeki $\Delta\epsilon_K$ değişikliğe eşittir. Bu durum *iş-enerji teoremi* olarak bilinir ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$W_{12} = \Delta\epsilon_K = \Delta\epsilon_{K2} - \Delta\epsilon_{K1}. \quad (8.25)$$

8.9 Enerjinin Korunumu İlkesi

Kuvvetler korunabilir veya korunamaz olabilir. Bir kuvvetin bir cismi iki konum arasında hareket ettirmek için yaptığı iş esnasında kuvvet yoldan bağımsız ise korunur. Korunan kuvvetlere en tipik örnek olarak yer çekimi kuvveti verilebilir. Diğer taraftan sürtünme kuvvetine bakılacak olursa, sürtünme kuvveti korunmayan bir kuvvettir. Korunmayan kuvvetler enerjiyi ısı olarak dışarı verirler.

Bir sistem üzerinde korunan kuvvetler tarafından yapılan net iş, sistemin toplam enerjisi hareket boyunca sabit kalacak şekilde kinetik ve potansiyel enerjiye dönüştürülür. Bu mekanik enerjinin korunumu ilkesi olarak bilinir ve farklı iki nokta arasında (1 ve 2 arası) şu şekilde ifade edilir;

$$\epsilon_{K1} + \epsilon_{P1} = \epsilon_{K2} + \epsilon_{P2}. \quad (8.26)$$

8.10 İş ve Enerjinin Birimi ve Boyutu

Mekanik iş ve enerji aynı boyut ve birimlere sahiptirler. Tanım gereği yapılan iş, kuvvet çarpı yer değiştirmedir. Bu yüzden iş kuvvet büyüklüğü ile uzunluk büyüklüğünün çarpımıdır.

$$[\text{İŞ}] = [\text{KUVVET}][\text{YOL}] = M \frac{L^2}{T^2}.$$

Farklı sistemlerde iş ve enerji için kullanılan birimler Tablo 8.1'de verilmiştir.

Tablo 8.1 İş ve enerjinin birimleri

Sistem	İş ve enerjinin birimi	Özel adı
SI	Newton metre (N-m)	Joule (J)
CGS	Dyne santimetre (dyn-cm)	erg
İngiliz	Pound foot (lb-ft)	

8.11 Güç

Güç, P, yapılan işin zamana oranı olarak tanımlanır.

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (8.27)$$

Sabit bir kuvvet tarafından yapılan iş kuvvet ve yer değiştirme vektörünün skaler çarpımı ile hesaplanır ($W = \underline{F} \cdot \underline{s}$);

$$P = \frac{d}{dt}(\underline{F} \cdot \underline{s}).$$

Eğer \underline{F} vektörü sabit ise:

$$P = \underline{F} \cdot \frac{d\underline{s}}{dt} = (\underline{F} \cdot \underline{v}). \quad (8.28)$$

Denklem (8.28) de bulunan \underline{v} vektörü cismin hızıdır. Eğer uygulanan kuvvet hız ile aynı eşdoğrultulu ise $P = Fv$ olarak ifade edilir. Güç skaler bir büyüklüktür ve büyüklük olarak kuvvet ile hızın çarpımıdır. Gücün birimi Tablo (8.2) verilmiştir.

Tablo 8.2 Gücün birimleri (1 hp = 550 lb-ft/s = 746 W)

Sistem	Gücün birimleri	Özel adı
SI	N-m/s = J/s	Watt (W)
CGS	dyn-cm/s = erg/s	
İngiliz	lb-ft/s	Beygir (hp)

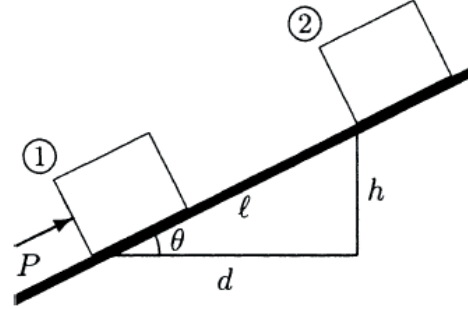
8.12 Enerji Yöntemlerinin Uygulamaları

Denklem (8.23)'te belirtilen iş-enerji teoremi ve denklem (8.24) tarafından belirtilen enerjinin korunumu ilkesi, dinamikte alternatif problem çözme yöntemleri sağlar. İş-enerji teoremi, konservatif olmayan kuvvetleri içeren problemleri analiz etmek için kullanılabilir. Öte yandan enerjinin korunumu ilkesi sadece sabit kuvvetler olduğu zaman yararlı olur. Hareket denklemlerinin uygulamalarına kıyasla, bu yöntemlerin uygulanması daha kolaydır ve özellikle sağlanan veya belirlenecek olan bilgiler ivmelenme yerine hızlar açısından olduğunda faydalıdır. Bu bölümde anlatılan önemli kavramların tanımları ve kinetik analizleri Tablo (8.3)'te özetlenmiştir.

Tablo 8.3 Denklemler ve formüllerin özeti

Değişken bir kuvvetin gerçekleştirdiği iş	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx.$
Sabit bir kuvvetin gerçekleştirdiği iş	$W = F_x(x_2 - x_1)$ $= F_x s$
Potansiyel enerji	$\varepsilon_p = mgh$
Kinetik enerji	$\varepsilon_K = \frac{1}{2}mv^2$
Enerjinin korunumu ilkesi	$\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{P1}$ $= \varepsilon_{K2} + \varepsilon_{P2}$
İş-Enerji teoremi	$W_{12} = \varepsilon_{K2} - \varepsilon_{K1}$
Hareket denklemleri	$\sum F_x = ma_x$

Örnek 8.2 20 kg'lık bir cisim eğik düzlem üzerinde, eğik düzleme paralel bir şekilde sabit $P=150 \text{ N}$ 'luk bir kuvvet ile yukarı itiliyor (Şekil 8.11). Eğik düzlem ile yatay arasında $\theta = 30^\circ$ derecelik bir açı bulunmaktadır ve eğik düzlem ile cisim arasında bulunan sürtünme kuvveti $\mu=0.2$ 'dir.



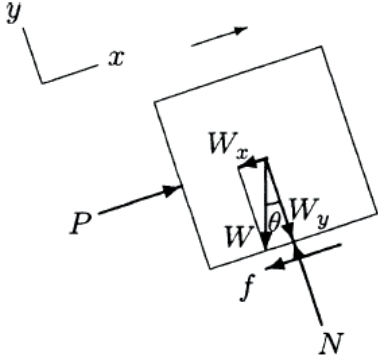
Şekil 8.11 Konum 1'den konum 2'ye itilen blok

Eğer cisim $l = 10 \text{ m}$ yer değiştirir ise, \underline{P} kuvveti tarafından yapılan işi, sürtünme kuvveti tarafından yapılan işi ve yer çekimi tarafından yapılan işi hesaplayın. Cisim üzerinde yapılan net iş nedir?

Çözüm

Cismin serbest cisim diyagramı Şekil 8.12'de gösterilmiştir. W bloğun ağırlığı, f eğik düzlem ile blok arasında bulunan sürtünme kuvveti ve N eğik düzlemin bloğa uyguladığı reaksiyon kuvvetidir. x ve y yönleri, hareketin pozitif x yönünde olduğu ve y ekseninde yer değiştirmenin olmadığı göz önünde bulundurularak belirlenmiştir. \underline{P} kuvveti

bloğun hareket yönüyle aynı doğrultuda uygulanmaktadır.



Şekil 8.12 Bloğun serbest cisim diyagramı

Bu yüzden l uzunluğu boyunca bloğu yukarı çıkartmak için P kuvveti tarafından yapılan iş;

$$W_p = Pl. \quad (i)$$

W ağırlığı, x ve y yönünde sırasıyla $W_x = W \sin\theta$ ve $W_y = W \cos\theta$ bileşenlerine sahiptir. y yönünde bir hareket olmadığı için blok y yönünde dengededir. y yönünde bulunan denge denklemleri $N = W_y$ veya $W = mg$, $N = mg \cos\theta$ 'dır. Sürtünme kuvveti ile normal kuvveti arasında bulunan ilişki $f = \mu N = \mu mg \cos\theta$ 'dır. Sürtünme eğime paraleldir ama bloğun yer değiştirme yönünün tersinedir. Bu nedenle blok üzerinde l yer değiştirmesi boyunca sürtünme kuvveti f tarafından yapılan iş;

$$W_f = -fl = -\mu mgl \cos\theta. \quad (ii)$$

Yer çekimi kuvveti (ağırlık), her zaman aşağı doğru etki eder. Bu durumda ağırlığın eğime paralel, hareket yönünün tersine bir büyüklüğü

vardır $W_x = mgsin\theta$. W_x tarafından blok 1 konumundan 2 konumuna giderken yapılan iş;

$$W_g = -mgl \sin\theta. \quad (iii)$$

Blok üzerinde iş yapan kuvvetleri bulduktan sonra blok üzerinde yapılan net iş bulunabilir;

$$W = W_p + W_f + W_g = Pl - mgl(\sin\theta + \mu \cos\theta). \quad (iv)$$

Verilen sayısal değerleri (i)-(iv) arasında bulunan denklemlerde yerine yazıp hesaplamaları yaparsak;

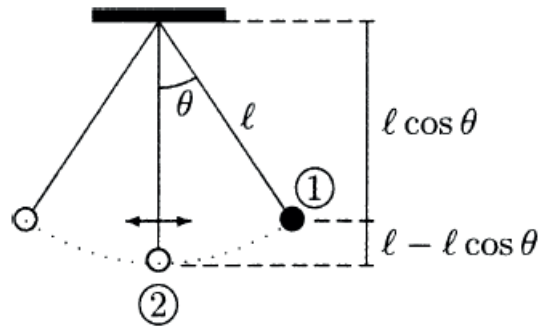
$$W_p = (150)(10) = 1,500 \text{ J},$$

$$W_f = -(0.2)(20)(9.8)(\cos 30^\circ) = -340 \text{ J},$$

$$W_g = -(20)(9.8)(10)(\sin 30^\circ) = -980 \text{ J},$$

$$W = 1,500 - 340 - 980 = 180 \text{ J}.$$

Örnek 8.3 Şekil 8.13'te kütlesi m , uzunluğu l olan sarkaç verilmiştir. Kütle dikey ile θ açısı yapacak şekilde 1 konumuna getirilip serbest bırakılıyor.



Şekil 8.13 Sarkaç

Sürtünme etkileri ve hava direncinin ihmal edildiğini kabul ederek, kütle 2 numaralı konumdan geçtiği esnada sahip olduğu v_2 hızını hesaplayın.

Çözüm

İlk başta kütle hızı yoktur ve kinetik enerjisi bulunmamaktadır (1. konum). 2. pozisyonu referans noktası olarak seçersek kütle $h_1 = l(1 - \cos\theta)$ yüksekliğinde bulunmaktadır ve 2 konumundan geçtiği esnada yüksekliği sıfır olacaktır. 1 ve 2 konumları arası için enerjinin korunumu ilkesi uygulanırsa;

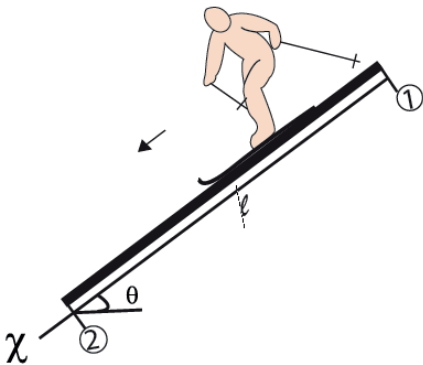
$$\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{P1} = \varepsilon_{K2} + \varepsilon_{P2},$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

$v_1 = 0$, $h_1 = l(1 - \cos\theta)$ ve $h_2 = 0$ değerleri yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve 2. konumdaki hız için çözülür ise;

$$v_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}.$$

Örnek 8.4 Şekil 8.14'te gösterildiği gibi başarılı bir atlayış yapmak için parkuru kullanarak gerekli hızı yakalamaya çalışan bir kayakçı verilmiştir. Parkur uzunluğu $l = 25$ m ve parkurun yatay ile yaptığı açı $\theta = 45^\circ$ derecedir.

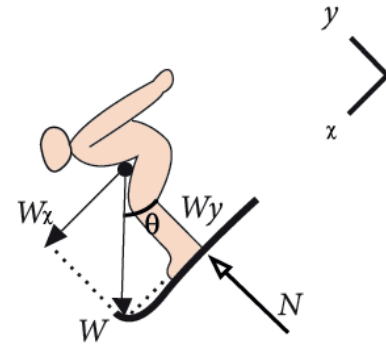


Şekil 8.14 Kayak atlayıcısı

Kayakçının ilk hızı sıfır olduğuna göre parkurdan ayrıldığı andaki havalanma hızını (a) İş-enerji yöntemi (b) enerjinin korunması ilkesi (c) hareket denklemleri ile kinetik arasında bulunan ilişkileri kullanarak hesaplayınız. Sürtünme kuvveti ve hava direnci ihmal edilecektir.

Çözüm (a): İş-Enerji Yöntemi

Atlayışı gerçekleştirecek olan kayakçının serbest cisim diyagramı Şekil 8.15'te gösterilmiştir.



Şekil 8.15 Kayak atlayıcısının serbest cisim diyagramı

Kayakçı üzerine etki eden kuvvetler yer çekimi kuvveti \underline{W} , ve parkurun kayağa dik olarak uyguladığı reaksiyon kuvvetidir. x eksen hareket yönü ile çakışacak şekilde ve y parkura dik olacak şekilde seçilir. Bu nedenle kayakçının ağırlığının x ve y eksenlerinde bileşenleri vardır; $W_x = W \sin\theta = mg \sin\theta$ ve $W_y = W \cos\theta = mg \cos\theta$. Öte yandan reaksiyon kuvveti N , y ekseninde etki etmektedir. W_x 'in kayakçı için itici kuvvet olduğu unutulmamalıdır.

x ekseninde yalnızca bir tane kuvvet bulunduğu için kayakçı üzerinde yapılan net iş bu kuvvet tarafından yapılmaktadır. Parkurun üst kısmını 1 alt kısmını 2 olarak belirlersek, W_x tarafından kayakçı üzerinde l mesafesi boyunca yapılan iş;

$$W_{12} = W_x l = mgl \sin\theta. \quad (i)$$

İş-Enerji yöntemine göre, kayakçının 1 ile 2 noktası arasındaki kinetik enerjisindeki değişim W_{12} 'yi verecektir.

$$W_{12} = \varepsilon_{K2} - \varepsilon_{K1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (ii)$$

Denklemin sağ kısmında bulunan ikinci terim sıfıra eşittir çünkü kayakçının ilk hızı sıfırdır $v_1 = 0$. Denklem (i), denklem (ii)'de yerine koyulup her yer m 'ye (kayakçının kütlesi) bölünür ve denklem (ii) kayakçının v_2 hızı için çözülürse;

$$v_2 = \sqrt{2gl \sin\theta}. \quad (iii)$$

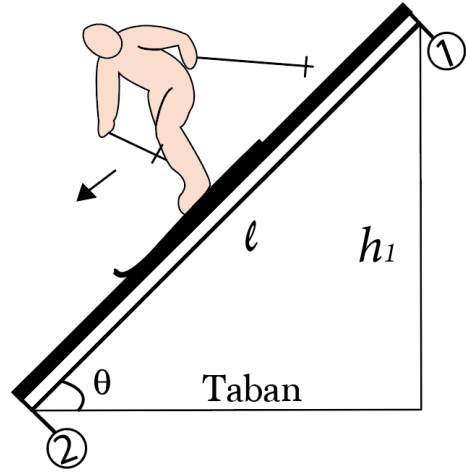
Çözüm (b): Enerjinin korunumu ilkesi

Korunmayan kuvvetlerin sürtünme ve hava direncine bağlı etkilerinin önemsiz olduğu varsayıldığından, bu problem enerjinin korunumu ilkesi kullanılarak da analiz edilebilir. 1 ve 2 konumları arasında;

$$\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{P1} = \varepsilon_{K2} + \varepsilon_{P2},$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2. \quad (iv)$$

Denklem (iv)'ün ilk kısmı içerisinde sol tarafta bulunan kısım $v_1 = 0$ olduğu için sıfırdır. Yüksekliği pistin tabanına göre ölçersek (Şekil 8.16'da gösterildiği gibi referans noktasını 2 seçersek) $h_2 = 0$ ve parkurun en üst noktası $h_1 = l \sin\theta$ olacaktır. Böylelikle denklem(iv)'ün sağ kısmındaki ikinci terim de sıfır olacaktır. Denklem (iv)'de $h_1 = l \sin\theta$ yerine yazılır, her taraf m 'ye bölünür ve denklem (iv) v_2 için çözülürse sonuç yine denklem (iii) çıkacaktır.



Şekil 8.16 $h_1 = l \sin\theta$ ve $h_2 = 0$

Çözüm (c): Hareket denklemleri kullanarak

x eksenini yönündeki hareketler için hareket denklemleri;

$$\sum F_x = ma_x : W_x = ma_x. \quad (v)$$

$W_x = mg \sin\theta$ denklem (v)'de yerine yazılır, her taraf m ye bölünür ve denklem(v) kayakçının x eksenindeki ivmesi için çözülürse;

$$a_x = g \sin\theta. \quad (vi)$$

Kayakçının ivmesi sadece yer çekiminden kaynaklandığı için, tek boyutta sabit ivmeli harekete sahip oluruz. Tanım olarak, ivme hızın zamanla değişimi veya hız ivmenin zamana göre integralidir. Yani a_x sabittir ve kayakçının 1 konumunda başlangıç hızı sıfırdır, bunlardan yararlanarak şunu yazabiliriz;

$$v_x = a_x t. \quad (vii)$$

Yer değiştirmenin hızın zamana göre integrali olması, hız ve yer değiştirme arasındaki kinematik ilişkidir. Kayakçının başlangıç noktasına göre yer değiştirmesi ölçülür ise ilk yer değiştirme sıfır olacaktır. Böylece yer değiştirme, ivme ve zaman ile ilgili denklem şöyle olacaktır;

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (viii)$$

Denklem (vii)'den t yalnız bırakılır ve elde edilen değer denklem (viii)'de yerine yazılırsa ($t = v_x/a_x$) t yok edilmiş olur. Böylece;

$$x = \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{a_x}.$$

Bu denklem v_x için çözümlerse;

$$v_x = \sqrt{2x a_x}. \quad (ix)$$

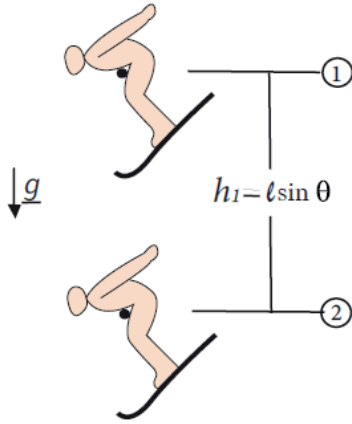
Bu çözüm kayakçının herhangi bir noktada parkurdan atlaması esnasında ivme, hız ve yer değiştirmesi ile alakalı genel bir çözümdür. Kayakçı parkurun altında bulunduğu anda $x = l$ ve $v_x = v_2$ ve kayakçının ivmesi her zaman sabittir $a_x = g \sin \theta$. Bu parametreler denklem

(ix)'da yerine yazılırsa tekrardan denklem (iii) elde edilecektir.

Sayısal değerler denklem (iii)'de yerine yazıldığında $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $l = 25 \text{ m}$, ve $\theta = 45^\circ$ ve gerekli hesaplamalar yapıldığında $v_2 = 18.6 \text{ m/s}$ olarak bulunacaktır.

Notlar

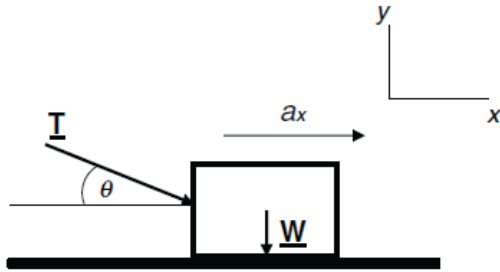
- Yer değiştirme, ivme, hız ve kuvvet ile ilgili problemlerin çözümlerinde iş-enerji metodu ve enerjinin korunumu ilkesi uygulamalarının kullanımı hareket denklemlerine göre daha kolaydır. Genel olarak hareket denklemlerine başvurulmadan önce iş-enerji ve enerjinin korunumu ilkesi metodu denenmelidir.
- Değişken olan sürtünme kuvveti ve hava direnci ihmal edildiğinde, sorunun çözümü parkurun şekline bağlı olmaz veya kayakçının üst kısımdan alt kısma mesafeyi nasıl kat ettiğinden bağımsızdır. Bu problemde kayakçının parkurdan çıkış hızını etkileyen en önemli parametre 1 ile 2 arasındaki dikey mesafedir. Bu ifade kayakçının aralarındaki mesafenin $h_1 = l \sin \theta$ olduğu 1 ve 2 arasında 'serbest düşüş' hareketi altında olduğunu ima ederek problemi basitleştirir. Bu durum Şekil 8.17'de gösterilmiştir. 1 ve 2 noktaları arasında enerjinin korunumu ilkesi uygulandığında yine denklem (iii) elde edilecektir.



Şekil 8.17 Problemin çözümü hareket güzergahından bağımsızdır.

8.13 Örnek Problemler

Problem 8.1 Şekil 8.18'de gösterildiği gibi, dışarıdan uygulanan kuvvetin T etkisi altında kaba bir yatay yüzey üzerinde hareket eden bir kütle m bloğunu düşünün. Kuvvetin hareket çizgisi yatay ile θ açısını yapar. Blok ve yüzey arasındaki sürtünme katsayısı μ ise, bloğun ivme eksenini için hareket yönünde bir ifade belirleyin.



Şekil 8.18 Problem 8.1

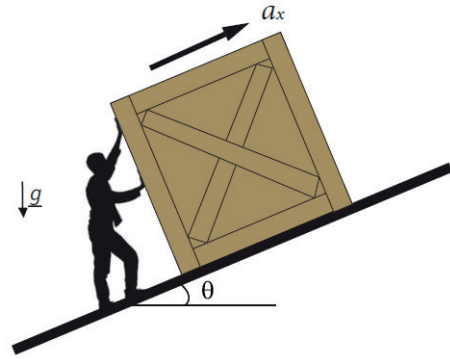
$$\text{Cevap: } a_x = \frac{T(\cos\theta + \sin\theta)}{m} - \mu g$$

Problem 8.2 Şekil 8.4'te gösterildiği gibi, bir kişi tarafından bir ip ile pürüzlü bir yatay yüzey

üzerinde çekilen 45 kg'lık bir kütle bloğunu düşünün. Halat, yatayda $\theta = 35$ açı yapmaktadır. Kişi tarafından uygulanan sabit kuvvet $T = 190$ N'nin sonucu olarak, blok uygulanan kuvvet yönünde sabit bir ivme $a = 0.86$ m/s² ile hareket etmektedir. Bloğun altının, hareket sırasında zemin yüzeyi ile tam temas halinde kaldığını varsayarak, blok ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı μ 'yu belirleyin.

$$\text{Cevap: } \mu = 0.35$$

Problem 8.3 Şekil 8.19'da gösterilen kişi sürtülmeli yüzeyde m kütleli bloğu yatayla θ açısı yapan düzlem üzerinde yukarı doğru itmektedir. Blok ile eğimli yüzey arasındaki sürtünme kuvveti μ 'dür.

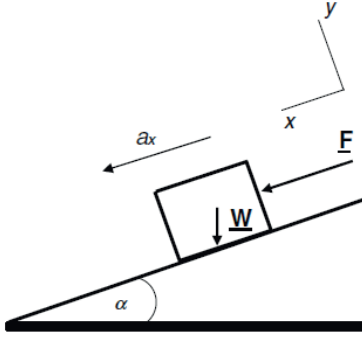


Şekil 8.19 Problem 8.3

Kişi bloğa sabit büyüklükte eğimli yüzeye paralel olarak P kuvveti uygularsa, hareket ile aynı yönde oluşacak ve aşağıda gösterilmiş olan ivmeyi bulunuz:

$$a_x = \frac{P}{m} - g(\mu \cos\theta + \sin\theta).$$

Problem 8.4 Şekil 8.20'de gösterildiği gibi, dışı doğru uygulanan F eğiminin sonucu olarak eğimden aşağı doğru hareket eden bir bloğu düşünün. Eğim, yatayda α açısı yapmaktadır. Blok ile eğim arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ ise, bloğun hareket eksenindeki ivme a_x için bir ifade belirleyin.



Şekil 8.20 Problem 8.4

Cevap: $a_x = \frac{F}{m} + g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$.

Problem 8.5 Şekil 8.7'de gösterildiği gibi, yatay bir yüzey üzerinde (1) konumundan (2) konumuna çekilen bir bloğu düşünün. Blok üzerine uygulanan kuvvetin büyüklüğü $F = 85$ N'dir ve yatay düzlem ile θ açısı yapmaktadır. Blok üzerinde yapılan iş $W = 1642$ J ise, bloğun hareket yönündeki yer değişimi S 'yi bulun. Blok ve yüzey arasındaki sürtünmenin önemsiz olduğunu varsayalım.

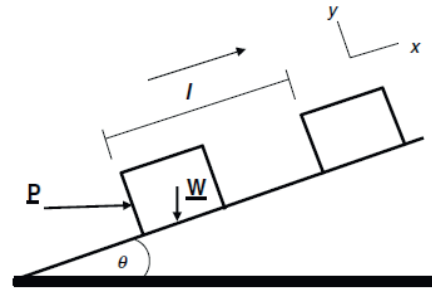
Cevap: $S = 20$ m

Problem 8.6 Şekil 8.21'de gösterildiği gibi, yataya paralel olarak uygulanan sabit bir $P = 160$ N kuvveti ile pürüzlü bir eğimden yukarı itilmiş 15 kg'lık bir bloğu düşünün. Eğim, yatay ile $\theta = 25$ açı yapmaktadır ve eğim ile blok

arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.35$ 'tir. Blok, eğim üzerinde $l = 9$ m yukarı kaydırırsa, blokta;

- (a) Dışarıdan uygulanan kuvvet W_p
- (b) Ağırlık kuvveti W_g
- (c) W_f sürtünme kuvveti ile yapılan işleri belirleyin.

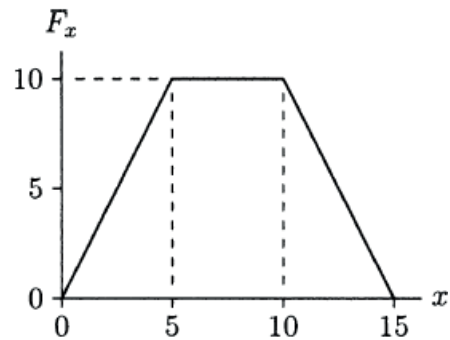
Blok üzerinde yapılan net iş W 'yi belirleyin.



Şekil 8.21 Problem 8.6

Cevaplar: (a) $W_p = 1305$ J; (b) $W_g = 559$ J; (c) $W_f = 70.3$ J; $W = 675.7$ J

Problem 8.7 x ekseninde ilerleyen bir blok üzerine farklı büyüklüklere sahip F_x kuvvetinin uygulandığını düşünelim. Farklı büyüklüklerde uygulanan F_x kuvveti Şekil 8.22'de verilmiştir. Kuvvet ve yer değiştirme büyüklüklerinin değerleri sırası ile Newton ve metredir.



Şekil 8.22 Problem 8.7

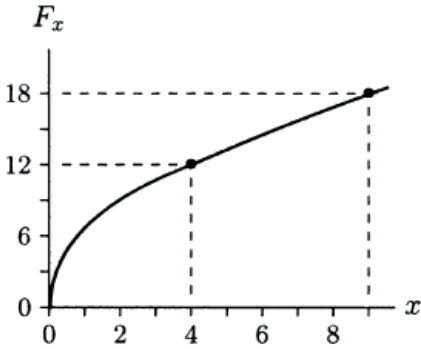
$x = 0$ dan $x = 15$ giden blok üzerine F_x tarafından yapılan işi hesaplayın.

Cevap: 100 J

Problem 8.8 Farklı büyüklükte değerlere sahip olan F_x kuvveti bir cisim üzerine uygulanıyor ve cisim x mesafe kat ediyor. Uygulanan kuvvet yer değiştirmenin bir fonksiyonu olarak çizilmiştir ve Şekil 8.23'te açık olarak gösterilmiştir. $x = 0$ 'dan $x = 9$ m arasında kuvvetin yer değiştirmenin karekökü ile orantılı olduğu gözlemlenmiştir.

$$F_x = c\sqrt{x}.$$

Burada F_x Newton cinsinden, x metre cinsinden ölçülmüştür ve F_x ile x arasında bulunan orantı sabiti $c = 6$ olarak hesaplanmıştır.



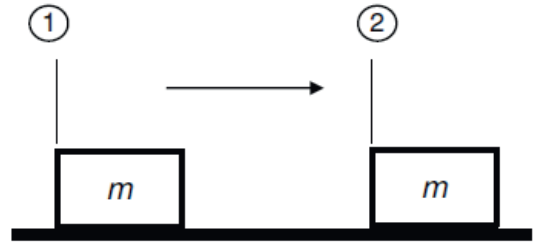
Şekil 8.23 Problem 8.8

Aşağıdaki konum değerlerinden yararlanarak F_x kuvvetinin cisim üzerinde yaptığı işi hesaplayın;

- (a) $x=0$ $x=4$ m aralığında
- (b) $x=0$ $x=9$ m aralığında
- (c) $x=4$ $x=9$ m aralığında

Cevaplar: (a) 32 J; (b) 108 J; (c) 76 J

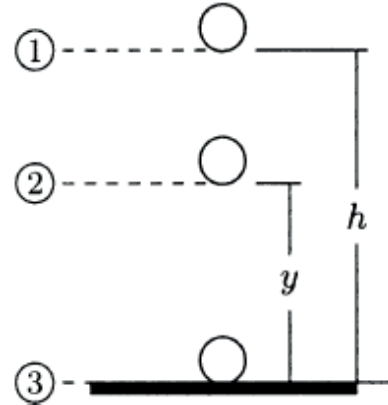
Problem 8.9 Şekil 8.24'te gösterildiği gibi, başlangıçta (1) konumunda duran 30 kg'lık bir bloğu düşünün. Zaman içinde nesne (1) konumundan (2) konumuna hareket etmiştir. (2) konumundaki nesnenin hızının $V_2 = 1,5$ m/s olduğu tahmin edilmektedir. Blok ve zemin arasındaki sürtünmeyi ihmal ederek, hareketi tamamlamak için blokta üzerinde yapılan iş W_{12} belirleyin.



Şekil 8.24 Problem 8.9

Cevap: $W_{12} = 33.8$ J

Problem 8.10 Şekil 8.25'te gösterildiği gibi, bir top h yüksekliğinden serbest bırakılıyor.



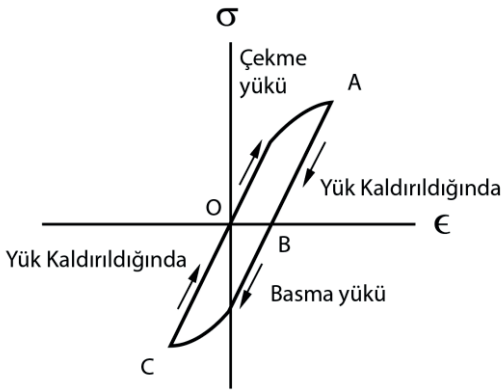
Şekil 8.25 Problem 8.10

Hava direnci ihmal edilirse, zemin seviyesinden y yüksekliğinde topun hızının aşağıdaki gibi çıktığını bulunuz;

$$v = \sqrt{2g(h - y)}.$$

Burada g yer çekimi ivmesinin büyüklüğüdür.

Problem 8.11 Şekil 8.26'da (1) konumunda bulunan ve yer seviyesindeki (3) noktasına kıyasla h yüksekliğinde yer alan 12 kg'lık bir nesneyi ele alın. Nesnenin (1) konumundaki yerçekimi potansiyel enerjisi $EP_1 = 588$ J ise, aşağıdakileri belirleyin;



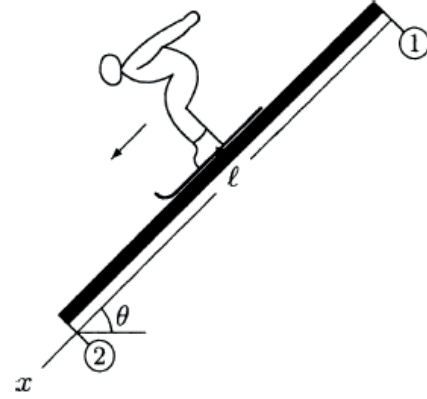
Şekil 8.26 Problem 8.11

- (1) ve (3) pozisyonları arasındaki dikey mesafe h .
- (1) ve (3) arasındaki konumların ortasında bulunan (2) konumunda nesnenin potansiyel enerjisi (EP_2).

Cevaplar: (a) $h = 5$ m; (b) $EP_2 = 147$ J

Problem 8.12 Şekil 8.27'de gösterildiği gibi başarılı bir atlayış yapmak için parkuru kullanarak gerekli hızı sağlamaya çalışan bir

kayakçı verilmiştir. Parkur uzunluğu l , parkurun yatay ile yaptığı açı θ ve parkur ile kayaklar arasındaki sürtünme kuvveti μ 'dür.



Şekil 8.27 Problem 8.12

Kayakçının başlangıç noktasındaki hızı sıfır olduğuna göre aşağıdakileri hesaplayın:

- Kayakçının parkurdan kalkış (uçuş) hızını iş-enerji metodunu kullanarak
- Kayakçının ivmesini hareket denklemlerini kullanarak

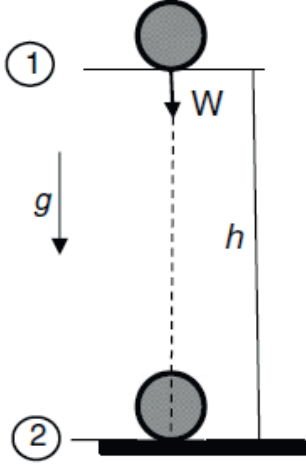
Hava direncini ihmal edin.

Cevaplar: (a) $v_2 = \sqrt{2lg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$; (b) $a_x = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

Problem 8.13 Şekil 8.28'de gösterildiği gibi, başlangıçta yerden h yüksekliğinde, (1) konumunda tutulan 9 kg'lık bir nesneyi düşünün. Nesne sabit yerçekimi ivmesi $g = 9.8$ m/s² ile düşüyor ve $t_2 = 2.5$ s sonra zemine (2) isabet ediyor. Hava direnci önemsiz ise:

- Nesnenin (2) konumundaki V_2 hızı.
- Konum (1) ve (2) arasındaki dikey mesafe h .

- (c) Nesnenin (1) konumundaki potansiyel enerji EP_1 'i.
 (d) Nesnenin (2) konumundaki kinetik enerjisi EK_2 .



Şekil 8.28 Problem 8.13 ve 8.14

Cevaplar: (a) $V_2 = 24.5$ m/s; (b) $h = 30.6$ m;
 (c) $EP_1 = 2701$ J; (d) $EK_2 = 2701$ J

Problem 8.14 Şekil 8.28'deki aynı nesne, yerden yüksekliği $h_1 = 6$ m yüksekliğinden düşürülüyor. Hava direnci ihmal edilebilir olduğundan, mekanik enerjinin korunumu ilkesini kullanarak nesnenin çarpma noktasındaki V_2 hızını hesaplayın.

Cevap: $V_2 = 10.8$ m/s

Bölüm 9

AÇISAL KİNEMATİK

Çeviren: Sırma Kul

9.1 Kutupsal Koordinatlar

9.2 Açısal Konum ve Yer Değiştirme

9.3 Açısal Hız

9.4 Açısal İvme

9.5 Büyüklük ve Birimler

9.6 Temel Konseptlerin Tanımları

9.7 Sabit bir Eksen Etrafında Rotasyon Hareketi

9.8 Çizgisel ve Açısal Büyüklükler Arasındaki İlişki

9.9 Düzgün Dairesel Hareket

9.10 Sabit İvmeli Dairesel Hareket

9.11 Bağlı Hareket

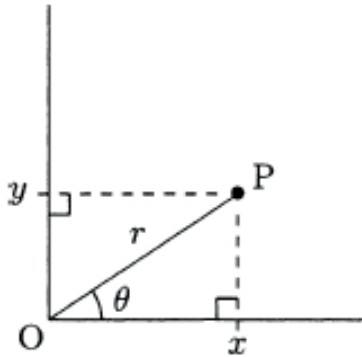
9.12 Bağlantı Sistemleri

9.13 Örnek Problemler

9.1 Kutupsal Koordinatlar

İki boyutlu açısal harekette yaygın olarak *kutupsal koordinatlar*; r ve θ (teta) olmak üzere bir çift parametre ile tanımlanır. Özellikle dairesel hareketlerin analizini yapmak için kutupsal koordinatlar uygun olacaktır. Şekil 9.1'de gösterildiği gibi iki boyutlu bir düzlemde O ve P gibi iki nokta belirleyelim. P'nin O'ya göre olan konumu birçok şekilde belirlenebilir. Örneğin dikdörtgen koordinatlar açısından P; x ve y koordinatlarına sahip bir noktadır. Ayrıca P noktası O noktasından r uzaklığına sahiptir ve y eksenini ile θ açısı yapmaktadır. Hem x, y noktaları hem de r uzunluk ve θ açısı P'nin O'ya göre konumu belirtir ve O noktası her iki durumda da dikdörtgen ve kutupsal koordinatlar sisteminin merkezidir. Bu koordinat çiftlerinin birbirlerinden bağımsız olmadıkları unutulmamalıdır. Eğer bu çiftlerden birisi biliniyor ise diğer çift de bulunabilir çünkü bu iki çift de dik üçgen ile bağlantılıdır; r uzunluğu hipotenüstür ve θ açısı ile bu uzunluğun dikdörtgen koordinatlar üzerinde bulunan x ve y bileşenleri bulunabilir. Bu nedenle;

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (9.1)$$



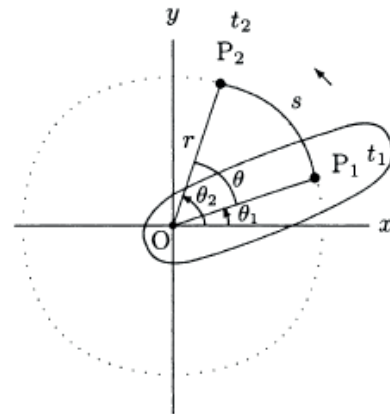
Şekil 9.1 P noktasının dikdörtgen ve kutupsal koordinatları

r ve θ 'yi x ve y cinsinden ifade edilirse;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (9.2)$$

9.2 Açısal Konum ve Yer Değiştirme

x y düzleminde sabit bir eksen etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir cisim düşünelim. O'nun dönüş eksenini boyunca x y düzleminde sabit bir nokta ve P'nin O'dan r uzaklıkta sabit bir mesafede kaldığını varsayalım (Şekil 9.2). P noktası, merkezi O olan ve yarıçapı r olacak şekilde dairesel olarak hareket eder. t_1 zamanında cismin P_1 noktasında olduğunu ve OP_1 uzunluğunun yatay ile θ_1 açısı yaptığını varsayalım. Daha sonra t_2 zamanında cismin P_2 noktasında olduğu ve OP_2 'nin yatay ile yaptığı açının θ_2 olduğu varsayılır. θ_1 ve θ_2 açıları sırasıyla cisimlerin t_1 ve t_2 zamanlarındaki *açısal konumlarını* gösterir. Eğer ki θ ; t_1 ve t_2 zaman aralığındaki cismin açısal konumundaki değişimi gösteriyor ise; $\theta = \theta_2 - \theta_1$ cismin aynı zaman aralığında *açısal yer değiştirmesi* olarak belirtilebilir.



Şekil 9.2 t_1 ve t_2 zamanları arasındaki açısal yer değişim $\theta = \theta_2 - \theta_1$ 'dir.

Aynı zaman aralığında, nokta dairesel yol boyunca ölçülen s mesafesini kat edecektir. Yarıçapı r , yatay ile açısı θ ve yay uzunluğu s olan hareket için denklem aşağıdaki gibidir;

$$s = r\theta \quad \text{or} \quad \theta = \frac{s}{r}. \quad (9.3)$$

Denklem (9.3)'te verilen θ açısı radyan cinsinden ölçülmelidir. Ek C'de verildiği gibi radyan ve derece arasındaki ilişki; 360° 'ye sahip olan tam bir çemberin yay uzunluğu cinsinden karşılığı π yaklaşık 3,14 kabulü ile $s = 2 \pi r$ olacaktır. Bu nedenle tam bir çember için $\theta = s/r = 2 \pi r / r = 2 \pi$ veya $\theta = 2 \pi$ olmalıdır. Bir radyan $360/2 \pi = 57,3$ derece olacaktır. Aşağıda verilen formül, radyan cinsinden verilen değerleri dereceye çevirmek için kullanılır:

$$\theta(\text{radyan}) = \frac{\pi}{180} \theta(\text{derece}).$$

Verilen açıların radyan cinsinden karşılıkları Tablo 9.1 de verilmiştir.

Tablo 9.1 Derece ve radyan cinsinden seçilmiş açılar

Derece ($^\circ$)	Radyan (rad)
30	$\pi/6 = 0.524$
45	$\pi/4 = 0.785$
60	$\pi/3 = 1.047$
90	$\pi/2 = 1.571$
180	$\Pi = 3.142$
270	$3\pi/2 = 4.712$
360	$2\pi = 6.283$

9.3 Açısal Hız

Açısal konumdaki değişimin zamana oranlanması ile *açısal hız* elde edilir ve yaygın olarak ω (omega) simgesi ile gösterilir. Eğer açısal konumun zamana göre denklemi biliniyor ise, bu denklemin zamana göre türevi alınarak açısal hız bulunabilir:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta \quad (9.4)$$

Nesnenin açısal hızı, açısal pozisyonunun ilk türevidir. Bir nesnenin t_1 ve t_2 arasındaki zaman aralığında *ortalama açısal hızı* ($\bar{\omega}$), zaman aralığına bölünen nesnenin açısal pozisyonundaki değişimin oranı ile tanımlanır:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}. \quad (9.5)$$

Denklem 9.5'de, θ_1 ve θ_2 sırasıyla t_1 ve t_2 anlarındaki cismin konumlarıdır.

9.4 Açısal İvme

Bir cismin açısal hızı hareket esnasında değişebilir. Açısal hızdaki değişimin zamana oranlanması ile *açısal ivme* elde edilir, genellikle gösteriminde α (alfa) kullanılır. Eğer cismin zamana bağlı hız denklemi verilmiş ise, hız denkleminin zamana göre türevi alınarak açısal ivme bulunabilir.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (9.6)$$

Ortalama açısal ivme değeri açısal hızdaki değişim oranının bu değişikliğin meydana geldiği zaman aralığına bölünmesi ile elde edilir. t_1 ve t_2 zaman aralığında ölçülmüş olan ω_1 ve ω_2 hızlarının bu t_1 ve t_2 zaman aralığındaki ortalama açısal ivmesi:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \quad (9.7)$$

Denklem (9.4)'te bulunan açısal hız denklemi kullanılarak, açısal ivme aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}. \quad (9.8)$$

Ayrıca (9.4) ve (9.6) da verilen denklemlerde bulunan θ , ω ve α açısal büyüklükler kinematik denklemler ile ilgilidirler.

Açısal yer değiştirme, açısal hız ve açısal ivme ifadeleri vektörel büyüklüklerdir. Bu nedenle yönleri ve büyüklükleri belirtilmelidir. İki boyutlu problemler için, hareket saat yönünde veya saat yönünün tersine olabilir. Açısal yer değiştirme ve açısal hız hareket yönündedir ve pozitifdir. Açısal ivme, açısal hız zamanla arttığında pozitif, zamanla azaldığında ise negatiftir.

9.5 Büyüklük ve Birimler

Denklem (9.3) göz önüne alındığında, açısal yer değiştirmesi θ olan bir cisim dairesel hareket altında yay uzunluğu s ile dairesel

yolun yarıçapı olan r 'nin oranına eşittir. Her iki değer de boyutlar uzunluktur. Bu nedenle açısal yer değiştirmenin boyu l veya *boyutsuzdur*:

$$[\text{AÇISAL YERDEĞİŞTİRME}] = \frac{L}{L} = 1.$$

Tanım olarak açısal hız, açısal konumun zamanla değişim oranını ve açısal ivme açısal hızın zamanla değişim oranını ifade eder. Bu nedenle açısal hız 1 in zamana bölümüne ve açısal ivme de açısal hızın zamana bölümü ya da 1'in zamanın karesine bölümüdür.

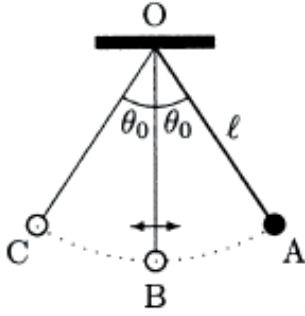
Açısal büyüklüklerin θ , ω ve α 'nın lineer karşılıkları olan x , v ve a 'dan boyut olarak farklı oldukları unutulmamalıdır.

Farklı açısal büyüklükteki birimler farklı birim sisteminde gösterilseler de da aynıdırlar. Açısal yer değiştirme radyan (rad) olarak ölçülür, açısal hız radyan bölü saniye (rad/s) veya s^{-1} ve açısal ivme radyan bölü saniye kare (rad/s²) ya da s^{-2} dir.

9.6 Temel Konseptlerin Tanımları

Açısal harekette yaygın olan kavramları tanımlayabilmek için Şekil 9.3'de verilen sarkacı ele alalım. Sarkaç bir ipin ucuna bağlı kütleden meydana gelir. İpin bir ucu tavana sabitlenir ve diğer ucu sabittir. İpin uzunluğunu l olarak kabul edelim ve ipin o noktasından da tavana bağlı olduğunu varsayalım. Eğer kütle basitçe serbest bırakılırsa, ip gerilir ve *nötr*

veya *denge* konumu olan B noktasında durur. Eğer kütle yatay ile θ açısı yapacak şekilde A noktasına getirilir ve ardından serbest bırakılırsa, kütle salınım yapacak ya da yarıçapı l dairesel bir yay yolunda nötr pozisyonu etrafında ileri geri sallanacaktır.

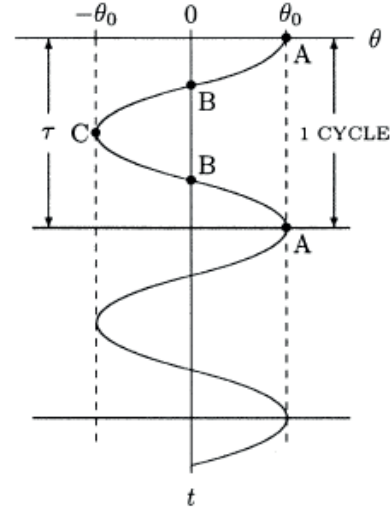


Şekil 9.3 Sarkaç

Daha sonrasında iç sürtünme ve hava direnci sebebi ile sarkacın salınım hareketi zamanla yok olacaktır ve sarkaç denge konumuna ulaşacaktır. Nispeten basit olan bu sistemin hareket analizleri bize daha karmaşık olan diğer dinamik sistemlerin doğası hakkında bilgi verebilir.

Sistemi daha basit hale getirebilmek için hava direnci ve sürtünmelerin etkisini ihmal ederek sarkacın sonsuza kadar salınım yapacağı varsayımında bulunuyoruz. Ayrıca sarkacın arkasında belirli bir şekilde hareket eden rulo kâğıt olduğunu varsayınız. (Örneğin, her saniyede 10 mm'lik bir kağıdın yukarı doğru sarılması.). Ayrıca kütle üzerinde konumunu belirleyen bir boya bulunmaktadır. Başka bir deyişle Şekil 9.4'te gösterildiği gibi kütle ileri geri doğru sallanırken, kütledeki konumunu

arkasında bulunan ve hareket eden rulo üzerine çizer. Şekil 9.4'te θ açısı sarkacın dikey ile yaptığı açığı ve t zamanı gösterir. θ açısı sarkacın anlık konumunun bir ölçüsüdür.



Şekil 9.4 Basit harmonik hareket

Şekil 9.4'te gösterilen hareket genel adıyla basit harmonik hareket olarak bilinir. $t = 0$ kütlede ilk serbest bırakıldığı anı temsil eder ve kütle dikey ile θ_0 açısı yapacak şekilde bırakılır. Kütlede salınımı esnasında B noktasının üzerinden geçerken $\theta = 0$ dır ve C noktasına ulaştığında $\theta = -\theta_0$ değerine ulaşır. Burada, θ açısının A ile B arasında pozitif, B noktasında sıfır ve B ile C arasında ise negatif olduğu kabul edilir. C'de kütle anlık olarak durur ve sonra hareketi saat yönünden saat yönünün tersine çevirir. Daha sonrasında B'den tekrar geçer ve hareket başladığı A noktasına ulaşır, böylelikle τ (tau) zaman aralığında bir tam turunu tamamlamış olur, buna harmonik hareket *periyodu* denir. A ve C arasında sarkacın taradığı bütün açığı *hareket açıklığı* denir ve bu durumda açı $2\theta_0$ 'a

eşittir. Ayrıca sarkacın tüm hareketi $+\theta$ ve $-\theta$ değerleri arasındadır, bu değerler hareket açıklığının limit değerleridir. Hareket açıklığının yarısı salınım *genliği* olarak adlandırılır ve burada ölçülen salınım genliği θ_0 'a eşittir. Bu durumda harmonik hareketin hem periyodu hem de genliğinin sabit olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca hava direnci ve sürtünme kuvvetlerinin etkileri ihmal edildiği için A, B, C, B ve A arasında gerçekleşen olay örgüsü τ zaman aralıklarında sonsuza kadar tekrarlanır.

Şekil 9.4'ten açısal konum θ 'nın zamanın (t) bir fonksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca θ 'nın zaman döngüsü içinde kendini tekrar etmesi bize trigonometrik fonksiyonları anımsatır. Ek-C kısmında belirtildiği gibi, Şekil 9.4'de gösterilen θ 'ya karşı t grafiği fonksiyonları oluşturmak için bilinen fonksiyonların θ ve t ile ilişkilendirilen grafikleri ile karşılaştırılabilir. Bu durum şu şekilde gösterilebilir;

$$\theta = \theta_0 \cos(\varphi t)$$

Bu denklemde θ_0 parametresi harmonik hareket genliğinin kosinüsü ile çarpılır ve φ (fi) *açısal frekans* olarak adlandırılır birimi de radyan bölü saniyedir (rad/s). Periyot ve açısal frekans arasındaki ilişki;

$$\varphi = \frac{2\pi}{\tau} \quad (\pi = 3.1416)$$

Salınım hareketi için, periyodun tersine *frekans*, f , denir ve Hertz (Hz) olarak ölçülür.

Frekans saniyede meydana gelen toplam çevrim sayısını temsil eder;

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

Burada ele alınan basit harmonik hareket için incelenen parametreler (hareket açıklığı, genlik, periyot ve frekans) sabittir. Ayrıca açısal konum ve zamana ilişkin fonksiyonun geçerliliğini t 'ye değer vererek θ 'yı hesaplayarak kanıtlanabilir. Örneğin A noktası için: $t=0$, $\varphi t=0$, $\cos(0) = 1$ ve $\theta = \theta_0$. B noktası için: $t = \varphi/4$, $\varphi t = \pi/2 = 90$, $\cos(90) = 0$ ve $\theta = 0$. C noktası için $t = \varphi/2$, $\varphi t = \pi = 180$, $\cos(180) = -1$ ve $\theta = -\theta_0$. Bu verilerin hepsi Şekil 9.4'ü sağlamaktadır.

Artık, sarkaç ile ilgili önemli parametreleri tanımladığımıza göre açısal hızı ve açısal ivmeyi de bulabiliriz. Denklem (9.4) ve (9.6) kullanılırsa;

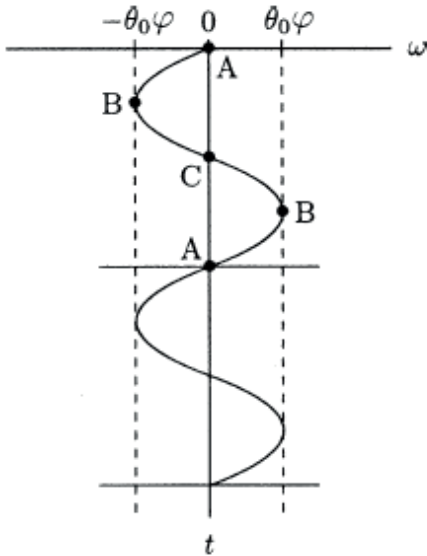
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \varphi \sin(\varphi t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\theta_0 \varphi^2 \cos(\varphi t)$$

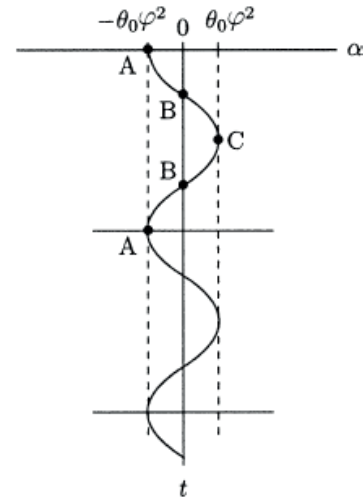
Açısal hız ve açısal ivmelenme ile ilgili fonksiyonları zamanla türettiğimizde, t 'ye farklı değerler vererek ve ω ve α 'nın karşılık gelen değerlerini hesaplayarak herhangi bir zamanda hem açısal hızı hem de açısal ivmeyi belirleyebiliriz.

Örneğin, A noktasında ω 'yi göz önüne alırsak: $t = 0$, $\varphi t = 0$, $\sin(0) = 0$, and $\omega = 0$. B noktasında:

$t = \tau/4$, $\varphi t = \pi/2 = 90^\circ$, $\sin(90^\circ) = 1$, ve $\omega = -\theta_0\varphi$.
 C noktasında: $t = \tau/2$, $\varphi t = \pi = 180^\circ$, $\sin(180^\circ) = 0$, ve $\omega = 0$. Sarkacın C noktasından A noktasına sallanmasıyla, B noktasında: $t = 3\tau/4$, $\varphi t = 3\pi/2 = 270^\circ$, $\sin(270^\circ) = -1$, ve $\omega = \theta_0\varphi$. A noktasında: $t = \tau$, $\varphi t = 2\pi = 360^\circ$, $\sin(360^\circ) = 0$, ve $\omega = 0$. Bunun yanında α açısından bakacak olursak, A noktasında: $t = 0$, $\varphi t = 0$, $\cos(0) = 1$, and $\alpha = -\theta_0\varphi^2$. B noktasında: $t = \tau/4$, $\varphi t = \pi/2 = 90^\circ$, $\cos(90^\circ) = 0$, ve $\alpha = 0$. C noktasında: $t = \tau/2$, $\varphi t = \pi = 180^\circ$, $\cos(180^\circ) = -1$, ve $\alpha = \theta_0\varphi^2$. Sarkacın C noktasından A noktasına salınmasıyla, B noktasında: $t = 3\tau/4$, $\varphi t = 3\pi/2 = 270^\circ$, $\cos(270^\circ) = 0$, ve $\alpha = 0$. A noktasında: $t = \tau$, $\varphi t = 2\pi = 360^\circ$, $\cos(360^\circ) = 1$, ve $\alpha = -\theta_0\varphi^2$.



Şekil 9.5 Açısal hız ω – Zaman t



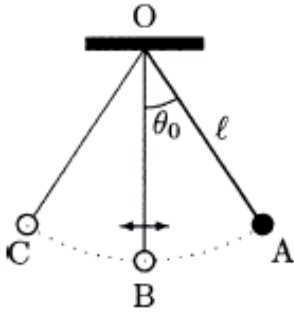
Şekil 9.6 Açısal ivme α – Zaman t

Bu fonksiyonlar Şekil 9.5'te ve 9.6'da çizilmiştir. Sarkacın açısal hızının genliği $\theta_0\varphi$ ve açısal ivmenin genliği $\theta_0\varphi^2$ dir. Bunlar sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıyla çarpılan değerlerdir. A noktasında açısal hız sıfırdır. A ve B arasında kütle ivmelenmekte ve açısal hız büyüklüğü saat yönünde artmaktadır. B noktasında açısal hız değeri $\theta_0\varphi$ maksimuma ulaşır. B ve C arasında açısal hız negatif, açısal ivme pozitiftir. Bu nedenle B ve C arasında açısal hız azalmaktadır (açısal hız saat yönünde azalır). Açısal hız, C noktasında sıfıra düşer. Bu esnada açısal ivmenin büyüklüğü en büyük değeri olan $\theta_0\varphi^2$ ulaşır. C ve B arasında kütle ivmesi saat yönünün tersinedir, B noktasına geri döndüğünde açısal hız maksimum olur, B ve A arasında yavaşlar ve A noktasında anlık sıfır olur. Bu olay döngüsü zaman içerisinde defalarca tekrarlanır.

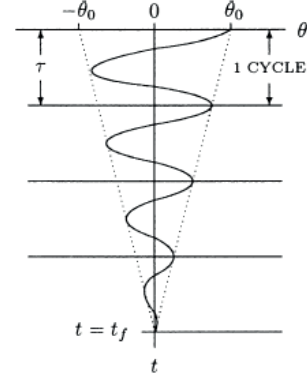
Sonrasında Şekil 9.7'deki gibi kütle tekrar A noktasına çekildiğini ve dikey ile θ_0 açısı

oluşturduğunu düşünün. Kütle, yarıçapı l olan dairesel yolda nötr konumunda salınım yapar. İç sürtünme ve hava direnci nedeniyle salınımlar zamanla kaybolur ve sonunda sarkaç B’de nötr konumunda durur. Bu tür salınım hareketine *sönümlü salınım* denir. Sönümlü salınım hareketini anlamak için Şekil 9.8 de açısal konum θ 'ya karşı zaman t grafiğini göz önünde bulundurun. Sarkaç durmadan önce t_f saniyeye kadar dört tam devrini tamamlar. Her periyod eşittir ancak harmonik salınım genliği doğrusal olarak t_f zamanına kadar sıfırlanır. Yani sabit periyoda olan ancak değişken genlikte bir harekete sahiptir. Hesaplanmış olan θ_0 , τ ve t_f bu değerler için Şekil 9.8 gösterilen θ 'ya karşı zaman grafiği şu şekilde temsil edilebilir:

$$\theta = \theta_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \cos(\varphi t)$$



Şekil 9.7 Hava direncine maruz kalan sarkaç



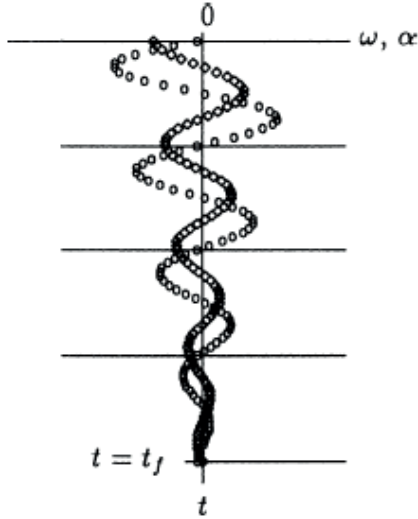
Şekil 9.8 Sönümlü salınım

Burada, yine φ harmonik salınımın açısal frekansıdır ve $2\pi/\tau$ 'ya eşittir. Bu durumda farklı olan $\theta = \theta_0(1 - t/t_f)$ ve $\theta = -\theta_0(1 - t/t_f)$ fonksiyonları ile temsil edilen sarkacın harmonik salınımlarının birbirine yaklaşan iki düz çizgi arasında sınırlanmıştır ve sarkacın salınımı sürtünme ve hava direnci ile sönümlenmiştir. Sarkacın açısal konumunun zamana bağlı fonksiyonunu bilmek, sarkacın açısal hız ve ivmesini belirlememizi sağlar. Denklem (9.4) ve (9.6)'yı kullanarak zincir kuralı uygulandığında (Ek-C):

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta_0}{t_f} \cos(\varphi t) - \theta_0 \varphi \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \sin(\varphi t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\theta_0 \varphi}{t_f} \sin(\varphi t) - \theta_0 \varphi^2 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \cos(\varphi t)$$

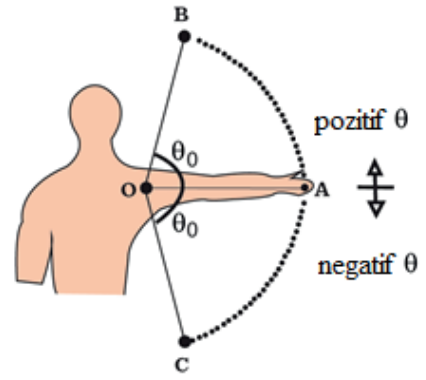
Bu fonksiyonlar oldukça karmaşıktır. t ve τ için basitçe bir değer vererek, bunlara karşılık gelen ω ve α hesaplanır ve Şekil 9.9' da görüldüğü gibi çizdirilir.



Şekil 9.9 Zamana karşı açısal hız ω (daireler) ve açısal ivme α (karolar)

Örnek 9.1 Omuz abduksiyonu

Şekil 9.10'da ön düzlemde omuz abduksiyonu yapan bir kişi gösterilmiştir. O, ön düzlemde omuz ekleminin dönme eksenini temsil eder, OA çizgisi kolun zemine paralel olarak uzatıldığını gösterir (yatay), OB çizgisi kol kaldırıldığında ulaştığı konumu gösterir ve son olarak OC çizgisi kolun vücuda en yakın olduğu zamanki pozisyonu gösterir. Diğer bir deyişle bu aktivitede OB ve OC kolun hareket alanını temsil eder. OA ve OB arasındaki açı ile OA ve OC arasındaki açılar eşit olduğunu kabul edelim ve bu açıları θ_0 ile temsil edelim.



Şekil 9.10 Omuz abduksiyonu

Kolun hareketleri OA çizgisine göre simetriktir. Ayrıca kolun OA-OB, OB-OA, OA-OC ve OC-OA aralarındaki açıları kat etmesi için geçen süreleri eşit kabul edelim.

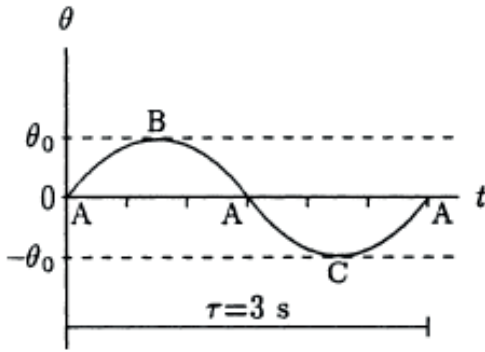
Kolun açısal yer değiştirme, hızı ve ivmesini bulabilmek için denklemler türetin. Kolun açısal periyodunu 3 sn ve θ_0 açısını 80° alın.

Çözüm

Bu örnekte kol hareketi ile daha önceden tartışılan sarkacın basit harmonik arasındaki benzerliklere dikkat edin. Bu durumda θ_0 açısı, kol OA etrafında harmonik hareket geçirirken, kolun açısal yer değiştirmesinin genliğini temsil eder. Kolun hareket alanı θ_0 açısının iki katıdır. Açısal hareketin periyodu 3 sn olarak verilmiştir ve kolun OA etrafındaki salınımının açısal frekansı $\varphi = 2\pi/\tau = 2.09$ rad/sn olarak hesaplanabilir. Eğer θ 'yı OA çizgisi etrafında ölçülen pozisyonda kolun yer değiştirmesi olarak düşünersek, θ zamanın sinüs fonksiyonu olarak yazılabilir;

$$\theta = \theta_0 \sin(\varphi t) \quad (i)$$

Denklem (i) verilen kolun açısal yer değiştirmesinin zamana bağlı olarak grafiği Şekil 9.11 de çizilmiştir. Kol, A pozisyonunda iken θ değeri sıfırdır. A ve B arasında θ değeri pozitif, A ve C arasında ise negatif kabul edilmiştir. θ , B ve C noktalarında maksimum değere sahiptir ve θ_0 , kolun açısal yer değiştirmesinin genliğidir.



Şekil 9.11 $\varphi = 2\pi/\tau$ iken $\theta = \theta_0 \sin(\varphi t)$ grafiği

Verilenlerin hepsi soruda verilen bilgileri sağladığı için, denklem (i) kolun yer değiştirmesini temsil eder.

Kolun açısal hızı ve ivmesini türetirsek, denklem (i)'de verilen fonksiyonun zamana göre türevini göz önünde bulundurmamız gereklidir. Açısal yer değiştirmedeki değişimin zamana oranı açısal hızı verir;

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \varphi \cos(\varphi t) \quad (ii)$$

Açısal hızdaki değişimin zamana oranı açısal ivmeyi verir;

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\theta_0 \varphi^2 \sin(\varphi t) \quad (iii)$$

Denklem (ii) ve (iii) şu şekilde de yazılabilir;

$$\omega = \omega_0 \cos(\varphi t) \quad (iv)$$

$$\alpha = -\alpha_0 \sin(\varphi t) \quad (v)$$

Burada, ω_0 , açısal hızın genliği; α_0 , açısal ivmenin genliğidir, yani;

$$\omega_0 = \theta_0 \varphi = \theta_0 \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\alpha_0 = \theta_0 \varphi^2 = \theta_0 \frac{4\pi^2}{\tau^2}$$

Açısal hızın genliğinin açısal frekansın doğrusal bir fonksiyonu olduğunu ve açısal ivme genliğinin açısal frekansın ikinci dereceden bir fonksiyonu olduğunu unutmayın. Açısal frekans ise harmonik salınım hareketiyle ter orantılıdır. Dolayısıyla düşük periyot yüksek frekansı ve yüksek açısal hız ile yüksek ivme genliklerini belirtir.

Sayısal değerleri yerine yazarsak $\theta_0 = 80^\circ = 1.40$ rad ve $\varphi = 2.09$ rad/s ve hesaplamalar yapılırsa $\omega_0 = 2.93$ rad/s ve $\alpha_0 = 6.12$ rad/s²'dir. Denklem (i), (iv) ve (v) şu şekilde ifade edilebilir;

$$\theta = 1.40 \sin(2.09t) \quad (vi)$$

$$\omega = 2.93 \cos(2.09t) \quad (vii)$$

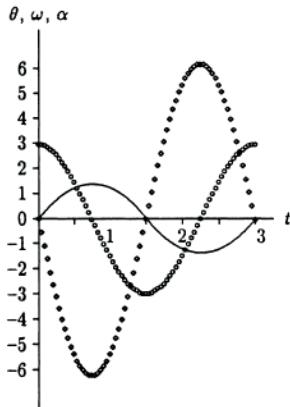
$$\alpha = -6.12 \sin(2.09t) \quad (viii)$$

Denklem(vi) ve (viii) arası denklemler herhangi bir t zamanında kolun; açısal konum, hız ve ivmesinin hesaplanması için kullanılır. Bu denklemler Tablo 9.2'de verildiği gibi θ , ω ve α değer vererek θ , ω ve α 'ya karşı t grafiğinin

çizimi için de kullanılabilir. Verilere bağlı olarak Şekil 9.12'de örnek çizim görülmektedir.

Tablo 9.2 θ , ω ve α 'nın değerleri

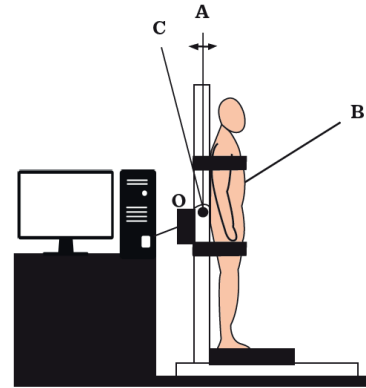
T	φt (RAD)	φt (DERECE)	SIN	COS	θ	ω	α
0	0,000	0	0,000	1,000	0,0	2,930	0,00
0.25	0,523	30	0,500	0,866	0,7	2,540	-3,06
0.5	1,045	60	0,866	0,500	1,2	1,465	-5,30
0.75	1,570	90	1,000	0,000	1,4	0,000	-6,12
1.0	2,090	120	0,866	-0,500	1,2	-1,465	-5,30
1.25	2,600	150	0,500	-0,866	0,7	-2,540	-3,06
1.5	3,140	180	0,000	-1,000	0,0	-2,930	0,00
1.75	3,660	210	-0,500	-0,866	-0,7	-2,540	3,06
2.0	4,180	240	-0,866	-0,500	-1,2	-1,465	5,30
2.25	4,700	270	-1,000	0,000	-1,4	0,000	6,12
2.5	5,230	300	-0,866	0,500	-1,2	1,465	5,30
2.75	5,750	330	-0,500	0,866	-0,7	2,540	3,06
3.0	6,270	360	0,000	1,000	0,0	2,930	0,00



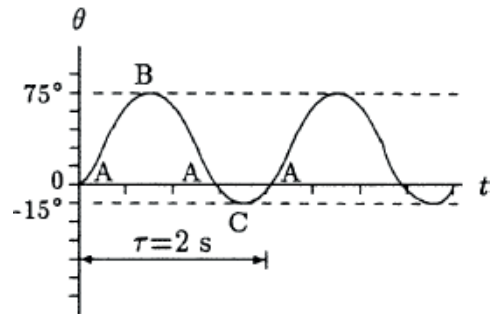
Şekil 9.12 Zamana bağlı olarak açısal pozisyon, hız (daireler) ve ivme (karolar). (θ (rad), ω (rad/s), α (rad/s²) ve t (s))

Örnek 9.2 Fleksiyon-ekstansiyon testi (Şekil 9.13) gövdenin açısal yer değiştirmesini, açısal hızını ve tork çıktısını ölçmek için bilgisayar kontrollü bir dinamometreyi göstermektedir. Sagittal düzlemdeki (göğüs kafesinden geçen ve vücudu sağ ve sola bölen düzlem) tekrarlayan bir fleksiyon-ekstansiyon testi için kişi

dinamometreye kişinin bel omurları (L5/S1) makinenin fleksiyon-ekstansiyon eksenini (O olarak gösterilen) ile hizalanacak şekilde makineye yerleştirilir. Kişi mümkün olduğu kadar güç sarf ederek yapabildiği kadar uzun süre fleksiyon ve ekstansiyon hareketi yaptırılır. Gövdenin dik konumuna göre açısal konum değerleri ölçülüp ve kaydedildikten sonra toplanan veriler açısal yer değiştirmeye (θ) karşı zaman (t) grafiği olarak çizilir. Elde edilen grafiklerin ilk ve son birkaçı hariç, nicel ve nitelik bakımından benzer oldukları gözlemlenmiştir. Şekil 9.14'te birkaç örnek çevrim sağlanmıştır, ki burada derece cinsinden ölçülen gövdenin açısal yer değiştirmesi, saniye cinsinden ölçülen zamanın bir fonksiyonu olarak çizilir.



Şekil 9.13 Dinamometre



Şekil 9.14 Açısal konumun zamanla değişimi (θ derece, t saniye)

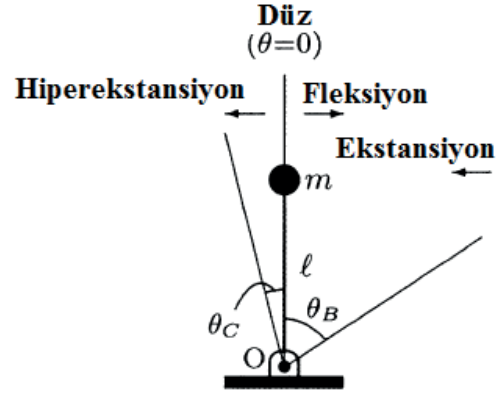
Açısal konum ölçümleri, gövdenin açısal yer değiştirmesinin sıfır olduğu dik pozisyona göre yapılmıştır. Kişi A ve B arasında fleksiyon yapmaktadır ve B noktasında maksimum fleksiyondadır. Ekstansiyon ise gövdenin B'den A'ya hareketi ile olur. Gövdenin A ve B arasında açısal yer değiştirmesi pozitifdir. A ve C arasında gövde hiperekstansiyona uğrar ve C noktasındaki ekstansiyon maksimumdur. Bu aralıkta gövdenin yer değiştirmesi negatif yöndedir.

Bu örneğin amacı deneysel olarak toplanan verileri analiz etme yöntemini gösterir. Burada istenen, kişinin gövdesinin açısal yer değiştirmesinin zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edebilen bir denklem bulmaktır, bulunan denklem yardımı ile de gövdenin açısal hızı ve ivmesi için denklemler çıkarabiliriz.

Çözüm

Üst gövde ile *ters sarkaç* olarak adlandırılan bir mekanik sistem arasında bir analogi oluşturursak sorunu görselleştirmek daha kolay olacaktır (Şekil 9.15). Ters çevrilmiş sarkaç, uzunluğu l olan çok hafif bir çubuğun etrafında dönmesine izin verilen bir eksen vasıtası ile yere sabitlenmiş bir kütleden oluşur. Bu durumda yoğunlaştırılmış kütle, üst gövdenin toplam kütesine karşılık gelmektedir. Beşinci omur ile sakrum arasındaki disk, burada menteşe görevi görür ve sagittal düzlemde üst vücut rotasyonu meydana gelir. l uzunluğu

burada beşinci bel omurgasından üst gövdenin ağırlık merkezine kadar olan uzaklıktır.



Şekil 9.15 Ters sarkaç

Şekil 9.14'ten açık olarak anlaşılacağı gibi θ harmonik zamana bağlı (sinüs veya kosinüs) fonksiyonudur. Gövdenin dik konumuna göre fleksiyon ve ekstansiyon yaptığı sırada sahip olduğu maksimum açıları ve harmonik hareketin periyodunu Şekil 9.14'den okumak mümkündür. Buna rağmen θ 'nın zamana bağlı değişimini tam olarak bulmak kolay değildir. θ ve t arasında bir denklem elde etmek için birkaç basamak incelenmelidir.

τ basit harmonik salınım hareketinin periyodu ve θ_B ve θ_C gövdenin sırasıyla fleksiyon ve ekstansiyondaki maksimum açısal yer değiştirmeleri olsun. Deneysel olarak elde edilen ham veriyi kullanarak veya Şekil 9.14'ten yararlanarak $\tau = 2s$, $\theta_B = 75^\circ$, $\theta_C = -15^\circ$ olarak bulunur. Periyot bilindiğine göre harmonik salınımın açısal frekansı hesaplanabilir;

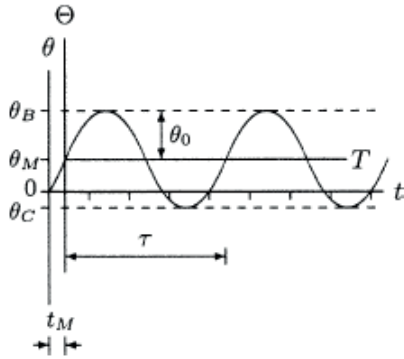
$$\varphi = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

θ_B ve θ_C kullanılarak gövdenin hareket alanı hesaplanabilir. Hareket alanı (ROM), dönen cismin taradığı toplam açıdır. Bunun sonucunda;

$$\text{ROM} = \theta_B + \theta_C = 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$$

Şekil 9.14 iki farklı koordinat sistemi kullanılarak Şekil 9.16'da tekrar çizilmiştir. θ ve t 'ye ek olarak, bilinen koordinat sisteminin merkezini $t = t_M$ ve $\theta = \theta_M$ çevirerek, Θ (büyük teta)'ya karşı T olan ikinci bir koordinat sistemi elde ettik. Burada, θ_M açısal yer değiştirmeyi belirtir ve şu şekilde hesaplanır:

$$\theta_M = \frac{\theta_B - \theta_C}{2} = \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 30^\circ$$



Şekil 9.16 θ - t koordinatının Θ - T 'ye çevrilmesi

t_M zaman değeri $\theta = \theta_M$ olduğu ana karşılık gelir. Deneysel olarak toplanan verilerden t_M hesaplanabilir. Bu durumda $t_M = 0.232\text{sn}$ 'dir.

İkinci bir koordinat grubunun tanımlanmasıyla Θ ve T ile ilgili olarak açısal yer değiştirmeye karşılık zaman eğrisini temsil eden fonksiyon basit bir sinüs fonksiyonudur:

$$\Theta = \theta_0 \sin(\varphi T) \quad (i)$$

Denklem (i)'de θ_0 harmonik salınım hareketinin genliğidir ve hareket alanının yarısına eşittir:

$$\theta_0 = \frac{\text{ROM}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \quad \left(\frac{\pi}{4} \text{rad}\right)$$

Şimdi deneysel olarak elde edilen eğriyi Θ ve T açısından temsil eden bir fonksiyona sahibiz. Eğer Θ ile θ ve T ile t 'yi ilişkilendirebilirsek θ ve t açısından bir fonksiyon bulabilir. Bu, koordinatların dönüştürülmesi ile mümkün olabilir. $\theta = \theta_M$ iken $\Theta = 0$ olduğunu unutmayın. Böylece:

$$\Theta = \theta - \theta_M \quad (ii)$$

$T = 0$ iken $t = t_M$ olduğu da unutulmamalıdır.

$$T = t - t_M \quad (iii)$$

Denklem (ii) ve (iii)'ü denklem (i)'de yerine yazarsak:

$$\theta = \theta_M + \theta_0 \sin[\varphi(t - t_M)] \quad (iv)$$

Denklem (iv)'de görüldüğü gibi gövdenin açısal yer değiştirmesi zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır ve bu denklem Şekil 9.14'te gösterilen deneysel olarak elde edilen eğrileri temsil eder. Denklem (iv)'ü kullanarak açısal hız ve açısal ivme, θ 'nın zamana göre türevleri alınarak hesaplanabilir:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \varphi \cos[\varphi(t - t_M)] \quad (v)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\theta_0 \varphi^2 \sin[\varphi(t - t_M)] \quad (vi)$$

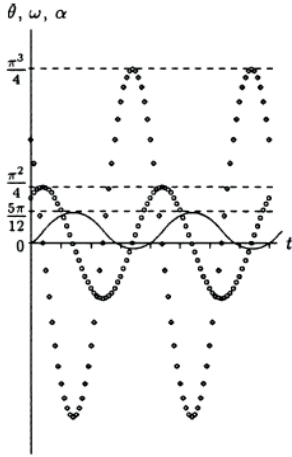
θ_M , θ_0 , t_M ve φ değerleri yukarıdaki denklemlerde yerlerine konular ise:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \sin[\pi(t - 0.232)] \quad (vii)$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{4} \cos[\pi(t - 0.232)] \quad (viii)$$

$$\alpha = -\frac{\pi^3}{4} \sin[\pi(t - 0.232)] \quad (ix)$$

Gövdenin açısal yer değiştirme, hız ve ivmeye karşı zaman denklemlerinin grafikleri Şekil 9.17'de çizilmiştir.



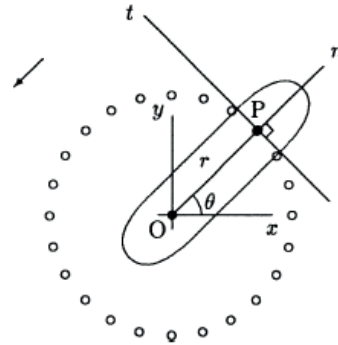
Şekil 9.17 Zamana karşı açısal konum, hız (daireler) ve ivme (karolar)

Denklem (vii)'nin doğruluğunu test edebilmek için t değişkenlerine değer verilip, θ değerleri hesaplanarak doğruluklarının kontrol edilebileceği unutulmamalıdır. Örneğin, $t = 0$ iken $\theta = 0$, $t = \tau = 2s$ iken $\theta = \pi/6 = 0.52\text{rad}$ veya $t = t_M = 0.232\text{sn}$ iken $\theta = 30^\circ$. Bu değerler Şekil 9.14'te verilen başlangıç değerleri için tutarlıdır.

Ayrıca açısal hızın zamanın kosinüs fonksiyonu olduğu unutulmamalıdır. Şekil 9.17'de açısal hıza karşı zaman grafiğinde genlik, denklem (viii)'den $\pi^2/4 = 2.47$ rad/sn'ye eşittir. Benzer şekilde açısal hızın genliği $\pi^3/4 = 7.75$ rad/s²'dir.

9.7 Sabit bir Eksen Etrafında Rotasyon Hareketi

Şekil 9.18'deki gibi rastgele şekillendirilmiş cisim düşünün. Cismin x y ekseninde, x y düzlemine dik ve sabit olan bir eksen etrafında rotasyon hareketi yaptığını varsayalım. O ve P , x y düzlemi üzerinde noktalar olsun; O cismin dönüş ekseninde bulunan sabit bir nokta olsun ve P , O 'dan r uzaklığında rotasyon hareketi geçiren cismin üzerinde bir başka nokta olsun. Cismin rotasyonu nedeniyle P noktası yarıçapı r olan dairesel bir harekete maruz kalır.

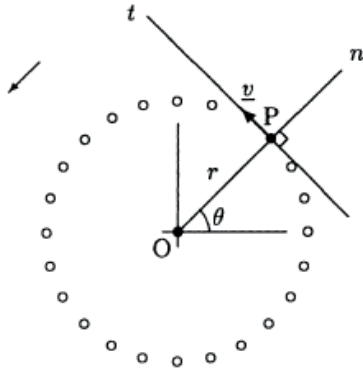


Şekil 9.18 P noktasında n ve t , dikey (radyal) ve teğet yönlerdir

Dairesel hareketi tanımlamak için genellikle hız ve ivme vektörlerinin, birbirine dik olan normal (radyal) ve dönme eksenine teğet olan yönler kullanılır. Bu yönler n ve t olarak Şekil 9.18'de gösterilmiş ve *yerel koordinatlar*

olarak adlandırılmışlardır. Tanım gereği hız vektörü \underline{v} , her zaman hareket yoluna teğettir. Dolayısı ile dairesel hareket için hız vektörü, dairesel hareket yönüne daima teğet ve tek bileşene sahiptir (Şekil 9.19). \underline{v} 'ye *teğet* veya *çizgisel hız* denir. Hız vektörünün büyüklüğü, P noktasının dairesel hareket boyunca konumunun zamana oranı olarak bulunabilir;

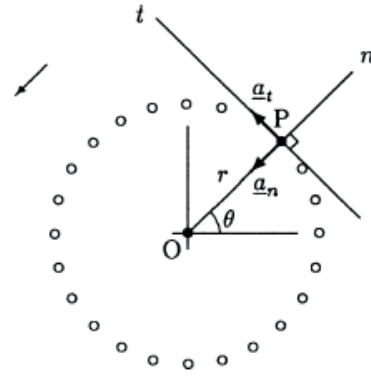
$$v = \frac{ds}{dt} \quad (9.9)$$



Şekil 9.19 Hız vektörü \underline{v} hareket yoluna daima teğettir

Dairesel harekette, ivme vektörünün hem normal hem de teğet bileşenleri bulunmaktadır (Şekil 9.20). *Teğet ivme* \underline{a}_t , hız vektörü büyüklüğünün değişimi ile ilgilidir ve aşağıdaki büyüklüğe sahiptir;

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (9.10)$$



Şekil 9.20 \underline{a}_t ve \underline{a}_n ivme vektörünün teğet ve dik bileşenleridir

Normal ivme \underline{a}_n , hız vektörünün yönündeki değişimle ilgilidir ve şu büyüklüğe sahiptir;

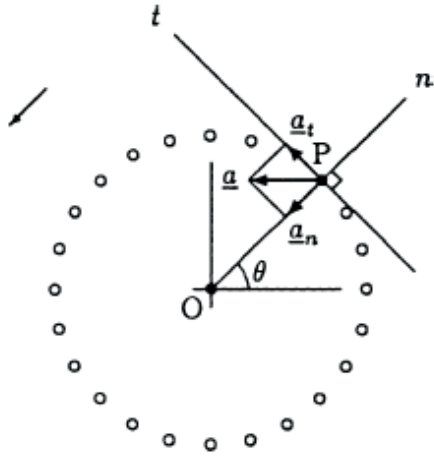
$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (9.11)$$

Dairesel hareket altında bulunan bir cisim dönme esnasında sabit v çizgisel hızına sahip ise \underline{a}_t sıfırdır. Diğer yandan, \underline{a}_n sürekli bir değere sahiptir çünkü rotasyon hareketinde \underline{v} hızı sürekli değişen bir yöne sahiptir.

\underline{a}_t ivmesi ile hız yönü aynıysa \underline{v} hızı artıyordu, ters yönlü ise hızı zamanla azalıyordu. İvme vektörünün normal bileşeni aynı zamanda *radyal* veya *merkezcil* ivme olarak da bilinir ve bu ivme her zaman dönen cismin merkezine yönelir.

Eğer sabit bir eksen etrafında dönen cismin normal ve teğet ivmesi biliniyorsa, cismin üzerindeki bir noktanın net veya son ivmesi de hesaplanabilir (Şekil 9.21). Eğer \underline{t} ve \underline{n} sırasıyla pozitif yönlü teğet ve normal yönler ise sonuç vektörü aşağıdaki gibi olacaktır;

$$\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_n = a_t \underline{t} + a_n \underline{n} \quad (9.12)$$



Şekil 9.21 \underline{a} elde edilen doğrusal ivme vektörüdür

Sonuç vektörünün büyüklüğü şu şekilde hesaplanır;

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (9.13)$$

Diğer taraftan hız vektörü şu şekilde olacaktır;

$$\underline{v} = v\underline{t} \quad (9.14)$$

v ve a 'nın lineer büyüklükler olduğu unutulmamalıdır, v uzunluk yönünün zamana bölünmesi ve hem a_t hem de a_n büyüklükleri uzunluk yönünün zamanın karesine bölünmesi ile bulunur. Pozitif normal yönü dışarı almak (\underline{n} doğrultusunda, dönme merkezinden dışarı doğru) ve pozitif teğet yönün de (\underline{t} yönünde) saat yönünde olarak alınmanın alışagelmış bir yöntem olduğu unutulmamalıdır.

9.8 Çizgisel ve Açısal Büyüklükler Arasındaki İlişki

Denklem (9.3), $s = r\theta$ anımsayalım. Dairesel harekette yarıçap r sabittir ve denklem (9.9) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$v = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt}$$

Tanım gereği, açısal yer değiştirmenin zamana bölünmesi ile hız elde edilir. Bu nedenle:

$$v = r\omega \quad (9.15)$$

Denklem (9.15), sabit eksen etrafında dönen bir cismin herhangi bir noktasındaki çizgisel hızın büyüklüğü, cismin o noktasının dönme merkezine olan uzaklığı ve açısal hızının çarpılması ile elde edilir. Unutulmamalıdır ki cisim üzerindeki her noktanın açısal hızı aynıdır ama her nokta farklı çizgisel hıza sahip olabilir. Çizgisel hızın büyüklüğü r yarıçapı arttıkça veya dönme merkezinden dışarıya doğru uzaklaştıkça artar.

Denklem (9.15) ve (9.10) kullanılarak dairesel hareket için aşağıdaki değerlendirme yapılabilir;

$$a_t = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt}$$

Tanım olarak açısal ivme, açısal hızdaki değişimin zamana bölünmesidir. Bu nedenle;

$$a_t = r\alpha \quad (9.16)$$

Benzer şekilde denklem (9.15)'i denklem (9.11)'de yerine yazarsak;

$$a_n = r\omega^2 \quad (9.17)$$

Denklem (9.15), (9.16) ve (9.17) doğrusal büyüklük olan v , a_t ve a_n ile açısal büyüklük olan r , ω ve α arasında ilişki kurarlar. Denklem (9.16), sabit bir eksen etrafında dönen bir cismin doğrusal ivmesinin teğet bileşenin, o noktanın merkeze olan uzaklığının açısal ivme ile çarpımına eşit olduğunu ifade eder.

9.9 Düzgün Dairesel Hareket

Düzgün dairesel hareket, sabit bir eksen etrafında dönmekte olan bir cismin açısal hızının sabit olduğunu ifade eder. Açısal hız sıfır olduğunda açısal ivme de sıfır olur. Bu nedenle dönme merkezinden r uzaklıkta düzgün dairesel hareket yapan bir nokta için;

$$v = r\omega \quad (\text{sabit})$$

$$a_t = 0$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (\text{sabit})$$

9.10 Sabit İvmeli Dairesel Hareket

Bölüm 7'de sabit ivmeli translasyonel hareketinin analizi için denklem (7.11) ile (7.14) arasında bir dizi kinematik denklemler türetilmiştir. Sabit bir eksen etrafında sabit açısal hızla rotasyon hareketi için de benzer denklemler türetilir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 t \quad (9.18)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 \quad (9.19)$$

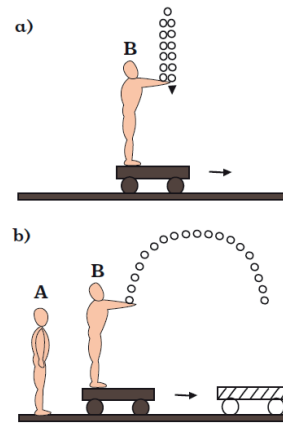
$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) t \quad (9.20)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_0(\theta - \theta_0) \quad (9.21)$$

Denklem (9.18) ile (9.21) arasında, $t_0=0$ zamanında; α_0 sabit açısal ivmesi, θ_0 ve ω_0 ise sırsıyla başlangıç durumunda açısal konumu ve hızıdır.

9.11 Bağlı Hareket

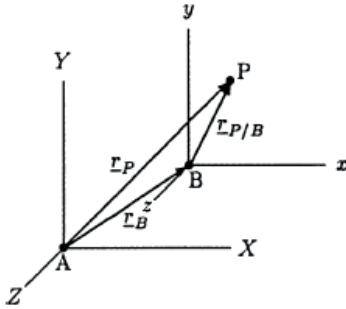
Farklı referans noktalarından incelenen bir hareket farklı gözlemlenebilir. Örneğin, hareket eden bir trene, sabit bir noktadan bakan bir kişi ile hareket halinde olan bir arabanın içinden bakan bir kişinin trenin hareketini farklı görecektir. Hareketli bir araç üzerinde bulunan bir kişi elindeki topu havaya attığında, topun hareketini sadece dikey yönde görecektir (Şekil 9.22a) ama sabit konumdan izleyen bir kişi topun bir eğri boyunca hareket ettiğini görecektir (Şekil 9.22b). Bu gibi durumların analizine genel yaklaşım olarak; hareketli gövdenin hareketi, uygun hareket eden bir koordinat düzlemi üzerinde tanımlanmalı ve aynı hareketli için bir sabit koordinat düzlemi belirlenmeli ve iki düzlem ilişkilendirilmelidir.



Şekil 9.22 Farklı gözlemciler tarafından farklı referans noktalarından gözlemlenen bir hareket

Bir hareketli cisim üzerinde bulunan P noktasının analizinin yapılacağını varsayalım. XYZ ve xyz olmak üzere merkezleri sırası ile A ve B olan iki koordinat düzlemi düşünelim (Şekil 9.23). XYZ düzleminin sabit (durağan) ve xyz düzleminin diğer koordinat düzlemine hareket boyunca paralel kalacağını (örneğin, x ve X paralel) kabul edelim. Bu durum xyz koordinat düzleminde yalnızca translasyonel hareketi olduğunu ve aynı birim vektörleri \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} 'nin her iki koordinat sistemi içinde kullanılabileceği anlamına gelir. Hareket eden xyz düzleminin hareketi B noktasına göre tanımlanır. \underline{r}_B sabit koordinat sistemine göre B'nin konum vektörünü gösteriyorsa, B'nin XYZ koordinat sistemine göre hız ve ivme vektörleri şöyle olacaktır;

$$\underline{v}_B = \frac{d}{dt}(\underline{r}_B) = \underline{\dot{r}}_B; \quad \underline{a}_B = \frac{d}{dt}(\underline{v}_B) = \underline{\ddot{r}}_B$$



Şekil 9.23 XYZ sabit, xyz hareketli koordinat düzlemdir

Benzer şekilde, xyz noktasının hareketli koordinat çerçevesine göre P noktasının hareketi, xyz düzleminin kökeni B'ye göre P noktasının $\underline{r}_{P/B}$ konum vektörüyle

tanımlanabilir. Bu konum vektörünün zamana göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla P noktasının xyz düzlemi üzerinde vektör olarak hızını ve ivmesini verir;

$$\underline{v}_{P/B} = \frac{d}{dt}(\underline{r}_{P/B}) = \underline{\dot{r}}_{P/B}; \quad \underline{a}_{P/B} = \frac{d}{dt}(\underline{v}_{P/B}) = \underline{\ddot{r}}_{P/B}$$

Son olarak sabit XYZ koordinat düzlemine göre P noktasının konum vektörü \underline{r}_P , hız vektörü \underline{v}_P ve ivme vektörü \underline{a}_P süper pozisyon yöntemi elde edilir;

$$\underline{r}_P = \underline{r}_B + \underline{r}_{P/B} \quad (9.22)$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_B + \underline{v}_{P/B} \quad (9.23)$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_B + \underline{a}_{P/B} \quad (9.24)$$

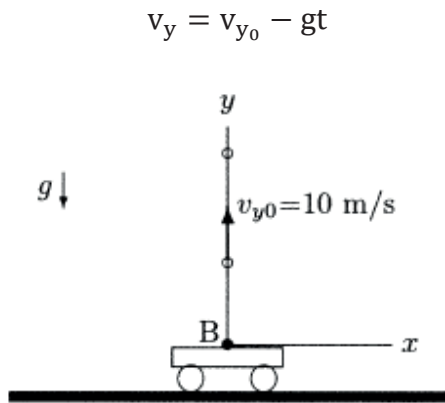
B (hareketli xyz koordinat sisteminin merkez noktası) noktasının sabit XYZ düzlemine göre hareketi *mutlak hareket* olarak adlandırılır ve alt indis B olarak gösterilir. Benzer şekilde P noktasının XYZ koordinat düzlemine göre hareketi, P'nin mutlak hareketidir. P noktasının hareketli koordinat düzlemine göre hareketi, P noktasının *bağıl hareketi* olarak adlandırılır ve P/B alt indisi ile gösterilir. Buradan konum vektörü $\underline{r}_{P/B}$, B noktasından P noktasına çizilen vektördür. Ayrıca P noktasının XYZ koordinat düzlemine göre pozisyon vektörünün $\underline{r}_{P/A}$ olarak gösterildiğini unutmayın. Ancak \underline{r}_P ifadesi konum vektörünün sabit koordinat düzlemine göre tanımlandığını ifade eder.

Örnek 9.3 Şekil 9.22 de gösterildiği gibi bir hareket düşünün. Sağa doğru 2 m/s sabit hızla hareket eden aracı kullanan bir kişi (B), havaya dik bir şekilde ilk hızı 10m/s olan bir top atıyor.

Topun ilk serbest kaldığı andan itibaren maksimum yüksekliğe ulaştığı ana kadar, sabit bir noktadan (A) topu gözlemleyen bir kişi için topun hareketini tanımlayın.

Çözüm

Bu problem iki boyutlu bir denklemdir ve üç basamakta analiz edilebilir. Önce hareket eden araca x ve y koordinat düzlemi atayalım. x y düzlemine göre atılan top sadece y ekseninde, tek boyutlu, doğrusal (translasyonel) hareket eder (Şekil 9.24). Sabit yer çekimi kuvveti ivmesi nedeniyle top pozitif y yönünde yavaşlayacak ve durduğu anda maksimum yüksekliğe ulaşacak ve inmeye başlayacaktır. Araçla birlikte hareket eden koordinat düzlemi ya da topu atan B kişinin gördüğü gibi; topun ilk atıldığı andan maksimum yüksekliğe ulaşmaya kadar olan zaman zarfında topun hızının değişim denklemi hesaplanabilir (Bölüm 7 bkz);



Şekil 9.24 x y düzlemine göre top y yönünde translasyonel hareket gerçekleştiriyor

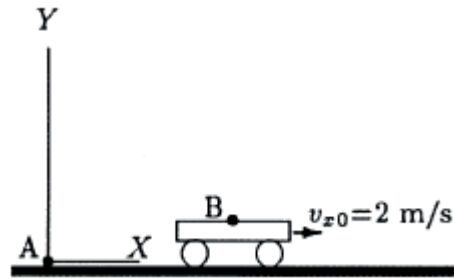
Burada topun havaya atıldığı andaki ilk hızı $v_{y0} = 10 \text{ m/s}$ ve yer çekimi ivmesi büyüklüğü $g \approx$

10 m/s^2 'dir. Bu denklem $t = 0$ serbest bırakılma anından $t = v_{y0}/g = 10/10 = 1$ (topun maksimum yüksekliğe ulaştığındaki hızı $v_y = 0$) arasındaki zaman aralığında geçerlidir. B tarafından gözlemleyen kişi için, topun x yönünde hareketi bulunmamaktadır. Buna göre topun B kişisine göre hızı;

$$\underline{v}_{P/B} = v_y \underline{j}$$

Sonra, yere X ve Y olmak üzere temsili sabit bir koordinat düzlemi yerleştirelim. XY düzlemine göre ya da sabit duran A kişisi arabayı sabit 2 m/s hızı ile pozitif X yönünde gidiyor olarak görür (Şekil 9.25). Böylece;

$$\underline{v}_B = v_{x0} \underline{i}$$



Şekil 9.25 XY düzlemine göre araç X yönünde sabit bir hızla translasyonel hareket gerçekleştirmektedir

Son olarak topun hızını A noktasına göre hesaplamak için \underline{v}_B ve $\underline{v}_{P/B}$ vektörleri toplanır;

$$\underline{v}_P = \underline{v}_B + \underline{v}_{P/B} = v_{x0} \underline{i} + v_y \underline{j}$$

Veya bilinen değerler yerine yazılırsa;

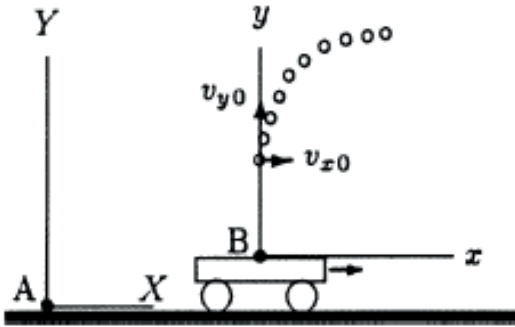
$$\underline{v}_P = 2 \underline{i} + (10 - 10t) \underline{j}$$

Örneğin top atıldıktan iki saniye sonra topun hızı;

$$\underline{v}_P = 2\underline{i} + 5\underline{j}$$

Yani, top sabit XY koordinat düzlemi ya da A kişisine göre 2 m/s'lik hızla sağa, 5 m/s'lik hızla da yukarı gidiyor gözükmektedir (Şekil 9.26). Buradan da hızın net büyüklüğü;

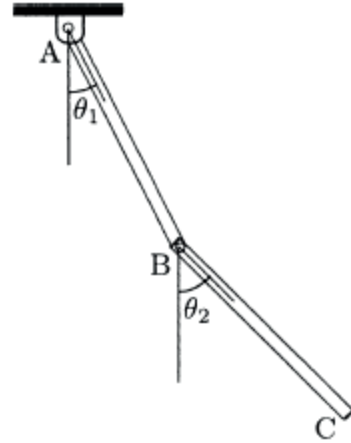
$$v_P = \sqrt{(2)^2 + (5)^2} = 5.4 \text{ m/s}$$



Şekil 9.26 XY düzlemine göre top hem X hem de Y ekseninde hareket etmektedir

9.12 Bağlantı Sistemleri

Bağlantı sistemi, sistemi oluşturan her bölümün bir diğerine göre hareket edebilmesi için birbirine ve/veya yere menteşe veya bağlantı elemanları vasıtasıyla bağlanan birkaç parçadan oluşur. Şekil 9.27'de gösterilen *çift sarkaç* bu sistemlere örnektir. Çift sarkaç sistemi birbirine ve yere sabitlenmiş iki çubuktan oluşur. Bağlantı sistemleri *çoklu bağlantı sistemleri* olarak da bilinir.

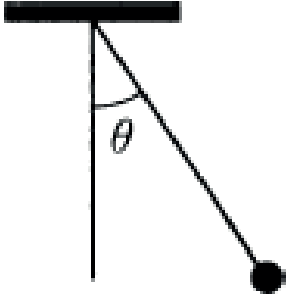


Şekil 9.27 Çift sarkaç

Tek tek parçaların açısal hızı ve ivmesi biliniyorsa, çoklu bağlama sistemini oluşturan her parçanın hareket özelliklerini analiz etmek için bağıl hareket özellikleri uygulanabilir. Aşağıda verilen örnek çift sarkaç örneğinin analizini yapmak için izlenmesi gereken süreci gösterecektir. Yine de uygulanacak olan bu süreç çoklu bağlantı sistemlerinin analizleri için genelleştirilebilir.

Sistemi oluşturan parçaların hareket özelliklerini iyi tanımlayabilmek için gerekli bağımsız koordinatların sayısını belirlemek bağlantı sistemleri ile ilgili önemli bir durumdur. Gerekli olan bağımsız parametrelerin sayısı sistemin *serbestlik derecesini* tanımlar. Örneğin Şekil 9.28'de gösterilmiş olan iki boyutlu hareket özelliğine sahip basit sarkacı ele alırsak, θ sarkacın konumunu açık bir şekilde tanımlar. Bu nedenle basit sarkaç bir serbestlik derecesine sahiptir. Diğer yandan Şekil 9.27'de gösterilmiş olan eş düzlem üzerinde hareket

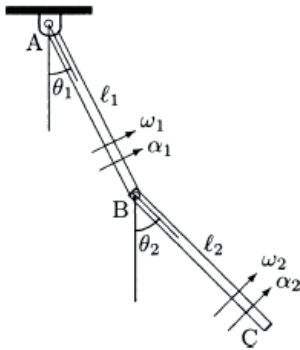
eden sarkaçlar için θ_1 ve θ_2 değerleri BC çubuğun düzlemsel hareketini analiz etmek için bilinmelidir ve bu sebeple bir çift sarkaç iki serbestlik derecesine sahiptir.



Şekil 9.28 Sarkaç

Örnek 9.4 Çift sarkaç

AB ve BC kollarına sahip aynı düzlem üzerinde hareket eden çift sarkaç Şekil 9.29'da gösterilmiştir. $l_1=0.3$ m ve $l_2=0.3$ m uzunluklarına sahip AB ve BC kollarının dikey ile yaptıkları açılar sırasıyla θ_1 ve θ_2 'dir. AB kolunun açısal hız ve ivmesi A noktasına göre sırasıyla $\omega_1 = 2$ rad/s (saat yönünün tersine) ve $\alpha_1 = 0$ olarak ölçülmüştür. BC kolunun açısal hız ve ivmesi B noktasına göre sırasıyla $\omega_2 = 2$ rad/s (saat yönünün tersine) ve $\alpha_2 = 0$ olarak ölçülmüştür.



Şekil 9.29 Çift sarkaç

AB kolu üzerinde bulunan B noktasının ve BC kolu üzerinde bulunan C noktasının açısal hızını ve ivmesini $\theta_1=30^\circ$ ve $\theta_2=45^\circ$ için hesaplayınız.

Çözüm

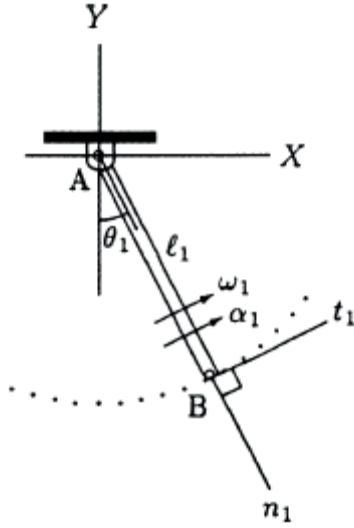
X ve Y eksenleri merkezi A noktası olacak şekilde diğer bir x ve y eksenleri de merkez noktası B olacak şekilde dikdörtgen koordinat sistemleri tanımlansın. XY koordinat düzlemi sabit dururken xy düzlemi B noktasının hareketi esnasında hareket edebilir. Kol AB'nin açısal hızı ve ivmesi A noktasına göre verildiğinden, AB kolu üzerinde bulunan herhangi bir noktanın hareket özellikleri XY koordinat düzlemine göre belirlenebilir. Benzer şekilde BC kolu üzerinde bulunan herhangi bir noktanın hareketi xy düzlemine göre kolayca analiz edilebilir.

B noktasının A noktasından görünen hareketi:

AB kolunun üzerindeki her nokta, A noktasından geçen sabit bir eksen etrafında $\omega_1 = 2$ rad/s ile dairesel hareket yapmaktadır. AB kolu üzerindeki her nokta, saat yönünün tersine dairesel olarak hareket etmektedir. Şekil 9.30'da gösterildiği gibi B noktası, yarıçapı l_1 olan dairesel bir yol üzerinde ilerlemektedir. B noktasındaki teğet yönde çizgisel açının büyüklüğü ve dik yöndeki doğrusal ivmenin büyüklüğü hesaplanabilir;

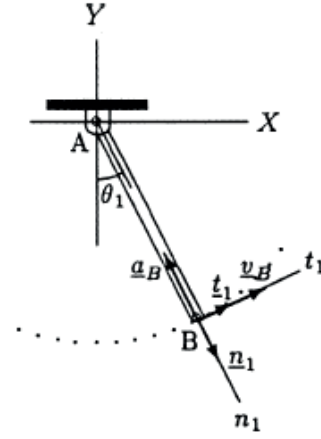
$$v_B = l_1 \omega_1$$

$$a_B = l_1 \omega_1^2$$



Şekil 9.30 A noktasından B noktasının gözlemlenen dairesel hareketi

İvmenin teğet bileşen vektörü sıfırdır çünkü ω_1 hızı sabittir veya $\alpha_1 = 0$ 'dır. Bu nedenle v_B ve a_B değerleri sonuç olarak oluşan doğrusal hız ve ivme vektörlerinin büyüklüğüdür. Bu büyüklükleri vektör olarak ifade edebilmek için \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 , AB kolu yatay yönde θ_1 açısı yaptığında, B noktasının dairesel yoluna normal ve teğetsel yönlerini temsil etsin (Şekil 9.31). Ayrıca \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 birim vektör olsun ve \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 pozitif yön olarak kabul edilsin yani pozitif \underline{n}_1 vektörü hareket merkezinden dışarı doğru (A'dan B'ye doğru) ve pozitif \underline{t}_1 ise hareket yönüyle aynı yöndedir (saat yönünün tersine).



Şekil 9.31 B noktasının teğet hızı ve dik ivmesi

Dik (merkezcil) ivme daima hareket merkezine doğru gider ve negatif \underline{n}_1 yönünde etki eder;

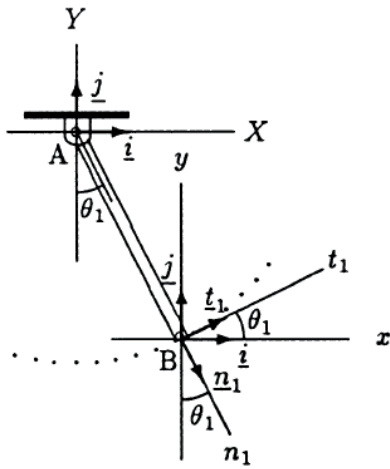
$$v_B = v_B \underline{t}_1 = l_1 \omega_1 \underline{t}_1$$

$$\underline{a}_B = -a_B \underline{n}_1 = -l_1 \omega_1^2 \underline{n}_1$$

Birim vektör olarak tanımlanan \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 'in yönlerinin B noktası dairesel yolu boyunca hareket ettikçe sürekli olarak değiştiğine dikkat edin. Yani \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 zaman içinde değişen yerel koordinat yönü tanımlar. Doğru koordinat değişimlerini kullanarak, bu birim vektörleri \underline{i} ve \underline{j} olacak şekilde Kartezyen birim vektör olarak ifade edebiliriz. Kartezyen koordinat sistemleri yerelin tersine küresel olmasından dolayı B noktasının hareketlerinden etkilenmez. Koordinat dönüşümü birim vektör olan \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 'in \underline{i} ve \underline{j} cinsinden ifade edilmesiyle yapılır. Sorunun geometrisi Şekil 9.32'de gözlemlenebilir;

$$\underline{n}_1 = \sin\theta_1 \underline{i} - \cos\theta_1 \underline{j}$$

$$\underline{t}_1 = \cos\theta_1 \underline{i} + \sin\theta_1 \underline{j}$$



Şekil 9.32 \underline{n}_1 ve \underline{t}_1 birim vektörlerinin \underline{i} ve \underline{j} Kartezyen birim vektörleri ile ifade edilışı

Bu nedenle, XY koordinat düzlemine göre B noktasının hız ve ivme vektörlerinin Kartezyen vektör şekli;

$$\underline{v}_B = l_1 \omega_1 (\cos \theta_1 \underline{i} + \sin \theta_1 \underline{j})$$

$$\underline{a}_B = -l_1 \omega_1^2 (\sin \theta_1 \underline{i} - \cos \theta_1 \underline{j})$$

Eğer sayısal değerleri $l_1 = 0.3$ m, $\theta_1 = 30^\circ$ ve $\omega_1 = 2$ rad/s değerleri yerine koyulur ve gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\underline{v}_B = 0.52 \underline{i} + 0.30 \underline{j} \quad (i)$$

$$\underline{a}_B = -0.60 \underline{i} + 1.04 \underline{j} \quad (ii)$$

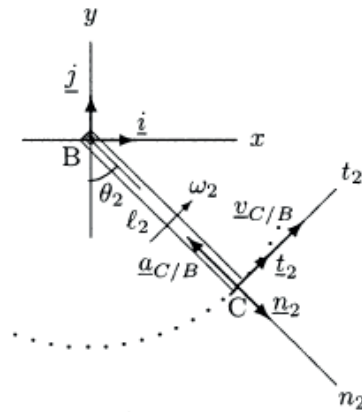
C noktasının B noktasına göre hareketi:

B noktasından görülen C noktasının hareketi, A noktasından görülen B noktasının hareketine benzer. C noktası Şekil 9.33'te verildiği gibi yarıçapı l_2 olan B noktasına göre sabit açısal hızla (ω_2) döner. Bu nedenle hız ve ivme vektörlerinin xy koordinat düzlemi üzerinde C

için türetilmesi ile hız ve ivme vektörlerinin XY koordinatları üzerinde B için türetilmesi için özetlenen süreci izler. C noktasının B noktasına göre çizgisel hız ve normal ivmesinin büyüklüğü;

$$v_{C/B} = l_2 \omega_2$$

$$a_{C/B} = l_2 \omega_2^2$$



Şekil 9.33 B noktasından gözlemlenen C noktasının dairesel hareketi

Eğer \underline{n}_2 ve \underline{t}_2 , BC kolu dikeyle θ_2 açısı yaptığında C'nin dairesel yoluna normal ve teğetsel yönlerde birim vektörlerse, o zaman;

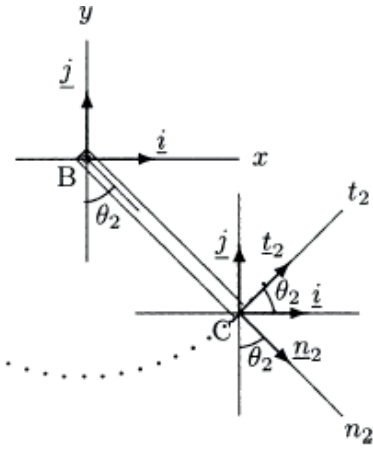
$$\underline{v}_{C/B} = v_{C/B} \underline{t}_2 = l_2 \omega_2 \underline{t}_2$$

$$\underline{a}_{C/B} = -a_{C/B} \underline{n}_2 = -l_2 \omega_2^2 \underline{n}_2$$

Şekil 9.34'deki gibi birim vektörler \underline{n}_2 ve \underline{t}_2 , Kartezyen birim vektörleri \underline{i} ve \underline{j} olarak ifade edilebilir;

$$\underline{n}_2 = \sin \theta_2 \underline{i} - \cos \theta_2 \underline{j}$$

$$\underline{t}_2 = \cos \theta_2 \underline{i} + \sin \theta_2 \underline{j}$$



Şekil 9.34 \underline{n}_2 ve \underline{t}_2 birim vektörlerinin \underline{i} ve \underline{j} olarak Kartezyen birim vektörleri olarak gösterilişi

Böylece C noktasının x y koordinat düzlemine göre hız ve ivme vektörleri şu şekilde yazılabilir;

$$\underline{v}_{C/B} = l_2 \omega_2 (\cos \theta_2 \underline{i} + \sin \theta_2 \underline{j})$$

$$\underline{a}_{C/B} = -l_2 \omega_2^2 (\sin \theta_2 \underline{i} - \cos \theta_2 \underline{j})$$

Sayısal değerler, $l_2=0.3\text{m}$, $\theta_2=45^\circ$ ve $\omega_2=4\text{rad/s}$, yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$\underline{v}_{C/B} = 0.85 \underline{i} + 0.85 \underline{j} \quad (iii)$$

$$\underline{a}_{C/B} = -3.39 \underline{i} + 3.39 \underline{j} \quad (iv)$$

C noktasının A noktasına göre konumu:

C noktasının B noktasına göre ve B noktasının A noktasına göre hızlarını ve ivmelerini hesapladık. XY koordinat düzleminde C noktasının A noktasına göre hızını ve ivmesini belirlemek için bağıl hareket prensiplerini uygulayabiliriz;

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{v}_{C/B} \quad (v)$$

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{a}_{C/B} \quad (vi)$$

Şimdi dikdörtgen koordinatlarda v_B , $v_{C/B}$, a_B ve $a_{C/B}$ değerlerini elde ettiğimiz için, denklem (i) ve (iii)'ü denklem (v) ve denklem (ii) ve (iv)'ü de denklem (vi) da yerine yazarsak;

$$\underline{v}_C = (0.52 \underline{i} + 0.30 \underline{j}) + (0.85 \underline{i} + 0.85 \underline{j})$$

$$\underline{a}_C = (-0.60 \underline{i} + 1.04 \underline{j}) + (-3.39 \underline{i} + 3.39 \underline{j})$$

Yatay ve dikey bileşenler düzenlenirse;

$$\underline{v}_C = 1.37 \underline{i} + 1.15 \underline{j}$$

$$\underline{a}_C = -3.39 \underline{i} + 4.43 \underline{j}$$

Hız ve ivme vektörleri büyüklük olarak hesaplanırsa;

$$v_C = \sqrt{(1.37)^2 + (1.15)^2} = 1.79 \text{ m/s}$$

$$a_C = \sqrt{(3.99)^2 + (4.43)^2} = 5.96 \text{ m/s}^2$$

9.13 Örnek Problemler

Problem 9.1 Şekil 9.10'da gösterildiği gibi, frontal düzlemde omuz abduksiyon yapan bir kişiyi düşünün. O noktası, frontal düzlemde omuz ekleminin dönme eksenini belirtir. OA çizgisi, yatay olarak paralel gerildiğinde kolun konumunu temsil eder. OB hattı, el en yüksek konumundayken kolun pozisyonunu temsil eder ve OC çizgisi, el vücuda en yakın olduğunda kolun pozisyonunu temsil eder. Bu

aktivite için, OB ve OC hatları kollar için hareket alanı sınırlarıdır. Bu sistem için, OA ve OB hatları arasındaki açının θ_0 açısı ile temsil edilen OA ve OC hatları arasındaki açığa eşit olduğunu varsayın. Ayrıca, kolun hareketi OA hattına göre simetriktir. Ayrıca, kolun OA ve OB, OB ve OA, OA ve OC ve OC ve OA hatları arasındaki açılarının aşılması için geçen sürenin yaklaşık olarak eşit olduğunu varsayalım. Kolun açısal hareketinin süresi $\tau = 3,5$ s ise ve $\theta_0 = 75$ açısı ise:

(a) Kolun açısal yer değiştirmesi θ , açısal hız ω ve açısal ivmelenme α ifadelerini türetin; (b) rotasyon hareketinin başlamasından sonra, kolun açısal yer değiştirmesini, açısal hızını ve kolun açısal ivmesini $t_1 = 0,5$ s, $t_2 = 1,0$ s ve $t_3 = 1,25$ s geçtikten sonrası için hesaplayın.

Cevaplar: (a) $\theta = 1,31 \sin(1,79 t)$, $\omega = 2,34 \cos(1,79 t)$, $\alpha = -4,2 \sin(1,79 t)$

(b) $\theta_1 = 1,02$ rad, $\omega_1 = 1,46$ rad/s, $\alpha_1 = -3,28$ rad/s²;

$\theta_2 = 1,28$ rad, $\omega_2 = -0,51$ rad/s, $\alpha_2 = -4,1$ rad/s²;

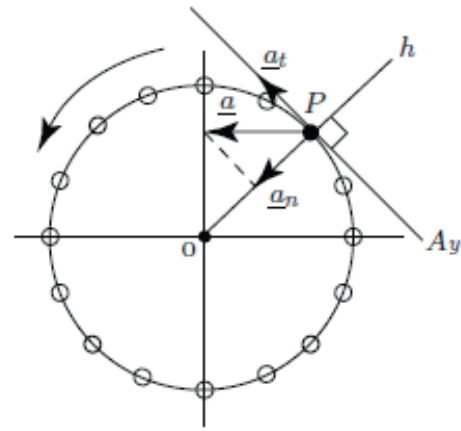
$\theta_3 = 1,03$ rad, $\omega_3 = -1,45$ rad/s, $\alpha_3 = -3,29$ rad/s²

Problem 9.2 xy düzleminde, hareket yönüne dik bir eksen etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir cisim düşünün (Şekil 9.35). O, xy düzleminde dönme eksenini boyunca bir nokta ve P, cisim üzerinde sabit bir nokta olsun. Cismin dairesel hareket yapması sebebiyle P

noktası $r = 0,8$ m yarıçaplı dairesel bir yol izleyecektir. P noktasının dairesel yolu boyunca bağıl konumu $S = 0,45t^{4/3}$ olarak verilmiştir. 3 saniye sonra P noktasının aldığı mesafeyi (S), çizgisel hızın büyüklüğünü (v), teğet ivmesini (a_t), dik ivmesini (a_n) ve net ivmesini hesaplayın.

Cevaplar:

$S = 1,95$ m; $v = 0,86$ m/s; $a_t = 0,1$ m/s²; $a_n = 0,92$ m/s²; $a = 0,93$ m/s²



Şekil 9.35 Problem 9.2 ve 9.3

Problem 9.3 xy düzleminde, hareket yönüne dik bir eksen etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir cisim düşünün (Şekil 9.35). O, xy düzleminde dönme eksenini boyunca bir nokta ve P, cisim üzerinde sabit bir nokta olsun. Cismin dairesel hareket yapması sebebiyle P noktası $r = 0,6$ m yarıçaplı dairesel bir yol izleyecektir.

Her hangi bir zaman anında P noktasındaki açısal ivmesi $\alpha = 5$ rad/s² ve net ivme ile teğet ivme arasında ki açı $\beta = 30^\circ$ dir.

P noktasındaki çizgisel hızın büyüklüğünü (v), teğet ivmenin değerini (a_t), normal ivmenin değerini (a_n) ve net ivmeyi (a) hesaplayın.

Cevaplar:

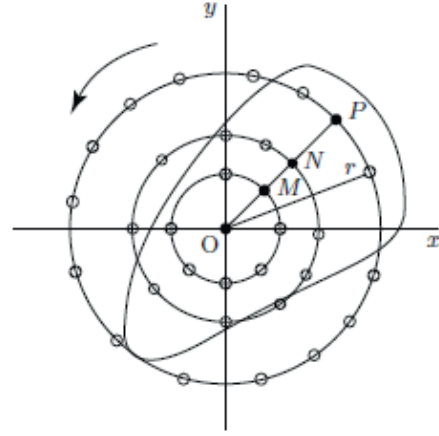
$$v = 1,02 \text{ m/s}; \quad a_t = 3 \text{ m/s}^2; \quad a_n = 1,72 \text{ m/s}^2; \quad a = 3,46 \text{ m/s}^2$$

Problem 9.4 Şekil 9.18'de gösterildiği gibi, xy düzlemine dik olan sabit bir eksen etrafında bu düzlemde düzgün bir dairesel hareket gerçekleştiren rastgele şekillendirilmiş bir nesne düşünün. O noktası, xy düzleminde dönme eksenini boyunca yer alır ve P, O noktasından r uzaklıkta bulunan cisim üzerinde sabit bir noktadır. P noktasının hız vektörünün büyüklüğü $v = 1,3 \text{ m/s}$ ise ve dairesel yolunun yarıçapı $r = 0,65 \text{ m}$ ise;

- P noktasının açısal hızı ω
- P noktasının ivme vektörü a 'nın büyüklüğünü hesaplayın.

Cevaplar: (a) $\omega = 1,85 \text{ rad/s}$; (b) $a = 2,22 \text{ m/s}^2$

Problem 9.5 xy düzlemi üzerinde rastgele rotasyon hareketi geçiren bir cismi ele alalım (Şekil 9.36). O, xy düzleminde dönme eksenini boyunca bir nokta ve P, N ve M sabit noktalarının dönme merkezlerine uzaklıkları sırasıyla r , $0,5r$ ve $0,25r$ ' dir. Cismin rotasyon hareketi sebebiyle P, N ve M dairesel hareket edeceklerdir.



Şekil 9.36 Problem 9.5

Eğer P noktasının çizgisel hızı $v_P = 4,5 \text{ m/s}$ ve dönme merkezine olan uzaklığı $r = OP = 1,2 \text{ m}$ ise, P, N ve M noktalarının açısal hızlarını ve N ile M noktalarının çizgisel hızlarını hesaplayın.

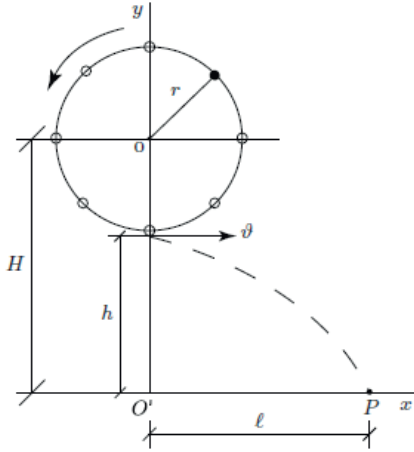
Cevaplar:

$$\omega_P = \omega_N = \omega_M = 3,75 \text{ rad/s}; \quad v_N = 2,25 \text{ m/s}; \quad v_M = 1,125 \text{ m/s}$$

Problem 9.6 Başlangıçta beklemede olan, xy düzlemine dik sabit bir eksen etrafında xy düzleminde sabit açısal ivmelenme ile düzgün bir rotasyon hareketi başlatan bir nesne düşünün. Sabit açısal ivmenin büyüklüğü $\alpha = 0,95 \text{ rad/s}^2$ ise: (a) rotasyon hareketinin başlamasından sonra $t_1 = 1,5 \text{ s}$, $t_2 = 2,0 \text{ s}$ ve $t_3 = 3,5$ sonrasında nesnenin açısal hızı ω 'yi bulunuz; (b) rotasyon hareketinin başlamasından sonra $t_1 = 1,5 \text{ s}$, $t_2 = 2,0 \text{ s}$ ve $t_3 = 3,5 \text{ s}$ sonrasında ilk konumuna göre nesnenin açısal konumu θ 'yi bulunuz; (c) radyan cinsinden elde edilen açılara derece cinsinden karşılık gelen açılara dönüştürünüz.

- Cevaplar: (a) $\omega_1 = 1,43 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 1,9 \text{ rad/s}$,
 $\omega_3 = 3,33 \text{ rad/s}$
 (b) $\theta_1 = 1,07 \text{ rad}$, $\theta_2 = 1,9 \text{ rad}$, $\theta_3 = 5,82 \text{ rad}$
 (c) $\theta_1 = 61,3^\circ$, $\theta_2 = 108,9^\circ$, $\theta_3 = 333,6^\circ$

Problem 9.7 Yüksek bir çubuk üzerinde büyük daireler çizen bir jimnastikçi düşünün (Şekil 9.37). Jimnastikçinin ağırlık merkezi çubuktan r uzaklığındadır ve jimnastikçi 5 m/s 'lik çizgisel hız ile düzgün dairesel hareket yapmaktadır. Jimnastikçi birkaç tur rotasyon hareketi yaptıktan sonra, ağırlık merkezi barın tam altında iken ellerini bırakır ve mermi hareketine başlar ve P noktasında yere konar. O noktası ile P noktası arasında x eksenindeki uzaklık $l=4.0 \text{ m}$ 'dir.



Şekil 9.37 Problem 9.7

Ellerini serbest bırakma ile iniş anı arasındaki zamanı (t), jimnastikçinin ellerini bıraktığı anda ağırlık merkezi ile yer arasında ki mesafeyi (h) ve çubuğun yerden yüksekliğini bulun (H).

- Cevaplar: $t=0.8 \text{ s}$; $h=3.14 \text{ m}$; $H=4.39 \text{ m}$.

Bölüm 10

AÇISAL KİNETİK

Çeviren: Hüseyin Hızlı

10.1 Açısal Hareket Kinetiği

10.2 Tork ve Açısal İvme

10.3 Kütle Atalet Momenti

10.4 Paralel Eksen Teorisi

10.5 Jirasyon Yarıçapı

10.6 Segmental Hareket Analizi

10.7 Rotasyonel Kinetik Enerji

10.8 Açısal İş ve Güç

10.9 Örnek Problemler

10.1 Açısal Hareket Kinetiği

Translasyon hareketi gerçekleştiren nesnelere kinetik özellikleri Bölüm 8'de tartışılmıştır. Kinetik analizler, hareket denklemleri ve iş ve enerji yöntemleri ile formüle edilebilen Newton'un ikinci hareket yasasını kullanır. Benzer yöntemler, rotasyon hareketi gerçekleştiren nesnelere kinetik özelliklerini analiz etmek için de kullanılabilir.

Xy düzleminde sabit bir O noktası etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir nesneyi düşünün (Şekil 10.1). P, O noktasından r kadar uzaklıkta cisim üzerinde bir noktadır. Cisim rotasyon hareketi yaparken, P noktası r yarıçaplı ve merkezi O noktasında bulunan dairesel bir yörüngede hareket etmektedir. Hareket denklemlerini kullanarak P noktasının kinetik özelliklerini analiz edebilmek için, cisme etki eden kuvvetler ve P noktasının ivmesi, hareketin dairesel yörüngesine normal ve teğet bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Eğer n ve t noktası P noktasındaki normal (radyal) ve teğet yönleri belirtiyorsa, hareket denklemleri şu şekilde ifade edilebilir:

$$\sum F_n = ma_n \quad (10.1)$$

$$\sum F_t = ma_t \quad (10.2)$$

Burada, $\sum F_n$ normal yönde etki eden net kuvvet iken $\sum F_t$ teğet yönde etki eden net kuvveti göstermektedir. a_n merkezci ivmenin (her zaman dönme eksenine merkezine doğrudur) büyüklüğü iken ve a_t teğet ivmenin

büyükülüğüdür. Denklem (10.1) uygulanırken dönme merkezine (merkezcil kuvvetler) doğru etki eden kuvvetler pozitif, dışa doğru etki eden kuvvetler (merkezkaç kuvvetleri) negatif olmalıdır. Sabit bir eksen etrafında rotasyon hareketi için doğrusal hız (v büyüklüğü ve dairesel yörüngeye teğet doğrultusu) ve dairesel yörünge yarıçapı, r , biliniyorsa, hareket özelliklerinin tamamı bilinebilir. $a_n=v^2/r$ ve $a_t=dv/dt$ olduğundan, denklem 10.1 ve 10.2 alternatif olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\sum F_n = m \frac{v^2}{r} \quad (10.3)$$

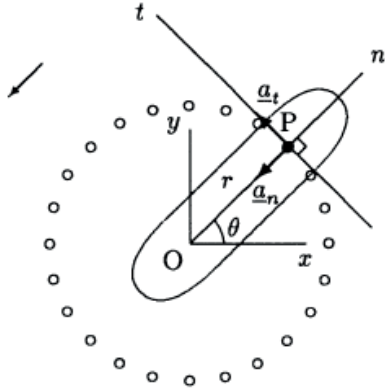
$$\sum F_t = m \frac{dv}{dt} \quad (10.4)$$

Yukarıdaki denklemlerde $v=r\omega$ ve $dv/dt=r\alpha$ olduğunu unutmayın. Sonuç olarak, açısal hız ve açısal ivme biliniyorsa, problemin kinetik karakteristikleri şu şekilde analiz edilebilir:

$$\sum F_n = mr\omega^2 \quad (10.5)$$

$$\sum F_t = mra \quad (10.6)$$

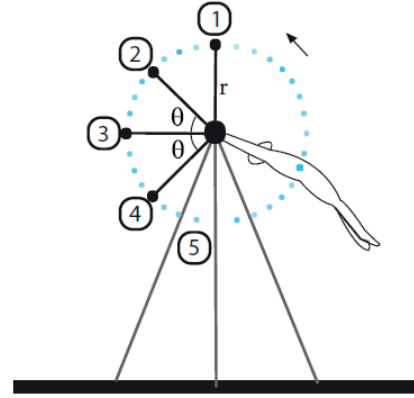
Rotasyon hareketi için ivme vektörünün her zaman normal bir bileşeni vardır ve bu nedenle normal yönde etki eden bir kuvvette vardır, ancak kuvvet ve ivme vektörlerinin teğet bileşenleri sistemde mevcut olabilir veya olmayabilir.



Şekil 10.1 Rotasyonel hareket

Örnek 10.1 Şekil 10.2'de yüksek bir çubuk üzerinde sallanan 60 kg ağırlığında bir jimnastikçi gösterilmektedir. Jimnastikçinin rotasyon hareketi, jimnastikçinin, kütlesi ile eşit kütleyle sahip ipe bağlanmış bir parçacık olması ve parçacığın bağlandığı ipin uzunluğunun jimnastikçinin ağırlık merkezi ile yüksek çubuk arasındaki uzaklığa eşit olması özellikleriyle modellenerek sadeleştirilebilir. Jimnastikçi hareket ettikçe, ağırlık merkezi dairesel bir hareket gerçekleştirmektedir.

Jimnastikçinin ağırlık merkezinin yüksek çubuktan $r=1$ m mesafe uzaklıkta konumlandığını, 1. konumda ağırlık merkezi hızının hemen hemen sıfır olduğunu ve hava direnci etkisinin ihmal edilebilir olduğunu varsayalım. 1. konum yüksek çubuğun hemen üzerinde ve jimnastikçinin ağırlık merkezinin ulaşabileceği maksimum yüksekliği göstermektedir.



Şekil 10.2 Yüksek çubuk üzerindeki jimnastikçi

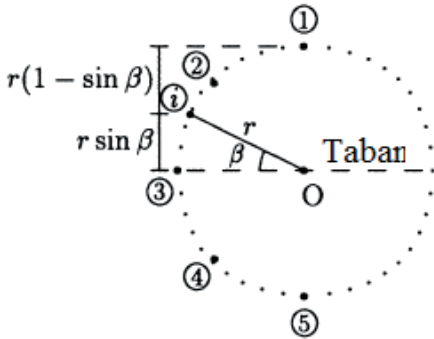
- Enerjinin korunumu ilkesini kullanarak jimnastikçinin ağırlık merkezinin 2, 3, 4 ve 5 numaralı konumlardaki süratini hesaplayınız. Şekil 10.2'de gösterildiği gibi, 2 ve 4 konumları yatay ile $\theta=45^\circ$ açı yapmakta; 3 konumu yüksek çubukla aynı yatay ekseninde bulunmakta ve 5 konumu doğrudan yüksek çubuğun altındadır.
- Jimnastikçinin 1,2, 3, 4 ve 5 konumlarındaki açısal hızlarını hesaplayınız.
- Jimnastikçinin ağırlık merkezinin 1,2, 3, 4 ve 5 konumlarındaki doğrusal ivmenin normal bileşenini hesaplayınız.
- 1,2, 3, 4 ve 5 konumlarında jimnastikçinin kollarına uygulanan kuvvetleri hesaplayınız.
- Jimnastikçinin ağırlık merkezinin 1,2, 3, 4 ve 5 konumlarındaki doğrusal ivmesinin teğet bileşenini hesaplayınız.
- Jimnastikçinin 1,2, 3, 4 ve 5 konumlarındaki açısal ivmelerini hesaplayınız.

Çözüm

(a) Şekil 10.3'te jimnastikçinin ağırlık merkezinin farklı konumları gösterilmiştir. Şekil 10.3'teki O noktası yüksek çubuğu temsil etmektedir. Enerji korunumu ilkesi, bir nesne konservatif güçlerin etkisi altında hareket ediyorsa, toplam enerjisini (potansiyel ve kinetik enerjilerin toplamı) hareket boyunca sabit kalacağını belirtmektedir. Herhangi bir iki konum arasında 1 ve 2:

$$\begin{aligned} \epsilon_{P1} + \epsilon_{K1} &= \epsilon_{P2} + \epsilon_{K2} \\ mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \end{aligned}$$

Burada, jimnastikçinin toplam kütlesi $m=60$ kg, yer çekim ivmesi $g= 9.8$ m/s², 1. konumdaki jimnastikçinin hızı $v_1=0$, v_2 jimnastikçinin 2. konumdaki bilinmeyen hızı ve başlangıç noktasına göre 1 ve 2 numaralı konumların yükseklikleri h_1 ve h_2 olarak gösterilmektedir. Başlangıç noktasının seçilmesinden sonra h_1 ve h_2 yükseklikleri hesaplanabilir ve yukarıdaki denklem bilinmeyen v_2 değişkeni için çözülebilir. v_3 , v_4 ve v_5 hızlarını hesaplayabilmek için yukarıda bahsedilen basamaklar tekrar edilmelidir.



Şekil 10.3 Farklı β değerleri için, i , 1,2,3,4 ve 5 konumlarını temsil etmektedir

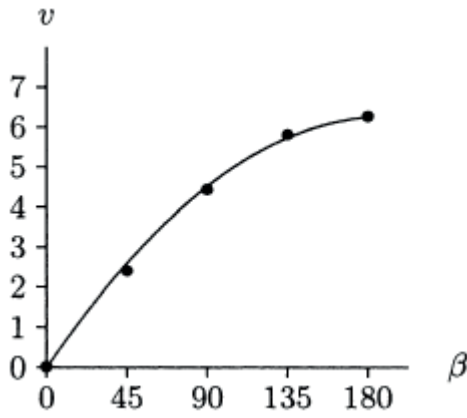
Aynı işlemi dört kere yapmak yerine, jimnastikçinin konumunu Şekil 10.3'te gösterildiği gibi “ i ” olarak alalım. O noktası ve i konumunu birleştiren hattın, O noktasından geçen yatay eksen ile β açısı (1 konumunda $\beta=90^\circ$, 2 konumunda $\beta=45^\circ$, 3 konumunda $\beta=0^\circ$, 4 konumunda $\beta=-45^\circ$, 5 konumunda $\beta=-90^\circ$) yaptığını varsayalım. 1 ile i konumu arasında enerjinin korunumu ilkesini yazarsak;

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2$$

$v_1=0$ olduğundan, bu eşitliğin sol tarafında bulunan ikinci terim sıfırdır. Ayrıca, m tüm terimlerde ortak bir parametredir ve ortadan kaldırılabilir. h_1 ve h_i yüksekliklerini hesaplayabilmek için başlangıç noktasını seçmeliyiz. Başlangıç noktasını, yüksek çubuğun seviyesine denk gelecek şekilde seçersek, problemin geometrisinden $h_1=r$ ve $h_i=r\sin\beta$ olarak bulunabilir. Bulduğumuz bu h_1 ve h_i değerlerini eşitlikte yerine koyar ve eşitliği bilinmeyen terim olan v_i için çözersek;

$$v_i = \sqrt{2gr(1 - \sin\beta)}$$

Yukarıdaki eşitlik, dairesel bir yörüngede hareket eden herhangi bir konumdaki jimnastikçinin ağırlık merkezi için geçerlidir. Örneğin, $\beta=45^\circ$ ve $i=2$ ise, $v_2 = \sqrt{2(9,8)(1)(1 - \sin45)} = 2,39$ m/s'dir. $\beta=0^\circ$ ve $i=3$ ise, $v_3 = \sqrt{2(9,8)(1)(1 - \sin0)} = 4,43$ m/s'dir. Benzer şekilde, $v_4=5,77$ m/s ve $v_5=6,26$ m/s'dir. Bu sonuçlar, Şekil 10.4'teki sürat – açısal konumlar (β açısı cinsinden ölçülen) grafiğini çizmek için kullanılmıştır.



Şekil 10.4 Sürat (m/s) – β açısı ($^{\circ}$) grafiği

b) Sabit bir eksen etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir cisim üzerindeki bir noktanın doğrusal hızı ve açısal hızı arasındaki ilişki şöyledir:

$$v = r\omega$$

Örneğin, 2 konumu için, $\omega_2 = v_2/r = 2,39/1 = 2,39$ rad/s. Benzer şekilde, $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 4,43$ rad/s, $\omega_4 = 5,57$ rad/s ve $\omega_5 = 6,26$ rad/s'dir.

c) Jimnastikçinin ağırlık merkezinin ivmesinin normal (radyal) bileşeni aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanabilir:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Örneğin, 2 konumu için, $a_{n2} = r\omega_2^2 = (1)(2,39)^2 = 5,74$ m/s² olarak hesaplanabilir. Benzer şekilde, $a_{n1} = 0$, $a_{n3} = 19,62$ m/s², $a_{n4} = 33,41$ m/s² ve $a_{n5} = 39,19$ m/s²'dir.

d) Jimnastikçinin kollarına uygulanan kuvvetleri hesaplayabilmek için jimnastikçinin ağırlık merkezinin serbest cisim diyagramının

gösterildiği Şekil 10.5'i göz önüne aldığımızda, jimnastikçiye uygulanan kuvvetler, yer çekimi ve yüksek çubuk tarafından jimnastikçinin kollarına uygulanan kuvvetlerden ibarettir. Yerçekimi tarafından uygulanan kuvvet daima dikey olarak aşağı doğrudur. Yüksek çubuk tarafından uygulanan kuvvet radyal yöndedir. Normal yöndeki hareket denklemleri:

$$\sum F_n = ma_n$$

1 konumunda, $a_{n1} = 0$ ve jimnastikçi dengededir. Bu nedenle, jimnastikçinin ağırlığı aşağıya doğru etki ettiğinden, yüksek çubuk tarafından jimnastikçinin kollarına uygulanan kuvvet, T_1 , yukarı doğru olmalıdır. Denge denkleminin uygulanması:

$$\sum F_{n1} = 0 : W - T_1 = 0$$

$$T_1 = W = mg$$

$$T_1 = (60)(9,8) = 588 \text{ N}$$

2 konumunda, normal yönünde etki eden kuvvetler, jimnastikçinin ağırlığının radyal bileşeni, W_{n2} , jimnastikçinin koluna çubuk tarafından uygulanan T_2 'dir. Problemin geometrisinden, $W_{n2} = W \cos(45)$ ve W_{n2} yönü merkeze doğrudur. Bu noktada, T_2 'nin doğrultusunu bilinmemektedir. Kuvvetin merkezkaç olduğunu varsayabiliriz. Hareket denklemini normal doğrultuda uyguladığımızda;

$$\sum F_{n2} = ma_{n2} : W_{n2} - T_2 = ma_{n2}$$

$$T_2 = W_{n2} - ma_{n2}$$

$$T_2 = mg \sin(45) - ma_{n2}$$

$$T_2 = mg \sin(45) - (60)(5,74) = 71N$$

T_2 büyüklüğünü pozitif olarak hesaplamıştık, dolayısıyla T_2 için tahmin ettiğimiz yön doğrudur. Başka bir deyişle, çubuğun etkisi 2 konumunda jimnastikçinin kollarını itecek şekildedir.

3 konumunda, radyal doğrultuda jimnastikçinin ağırlığının bir bileşeni yoktur. Normal yönde etki eden kuvvet, çubuk tarafından uygulanan T_3 'tür. Bu durumda, T_3 'ün merkezci olduğunu (O noktasına doğru) varsayalım. Hareket denklemleri 3 konumu için yazıldığında;

$$\sum F_{n3} = ma_{n3} : T_3 = ma_{n3}$$

$$T_3 = (60)(19,62) = 1177 N$$

Tekrar, hesapladığımız T_3 kuvveti pozitif olduğundan, T_3 için varsaydığımız doğrultu doğrudur. 3 konumunda, jimnastikçi dönme merkezinden uzaklaşma eğilimindedir ve çubuğun "çekme" etkisi jimnastikçiyi dairesel yörüngede tutmaktadır.

4 konumunda, radyal doğrultuda etki eden kuvvetler, çubuk tarafından uygulanan T_4 ve jimnastikçinin ağırlığından kaynaklı $W_{n4} = W \sin(45)$ bileşenidir. Problemin geometrisinden, W_{n4} merkezkaç kuvvetidir. T_4 kuvvetini merkezci olarak varsayar ve hareket denklemini yazarsak;

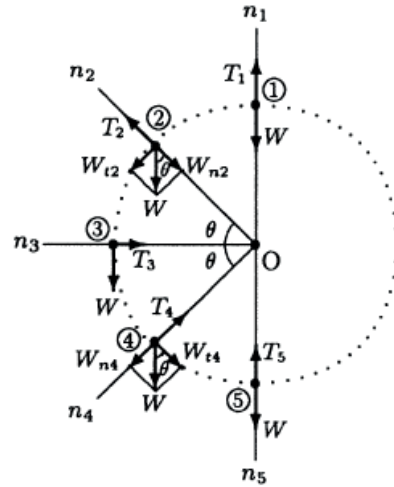
$$\sum F_{n4} = ma_{n4} : T_4 - W_{n4} = ma_{n4}$$

$$T_4 = W_{n4} + ma_{n4}$$

$$T_4 = mg \sin(45) + ma_{n4}$$

$$T_4 = (60)(9,8) \sin(45) + (60)(33,41)$$

$$T_4 = 2420 N$$



Şekil 10.5 Jimnastikçinin ağırlık merkezini etkileyen kuvvetler

Benzer şekilde 5 konumunda,

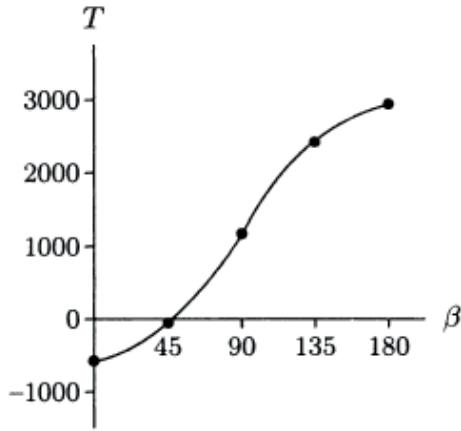
$$\sum F_{n5} = ma_{n5} : T_5 - W = ma_{n5}$$

$$T_5 = mg + ma_{n5}$$

$$T_5 = (60)(9,8) + (60)(39,19) = 2939 N$$

Şekil 10.6'da, sonuçlar, jimnastikçinin kollarına çubuk tarafından uygulanan kuvvetlerin açısal konuma (Şekil 10.3'te açı β olarak ölçülmüştür) ilişkin grafiği çizmek için kullanılmıştır. Konum 1 ve 2 arasında çubuğun kollar üzerinde impuls etkisi olduğunu unutmayın. Başka bir deyişle çubuk tarafından kollara uygulanan kuvvet basma kuvvetidir. 2 konumunun hemen sonrasında, çubuk

tarafından uygulanan kuvvet sıfırdır ve bundan sonra kollar üzerinde çekme etkisi vardır.



Şekil 10.6 Jimnastikçinin koluna yüksek çubuk tarafından uygulanan kuvvet (N) – β açısı ($^{\circ}$)

e) Teğet doğrultudaki hareket denklemini şu şekildedir;

$$\sum F_t = ma_t \text{ ya da } a_t = \frac{\sum F_t}{m}$$

Jimnastikçinin ağırlık merkezinin farklı konumları için teğet yönde etki eden kuvvetler Şekil 10.5'te gösterilmektedir. 1 konumunda teğet yönde herhangi bir kuvvet yoktur ve bu nedenle $a_{t1} = 0$ 'dır. 2 konumunda, $W_{t2}=W\cos(45)$ tek teğet kuvvettir. Bu yüzden;

$$a_{t1} = \frac{w_{t2}}{m} = \frac{mg\cos 45}{m} = g\cos(45) = 6,93 \text{ m/s}^2$$

3 konumunda, $W=mg$ tek teğet kuvvettir;

$$a_{t3} = \frac{w_{t3}}{m} = \frac{mg}{m} = g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

4 konumunda, $W_{t4}=W\cos(45)$ tek teğet kuvvettir;

$$a_{t4} = \frac{w_{t4}}{m} = \frac{mg\cos 45}{m} = g\cos(45) = 6,93 \text{ m/s}^2$$

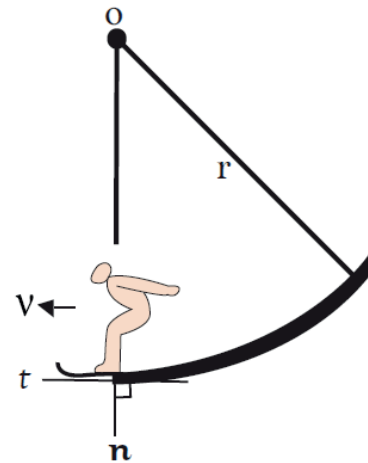
5 konumunda herhangi bir teğet kuvvet yoktur ve bu nedenle $a_{t5} = 0$ olur.

f) İvme vektörünün teğet bileşenlerini hesapladığımızı göre jimnastikçinin açılal ivmesini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$a = \frac{a_t}{r}$$

$r = 1 \text{ m}$ olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle, $a_1=0$, $a_2=6.93 \text{ rad/s}^2$, $a_3=9.80 \text{ rad/s}^2$, $a_4=6.93 \text{ rad/s}^2$, $a_5=0$ olarak hesaplanabilir.

Örnek 10.2 Şekil 10.7, kayak pistinin dairesel uç bölgesini göstermektedir. Bu parçadaki eğrilik yarıçapı $r = 50\text{m}$ 'dir. Pistin sonunda, pistin normal yönü dikey ile, pistin teğet yönü yatay ile çakışmaktadır.



Şekil 10.7 Kayak pistinin dairesel uç bölgesi

70 kg ağırlığındaki kayakçının hava direnci dolayısıyla 1.5 m/s^2 ile yavaşladığını düşünün. Kayak pistinin sürtünmesi ihmal edilebilir ve kayakçı pistin sonuna yatayda $v=20 \text{ m/s}$ hız ile

girse, pist ve hava direnci tarafından kayakçıya uygulanan kuvvetleri hesaplayınız.

Çözüm

Kayakçının pistin hemen ucundaki (hemen uçuş öncesi) serbest cisim diyagramı Şekil 10.8’de gösterilmektedir. Kayakçıya etki eden kuvvetler, yer çekiminden dolayı \underline{W} , hava direnci tarafından \underline{R}_1 ve pistin kayaklara uyguladığı tepki kuvveti \underline{R}_2 ’dir. \underline{R}_2 ’nin pistin dikey yönde veya normal yönünde uygulandığını unutmayın. Hava direncine bağı olarak uygulanan kuvvet \underline{R}_1 ’in, piste yatay doğrultuda veya teğet yönünde uygulandığı varsayılmaktadır.

Parkurun dairesel son bölgesinde kayakçı, yarıçapı $r = 50\text{m}$ olan dairesel bir yörüngede hareket etmektedir. Kayakçının, pistin hemen sonundaki hızı $v=20\text{ m/s}$ ’dir. Bu nedenle, kayak ile atlayıcı sporcusunun ivmelenmesinin normal yöndeki büyüklüğü:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(20)^2}{50} = 8,0\text{ m/s}^2$$

Hava direnci nedeniyle, kayakçı hareket yönünde (sola doğru) $1,5\text{ m/s}^2$ ’lik bir ivme ile yavaşlamaktadır. Veya kayakçı hareketin tersi yönünde (sağa doğru) $1,5\text{ m/s}^2$ ’lik bir ivme ile hızlanmaktadır. Bu nedenle, kayakçının sağa doğru teğet ivmesi $a_t=1,5\text{ m/s}^2$ ’dir. Bu aşamada, hareket denklemini kullanabiliriz. Bu nedenle, kayakçının sağa doğru teğet ivmelenmesi;

$$a_t = 1,5\text{ m/s}^2$$

Teğet yöndeki hareket denklemini;

$$\sum F_t = ma_t : R_1 = ma_t$$

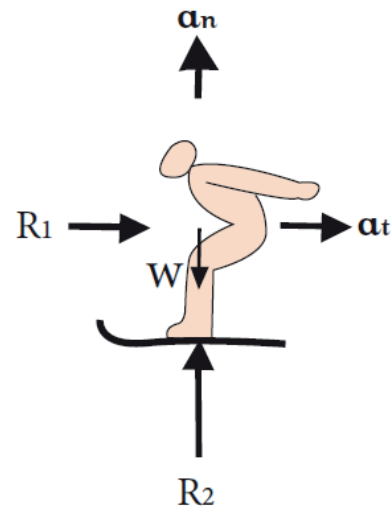
$$R_1 = (70)(1,5) = 105\text{ N}$$

Normal yöndeki hareket denklemini;

$$\sum F_t = ma_t : R_1 = ma_t$$

$$R_1 = (70)(1,5) = 105\text{ N}$$

Sonuç olarak, kayakla atlama pistinin hemen ucunda, hava direnci yatayda hareketi yavaşlatacak bir yönde $R_1= 105\text{N}$ ’luk bir kuvvet uygulamakta ve pist dikeyde kayaklara $R_2=1246\text{N}$ ’luk bir kuvvet uygulamaktadır. R_2 ’nin W ağırlığı ve pistin atalet momenti ma_n etkilerini içerdiği unutulmamalıdır.



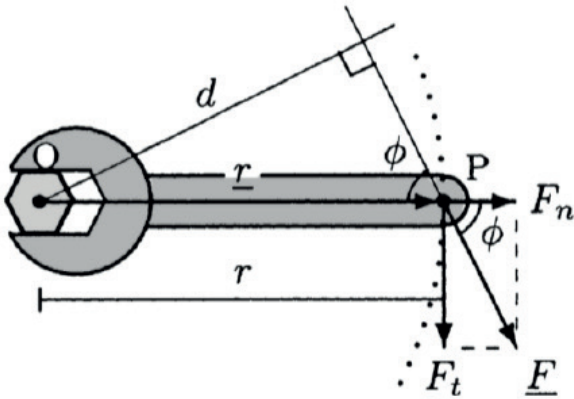
Şekil 10.8 Kayakçının atlamadan önceki serbest cisim diyagramı

10.2 Tork ve Açısal İvme

Tork, bir kuvvetin bir nesneyi döndürme kabiliyetinin niceliksel ölçüsüdür. Torkun matematiksel tanımı, Bölüm 3'te ayrıntılı olarak incelenen moment ile aynıdır. Şekil 10.9'da gösterilen cıvata ve İngiliz anahtarı düzenlemesini göz önünde bulundurun. Anahtara uygulanan F kuvveti, İngiliz anahtarını cıvatayı saat yönünde çevirerek duvara doğru ilerletecek şekilde döndürür. O noktası etrafındaki kuvvet F 'ye bağlı olarak M torkunun büyüklüğü:

$$M = rF_t = rF \sin \phi \quad 10.7$$

M 'nin etki çizgisi, dönme düzlemine diktir ve yönü, sağ kuralı kullanarak (bu durumda, saat yönünde) belirlenebilir.



Şekil 10.9 İngiliz anahtarına uygulanan F kuvveti cıvatanın merkez çizgisinde saat yönünde tork oluşturur

Nesnenin dönüş hareketi kısıtlı değilse ve nesne üzerinde o eksen etrafında etki eden net bir tork varsa, nesne bir eksen etrafında dönecektir. Rotasyon hareketi gerçekleştiren

bir nesnenin açısal ivmesi, üzerine etki eden net tork ile doğru orantılıdır. Tork ve açısal ivme arasındaki ilişkiyi türetmek için sabit bir eksen etrafında rotasyon hareketi gerçekleştiren bir m kütleli parçacığı düşünün. O'nun bu eksen üzerinde bir nokta olduğunu, hareketin dairesel yörüngesinin yarıçapının r olduğunu ve teğet F kuvvetinin rotasyon hareketine neden olduğunu varsayalım (Şekil 10.10). Teğet yöndeki hareket denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$F_t = ma_t \quad (10.8)$$

Denklem (10.8)'de a_t parçacığın teğet ivmesinin büyüklüğüdür. Parçacığın açısal ivmesi, α , biliniyorsa $a_t = r\alpha$ eşitliği yazılabilir. a_t 'yi $r\alpha$ ile değiştirir ve denklem (10.8)'in her iki yanını r ile çarparsak şu sonucu elde ederiz;

$$rF_t = (mr^2)\alpha \quad (10.9)$$

Denklem (10.9)'un sol tarafının, O noktası etrafında, F_t kuvveti tarafından oluşturulan M_o torkunun büyüklüğü olduğunu unutmayın. Denklem sağ tarafındaki mr^2 terimi, parçacığın O noktası etrafındaki *kütle atalet momenti* olarak bilinmektedir. Kütle atalet momentini I_o olarak gösterirsek, denklem (10.9) şu şekilde yazılabilir;

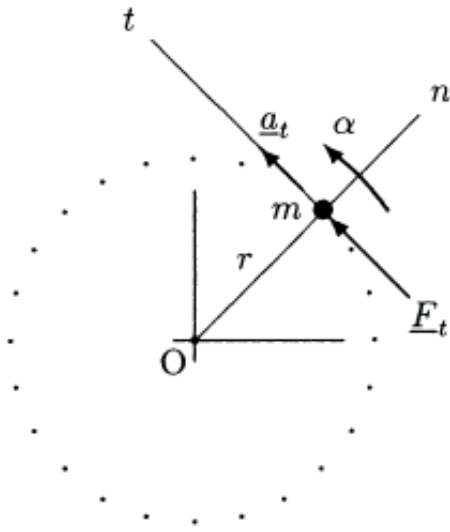
$$M_o = I_o \alpha \quad (10.10)$$

Parçacığa birden fazla tork üretecek kuvvet uygulanıyorsa, denklem (10.10)'da gösterilen M_o , O noktası etrafında parçacığa etki eden net

tork olarak gösterilir. Denklem (10.10)'un genel gösterimi tork ve açısal ivmeyi, vektörel nicelik olarak göstererek elde edilebilir;

$$M_0 = I_0 a \quad (10.11)$$

Bu, açısal ivmenin doğrudan net tork ile doğru orantılı olduğunu ve kütle atalet momenti ile ters orantılı olduğunu gösteren Newton'un ikinci hareket yasasının rotasyon analogudur.



Şekil 10.10 $F_t = ma_t$ ve $M_0 = I_0 a$

10.3 Kütle Atalet Momenti

Genel olarak atalet terimi, değişime karşı direnç anlamına gelmektedir. Döndürülmüş bir nesneye rotasyona neden olan kuvvet uygulanırsa, nesnenin açısal ivmeye direnme eğilimi, kütle atalet momentine bağlıdır. Bir nesnenin kütle atalet momenti ne kadar büyükse, dönüş sırasında onu ivmelendirmek de o kadar zor olur. M kütleli bir parçacık için, bir eksen etrafındaki kütle atalet momenti, parçacık kütlesi ile kütle atalet momentinin

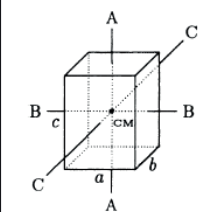
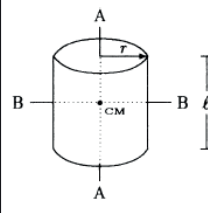
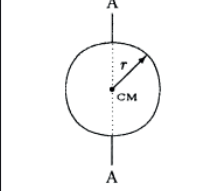
belirleneceği eksen arasındaki en kısa mesafe olan r 'nin karesinin çarpımı olarak tanımlanır:

$$I = mr^2 \quad (10.12)$$

Parçacık olmayan sert bir cismin, kütlelerin toplamının vücudun toplam kütlesine eşit olduğu birçok parçacıktan oluştuğu varsayılabilir. Tüm nesnenin atalet kütle momenti, nesnenin her bir parçacığının kütlesinin, dönme eksenini ile olan mesafesinin karesi ile çarpımı dikkate alınarak belirlenebilir.

Katı bir cismin kütle atalet momenti, cismin yoğunluğunun ve hacminin bir fonksiyonu olan kütlesi ile orantılı olduğuna dikkat edin. Dolayısıyla, bir cismin kütle atalet momenti, malzemesinin ve geometrik özelliklerinin yanı sıra belirlenecek eksenin konumu ve yönüne de bağlıdır. Bir nesnenin açısal hızdaki değişikliklere direnebilmesi, yalnızca nesnenin kütlesine değil, aynı zamanda kütle dağılımına da bağlıdır. Çevredeki kütle yoğunluğu ne kadar yüksekse, kütle atalet momenti o kadar büyük olur ve açısal hızı değiştirmek o kadar zor olur. Basit, simetrik bir geometri ve homojen kompozisyona sahip katı bir cisim için, simetri eksenini ile çakışan ve *merkez eksen* olarak adlandırılan bir eksen etrafındaki kütle atalet momenti nispeten kolayca hesaplanabilir. Tablo 10.1'de, bazı geometrik şekiller için merkez eksenleri etrafındaki kütle atalet momentleri gösterilmektedir. Kütle atalet momenti, sayısal bir sayıdır. $[M][L^2]$ ölçüsüne sahiptir ve SI'de kg/m^2 cinsinden ölçülür.

Tablo 10.1 Farklı geometrik şekillere sahip homojen rijit cisimlerin merkez eksenleri etrafındaki kütle atalet momentleri

	<p><i>Rectangular Prism</i></p> $I_{AA} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{BB} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_{CC} = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $V = abc$
	<p><i>Solid Cylinder or Disc</i></p> $I_{AA} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{BB} = \frac{1}{12}m(3r^2 + l^2)$ $V = \pi r^2 l$
	<p><i>Solid Sphere</i></p> $I_{AA} = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Hacimleri verilecektir

10.4 Paralel Eksen Teorisi

Bir nesnenin, bir merkez eksenini etrafındaki kütle atalet momenti biliniyorsa, aynı nesnenin bu merkez eksenine paralel diğer eksenler etrafındaki kütle atalet momenti, *paralel eksen teorisi* kullanılarak belirlenebilir.

Bu teorem şu şekilde ifade edilebilir:

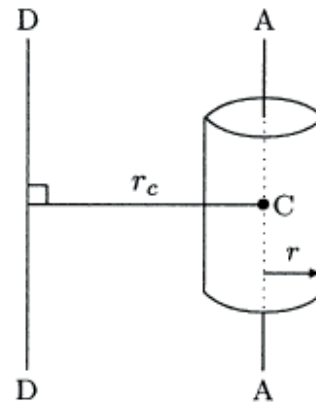
$$I = I_c + mr_c^2 \quad (10.13)$$

Denklem (10.13)'te, m nesnenin toplam kütlesi, I_c nesnenin bir merkez eksenini etrafındaki kütle atalet momenti, I merkez eksene paralel bir eksen etrafında gerekli olan kütle atalet momenti ve r_c iki eksen arasındaki en kısa mesafedir. Örneğin, şekil 10.11'de

gösterilen katı silindiri düşünün. Tablo 10.1'den, silindirin AA boyunca kütle atalet momentinin $I_{AA} = \frac{1}{2}mr^2$ 'dir. Aynı silindirin, AA'ya paralel ve AA dan r_c mesafede konumlandırılan DD boyunca kütle atalet momenti ise;

$$I_{DD} = I_{AA} + mr_c^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr_c^2$$

İnsan vücudu segmentleri söz konusu olduğunda, her segment veya ekstremite kütle merkezinden veya merkez eksenlerinden dönmek yerine hareket merkezinin her iki ucundaki eklemler çevresinde dönmektedir. Ayrıca, kütle atalet momenti ölçümleri sadece bir ortak merkez etrafında yapılabilir. Bir segmentin ağırlık merkezi etrafındaki kütle atalet momenti belirlenmesi gerekiyorsa paralel eksen teoremi kullanılabilir.



Şekil 10.11 Paralel eksen teorisine göre,

$$I_{DD} = I_{AA} + mr_c^2$$

10.5 Jirasyon Yarıçapı

m kütleli katı bir cismi düşünün. I belirli bir AA eksenini etrafındaki katı cismin kütle atalet momenti olsun. Ayrıca, aynı eksenden ρ (rho) kadar uzaklıktaki noktasal m kütlelerini düşünün öyle ki nesnenin AA etrafındaki kütle atalet momenti, $m\rho^2$, katı cismin AA etrafındaki kütle atalet momentine, I, ya eşittir. Yani;

$$\rho = \frac{I}{m} \quad (10.14)$$

ρ , *jirasyon yarıçapı* olarak tanımlanmakta ve rotasyonel hareket analizi için katı cisme, cismin toplam kütlelerine eşit olan ve dönme ekseninden ρ mesafesinde bulunan bir nokta olarak düşünülebilir.

10.6 Segmental Hareket Analizi

Önceki bölümlerde sağlanan bilgiler, insan vücudu segmentlerinin hareket özelliklerini analiz etmek için matematiksel modeller geliştirmek için kullanılabilir. Burada, bir vücut segmentinin dinamik bir modelinin geliştirilmesi için genel prosedür özetlenecek ve daha sonra alt bacağın diz eklemi etrafındaki dönme hareketini analiz etmek için uygulanacaktır.

Dinamik model analizinin ilk basamağını vücut segmentlerine etki eden kuvvetlerin tanımlanması içerir. Bunlar yerçekimi (ağırlık), dahili, atalet, kas ve eklem tepki kuvvetlerini içerebilir. Vücut segmentinin,

kendi ağırlık merkezinde hareket ettiği kabul edilebilir ve bu nedenle segmentin ağırlık merkezi bilinmelidir. Mevcut olan herhangi bir harici kuvvetin, büyüklüğü, uygulama noktası ve yönü belirtilmelidir. Atalet kuvvetleri, söz konusu problemin dinamiği nedeniyle mevcut olanlardır. Modele, atalet etkilerini dâhil etmenin bir yolu, jirasyon yarıçapının kullanılmasıdır. Bu analizler sonucunda kas ve eklem reaksiyon kuvvetleri belirlenecek bilinmeyenlerdir. Analiz edilecek bölümün serbest cisim diyagramını çizmek ve ona etki eden bilinen ve bilinmeyen tüm kuvvetleri tanımlamak önemlidir.

Dinamik analiz bir sonraki adımı ölçülebilir miktarların tanımlanmasıdır. Genel olarak, hareketli gövde segmentinin açısal yer değiştirmesi ve dönme eksenini etrafında üretilen net tork, segmental hareket aralığı boyunca zamanın fonksiyonları olarak ölçülebilir. Açısal yer değiştirme ölçüm teknikleri, gonyometrik, dinamometrik ve fotogrametrik yöntemlerini içerir. Kinematik ilişkilerin kullanılmasıyla, açısal yer değiştirme verileri, hareketli bölümün açısal hızı ve açısal ivmesini hesaplamak için kullanılabilir. Eğer açısal yer değiştirme θ , t zamanının bir fonksiyonu olarak biliniyorsa, o zaman açısal hız ω ve açısal ivme α , açısal değiştirmenin, θ , t'ye göre birinci ve ikinci türevleri dikkate alınarak belirlenebilir;

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Açısal yer değiştirme ve zaman arasındaki ilişkiyi temsil eden bir fonksiyon bulmak mümkün değilse, sayısal türev teknikleri kullanılabilir. Açısal ivme belirlendikten sonra, tork, kütle atalet momenti ve açısal ivme arasındaki ilişki, segmentin eklem merkezi etrafındaki (veya jirasyon yarıçapı) kütle atalet momentinin bilinmesi şartıyla, ortak merkez etrafında üretilen net torku hesaplamak için kullanılabilir.

Bir segmentin eklem merkezi ile ilgili iki boyutlu (düzlemsel) bir hareket analizi için, eklem eksenini etrafında üretilen net tork, M , zamanın bir fonksiyonu olarak ve aynı ekseninde hareket eden segmentin kütle atalet momenti, I , biliniyorsa, daha sonra segmentin açısal ivmesi aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$a = \frac{M}{I}$$

Gerekirse, hareketli bölümün açısal hızı ve yer değiştirmesi, zamana göre açısal ivmeyi temsil eden fonksiyonun integrali göz önünde bulundurularak da belirlenebilir.

Bu tartışmadan, hareket eden bölümle ilgili antropometrik bilgilerin mevcut olması gerektiği açıktır. Bu amaçla ortalama segmental ağırlığı, uzunluğu ve atalet yarıçapını listeleyen antropometrik veri tabloları kullanılabilir. Bir başka önemli husus, hareketli segmentin anlık rotasyon merkezinin de bilinmesi gerektiğidir. Bununla birlikte,

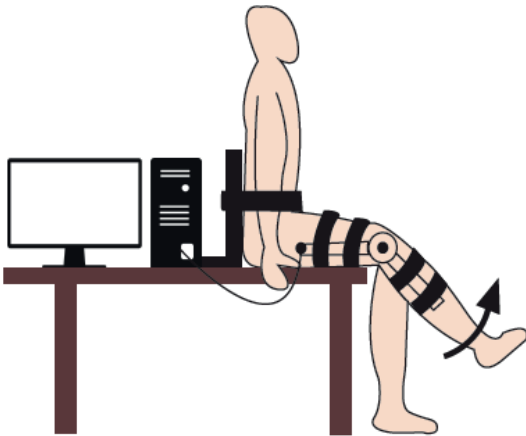
belirli bir eklem anlık rotasyon merkezinin değişebileceği unutulmamalıdır.

Dinamik model analizlerinin son aşaması, kas ve eklem tepki kuvvetlerinin hesaplanmasını içerir. Ölçülen veya hesaplanan net torkun, hareketli segmente etki eden tüm kuvvetlerin etkilerini içerdiğine dikkat edin. Eklem üzerinden geçen kaslar tarafından üretilen tork, harici ve yerçekimi kuvvetlerinin etkilerini, eklem merkeziyle ölçülen veya hesaplanan net torktan çıkararak belirlenebilir. Tekil kaslar tarafından üretilen kuvvetler gerekli ise, o zaman ek faktörler dikkate alınmalıdır. Örneğin, kasların bağlantı yerleri ve etkisinin yönü (çekme yönü) bilinmelidir. Farklı kaslar arasındaki kuvvet dağılımı da belirtilmelidir. Eğer segmental hareket esas olarak tek bir kas grubu tarafından sağlanırsa, kas kuvvetinin rotasyonel bileşeni Newton'un ikinci hareket yasası uygulanarak belirlenebilir. Kas kuvvetinin etki yönü bilindiği varsayıldığından, kas kuvvetinin büyüklüğü de belirlenebilir.

Örnek 10.3 Diz Ekstansiyonu

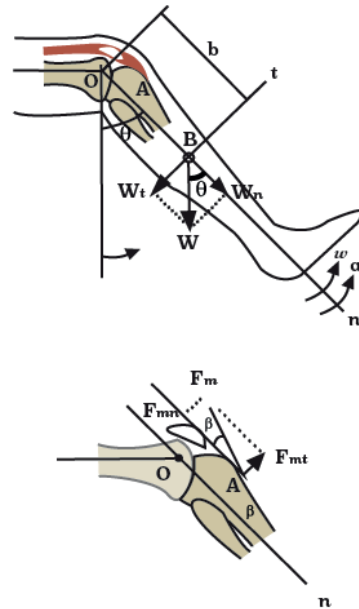
Alt bacağın diz eklemi etrafındaki açısal hareketi, diz fleksiyonları ve ekstansiyonları sırasında diz eklemine geçen kaslar tarafından üretilen kuvvetler ve torklar, farklı deneysel teknikler kullanan birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Bu tekniklerden biri burada tartışılmaktadır.

Şekil 10.12'de gösterilen kişiyi düşünün. Denek, sırtı sırt dayanağına dayanmış ve alt bacakları diz eklemi etrafından serbestçe dönebilecek şekilde masa üzerinde oturmaktadır. Deneğin gövdesi arka dayanağa bağlanmış ve sağ kalçası sıkıca masaya sabitlenmiştir. Diz ekleminde hiperekstansiyonun önlenmesi için (Şekil 10.12'de gösterilmemiştir) deneğin önüne destek konulmuştur. Deneğin sağ bacağına bir elektrogonyometre cihazı bağlanmıştır. Gonyometrenin kolları, uyluk ve baldırın tahmini uzun eksenleri ile hizalanırken, gonyometrenin dönüş eksenini, diz ekleminin tahmini dönüş eksenine hizalanır. Bu evreden sonra, denekten alt bacağın mümkün olduğunca hızlı bir şekilde uzatılması istenir. Elektrogonyometrenin potansiyometresinden alınan sinyaller bir bilgisayarda saklanır ve ilk dikey pozisyonundan alt bacağın açısal yer değiştirmesini, θ , hesaplamak için kullanılır. Sonlu fark (sayısal türevleme) tekniği kullanılarak, alt bacağın açısal hızı ω , ve açısal ivmesi α , de hesaplanmıştır.



Şekil 10.12 Diz ektansiyonu

Alt bacağına etki eden kuvvetlerin bazıları, şekil 10.13'te, göz önüne alınan modelin geometrik parametreleri ile birlikte gösterilmiştir. Bu model, kuadriseps kasının diz ekstansiyonundan sorumlu birincil kas grubu olduğu varsayımına dayanmaktadır. O noktası, diz ekleminin anlık rotasyon merkezini temsil eder. Patellar tendon, A noktasından tibiya bağlanır. Alt bacağın şekil 10.13'te gösterilen üst bacağına göre pozisyonu için, patellar tendon kuvvetinin F_m , çekme yönü, tibianın uzun eksenine ile β açısı yaptığı tahmin edilmektedir. F_m kuvvetinin O noktasına göre kuvvet kolu, alt bacağın hareket aralığından yukarı doğru hareket ettikçe değişen bir mesafe ile temsil edilebilir. Alt bacağın toplam ağırlığı W ve ağırlık merkezi, tibianın uzun eksenine boyunca ölçülen ve O noktasından b kadar bir mesafede yer alan B noktasındadır. Hedeflenen hareket yönü saat yönünün tersidir (ektansiyon).



Şekil 10.13 Alt bacağına etki eden bazı kuvvetler

$\theta=60^\circ$, $\omega=5$ rad/s ve $\alpha=200$ rad/s², $W=50$ N, $a=4$ cm, $b=22$ cm, $\beta=24^\circ$ ve alt bacağın diz eklemi etrafındaki kütle atalet momenti $I_0=0.25$ kgm² olduğu durumda;

- Diz eklemi etrafında oluşturulan net torku,
- Patellar tendonda oluşan net gerilmeyi,
- Diz ekleminde oluşan tepki kuvvetini hesaplayınız.

Çözüm:

- Newton'un ikinci hareket yasasından, diz eklemi etrafında oluşturulan net tork;

$$M_0 = I_0 \alpha = (0,25)(200) = 50\text{Nm}$$

(saat yönünün tersine)

- M_0 'ın diz eklemi etrafındaki net torkun büyüklüğü olduğunu ve alt bacağına etki eden tüm dış kuvvetlerin rotasyonel etkilerini içerdiğini unutmayın. Diz eklemi ile ilişkili olarak, rotasyonel etkileri olan iki dış kuvvet vardır: patellar tendon kuvveti F_m ve alt bacağın ağırlığı W . Alt bacağın dikey ile yaptığı $\theta=60^\circ$ pozisyonu için, patellar tendon kuvvetinin O noktasına göre kuvvet kolu $a=0,04$ m olduğu tahmin edilmektedir. Bu nedenle, O noktasına göre F_m tarafından üretilen tork, $M_m = aF_m$ (saat yönünün tersine) olmaktadır. Diğer taraftan, W aşağı yönde etki etmektedir. O noktasına göre W tarafından üretilen tork, $M_w = W_t b = W \sin \theta b$ (saat yönünde) olmaktadır. Bu nedenle, F_m ve W tarafından diz eklemi etrafında oluşturulan net torkun büyüklüğü, M_0 ;

$$M_0 = M_m - M_w = aF_m - bW \sin \theta$$

Bu denklem bilinmeyen F_m için çözülebilir;

$$F_m = \frac{M_0 + bW \sin \theta}{a}$$

Bilinen değerlerin yerine konulması ile

$$F_m = \frac{50 + (0,22)(50)(\sin 60^\circ)}{0,04}$$

- Alt bacağın serbest cisim diyagramı Şekil 10.14'te gösterilmektedir. Şekilde, W alt bacağın ağırlığını, F_m , A noktasındaki tibia üzerine uygulanan patellar tendon kuvvetinin büyüklüğünü, F_{jn} tibianın uzun eksenini boyunca tibiofemoral eklem tepki kuvvet bileşenini ve F_{jt} ise tibianın uzun eksenine dik bir yönde tibiofemoral eklem tepki kuvvetini göstermektedir. Şekil 10.14'te ayrıca W ve F_m 'in tibianın uzun eksenini boyunca ve dik doğrultudaki bileşenleri atalet kuvveti F_i bileşenleri ile birlikte gösterilmiştir.

Hareket halindeki nesnenin, yani rotasyon hareketi yapan vücut segmentlerinin, eylemsizlik etkilerini hesaplayabilmenin bir yolu da d'Alembert's ilkesi olarak bilinen yöntemi kullanmaktır. Eğer dönen nesnenin kütlesi m , ağırlık merkezi ile dönme eksenindeki uzaklığı r , açısal hızı ω ve açısal ivmesi α biliniyorsa, hareketin eksenine dik F_{in} ve teğet F_{it} eylemsizlik kuvvetlerinin büyüklüğü Bölüm 10.1'de verilen denklemler (10.5) ve (10.6) kullanılarak hesaplanabilir;

$$F_{in} = ma_n = m r \omega^2$$

$$F_{it} = ma_t = m r \alpha$$

Bu durumda, elimizde $m=W/g=50/9.8=5.1$ kg, $r=b=0.22$ cm, $\omega=5$ rad/s ve $\alpha=200$ rad/s² verileri bulunmaktadır. a_n ve a_t hareketin eksenine göre alt bacağıın ivmelenme vektörünün sırasıyla normal ve teğet bileşenleridir. a_n her zaman dönüşün merkezine doğrudur ve hareket saat yönünün tersine olduğundan a_t de saat yönünün tersi yönde olur. Sonuç olarak, F_{in} merkezci kuvvet (dönme merkezine doğru) iken F_{it} bacağı saat yönünün tersine döndürmeye çalışmaktadır. Şekil 10.14'te gösterildiği gibi, F_{in} kuvvetini merkezci kuvvet yerine bacağı dışarı doğru çekmeye çalışan merkezkaç kuvveti olduğu, F_{it} kuvvetini de alt bacağı saat yönünün tersine döndürmek yerine saat yönünde döndürmeye çalıştığı ve sistemin statik dengede olduğu varsayılarak d'Alembert's ilkesi uygulanabilir. Sistemin denge koşulları, hareket eksenine normal ve teğet yönler boyunca geçerli olan aşağıdaki denklemlerle temsil edilebilir:

$$\sum F_n = 0 : F_{jn} - F_{mn} + F_{in} + W_n = 0$$

$$\sum F_t = 0 : F_{jt} - F_{mt} + F_{it} + W_t = 0$$

Bu denklemlerin, eklem tepki kuvvetinin bileşenleri için çözülmesi aşağıdaki sonucu verecektir;

$$F_{jn} = F_{mn} - F_{in} - W_n$$

$$F_{jt} = F_{mt} - F_{it} - W_t$$

Bilinen parametrelerin matematiksel ifadeleri kullanılarak yazılması sonrasında;

$$F_{jn} = F_m \cos \beta - m b \omega^2 - W \cos \theta$$

$$F_{jt} = F_m \sin \beta - m b \alpha - W \sin \theta$$

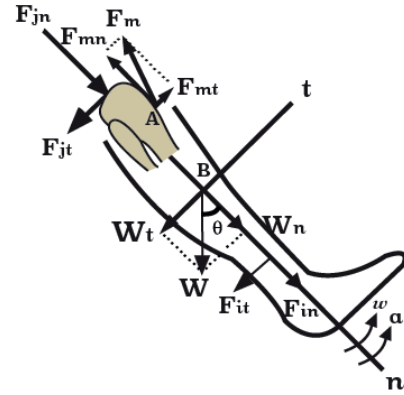
Sayısal değerlerin yerine konulması ile;

$$F_{jn} = (1488)(\cos 24) - (5.1)(0.22)(5)^2 - (50)(\cos 60) = 1306 \text{ N}$$

$$F_{jt} = (1488)(\sin 24) - (5.1)(0.22)(200) - (50)(\sin 60) = 338 \text{ N}$$

Sonuç olarak, femur tarafından tibia üzerine uygulanan bileşke kuvvetin büyüklüğü;

$$F_j = \sqrt{F_{jn}^2 + F_{jt}^2} = 1349 \text{ N}$$



Şekil 10.14 Alt bacağıın serbest cisim diyagramı

10.7 Rotasyonel Kinetik Enerji

Şekil 10.15'te gösterilen katı cismin birçok küçük parçacıktan oluştuğunu ve cismin sabit bir eksen etrafında ω açısal hız ile rotasyon hareketi yaptığını varsayalım. m_i ve v_i cisim içerisindeki i 'inci parçacığın kütlesi ve hızı ise, parçacığın kinetik enerjisi;

$$\epsilon_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

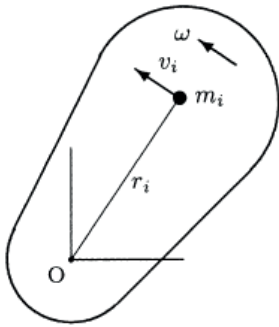
Herhangi bir anda, cisim içerisindeki her parçacık aynı açısal hıza sahiptir, fakat her bir parçacığın doğrusal hızı, dönme ekseninden ölçülen mesafesine bağlıdır. Eğer r_i , i 'inci parçacık ile dönme eksenindeki dikey mesafe (yani i 'inci parçacığın rotasyon hareket yolunun yarıçapı) ise, o zaman $v_i = r_i \omega$ ve onun kinetik enerjisi $\epsilon_{Ki} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$ olacaktır. Cisimdeki her parçacık bir kinetik enerjiye sahiptir ve dönen cismin toplam kinetik enerjisi, ϵ_K , cisimdeki parçacıkların tek tek kinetik enerjilerinin toplamıdır. Yani,

$$\epsilon_K = \sum_{i=1}^n \epsilon_{Ki} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Parantez içerisindeki nicelik, cismin kütle atalet momentine, I , eşittir. Sonuç olarak,

$$\epsilon_K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (10.15)$$

Denklem (10.15), bir cismin dönme kinetik enerjisini, cismin kütle atalet momentini ve cismin açısal hızı açısından tanımlar ve doğrusal hareket ile ilgili kinetik enerjiye ($\epsilon_K = \frac{1}{2} m v^2$) benzer.



Şekil 10.15 Sabitlenmiş bir eksen etrafında bir cismin rotasyonel hareketi

10.8 Açısal İş ve Güç

Tanım olarak, bir kuvvet tarafından yapılan iş, kuvvetin büyüklüğü ile kuvvetin büyüklüğüne karşılık gelen yer değiştirmenin çarpımına eşittir. Dönen bir cisme uygulanan bir kuvvetle yapılan açısal iş, vücudun açısal yer değiştirmesi ile ilgilidir. Uygulanan \underline{F} kuvveti nedeniyle O 'da sabit bir eksen etrafında dönen bir cismi düşünün. Şekil 10.16'da gösterildiği gibi, P_1 ve P_2 noktalarının sırasıyla t_1 ve t_2 zamanlarında nesnenin bulunduğu noktayı temsil ettiğini varsayalım. t_1 ve t_2 arasındaki zaman aralığında, cisim, s ark uzunluğunca veya θ açısının ark uzunluğu boyunca rotasyon hareketi yapar. \underline{F} tarafından nesne üzerinde yapılan iş, kuvvet vektörünün hareket yönündeki bileşeninin (teğet bileşen, F_t) büyüklüğü ile yer değiştirme, s , çarpımına eşittir;

$$W = F_t s$$

Ark uzunluğu, dairesel hareketin yarıçapı boyunca açısal yer değiştirmeye ilgilidir, $s = r\theta$. Sonuç olarak;

$$W = F_t r \theta$$

Tanım olarak, $F_t r$, O etrafından F kuvveti tarafından üretilen M torkunun büyüklüğüdür. Bundan dolayı;

$$W = M \theta \quad (10.16)$$

Başka bir deyişle, rotasyon üreten kuvvet tarafından yapılan iş, kuvvet tarafından üretilen

tork ile nesnenin açısal yer değiştirmesi çarpımına eşittir. Normal yönde herhangi bir hareket olmadığından dolayı, kuvvet vektörünün normal (radyal) bileşeninin, rotasyon hareketi yapan bir nesne üzerinde herhangi bir iş yapmadığına dikkat ediniz.

Burada, denklem (10.16)'da verilen yapılan açısal iş, tork ve açısal yer değiştirme arasındaki ilişkinin torkun sabit olduğu zaman geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Nesneyi 1 konumundan 2 konumuna döndürebilmek için tork tarafından nesne üzerinde yapılan iş ki bu açısal yer değiştirmenin bir fonksiyonudur;

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} md\theta \quad (10.17)$$

Burada, θ_1 ve θ_2 , nesnenin sırasıyla 1 ve 2 konumundaki açısal yer değiştirmesidir. Eşitlik 10.17, ayrıca, açısal hızdaki değişim $M=I\alpha$ ve $\alpha=d\omega/dt$ açısından da yazılabilir;

$$M = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Denklem (10.17)'ye bu eşitliği yazarsak;

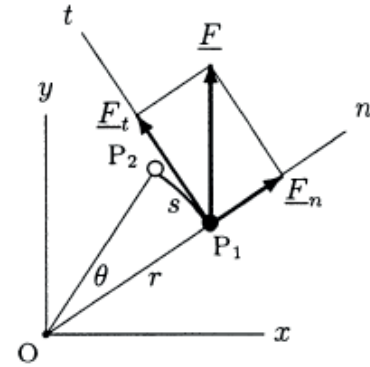
$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (10.18)$$

Denklem (10.18)'deki ω_1 ve ω_2 sırasıyla nesnenin 1 ve 2 konumundaki açısal hızlarıdır. *Rotasyon hareketindeki iş-enerji teoremi* olarak bilinen Denklem (10.18), sabit bir eksen etrafında döndürülen katı cismin üzerindeki net açısal işin, nesnenin dönme kinetik enerjisindeki değişime eşit olduğunu belirtir.

Birim zamanda yapılan iş güç olarak tanımlanmaktadır. *Açısal güç*, birim zamanda yapılan açısal iş olarak tanımlanır. Sabit bir tork için;

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (10.19)$$

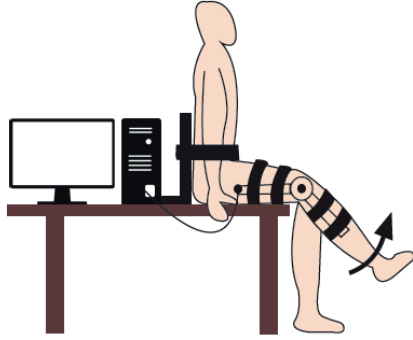
Yani, açısal güç, uygulanan tork ile açısal hızın çarpımına eşittir.



Şekil 10.16 P1'de bulunan bir parçacık, θ açısı veya arc uzunluğu s ile P2 konumuna getirilir

Örnek 10.4 Örnek 10.3'de analiz edilen diz ekstansiyonu probleminde, şekil 10.17'de gösterildiği gibi, kişi bir masa üzerinde oturmaktadır. Üst gövde arka bir sırtlığa bağlanmış ve sağ baldır alt bacağın dikey olarak aşağı doğru asılı olacak şekilde masaya sıkıca tutturulmuştur. Daha sonra kişiden sağ alt bacağını uzatması istenir. Diz ekstansiyonu sırasında alt bacağın açısal yer değiştirmesi, bacağına bağlı bir gonyometreyle belirlenir. Bir dizi hesaplamadan sonra, alt bacağın, 90 Nm'lik bir ortalama ekstansör kas torku üreterek ortalama 3 rad/s açısal hız ile 0.5 s'lik bir sürede $\theta=0^\circ$ 'den 90° 'ye kadar uzatıldığı belirlenmiştir.

Alt bacağın, diz eklemi rotasyon merkezi etrafındaki kütle atalet momentinin 92 kgm^2 olduğunu varsayarak, üretilen ortalama açısal kinetik enerjiyi, yapılan açısal işi ve alt bacağı $\theta=0^\circ$ 'den 90° 'ye kadar uzatmak için diz ekstansör kasları tarafından üretilen açısal gücü hesaplayınız.



Şekil 10.17 Diz ekstansiyonu

Çözüm

Alt bacağın hareket aralığı $\Delta\theta=90^\circ$ 'dir, bu da $\Delta t=0.5\text{s}$ zaman aralığında alınmıştır (Şekil 10.18). Alt bacağın, diz eklemi rotasyon merkezi etrafındaki kütle atalet momenti, $I_0=92 \text{ kgm}^2$ olarak soruda verilmiştir. Alt bacağın ortalama açısal hızı $\omega=3 \text{ rad/s}$ olarak hesaplanmış ve diz ekstansörleri tarafından üretilen ortalama tork $M=90 \text{ Nm}$ 'dir. Sonuç olarak, Diz ekstansör kasları tarafından üretilen ortalama açısal kinetik enerji;

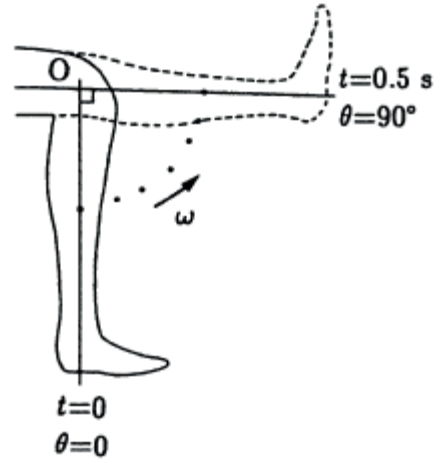
$$\epsilon_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} (92) (3)^2 = 414 \text{ J}$$

Alt bacağı 90° veya $90 \times \pi/180=1,57 \text{ rad}$ uzatmak için kaslar tarafından yapılan ortalama iş;

$$W = M\Delta\theta = (90)(1,57) = 141,3 \text{ J}$$

Ekstansör tarafından üretilen ortalama güç ise;

$$P = M\omega = (90)(3) = 270 \text{ W}$$



Şekil 10.18 Alt bacağın hareketi

10.9 Örnek Problemler

Problem 10.1 Şekil 10.12'de gösterildiği gibi, diz eklemine geçen kasların ürettiği kuvvet ve torkları araştırmak için alt bacağın diz eklemi çevresinde (O noktası) fleksiyon / ekstansiyon hareketleri yapan kişiyi düşünün. Deney düzeneği yukarıdaki Örnek 10.3'te açıklanmıştır.

İncelenen modelinin geometrik parametreleri, alt bacağı etki eden kuvvetler ve serbest cisim diyagramı şekil 10.13 ve 10.14'de gösterilmiştir. Bu sistem için, alt bacağın açısal yer değiştirme, açısal hız ve açısal ivmesi, deney sırasında elde edilen $\theta=65^\circ$, $\omega=4,5 \text{ rad/s}$ ve $\alpha=180 \text{ rad/s}^2$ verileri kullanılarak hesaplanmıştır. Bu sistem için, $a=4,0 \text{ cm}$, $b=$

23 cm, $\beta = 25^\circ$ ve dizde oluşun net tork $M_0=55\text{Nm}$ olduğu varsayılmıştır. Dizde alt bacağın ağırlığının oluşturduğu net tork $M_w=11,5\text{ Nm}$ ise;

- (a) Diz ekleminde, alt bacağın atalet kütle momentini
- (b) Alt bacağın ağırlığını
- (c) Patellar tendondaki gerilmeyi
- (d) Diz eklemindeki tepki kuvvetini hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $I_0=0,3\text{ kgm}^2$; (b) $W=55,2\text{ N}$; (c) $F_m=1662,5\text{ N}$, (d) $F_j=1517,3\text{ N}$

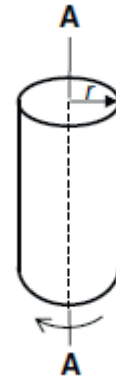
Problem 10.2 Şekil 10.17'de gösterildiği gibi, alt bacağın diz eklemi etrafında ekstansiyon hareketlerini yapan bir kişi düşünün. Deney düzeneği Örnek 10.4'te açıklanmaktadır. Bir dizi hesaplamadan sonra, alt bacağın $\theta=0^\circ$ 'dan $\theta=85^\circ$ 'e, ortalama $\omega = 3,3\text{ rad / s}$ açışal hızla uzatıldığı tespit edilmiştir. Bu sistem için, aynı zamanda, deney sırasında diz ekstansor kasları tarafından üretilen açışal gücün $P = 290\text{ W}$ olduğu tahmin edilmektedir. Alt bacağın, dizin dönme merkezi etrafında atalet kütle momentinin $I_0 =93\text{ kg m}^2$ ise;

- (a) Diz ekstansor kasları tarafından üretilen torku,
- (b) Alt bacağı ekstansiyon hareketi yaptırmak için kaslar tarafından yapılan işi,
- (c) Diz ekstansor kasları tarafından üretilen kinetik enerjii hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $M=87,9\text{ Nm}$; (b) $W=130\text{ J}$; (c) $E_k=506,4\text{ J}$

Problem 10.3 Dışarıdan uygulanan kuvvetin etkisi altında rotasyonel hareket gerçekleştiren, Şekil 10.19'da gösterilen 15 kg katı silindir dikkate alındığında, silindirin merkez ekseninin etrafındaki atalet momentini $I_{AA} = 0,5\text{ kg m}^2$ ise, silindirin yarıçapını belirleyiniz.

Cevap: $r = 0,26\text{ m}$



Şekil 10.19 Problem 10.3 ve 10.4

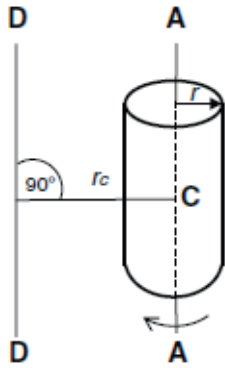
Problem 10.4 Şekil 10.19'da gösterilen $\omega= 3.5\text{ rad / s}$ açışal hızıyla, merkez eksen AA etrafında rotasyon hareketi yapan katı bir silindiri göz önünde bulundurun. Bu sistem için, silindirin rotasyonel kinetik enerjisinin $E_k = 30\text{J}$ olduğu tahmin edilmektedir. Silindirin yarıçapı $r = 0,5\text{ m}$ ise,

- (a) Silindirin merkez ekseninin etrafındaki atalet momentini,
- (b) Silindirin kütesini hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $I_{AA}= 4,9\text{ kgm}^2$, (b) $m=19,6\text{ kg}$

Problem 10.5 Şekil 10.20'de, katı bir silindir, merkez eksen AA çevresinde rotasyon hareketi gerçekleştirmektedir. Silindirin kütlesi $m = 12 \text{ kg}$ ve yarıçapı $= 0,3 \text{ m}$ ise;

- Silindirin merkez ekseninin etrafındaki atalet momentini,
- Merkez eksene $r_c=0,2 \text{ m}$ uzaklıkta bulunan DD ekseninin etrafındaki atalet momentini hesaplayınız.



Şekil 10.20 Problem 10.5

Cevaplar: (a) $I_{AA}=0,54 \text{ kgm}^2$, (b) $I_{DD}=1,02 \text{ kgm}^2$

Bölüm 11

İMPULS VE MOMENTUM

Çeviren: Hüseyin Hızlı

11.1 Giriş

11.2 Doğrusal Momentum ve İmpuls

11.3 İmpuls ve Momentum Metodunun Uygulama Alanları

11.4 Doğrusal Momentumun Korunumu

11.5 Çarpma ve Çarpışmalar

11.6 Tek Boyutlu Çarpışmalar

11.6.1 Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar

11.6.2 Tamamen Esnek Çarpışma

11.6.3 Elastoplastik Çarpışma

11.7 İki Boyutlu Çarpışmalar

11.8 Açısal İmpuls ve Momentum

11.9 Temel Denklemlerin Özetleri

11.10 Düzlemsel Harekte Rijit Cisimlerin Kinetiği

11.11 Örnek Problemler

11.1 Giriş

Bölüm 8’de Newton’un ikinci hareket yasası “hareket denklemleri” şeklinde gösterilmektedir. Bölüm 10’da ise iş ve enerji kavramları açıklanmıştır. Aynı yasayı temel alınarak, kinetik başlığı altında incelenen spesifik problemlerin çözümünü kolaylaştırmak için “iş-enerji” ve “enerjinin korunumu” yöntemleri geliştirilmiştir. Bu bölümde, doğrusal momentum ve impuls kavramları ele alınacaktır. Newton’un ikinci hareket yasası, “impuls-momentum teorisi” ve “doğrusal momentumun korunumu” ilkesini temel alan kinematik analizler için yeniden formüle edilecektir. Cisimlerin çarpışmaları ve etkilerinin analiz edilebilmesi için bu yöntemler kullanılacaktır.

11.2 Doğrusal Momentum ve İmpuls

Dışardan uygulanan bir F kuvveti etkisinde olan m kütleli bir cisim düşünün. Uygulanan kuvvetin etkisi altındaki cismin ivmesi a olarak tanımlanırsa. F , m ve a arasındaki ilişki aşağıdaki vektör formundaki hareket denkleminde açıklanmaktadır:

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad (11.1)$$

Tanım olarak, ivme hızın zamana göre değişim oranıdır. Cismin kütlesi sabit ise, eşitlik 11.1 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) \quad (11.2)$$

Bu denklemdaki $m\underline{v}$ vektörü, cismin doğrusal momentumu (veya basitçe momentum) olarak tanımlanmakta ve \underline{p} olarak gösterilmektedir:

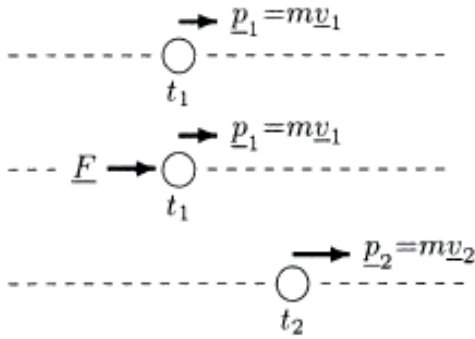
$$\underline{p} = m\underline{v} \quad (11.3)$$

Momentum vektörel bir büyüklüktür. Momentum vektörünün hareketi ve yönü, cismin hız vektörü ile aynıdır. Momentumu büyüklüğü etki altındaki cismin hızı ile kütesinin çarpımına eşittir. Hareket denklemi, eşitlik 11.3’ün eşitlik 11.2’de yerine konulmasıyla momentum cinsinden ifade edilebilir.

$$\underline{F} = \frac{dp}{dt} \quad (11.4)$$

Cisme etki eden birden fazla kuvvet bulunuyor ise, eşitlik 11.4’de yer alan \underline{F} kuvveti cisme eden kuvvetlerin vektörel toplamı ile diğer bir değişle cisme etki eden bileşke kuvvet, değiştirilmelidir. Eşitlik 11.4, bir cismin momentum değişiminin zamana oranının cismin üzerine etki eden bileşke kuvvete eşit olduğunu göstermektedir.

Momentum kavramı özellikle çok kısa zaman aralıklarında uygulanan kuvvetlerin etkilerini analiz etmek için oldukça kullanışlıdır. Bu kuvvetler, *impuls kuvveti* olarak tanımlanır ve bu kuvvetler ile ilişkili olan hareketler *impuls hareketleri* olarak isimlendirilmektedir. Şekil 11.1’deki gibi t_1 anında v_1 hızı ile hareket eden bir cisim düşünelim. t_1 ve t_2 arasındaki zaman aralığında cisme bir F kuvvetinin uygulandığını ve cismin hızının t_2 anında v_2 olduğunu varsayalım.



Şekil 11.1 İmpuls kuvveti F , \underline{p}_1 nesnesinin momentumunu \underline{p}_2 'ye değiştirir.

Eşitlik 11.4'ü dt ile çarpıp ve t_1 ile t_2 sınırlarında integralinin alınması sonrası:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = \underline{p}_2 - \underline{p}_1 = m\underline{v}_2 - m\underline{v}_1 \quad (11.5)$$

11.5'teki eşitliğin sol tarafındaki integral, $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında cisme etki eden F kuvvetinin *doğrusal impulsunu* gösterirken eşitliğin sağ tarafı Δt zaman aralığında cismin momentumundaki değişikliği (delta p) göstermektedir. Sonuç olarak,

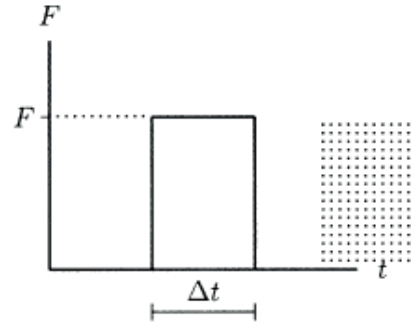
$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = \Delta \underline{p} \quad (11.6)$$

Bu eşitlik, *impuls-momentum teorisinin* matematiksel gösterimidir.

İmpuls, vektörel bir büyüklüktür, yönü ve etki çizgisi, İmpuls kuvveti ile aynıdır. Genel olarak, impuls kuvvetinin yönü ve büyüklüğü Δt zaman aralığında değişebilir. Eğer kuvvet zamanın bir fonksiyonu olarak biliniyorsa, impuls, F kuvvetinin zamana göre integralinin alınmasıyla belirlenebilir ki bu esasen kuvvet-zaman eğrisi altında kalan alana eşittir. İmpuls

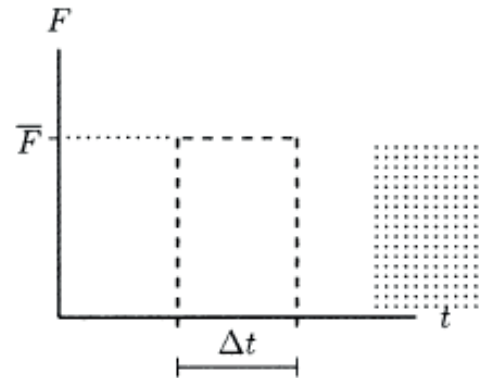
kuvvetinin sabit olması durumunda ise (Şekil 11.2), impuls basitçe aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underline{F} = \Delta t = \Delta \underline{p} \quad (\underline{F} \text{ sabit}) \quad (11.7)$$



Şekil 11.2 İmpuls kuvveti, kuvvet-zaman eğrisi altında kalan alandır

Denklem (11.7) ayrıca, kuvveti ortalama kuvvet değerine yaklaştırarak değişken bir kuvvetin impulsunu belirlemek için de kullanılabilir.



Şekil 11.3 Değişken bir kuvvetin impulsu, ortalama bir kuvvet ve ortalama bir zaman dikkate alınarak belirlenir

Şu aşamaya kadar elde edilmiş tüm denklemlerde, kütle (m) dışındaki tüm parametreler vektörel bir nicelikdir. Bu parametreler, kartezyen koordinat yönleri x , y ve z boyunca dikdörtgen bileşenler açısından

temsil edilebilir. Bu yaklaşım, x, y ve z yönlerinde geçerli üç bağımsız sayısal eşitliğin kurulmasına olanak sağlayacaktır. Dolayısıyla eşitlik 11.5 şu şekilde yazılabilir:

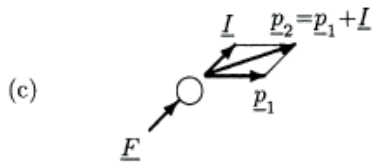
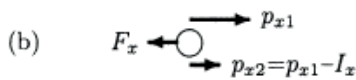
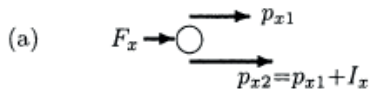
$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}_x dt = \Delta \underline{p}_x = \underline{p}_{x2} - \underline{p}_{x1} = m\underline{v}_{x2} - m\underline{v}_{x1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}_y dt = \Delta \underline{p}_y = \underline{p}_{y2} - \underline{p}_{y1} = m\underline{v}_{y2} - m\underline{v}_{y1} \quad (11.8)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}_z dt = \Delta \underline{p}_z = \underline{p}_{z2} - \underline{p}_{z1} = m\underline{v}_{z2} - m\underline{v}_{z1}$$

Tek boyutlu problemler için yukarıdaki denklemlerden herhangi biri problemleri analiz etmek için yeterlidir. Düzlemsel problemler için iki denklem gerekli olabilir. Eşitlik 11.8 kullanılırken, kuvvet, hız, momentum ve impulsun vektörel bir büyüklük olduğu unutulmamalıdır. Örneğin, pozitif x-ekseni doğrultusunda hareket eden bir cisim düşünün. t_1 ve t_2 zaman aralığında cisme hareketi yönünde bir F_x impuls kuvvetinin uygulandığını varsayalım (Şekil 11.4a). Cismin momentumu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{x2} = p_{x1} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$



Şekil 11.4 İmpuls ve momentumun skaler ve vektörel bileşenleri

Yukarıdaki eşitliğin sonucunda, son momentumun, cismin sahip olduğu ilk momentum ile impulsun toplamına eşit olduğu sonucu çıkarılabilmektedir. Cismin hareket yönüne ters yönde etki edecek bir kuvvet uygulanırsa (Şekil. 11.4b) cismin son momentumu, ilk momentum ile impuls arasındaki farka eşit olacaktır.

$$p_{x2} = p_{x1} - \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

Cismin hareketi ile cisme uygulanan impuls kuvvetinin yönleri bir birinden farklı ise impuls ve momentuma ayrı ayrı vektörel nicelik olarak davranılması problemi kolaylaştıracaktır. (Şekil 11.4c). İmpuls ile momentum aynı birim ve büyüklüğe (ML/T) sahiptir. Bu birimlerin farklı sistemlerde gösterimi Tablo 11.1'de gösterilmiştir.

Tablo 11.1 İmpuls ve momentumun birimleri

Birimler Sistemi	İmpuls ve Momentumun Birimleri
SI	kg m/s = Ns
c-g-s	g cm/s = dyn s
İngiliz	slug ft/s = lbs

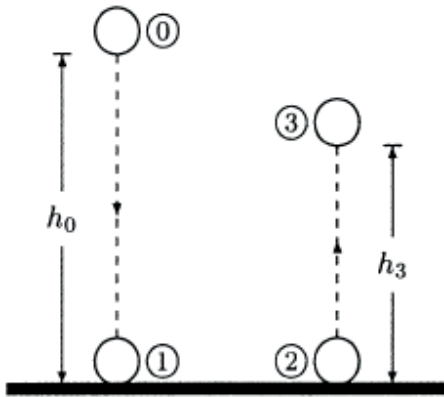
11.3 İmpuls ve Momentum Metodunun Uygulama Alanları

İmpuls ve momentum kavramının birçok uygulama alanı mevcuttur. Bu kavramlar, çarpışma ve impuls kuvvetlerinin etki ettiği durumların analizinde kullanılabilir. İmpuls-momentum teorisi, birçok atletik, spor ve günlük aktivitelerde rol oynayan kuvvetlerin

belirlenmesinde kullanılabilir. Bu yöntem, bir futbol topu üzerine ayak veya alın tarafından (bu kuvvetler topun alın ve ayağa uyguladığı kuvvetler ile aynı kuvvetlerdir.) uygulanan kuvvetleri araştırmamıza olanak sağlamaktadır. Yürürken ve koşarken etki eden kuvvetleri ve uzun atlamadan sonra iniş sırasında veya rutin bir egzersiz sonrası vücudun çeşitli eklemlerine ayaklar tarafından iletilen kuvvetlerin analizinde de aynı teknik kullanılabilir. Yöntemin diğer uygulama alanları, golf sopası tarafından golf topuna, beysbol sopası tarafından beysbol topuna ve raket tarafından tenis topuna uygulanan kuvvetlerin analizini içermektedir.

Örnek 11.1 Şekil 11.5'te gösterildiği gibi kütlesi $m=0,25$ kg olan bir topun 1 metre yükseklikten ($h_0=1$ m) bırakıldığını düşünün. Top zemine çarptıktan sonra geri sıçrayarak $h_3=0,75$ m yüksekliğe çıkmaktadır.

Topun zemine çarpmadan hemen önceki ve çarptıktan hemen sonraki momentumunu hesaplayın. Çarpışma süresinin (temas süresi) $\Delta t=0,01$ s olduğu varsayıldığında, çarpışma sırasında zemin tarafından topa uygulanan ortalama kuvveti hesaplayınız.



Şekil 11.5 Topun yere çarpması ve geri sıçraması

Çözüm

0, 1, 2 ve 3 numaralı noktaların hareketin her aşamasına (serbest bırakılma, çarpışma, sıçrama ve 0,75m yüksekliğe ulaşma) karşılık gelen bölgeler olduğunu varsayalım. Çarpışma anındaki topun hızı, v_1 , enerjinin korunumu yasası kullanılarak bulunabilir. $v_0=0$ ve $h_0=0$ olduğundan,

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Eşitliği v_1 için çözdüğümüzde ve sonrasında verilenleri yeni eşitlikte yerine koyduğumuzda;

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2(9,8)(1)} = 4,43 \text{ m/s}$$

sonucu elde edilmektedir. Benzer şekilde, topun çarpışmadan hemen sahip olduğu v_2 hızı, topun 2 ile 3 noktası arasında hareket ettiği düşünülerek çözülebilir. $v_3=0$ ve $h_2=0$ olduğundan,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_3$$

Eşitliği v_2 için çözerek verilenleri yeni eşitlikte yerine koyduğumuzda;

$$v_2 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2(9,8)(0,75)} = 3,83 \text{ m/s}$$

sonucu elde edilmektedir. Çarpışmadan hemen önce ve sonrasındaki topun sahip olduğu momentumlar:

$$p_1 = mv_1 = (0,25)(4,43) = 1,11 \text{ kg m/sn } (\downarrow)$$

$$p_2 = mv_2 = (0,25)(3,83) = 0,96 \text{ kg m/sn } (\uparrow)$$

Vektör şeklinde,

$$\underline{P}_1 = -1,11\mathbf{j}(\text{kg m/sn})$$

$$\underline{P}_2 = 0,96\mathbf{j}(\text{kg m/sn})$$

Çarpışma sırasında topun momentumundaki değişim;

$$\Delta \underline{p} = \underline{p}_2 - \underline{p}_1 = (0,96\hat{j}) - (-1,11\hat{j}) = 2,07\hat{j} \text{ (kg m/sn)}$$

Çarpışma sırasında zeminin topa uyguladığı kuvvet, çarpışma sırasında impuls kuvvetinin hemen hemen sabit kaldığı varsayılarak hesaplanabilir. Eşitlik 11.7’de verilen impuls-momentum teorisi kullanılarak,

$$\underline{F}\Delta t = \Delta \underline{p}$$

Eşitliği bilinmeyen \underline{F} kuvveti için çözdüğümüzde;

$$\underline{F} = \frac{\Delta \underline{p}}{\Delta t} = \frac{2,07\hat{j}}{0,01} = 207\hat{j} \text{ (N)}$$

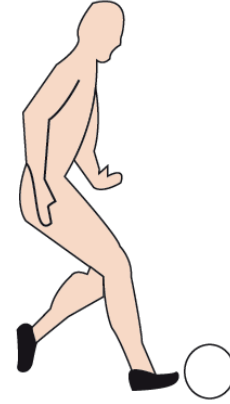
sonucuna ulaşılmaktadır.

Notlar

- Hesaplanan ortalama impuls kuvvetinin büyüklüğü, topun kütlesinden kaynaklı yer çekim kuvvetinden (ki bu yaklaşık 2.5 N) oldukça fazladır. Bu sonuç, çarpışma içeren problemler için çarpışan cisimler (bu durumda top ve zemin) arasındaki impuls kuvvetinin en baskın kuvvet olduğunu ve diğer dış kuvvet etkilerinin tamamının ihmal edilebileceğini önermektedir.
- Hesaplanan ortalama kuvvet temas süresine (Δt) bağlıdır.
- $v_2=3,83 \text{ m/s}$ hızının $v_1=4,43 \text{ m/s}$ hızından küçük olması gerçeği, çarpışma öncesi topun sahip olduğu kinetik enerjinin bir kısmı çarpışma anında ısı enerjisine dönüşerek kaybedildiğini göstermektedir. Kaybedilen enerji miktarı, çarpışma öncesi

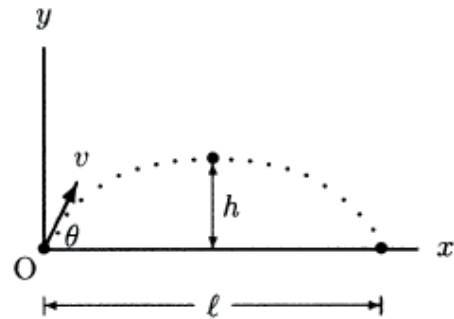
ve çarpışma sonrası topun sahip olduğu kinetik enerjiler arasındaki farktan hesaplanabilmektedir.

Örnek 11.2 Bir futbolcunun sabit duran bir topa vurduğunu düşünün (Şekil 11.6). Hava direncinin etkisi ihmal edilirse, top eğik harekete maruz kalmaktadır (Şekil. 11.7).



Şekil 11.6 Oyuncu top üzerine impuls kuvveti uyguluyor

Topun kütlesi $m=0,5 \text{ kg}$, yatay eksendeki hareket mesafesi $l=40\text{m}$, topun havada ulaşabildiği maksimum yükseklik $h=4\text{m}$ ve oyuncunun ayağının top ile temas süresi $\Delta t=0,1\text{s}$ olduğunu varsayalım. Verilen bu bilgiler çerçevesinde topun çıkış anındaki momentumunu ve oyuncu tarafından topa uygulanan tepki kuvvetini hesaplayınız.



Şekil 11.7 Top eğik hareket gerçekleştiriyor

Çözüm

Topun çıkış anındaki momentumunu hesaplayabilmek için ilk önce topun çıkış hızını ve çıkış açısını hesaplamamız gerekmektedir. Bu hesaplamalar için, bölüm 7.10'da verilen eşitlikleri kullanabiliriz. Topun çıkış açısı eşitlik 7.35 kullanılarak maksimum yükseklik ve yatay eksendeki eğik hareket mesafesi cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$\theta = \arctan\left(\frac{4h}{l}\right)$$

$h=4$ m ve $l=40$ m sayısal verilerini yukarıdaki denklemde yerine koyduktan sonra gerekli işlemleri yaptıktan sonra,

$$\theta = \arctan\left[\frac{4(4)}{40}\right] = 21,8^\circ$$

Eşitlik 8.40'ı kullanarak topun çıkış hızını hesaplamak mümkün olmaktadır;

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2(9,8)(4)}}{\sin 21,8^\circ} = 23,8 \text{ m/sn}$$

Çıkış hızı v hem x hem de y yönünde bileşenleri vardır ve bunların büyüklüğü,

$$v_x = v \cos \theta = (23,8)(\cos 21,8^\circ) = 22,1 \text{ m/sn}(\rightarrow)$$

$$v_y = v \sin \theta = (23,8)(\sin 21,8^\circ) = 8,8 \text{ m/sn}(\uparrow)$$

Sonuç olarak, topun çıkış hızının vektörel gösterimi;

$$\underline{v} = 22,1\underline{i} + 8,8\underline{j}(\text{m/sn})$$

Topun çıkış anındaki (çarpışmadan hemen sonraki) momentumu şu şekilde belirlenebilir,

$$\underline{p} = m\underline{v} = 0,5(22,1\underline{i} + 8,8\underline{j}) = 11\underline{i} + 4,4\underline{j}(\text{kg. m/sn})$$

Top sabit olduğundan topun futbolcunun topa vurmadan hemen önceki momentumu sıfırdır. Bu yüzden, oyuncunun ayağı ile etkileşim

süresince topun momentumundaki değişim, topun çıkış momentumuna eşittir. impuls-momentum eşitliği [Denklem (11.7)] şimdi oyuncunun topa uyguladığı ortalama impuls kuvvetinin hesaplanması için kullanılabilir;

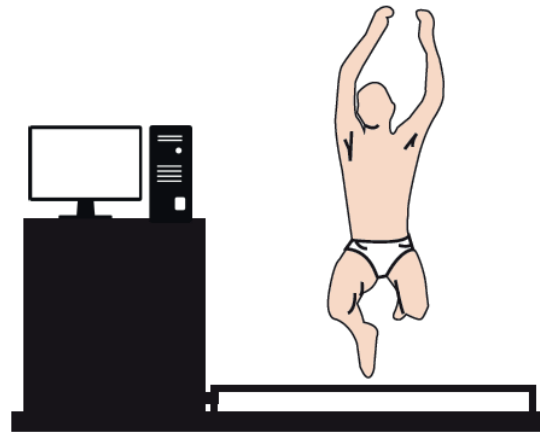
$$\underline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{11\underline{i} + 4,4\underline{j}}{0,1} = 111\underline{i} + 44\underline{j}(\text{N})$$

Sonuç olarak, oyuncu tarafından topa uygulanan net veya bileşke kuvvet;

$$F = \sqrt{(111)^2 + (44)^2} = 119,4\text{N}$$

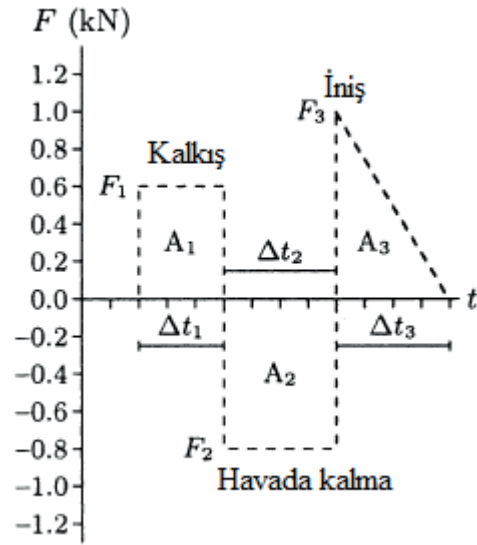
Etki ve tepki kuvvetlerinin büyüklükleri birbirine eşit olması gerektiğinden, F kuvveti aynı zamanda topun futbolcunun ayağına uyguladığı kuvvettir.

Örnek 11.3 *Kuvvet platformu*, Şekil. 11.8'de gösterildiği gibi, düz, dikdörtgen şekilli üst yüzeyinde oluşturulan kuvvetleri elektronik olarak kayıt altına alan kuvvete karşı duyarlı bir cihazdır. Bu cihaz, yürüme, koşma, zıplama ve diğer aktiviteler esnasında oluşan impuls kuvvetlerinin ölçülmesinde kullanılır.



Şekil 11.8 Kuvvet platformu

Kuvvet düzlemine dik bir zıplayış yapan atlet için kaydedilmiş kuvvet zaman grafiğinin Şekil. 11.9'da gösterildiği gibi olduğunu düşünün. Kuvvet ölçeği atletin kilosuna göre normalleştirilmiş ve böylece atlet sabit iken (hareketsiz dikilirken veya çömelirken) kuvvet değeri sıfır olarak okunmaktadır. Kuvvet ölçümünün normalleştirilmesinin nedeni, yer çekim ivmesini, impuls hesabında ihmal edebilmek içindir. Bu durumda, pozitif bir kuvvet, kişinin ağırlığı dışında diğer faktörler tarafından platforma bir kuvvet uygulandığı anlamına gelmektedir. Kuvvet zaman grafiği üç farklı bölgeye sahiptir. Başlangıçta atletin platforma uyguladığı pozitif bir “çıkış itiş”, atletin platform ile temasının olmadığı “havada kalma” bölgesi ve atletin platforma tekrardan impuls kuvveti uyguladığı “iniş” periyodu mevcuttur. Bu bölgeler, A_1 ve A_2 dikdörtgen alanlar ve üçgen (A_3) alan olarak benzetilmiştir. Bölgelerin sınırları kesikli çizgi şeklinde Şekil.11.9'da gösterilmektedir. Çıkış itiş sırasındaki ortalama kuvvet ve zaman yaklaşık olarak $F_1=600\text{N}$ ve $\Delta t_1=0,3\text{s}$ olarak ölçülmüştür. Atletin havada kaldığında kuvvet $F_2= - 800\text{N}$ olarak okunmuş ve havada kalma süresi $\Delta t_2=0,4\text{s}$ 'dir. Bu veriler ışığında, atletin kütesinin yaklaşık 800 N olduğu sonucuna varılabilmektedir. Sonuç olarak, atletin ağırlığı $m=(800\text{N})/(9,8\text{ m/s}^2)=82\text{ kg}$ 'dır. İniş sırasında, atletin platforma uyguladığı maksimum impuls kuvveti $F_3=1000\text{N}$ $\Delta t_3=0,4\text{s}$ içerisinde sıfıra (normalleştirilmiş kuvvet değeri) düşmektedir.



Şekil 11.9 Atlet için normalleştirilmiş kuvvet – zaman grafiği

Atletin ağırlık merkezinin ortalama çıkış hızını, sıçramanın yüksekliğini ve atletin iniş sırasında impuls ve momentumunu kuvvet zaman grafiği altında kalan alanlar vasıtasıyla hesaplayınız.

Çözüm

Önerilen varsayımlar altında, problemin analizi oldukça basittir. Tüm yapmamız gereken, impuls – momentum denklemini kullanmaktır. Kuvvet zaman grafiği altında kalan A_1 ile gösterilen dikdörtgen alanın, çıkış anındaki impuls değerine eşittir;

$$A_1 = F_1 \Delta t_1 = (600)(0,3) = 180 \text{ Ns}$$

Atletin çıkıştan önceki hızı sıfırdır ve dolayısıyla impuls çıkış anında momentuma dönüşmüştür. v_t çıkış hızıysa, impuls-momentum denkleminin [denklem 11.7] aşağıdaki sadeleştirilmiş hali almaktadır:

$$A_1 = F_1 \Delta t_1 = \Delta p = mv_T$$

Yukarıdaki eşitliği çıkış hızı için çözdüğümüzde;

$$v_T = \frac{F_1 \Delta t_1}{m} = \frac{180}{82} = 2,2 \text{ m/s}$$

Enerjini korunumu prensibi kullanılarak sıçramanın yüksekliği bulunabilir. Tam çıkış anında, atlet $mv_t^2/2$ kadarlık bir kinetik enerjiye ve sıfır potansiyel enerjiye sahiptir. Atlet yükseldikçe, kinetik enerji potansiyel enerjiye dönüşmektedir. Atletin ulaşabildiği maksimum yükseklik olan h yüksekliğine ulaştığında, atletin sahip olduğu kinetik enerji sıfır olmakta ve potansiyel enerjisi mgh olmaktadır. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2}mv_t^2 = mgh$$

Yukarıdaki eşitliği atletin ağırlık merkezinin ulaşabildiği maksimum yükseklik için çözersek,

$$h = \frac{v_t^2}{2g} = \frac{(2,2)^2}{2(9,8)} = 0,25 \text{ m}$$

İniş sırasında kuvvet platformuna atlet tarafından uygulanan impuls, kuvvet zaman grafiğinde A_3 ile gösterilen üçgen alana eşittir.

$$A_3 = \frac{F_3 \Delta t_3}{2} = \frac{(1000)(0,4)}{2} = 200 \text{ Ns}$$

İniş anı sırasında, atletin aşağı yönlü hızı sıfıra kadar azalmakta ve iniş sırasında hesaplanan impuls aslında atletin iniş anındaki momentumuna, p_L , eşittir,

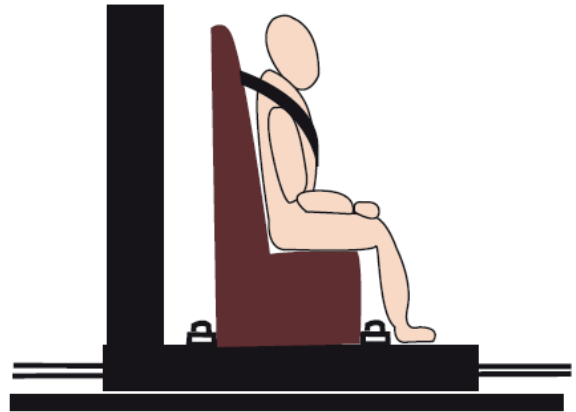
$$p_L = A_3 = 200 \text{ Ns}$$

Burada atletin iniş hızını aşağıdaki gibi hesaplayabileceğiz;

$$v_L = \frac{p_L}{m} = \frac{200}{82} = 2,4 \text{ m/s}$$

Örnek 11.4 Otomobil yolcuları için emniyet kemerlerinin dayanıklılığın ölçülebilmesi için laboratuvar ortamında bir darbe test ekipmanı kurulmuştur (Şekil.11.10). 70 kg'lık manken taşıyan test aracının başlangıçtaki yatay hızı 100 km/s olacak şekilde ayarlanmıştır. Test aracı ve mankenin hızı 0,1s zaman aralığı içerisinde sıfıra getirilmektedir.

Sürtünme etkisi ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunu varsayarsak, manken tarafından emniyet kemerine uygulanan yataydaki ortalama kuvveti bulunuz.



Şekil 11.10 Darbe testi

Çözüm

Sürtünme kuvveti olmadığı durumda, emniyet kemeri mankenin hareketini kısıtlamasaydı manken pozitif x-yönü (sağa doğru) doğrultusunda ilerlemeye devam edebilirdi. Emniyet kemeri manken üzerine negatif x-yönü doğrultuda mankeni $\Delta t=0,1$ s zaman aralığında durdurabilecek bir kuvvet uygulamaktadır. Frenlemenin yapıldığı anda,

test aracının ve mankenin hızı $v_1=100$ km/s veya 27.8 m/s'dir. Bu yüzden, aynı anda mankenin momentumu;

$$p_1 = mv_1 = (70)(27,8) = 1946 \text{ kg m/sn}$$

Vektör gösterimi ile, $p_1=1946\hat{i}$ kg m/s. $\Delta t=0,1$ s zaman aralığında, mankenin hızı sıfıra ulaşmaktadır. Bu yüzden, mankenin 0,1s sonundaki momentumu sıfırdır.

$$\underline{p}_2 = 0$$

İmpuls-momentum teorisine göre, mankenin momentumundaki değişim emniyet kemeri tarafından mankene uygulanan impulsa eşit olmalıdır;

$$\underline{F}\Delta t = \underline{p}_2 - \underline{p}_1$$

veya,

$$\underline{F} = \frac{\underline{p}_2 - \underline{p}_1}{\Delta t} = \frac{0 - 1946\hat{i}}{0,1} = -19460\hat{i} \text{ (N)}$$

Sonuç olarak, emniyet kemeri, mankene negatif x-yönünde F 19460N'luk bir kuvvet uygulamaktadır. Etki ve tepki kuvvetleri eşit büyüklüklere sahip olmasından dolayı, F kuvveti aynı zamanda mankenin emniyet kemerine uyguladığı kuvvettir. Uygun bir emniyet kemeri tasarlanmasında amaçlanıyorsa, bulunan bu sonuç emniyet kemeri malzemesi 19,5 kN'luk kuvvetten daha fazla bir kuvvete dayanabilecek şekilde seçilmelidir.

11.4 Doğrusal Momentumun Korunumu

Hareket denklemi [denklem (11.4)], nesneye uygulanan bileşke kuvveti ile nesnenin momentumunun zamana göre değişimini

ilişkilendirmektedir. Nesne üzerindeki bileşke kuvvet sıfır (yani nesne dengede) ise, momentumun zamana göre değişimi de sıfırdır ve nesnenin momentumu sabittir. Bu durum, *doğrusal momentumun korunumu ilkesi* olarak bilinmektedir. Momentumun korunumu, özellikle çarpma ve çarpışma analizleri için yararlıdır.

Birbiriyle etkileşim halinde olan iki nesneyi düşünün. Bu nesnelerin çevrelerinden izole edildiğini ve böylece birbirlerine uyguladıkları kuvvetler dışında herhangi bir harici kuvvetin olmadığını varsayalım. Bir başka deyişle, dış kuvvet etkileri, birbirlerine uyguladıkları kuvvetlerle karşılaştırıldığından ihmal edilebilecek kadar küçüktür ve bu özellikle çarpma ve çarpışma durumunda geçerlidir. Herhangi bir t zamanında, bu iki nesnenin sırasıyla \underline{p}_1 ve \underline{p}_2 momentumuna sahip olduklarını varsayalım. \underline{F}_{12} , nesne 2 tarafından nesne 1'e uygulanan kuvvet, \underline{F}_{21} , nesne 1 tarafından nesne 2'ye uygulanan kuvvet olsun. Denklem 11.4'ü kullanarak:

$$\underline{F}_{12} = \frac{d\underline{p}_1}{dt}, \quad \underline{F}_{21} = \frac{d\underline{p}_2}{dt}$$

Newton'un üçüncü yasası uyarınca, etki ve tepki kuvvetleri büyüklük bakımından eşit ve birbirine zıt yönde olmalıdır ($\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$) veya;

$$\underline{F}_{12} + \underline{F}_{21} = \frac{d\underline{p}_1}{dt} + \frac{d\underline{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) = 0$$

Bu denge durumu aşağıdaki eşitlik ile sağlanabilmektedir:

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{constant} \quad (11.9)$$

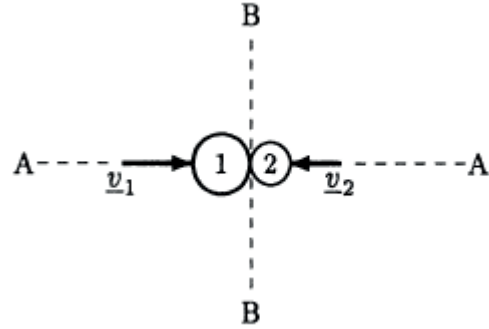
Denklem 11.9 izole edilmiş bir sistemi oluşturan birbiriyle etkileşim halindeki iki nesne için doğrusal momentumun korunması ilkesini göstermektedir. İki nesne çarpıştığında, ikisi arasındaki kuvvetlerin niteliğine bakılmaksızın toplam momentumun sabit kalacağını belirtmektedir.

11.5 Çarpma ve Çarpışmalar

İki nesne çarpıştığında, ilgili kuvvetlerden dolayı bir dereceye kadar deformasyona uğrarlar. Deformasyon miktarının, nesnenin malzeme özelliklerine, uygulanan kuvvetin süresi ve büyüklüğüne ve sıcaklık gibi diğer koşullara bağlı olduğunu biliyoruz. Genel olarak, bir nesne *elastik* deformasyona, *plastik* deformasyona veya her ikisine birden maruz kalabilir. Elastik deformasyon, deformasyona neden olan kuvvetin serbest bırakılmasıyla deformasyon geri kazanılabilirken, plastik deformasyon kalıcıdır.

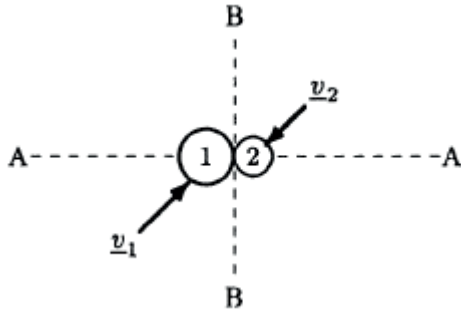
İki nesnenin çarpışma hızlarının yönelimi veya deformasyonlarının niteliğine göre ayırt edilebilen çeşitli çarpışma türleri vardır. Şekil.11.11’de gösterildiği gibi, iki nesne *direkt merkezci çarpışma* olarak bilinen “kafa-kafaya” çarpışma yapabilir. Bu durumda, nesnelerin hızları, çarpışma eksenine eşdoğrultuludur. *Çarpışma çizgisi* (AA), çarpışan nesnelerin kütle merkezlerinden geçen hayali bir çizgidir ve temas yüzeylerine teğet olan *teğet eksene* (BB) diktir. Şekil. 11.12 iki

nesnenin *eğik merkezci çarpışması* gösterilmektedir. Bu durumda, nesnelerin çarpma hızları çarpma eksenine eşdoğrultuda değildir.



Şekil 11.11 Direkt merkezci çarpışma

Çarpışmalar, bir çarpışma sırasında meydana gelen deformasyonların niteliğine göre de ayırt edilebilir. *Elastik veya tamamen esnek çarpışma*, hem toplam momentumun hem de sistemin (yani iki nesne) toplam kinetik enerjisinin korunduğu çarpışmalar olarak tanımlanır. Öte yandan, *esnek olmayan veya plastik çarpışma* için yalnızca sistemin toplam momentumu korunmaktadır. Esnek olmayan çarpışma sırasında, çarpışan nesnelerin kinetik enerjilerinin bir kısmı ısı olarak yayılmaktadır. Esnek olmayan çarpışmanın uç hali, *tamamen esnek olmayan çarpışma* olarak adlandırılmaktadır. Bu, nesnelerin çarpışma sonrası birbirine yapıştığı ve ortak bir hız ile birlikte hareket ettiği çarpışma türüdür.



Şekil 11.12 Eğik merkezci çarpışma

Bir çarpışmanın esnek veya esnek olmayan bir çarpışma olmasına bakılmaksızın, sistemin toplam momentumu korunur. Bu yüzden, çarpma ve çarpışma problemlerinin analizi momentumun korunumu prensibine dayanmaktadır. m_1 ve m_2 kütleli nesnelerin çarpıştığını ve 1 ve 2 numaralı nesnelerin hızlarının sırasıyla v_1 ve v_2 olduğunu düşünün. Ayrıca, çarpışmadan hemen öncesi ve sonrası anları "i" ve "f" harfi ile isimlendirelim. t_i ve t_f zaman aralığında, momentumun korunumu ilkesi [denklem (11.9)] şu şekilde ifade edilebilir:

$$m_1 \underline{v}_{1i} + m_2 \underline{v}_{2i} = m_1 \underline{v}_{1f} + m_2 \underline{v}_{2f} \quad (11.10)$$

Farklı çarpışma türlerinin özellikleri, öncelikle tek boyutlu durumlar göz önüne alınarak sağlanacaktır. Bu kavramlar, daha sonra, ilgili parametrelerin vektör özelliklerini kullanarak iki boyutlu çarpışmaları analiz etmek üzere genişletilecektir.

11.6 Tek Boyutlu Çarpışmalar

Düz bir hattaki çarpışmalar (yani doğrudan merkezci çarpışma), eşitlik 11.10 aşağıdaki skaler halde basitleştirilebilir:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (11.11)$$

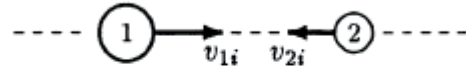
11.6.1 Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar

Bu denklem hem esnek hem de esnek olmayan çarpışmalar için geçerlidir.

Tamamen esnek olmayan çarpışmalar, nesnelerin birbirine yapıştığı ve sonrasında v_f ortak hızıyla hareket ettiği çarpışmalar olarak tanımlanmaktadır (Şekil. 11.13). v_f hızını belirleyebilmek için, çarpışma sırasında momentumun korunumu prensibini uygulamak yeterli olacaktır. Eşitlik 11.11'e $v_{1f} = v_{2f} = v_f$ terimini yazar ve eşitliği v_f için çözersek;

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (11.12)$$

Çarpışmadan önce



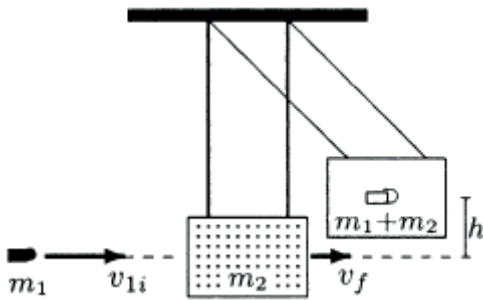
Çarpışmadan sonra



Şekil 11.13 Tamamen esnek olmayan çarpışma

Örnek 11.5 Şekil 11.14 hafif tellerle asılmış ahşap blok olabilen bir *balistik sarkacı* göstermektedir. Bu basit alet, bir merminin hızını ölçmek için kullanılabilir. Hareketsiz duran m_2 kütleli bloğa ateşlenen m_1 kütleli mermi, bloğa nüfus etmekte ve m_1+m_2 kütleli mermi-blok sistemi h yüksekliğine kadar salınır.

Merminin blok içerisinde kaldığını varsayarak, merminin çarpışmadan hemen önceki v_{1i} ilk hızı için, m_1 , m_2 ve h terimlerine bağlı bir ifade elde ediniz.



Şekil 11.14 Balistik sarkaç

Çözüm

Bu, tamamen esnek olmayan çarpışma için tipik bir örnektir. Bloğun çarpışmadan hemen önceki hızı sıfırdır. Çarpmanın hemen sonrasında, blok kinetik enerji kazanmaktadır. Çarpışmadan hemen sonraki hızı v_f olarak tanımlarsak, mermi-blok sistemi $(m_1+m_2)v_f^2/2$ kadar kinetik enerjiye sahiptir ve bu kinetik enerji blok h yüksekliğine salınırken $(m_1+m_2)gh$ kadarlık bir potansiyel enerjiye dönüşmektedir. Enerjinin korunumu prensibi uygulandığında;

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$

Denklemleri çarpışmadan hemen sonraki ortak v_f hızı için çözersek;

$$v_f = \sqrt{2gh} \quad (i)$$

Çarpışma sırasında sistemin toplam momentumu korunacaktır. Çarpışma öncesi bloğun hızı sıfır olduğundan, eşitlik 11.12 aşağıdaki sadeleşmiş hali almaktadır:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

Denklemleri v_{1i} için eşitlik (i)'yi kullanarak çözersek,

$$v_{1i} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}$$

11.6.2 Tamamen Esnek Çarpışma

Tamamen esnek çarpışma, toplam kinetik enerjinin yanı sıra ilgili nesnelerin toplam momentumunun korunduğu bir çarpışmadır (Şekil. 11.15). Çarpışma sırasında toplam kinetik enerjinin korunumu koşulları şu şekilde yazılabilir:

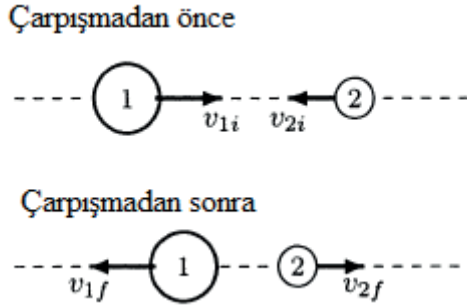
$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \quad (1.13)$$

Bu durumda, eşitlik 11.11 ve 11.13 v_{1f} ve v_{2f} bilinmeyenleri için aynı anda çözümlenmelidir. Bu eş zamanlı çözüm;

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (11.14)$$

$$v_{1f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (11.15)$$

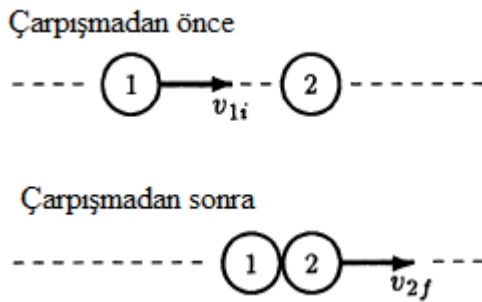
Bu noktada, hızın vektörel bir nicelik olduğunu ve ilgili tüm hızlar için uygun yön işaretlerinin eşitlikler 11.12, 11.14 ve 11.15'e dahil edilmesi gerektiğini unutmamalısınız. Bu amaçla, pozitif hareket yönü seçilmelidir. Aynı yönde hareket eden hızlar pozitif, ters yönde hareket edenler ise negatif kabul edilmelidir.



Şekil 11.15 Tamamen esnek çarpışma

Örnek 11.6 Şekil. 11.16'da gösterildiği gibi, m kütleli bilardo toplarının tamamen esnek çarpıştıklarını düşünün. Çarpışma öncesi, 1 numaralı top v_1i hızına sahipken 2 numaralı top hareketsizdir.

Direkt merkezci çarpışma olduğunu varsayarak, topların çarpışmadan hemen sonraki hızlarını bulunuz.



Şekil 11.16 İki özdeş bilardo topunun tamamen esnek çarpışması

Çözüm

Topların kütlelerinin eşit olduğu (yani $m_1 = m_2 = m$) ve toplardan birinin çarpışma öncesi hareketsiz olması ($v_{2i} = 0$) gerçeği problemi oldukça kolaylaştırmaktadır. Kütleler eşit olduğundan, $m_1 - m_2 = m_2 - m_1 = 0$ ve $2m_1/(m_1 + m_2) = 1$ sonuçları elde edilebilir. Sonuç olarak, eşitlik 11.14'ün sağ tarafındaki ilk terim ve eşitlik 11.15'in sağ tarafındaki ikinci terim sıfırdır. ($v_{2i} = 0$) olduğundan, eşitlik 11.14'ün sağ tarafındaki ikinci terimde sıfırdır. Buradan, hareketin pozitif yönünün sağa doğru olduğu seçilirse, eşitlik 11.14 ve 11.15 şu sonucu vermektedir;

$$v_{1f} = 0$$

$$v_{2f} = v_{1i} = 0$$

1 numaralı topun çarpışmadan hemen önceki kinetik enerjisi ve momentumu, çarpışma sırasında tamamen 2 numaralı top için kinetik enerji ve momentuma dönüştüğüne dikkat ediniz.

11.6.3 Elastoplastik Çarpışma

Aslında, malzeme hem elastik hem de plastik deformasyona uğrayabilir. Bu tür malzemelerden üretilmiş nesnelerin çarpma özelliklerinin analizini kolaylaştırmak için göreceli ayrımın göreceli hızının yaklaşımın göreceli hızına oranı olarak tanımlanan geri sıçrama katsayısı adı verilen bir kavram

geliştirilmiştir. e iki malzeme arasındaki geri tepme katsayısının temsil ediyorsa, o zaman;

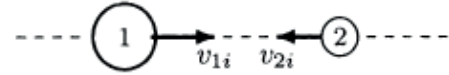
$$e = \frac{\text{Ayrımın göreceli hızı}}{\text{Yaklaşımın göreceli hızı}} \quad (11.16)$$

Geri sıçrama katsayısı 0 ile 1 arasında bir değer alabilir, öyle ki, tamamen esnek olmayan çarpma için $e = 0$ ve tamamen esnek olan çarpma için $e = 1$ olmaktadır. Geri sıçrama katsayısı pozitif bir değerdir ve e hesaplanırken yaklaşma ve ayrılmanın göreceli hızlarının mutlak değerleri göz önüne alınmalıdır. Şekil. 11.17'de gösterilen iki nesneyi düşünün. Çarpışma öncesi, nesne 1, v_{1i} hızı ile sağa doğru hareket ederken, nesne 2, v_{2i} hız ile sola doğru hareket etmektedir. Bu nedenle, yaklaşımın göreceli hızı $v_{1i} + v_{2i}$ olacaktır. Çarpışma sonrası nesnelerin v_{1f} ve v_{2f} hızları ile zıt yönlere doğru hareket ettiklerini varsayalım. Bu durumda, ayrımın göreceli hızı $v_{1f} + v_{2f}$ olur. Nesnelere çarpışma öncesi aynı yöne doğru hareket etmiş olsalardı, yaklaşımın göreceli hızı $v_{1i} - v_{2i}$ olur. Çarpışma sonrası da aynı yönde hareket etmiş olsalardı, ayrımın göreceli hızı $v_{1f} - v_{2f}$ olacaktı. Nesnelere biri çarpışma öncesi ve sonrasında sabit kalıyor ise, o zaman geri sıçrama katsayısı, nesnenin son ve ilk hızlarının oranı dikkate alınarak belirlenebilir. Aslında bu, iki nesne arasındaki geri sıçrama katsayısını ölçmek için en kolay yöntemdir.

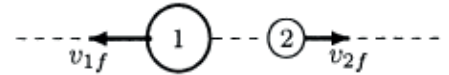
Geri sıçrama katsayısı, çarpışmadaki nesnelerin malzeme özelliklerine bağlıdır.

Sıcaklık, malzemenin mekanik özelliklerini değiştirdiğinden geri sıçrama katsayısına da etki edebilecek faktörlerdendir. Örneğin, bir top ısıtıldıktan sonra daha iyi sıçrama hareketi yapar. Top, tenis topu gibi, hava ile doldurulursa, ısı topun iç basıncını da artırabilir. Son derece iyi şişirilmiş bir top, düz bir toptan daha iyi sıçrayabilir. Bir top çarpma sırasında deforme olduğunda, enerjisinin bir kısmı ısı olarak dağılır. Sıcaklığın yükselmesi, topun nispeten daha yüksek bir oranda çarpmaya maruz kaldığı tenis ve squash gibi oyunlarda önemlidir. İki nesne arasındaki geri sıçrama katsayısını etkileyebilecek bir diğer faktör de yaklaşmanın göreceli hızıdır. Yaklaşmanın hızı ne kadar yüksekse, geri sıçrama katsayısı o kadar düşük olacaktır.

Yaklaşma Hızı



Ayrılma Hızı

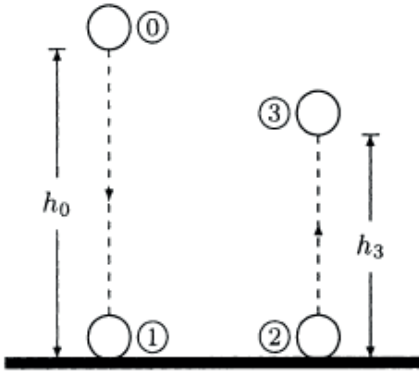


Şekil 11.17 İki çarpışan nesne arasındaki yeniden yerleştirme katsayısı, ayrılma ve yaklaşmanın göreceli hızlarının oranı olarak tanımlanır.

Örnek 11.7 Örnek 11.1'de analiz edilen, $m=0,25$ kg kütleli topu düşünün. Şekil. 11.18'de gösterildiği top $h_0=1m$ yükseklikten bırakılıyor. Zemine çarptıktan sonra, top sıçramakta $veh_3 = 0.75m$ yüksekliğe

ulaşmaktadır. 0 ile 1 ve 2 ile 3 arasında enerjinin korunumu prensibini kullanarak, topun zemine çarpma öncesi ve sonrası hızlarını $v_1 = 4.43 \text{ m/s}$ ve $v_2 = 3.83 \text{ m/s}$ olarak hesapladık.

Top ile zemin arasındaki geri sıçrama katsayısı nedir ve çarpma sırasında ne kadarlık bir enerji kaybolmaktadır?



Şekil 11.18 Topun çarpıp geri sıçraması

Çözüm

Tanım olarak, geri sıçrama katsayısı ayrımın ve yaklaşmanın hızlarının oranına eşittir. Bu durumda, zemin çarpma öncesi ve sonrasında sabittir. Bu nedenle, çarpmadan önceki ve sonraki topun v_1 ve v_2 hızları sırasıyla, yaklaşmanın ve ayrımın görece hızlarının büyüklükleridir. Sonuç olarak, top ile zemin arasındaki geri sıçrama katsayısı şöyledir,

$$e = \frac{v_2}{v_1} \quad (i)$$

Sayısal değerlerin girilmesi ve hesaplamaların yapılmasıyla;

$$e = \frac{3,83}{4,43} = 0,86$$

Çarpışma sırasında kaybedilen enerji miktarı (ısıya sese veya iç potansiyel enerjiye dönüşen), çarpışmadan önce ve sonra topun sahip olduğu kinetik enerjilerindeki farkın hesaplanmasıyla belirlenebilir:

$$\varepsilon_{K2} - \varepsilon_{K1} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -0,62J$$

Geri sıçrama katsayısı (sabit bir yüzeye çarpan ve geri dönen bir top için eşitlik (i) ile gösterilir.) alternatif olarak, topun bırakıldığı ilk yükseklik h_0 ve topun geri sektiği son yükseklik h_3 açısından yazılabilir. Örnek 11.1'de, enerjinin korunumu prensibi kullanılarak, $v_1 = (2gh_0)^{1/2}$ ve $v_2 = (2gh_3)^{1/2}$ olduğu elde edilebilir. Eşitlik (i)'ye elde edilen bu verileri yazarsak,

$$e = \sqrt{\frac{h_3}{h_0}} \quad (ii)$$

ABD Ulusal Kolejler Atletizm Birliği (NCAA) kuralı, bir basketbol topunun $h_0 = 1.8 \text{ m}$ yükseklikten bırakılması sonrası topun yaklaşık $h_3 = 0.75 \text{ m}$ yüksekliğe ulaşmasını ve yaklaşık geri sıçrama katsayısının yaklaşık $e = (1.0/1.8)^{1/2} = 0.75$ gerektirmektedir.

11.7 İki Boyutlu Çarpışmalar

Bölüm 11.14'de tartışıldığı gibi, eğer birbirleriyle etkileşime giren iki nesne çevrelerinden izole edilmişse (dış kuvvetlerin etkileri, mevcut impulsif kuvvete kıyasla ihmal edilebilirse), sistemin toplam momentumu korunur. Bu momentumun korunumu prensibi, doğrudan

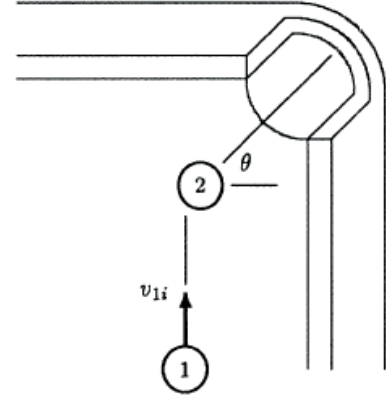
merkezli çarpışma veya tek boyutlu çarpışma gibi bazı basit sistemleri analiz etmek için uygulanır. İlgili parametrelerin vektörel özelliklerini göz önünde bulundurarak, tek boyutlu çarpışmalar için geliştirilen kavramlar, eğik merkezli çarpışma veya iki nesnenin iki boyutlu çarpışmasını analiz etmek için genişletilebilir.

İki boyutlu bir çarpışma problemi için, doğrusal momentumun korunması prensibi iki koordinat yönünde uygulanmalıdır. Ayrıca, çarpışmanın türü bilinmelidir. Örneğin, çarpışma tamamen esnek ise, o zaman sistemin toplam kinetik enerjisi de korunur. Çarpışma tamamen esnek değilse, nesnelerin çarpışma sonrası hızları birbirine eşittir.

Aşağıdaki problem, iki boyutlu çarpışma problemlerinde yer alan bazı kavramları açıklayacaktır.

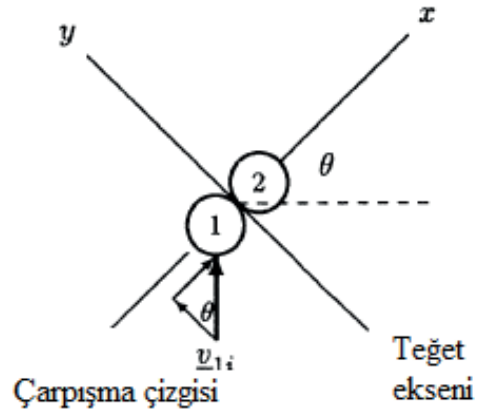
Örnek 11.8 Şekil 11.19 bilardoda oyun sırasındaki bir anı göstermektedir. Bilardocu, beyaz topu (top 1) hedef topa (top 2) çarptırarak hedef topun köşe cebine doğru hareket ettirerek hedef topu köşe cebe sokabilmeyi hedeflemektedir. Beyaz topun ilk hızının hedef topa doğru $v_{1i} = 5 \text{ m/s}$ ve hedef topun ağırlık merkezi ile köşe cebin geometrik merkezi arasındaki açının $\theta = 45^\circ$ olduğunu varsayalım (Şekil 11.20). x ve y koordinatları öyle bir seçilmiştir ki bu koordinatlar sırasıyla çarpışma eksenini (temas yüzeyine dik) ve temas düzlemi (temas yüzeyine teğet) ile çakışan

eksenleri göstermektedir. Topların eşit kütlelere sahip olduğunu ve beyaz topun hedef topa çarpışma ekseninde çarptığını varsayalım.



Şekil 11.19 İki havuz topunun eğik merkezli çarpışması

Sürtünme, rotasyon ve yer çekimi etkilerini ihmal edersek, geri sıçrama katsayısı $e = 0.8$ ise çarpışmadan hemen sonra beyaz top ile hedef topun hızlarını bulunuz.



Şekil 11.20 Çarpışma öncesi

Çözüm

Bu problem, önce x ve y yönleri boyunca ayrı ayrı analiz edilebilir ve daha sonra elde edilen sonuçlar hızın vektörel özellikleri kullanılarak birleştirilebilir. Çarpmadan önce, hedef top

sabittir ve beyaz topun hem x hem de y yönlerinde hız bileşenleri bulunmaktadır. Bu nedenle:

$$(v_{1i})_x = v_{1i} \sin \theta = (5) \sin(45^\circ) = 3,54 \text{ m/s}$$

$$(v_{1i})_y = v_{1i} \cos \theta = (5) \cos(45^\circ) = 3,54 \text{ m/s}$$

$$(v_{2i})_x = 0$$

$$(v_{2i})_y = 0$$

Sürtünme etkileri ihmal edilebilir olduğundan, y yönü boyunca olan hareket, çarpışma şansı olmayan birbirine paralel yönde hareket eden bilardo toplarına eş değerdir. Öte yandan, x yönü boyunca olan hareket, bilardo toplarının doğrudan merkezci çarpışmasına eşdeğerdir.

a) y yönü boyunca hareket:

y yönünde herhangi bir çarpışma olmamaktadır. Bu yüzden, birinci topun y yönündeki momentumu korunmaktadır:

$$m(v_{1i})_y = m(v_{1f})_y$$

$$(v_{1f})_y = (v_{1i})_y = 3,54 \text{ m/s} \quad (i)$$

Momentumun korunumu prensibini y yönünde ikinci topa uygularsak;

$$m(v_{2i})_y = m(v_{2f})_y$$

$$(v_{2f})_y = (v_{2i})_y = 0 \quad (ii)$$

b) x yönü boyunca hareket:

x yönünde, bilardo topları doğrudan merkezci çarpışma yapmakta ve bu nedenle sistemin toplam momentumu korunur. Pozitif hareket yönünün pozitif x eksenini boyunca (yani, köşe cebine doğru) olduğunu ve çarpışmadan sonra her iki topun pozitif x yönü boyunca hareket ettiğini varsayalım. Diğer bir deyişle, her iki $(v_{1f})_x$ ve $(v_{2f})_x$ pozitiftir. Toplar eşit

kütlelere sahip olduğundan, x yönü boyunca doğrusal momentumun korunumu şöyle yazılabilir:

$$m(v_{1i})_x + m(v_{2i})_x = m(v_{1f})_x + m(v_{2f})_x$$

Topların kütlelerinden kurtulur ve $(v_{2i})_x = 0$ değerini yukarıdaki denklemde yerine koyarsak;

$$(v_{1f})_x + (v_{2f})_x = (v_{1i})_x$$

Çarpışma için geri sıçrama katsayısı $e = 0.8$ olarak verilmiştir. Tanımdan, e ayrımın ve yaklaşmanın görelî hızları oranına eşittir. Çarpışma öncesi, top 2 sabittir ve dolayısıyla x yönündeki yaklaşmanın görelî hızı top 1'in x yönündeki hızına eşittir. Çarpışmadan sonra varsayılan hareket yönlerinden dolayı, ayrımın görelî hızı bilardo toplarının x yönündeki hızları farkına eşittir. $(v_{2f})_x$ hızının $(v_{1f})_x$ hızından büyük olduğunu varsayarsak;

$$e = \frac{(v_{2f})_x - (v_{1f})_x}{(v_{1i})_x}$$

Yukarıdaki eşitlik şu şekilde de yazılabilir:

$$(v_{2f})_x - (v_{1f})_x = e(v_{1i})_x \quad (iv)$$

$(v_{1f})_x$ ve $(v_{2f})_x$ iki bilinmeyeni için elimizde eşitlik (iii) ve (iv) bulunmaktadır. Bu eşitliklerin aynı anda çözülmesi sonrasında;

$$(v_{1f})_x = \frac{(e-1)}{2}(v_{1i})_x \quad (v)$$

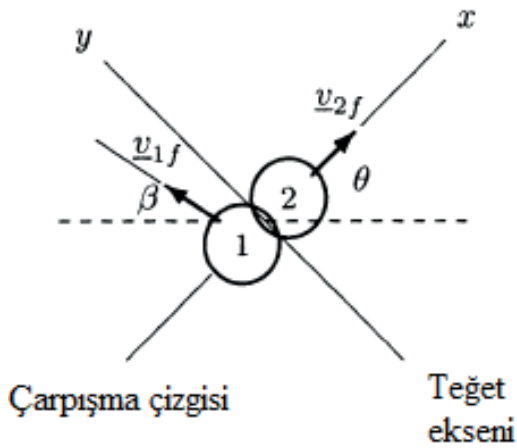
$$(v_{2f})_x = \frac{(e+1)}{2}(v_{1i})_x \quad (vi)$$

$(v_{1f})_x = 3.54 \text{ m/s}$ ve $e = 0.8$ değerlerinin eşitliklere yazılması sonrasında;

$$(v_{1f})_x = -0,35$$

$$(v_{2f})_x = 3,19$$

Çarpışmadan hemen sonra, hedef top, köşe cebe (yani pozitif x yönü boyunca) doğru 3.19 m/s 'lik bir hız ile hareket etmektedir. Şekil 11.21'de gösterildiği gibi, beyaz top $v_{1f} = \sqrt{(0.35)^2 + (3.54)^2} = 3.56 \text{ m/s}$ 'lik bir hız ile negatif x eksenini ile $\arctan\theta$ ($3.54/0.35$) = 84° veya yatak eksen ile $\beta = 84^\circ - 45^\circ = 39^\circ$ açı yapacak şekilde hareket etmektedir.



Şekil 11.21 Çarpışma sonrası

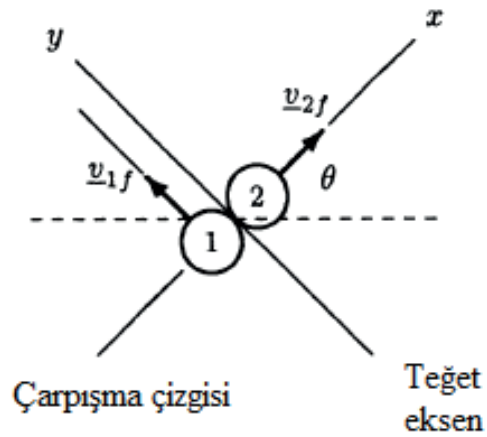
Geri sıçrama katsayısı ve momentumun korunumu için eşitlikleri kullanırken, iki bilardo topunun da hız bileşenlerinin pozitif x yönünde olduğunu varsaydık. Yaptığımız hesaplamalar sonrasında, $(v_{1f})_x$ hızı için negatif bir değer elde ettik ve bu topun negatif x yönünde hareket ettiğini göstermektedir.

Çarpışma tamamen esnek bir çarpışma (yani $e = 1$) olsaydı, eşitlik (v) ve (vi) , $(v_{1f})_x = 0$ ve $(v_{1f})_y = (v_{1i})_x$ sonuçlarını verecekti. Sonuç olarak, çarpışma sonrası topların hız vektörleri aşağıdaki gibi olacaktır;

$$\underline{v}_{1f} = 3,54\underline{j}(\text{m/s})$$

$$\underline{v}_{2f} = 3,54\underline{i}(\text{m/s})$$

Çarpışmadan hemen sonra, hedef top, pozitif x yönü boyunca (köşe cebine doğru) 3.54 m/s hız ile hareket edecekken, beyaz topu, Şekil 11.22'de gösterildiği gibi, pozitif y yönü boyunca hedef top ile aynı hızda hareket etmesi gerekecekti. 11.22. Bilardo topları çarpışmadan sonra birbirlerine dik açıda hareket edecekleri.



Şekil 11.22 İki havuz topunun tamamen esnek çarpışması

11.8 Açısal İmpuls ve Momentum

Doğrusal momentumun rotasyon analogisi *açısal momentum* olarak adlandırılır. Açısal momentum, kütle atalet momentumu ile rotasyon hareketine maruz kalan nesnenin açısal hızının çarpımı olarak tanımlanır ve genellikle L ile gösterilir:

$$L = I\omega \quad (11.17)$$

Rotasyon hareketi için impuls-momentum teoremi, uygulanan tork ve açısal momentumdaki değişimi anlatır. Eğer M

büyüklüğüne sahip bir tork, t_1 ve t_2 arasındaki zaman aralığında dönen bir cisme uygulanırsa, bu durumda nesnenin açısal momentumu L_1 'den L_2 'ye değişir. İmpuls-momentum teoremi, rotasyon hareketi için şu anlama gelmektedir;

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1 \quad (11.18)$$

Eşitlik 11.18'in sol tarafı *açısal impuls* iken M *impuls torku* göstermektedir. Tork sabit ise, eşitlik 11.18'deki integral şu şekilde değerlendirilebilir:

$$M\Delta t = \Delta L = I\Delta\omega \quad (11.19)$$

Yani, $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında nesneye uygulanan sabit impulsif tork M , nesnenin açısal hızı ω_1 'den ω_2 'ye değişmekte ve sonuç olarak, nesnenin açısal momentumu ise L_1 'den L_2 'ye değişmektedir. Hareket ile aynı yönde olacak şekilde bir tork uygulanırsa, nesnenin açısal hızı ve momentumu artacaktır.

Rotasyonel kinetik enerjinin, yapılan açısal işin ve gücün, doğrusal hareketteki emsalleri ile benzer ölçü ve birimlere sahip olduğuna dikkat ediniz. Öte yandan, açısal momentumun ölçüsü $[M][L^2]/[T]$ iken SI birimi kgm^2/s 'dir.

11.9 Temel Formüllerin Özetleri

Tablo 11.2, tek boyutlu bir translasyonel hareket analizi için kullanılan denklemlerin yanı sıra sabit bir eksen etrafındaki rotasyon hareketi (daireysel hareket) analizleri için gerekli temel denklemlerin bir listesini

göstermektedir. Doğrusal ve açısal büyüklüklerin x ve θ , v ve ω , a ve α , m ve I , F ve M , p ve L gibi çiftlerde olduğu gibi birbirine benzediğini unutmayınız.

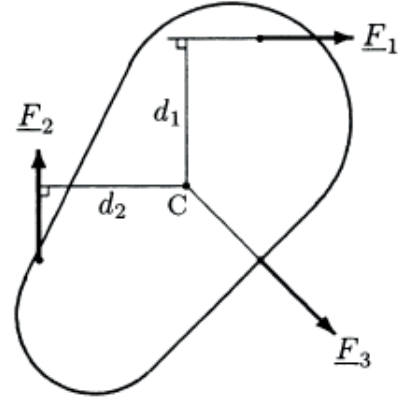
Tablo 11. 2 Translasyonel ve rotasyon hareketi denklemleri

e	Rotasyon Hareketi (Dairesel)
Hız	
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
İvme	
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Sabit ivmeli kinematik bağıntılar	
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$
$v = v_0 + a_0 t$	$\omega = \omega_0 + a_0 t$
$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a_0(\theta - \theta_0)$
Hareket denklemleri	
$F = ma$	$M = Ia$
Yapılan İş	
$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$	$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$
Kinetik enerji	
$\epsilon_k = \frac{1}{2} m v^2$	$\epsilon_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
İş enerjisi	
$W = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$	$W = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$
Güç	
$P = Fv$	$P = M\omega$
Momentum	
$P = mv$	$L = I\omega$
impuls-momentum	
$\int_{t_1}^{t_2} F dt = p_2 - p_1$	$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1$

11.10 Rijit Cisimlerin Düzlemsel Harekette Kinetiği

Çoğu durumda (örneğin, hava direncine bağlı etkiler ihmal edildiğinde), bir nesnenin boyutu ve şekli, translasyonel hareket özelliklerini etkilemez. Nesne rotasyon hareketi geçiriyorsa, Nesnenin boyutu ve şekli (yani eylemsizlik etkileri) dikkate alınmalıdır. Rijit cisimlerin rotasyon hareketinin arkasındaki temel kavramları tanımladığımızıza göre, translasyonel ve rotasyonel hareketler hakkındaki bilgileri genel hareket özelliklerini incelemek için kullanabiliriz

Şekil 11.23'te gösterilen rijit cismi düşünün. Cismin toplam kütle sinin m , kütle merkezinin ise C noktasında olsun. Cisme etki eden eş düzlemlili üç kuvvet bulunmakta ve F_3 kuvvetinin uygulama doğrultusu C noktasından geçtiğinden (yani moment kolu sıfırdır.), kuvvetin C noktası etrafından herhangi bir tork üretmemektedir. F_1 ve F_2 kuvvetleri, C noktası etrafında sırasıyla büyüklükleri $M_1 = d_1 F_1$ ve $M_2 = d_2 F_2$ olan saat yönünde moment oluşturmaktadır. Şekil 11.24'te gösterildiği gibi, üç kuvvet içeren sistem tek kuvvet tek moment sistemine düşürülebilir; öyle ki, $\sum F = F_1 + F_2 + F_3$ net veya bileşke kuvveti gösterirken $M_c = M_1 + M_2$, C eksenini etrafında ölçülen bileşke momenti göstermektedir. $\sum F$, nesnede translasyonel harekete neden olurken, M_c nesnenin C noktası etrafında dönmesine neden olmaktadır.



Şekil 11.23 Cisim üzerine etki eden üç kuvvet sistemi

Nesnenin translasyonel hareketi, nesnenin kütle sine ve nesneye uygulanan net kuvvetlere bağlı olduğunu unutmayınız. Newton'un ikinci hareket yasası;

$$\sum \underline{F} = m \underline{a}_c \quad (11.20)$$

Yukarıdaki eşitlikte, \underline{a}_c nesne ağırlık merkezinin ivmesini ve eşitlik 11.20 nesnenin translasyonel hareketini göstermektedir. Nesnenin rotasyonel hareketi, nesnenin kütle atalet momentine ve nesneye uygulanan torka bağlıdır,

$$\sum M_c = I_c \alpha \quad (11.21)$$

Eşitlik 11.21'de, I_c , nesnenin rotasyon eksenine dik olan ve nesnenin ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki kütle atalet momentidir ve α açısal ivmedir. Eşitlik 11.20'nin nesne içerisindeki herhangi bir nokta için geçerli olduğuna, ancak eşitlik 11.21'in sadece C noktasındaki ağırlık merkezi için

doğru olduğuna dikkat edin. xy düzlemindeki iki boyutlu hareket analizleri için Eşitlikle 11.20 ve 11.21 üç skaler denklem vermektedir:

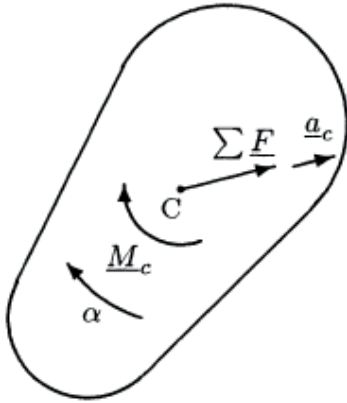
$$\sum F_x = ma_{cx} \quad (11.22)$$

$$\sum F_y = ma_{cy} \quad (11.23)$$

$$\sum M_c = I_c a \quad (11.24)$$

Bu üç denklem, nesnelere iki boyutlu genel hareket özelliklerini incelemek için gerekli hareket denklemleridir.

\underline{MC} 'nin sıfır olduğu durumlarda, nesne tamamen translasyonel hareket içerisindeyken, $F_x = 0$ ve $F_y = 0$ olduğu durumda nesne sadece rotasyonel hareket içerisindeyken, $F_x = 0$, $F_y = 0$ ve $M_c = 0$ durumunda ise nesnenin dengede olduğu söylenebilir.



Şekil 11.24 Çok kuvvetli sistemlerin tek kuvvet tek moment sistemlerine indirgenebilir

11.11 Örnek Problemler

Problem 11.1 Şekil 11.5'te ağırlığı $m=0,3$ kg olan topun h_0 yükseliğinden atıldığı gösterilmektedir. Topun çarpışma anındaki sürati $V_1=4,72$ m/s'dir. Yere vurduktan sonra geri sıçrayarak h_3 yüksekliğine ulaşmaktadır. Çarpmadan hemen sonraki hızı $V_2= 3,94$ m/s ve topla yerin temas ettiği süre $\Delta t=0,01$ s'dir.

- Topun başlangıç yüksekliğini h_0 ,
- Tepedeki yüksekliğini h_3 ,
- Çarpmadan hemen önceki momentumu p_1 ,
- Çarpmadan hemen sonraki momentumu p_2 ,
- Çarpma esnasında momentum değişimi Δp ,
- Çarpma esnasında yer tarafından topa uygulanan kuvvet F 'i hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $h_0=1,14$ m, (b) $h_3=0,79$ m, (c) $p_1= 1,42$ kg m/s, (d) $p_2=1,18$ kg/m, (e) $\Delta p=2,6j$ kg m/s, (f) $F=260$ N

Problem 11.2 Şekil 11.6'da gösterildiği gibi, $m= 0,5$ kg ağırlığındaki sabit bir topa vuran bir futbolcu düşünün. Hava direncinin önemsiz olduğu varsayılarak, top eğik harekete maruz kalmaktadır (Şekil 11.7). Topun serbest bırakma açısı $\theta= 25,2^\circ$ ve topun ulaştığı maksimum yüksekliğin $h= 4,5$ m olduğu kaydedilmiştir. Futbolcunun ayağının topa temas ettiği süre $\Delta t = 0,12$ s ise, aşağıdakileri belirleyiniz;

- (a) Topun serbest bırakıldığı hızı V ,
- (b) Topun başlangıç konumu ile yerdeki konumu arasındaki yatay mesafe l ,
- (c) Topun kalkış anındaki momentumu \underline{p} ,
- (d) Futbolcu tarafından topa uygulanan kuvvet F ,

Cevaplar: a) $V = 22,06 \text{ m/s}$, (b) $l = 38,3 \text{ m}$, (c) $\underline{p} = 9,98 \underline{i} + 4,7\underline{j} \text{ (kg m/s)}$, (d) $F = 110,3 \text{ N}$

Problem 11.3 Otomobil yolcuları tarafından kullanılan emniyet kemerlerinin dayanıklılığını analiz etmek için bir laboratuvar testi yapılmıştır. Test protokolüne göre, ilk yatay hızı 110 km / s'ye ayarlanmış olan test aracının içinde 85 kg'lık bir manken vardır. Belirli bir anda, fren uygulayarak araç durdurulur. Hareket halindeyken emniyet kemerinin manken üzerine $F=20008 \text{ N}$ kuvvet uyguladığı kaydedilmiştir (Şek. 11.10). Sürtünme etkilerinin önemsiz derecede küçük olduğunu varsayarak, aracın hızının sıfıra getirildiği zaman aralığını belirleyiniz.

Cevap: $\Delta t = 0,13 \text{ s}$

Problem 11.4 Bir merminin hızını, ışık telleri ile asılmış tahta bir bloktan yapılan balistik bir sarkaç kullanarak ölçmek için bir test yapılmıştır. Şekil 11.14'te gösterildiği gibi, bloğun ağırlığının $m_2 = 3,5 \text{ kg}$ olduğunu varsayalım. Sabit bloğa $m_1 = 30 \text{ g}$ kütleli bir mermi ateşlendi ve bloğa girerek $h = 5,5 \text{ cm}$ yüksekliğe dönmesine neden oldu. Merminin

bloкта kaldığını varsayarak, çarpmadan hemen önce mermi hızını V_b belirleyiniz.

Cevap: $V_b = 122,2 \text{ m/s}$

Problem 11.5 Şekil 11.16'da gösterildiği gibi, eşit kütlelere sahip iki bilardo topunun tamamen esnek çarpışmasını düşünün. Çarpışmadan önce, top (1) $V_{1i} = 1,3 \text{ m / s}$ hıza sahip ve top (2) sabittir ($V_{2i} = 0$). Doğrudan bir merkezi etki varsayarak, çarpışmadan hemen sonra bilardo toplarının, V_{1f} ve V_{2f} hızlarını belirleyiniz.

Cevaplar: $V_{1f} = 0$, $V_{2f} = 1,3 \text{ m/s}$.

Problem 11.6 Şekil 11.18'de, $h_0 = 1,5 \text{ m}$ yükseklikten $m = 0,3 \text{ kg}$ kütleli top atılması gösterilmektedir. Top yere çarptıktan sonra h_3 yüksekliğine çıkmaktadır. Çarpmadan hemen önce topun sürati $V_1 = 5,4 \text{ m/s}$ 'dir. Top ve yer arasındaki geri sıçrama katsayısı $e = 0,79$ ise;

- (a) Çarpışmadan hemen sonra topun süratini V_2 ,
- (b) Topun yere çarpıp sıçramasından sonra ulaştığı yüksekliği h_3 ,
- (c) Çarpma esnasında oluşan enerji kaybını ε hesaplayınız.

Cevaplar: (a) $V_2 = 4,27 \text{ m/s}$; (b) $h_3 = 0,93 \text{ m}$; (c) $\varepsilon = 1,64 \text{ J}$.

Bölüm 12

ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN CİSİMLERİN MEKANİĞİNE GİRİŞ

Çeviren: Hüseyin Hızlı

12.1 Genel Bakış

12.2 Uygulanan Kuvvetler ve Şekil Değişirme

12.3 İç Kuvvetler ve Momentler

12.4 Gerilme ve Gerinim

12.5 Genel Prosedür

12.6 Matematiksel İlişki

12.7 Ele Alıncak Konular

12.8 Önerilen Okumalar

12.1 Genel Bakış

Statiğin temel kavramları, bazı uygulama alanları ile Bölüm 4 ve Bölüm 5'te anlatılmıştır. Statik alanı Newton'un yasalarına (Newton mekaniği) dayanmaktadır. Katı cisimlerin mekaniği genel çalışma alanının iki ana dalından birini oluşturmaktadır, diğer bir dalı da dinamiktir. Katı cisimler mekaniği, katı cisimlerin uygulanan yükler altında deforme olmaması temel varsayımına dayanmaktadır. Bu idealleştirme dış kuvvetleri ve momentleri analiz ederek inceleme altındaki problemi basitleştirmek için gereklidir. Öte yandan, şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinde cisimler rijit olarak ele alınmadığı gibi cisimlerin şekil değiştirebilme (şekil değiştirme kabiliyeti) ve malzeme özellikleri analizlere dahil edilmektedir. Uygulamalı mekanik, uygulanan kuvvetler ile bunlara karşılık gelen deformasyonlar arasındaki deneysel yöntemler ile belirlenmiş ve/veya doğrulanmış ilişkileri kullanmaktadır.

Katı cisimler mekaniğinin bazı sınırlamaları vardır. Bu sınırlamalardan biri, statik olarak belirsiz sistemler kavramının tanıtıldığı Bölüm 4.6'da tartışılmıştır. Denge eşitliklerinin, bilinmeyen kuvvetleri belirlemek için yetersiz olduğu sistem *statik açıdan belirsiz* olarak adlandırılmaktadır. Bu tür sistemlerin analizinin yapılabilmesi için statik denge şartlarının sağladığı denklemlere ek başka denklemlere de ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ek

denklemler, bir sistemi oluşturan parçaların malzeme özelliklerini göz önünde bulundurarak ve şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinin odağı olan deformasyonlarla kuvvetleri ilişkilendirerek türetilir.

Statik olarak belirlenmiş sistemleri analiz etme isteği, şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinin neden önemli olduğunun göstergesi olan nedenlerden biridir. Bu alanın uygulamaları, gerekli tasarım ve analiz araçları sağlayarak mühendislik dallarının hemen her alanına yayılıdır. Mühendisin, makine, inşaat; elektrik veya biyomedikal fark etmeksizin, görevi, bir makine, yapı, bir ekipmanın parçası veya bir protez cihazı için en güvenli ve en verimli çalışma koşullarını belirlemektir. Bir tasarım mühendisi, ilk önce kuvvet analizleri yoluyla uygun çalışma koşullarını değerlendirme, doğru yapısal tasarımı yapma ve ortamdaki kuvvetlere karşı sağlam kalabilecek malzemeyi seçerek bunu başarabilir. Bir tasarım mühendisinin temel kaygısı bir makine parçası, bir yapı, bir ekipman parçası veya bir cihazın, yüklendiğinde kırılmamasına veya aşırı derecede deforme olmamasına dikkat etmektir.

12.2 Uygulanan Kuvvetler ve Şekil Değiştirme

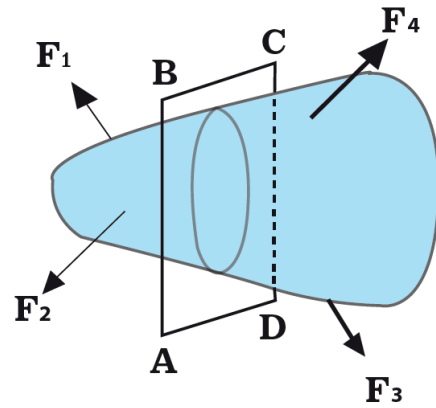
Mekanik, kuvvetler ve hareketler ile ilgilidir. İki tür hareketi ayırmak mümkündür. Bir cisim üzerinde uygulanan dış kuvvetlerin veya momentlerin bileşkesi sifıra eşit değilse, cisim genel olarak hareket (translasyonel ve/veya

rotasyonel) edecektir. Bir başka deyişle, cismin bir bütün olarak konumu zamana göre değişecektir. Bu tür hareketler dinamik alanı altında incelenmektedir. Hareketin ikinci türü, şekil değiştirme olarak adlandırılan bir cisimdeki kısmi şekil değişikliklerini içermektedir. Bu tür hareket şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinin temel ilgi alanıdır. Bir cisim dış kuvvetlere ve momentlere maruz kalır ve statik dengede kalırsa, cisimde büyük ihtimalle kısmi şekil değişikliği olmuştur. Bu şekil değişikliğinin boyutu, uygulanan kuvvetlerin büyüklüğü, yönü ve uygulanma süresi, cismin malzeme özellikleri ile ısı ve nem gibi çevresel koşullara bağlı olabilir.

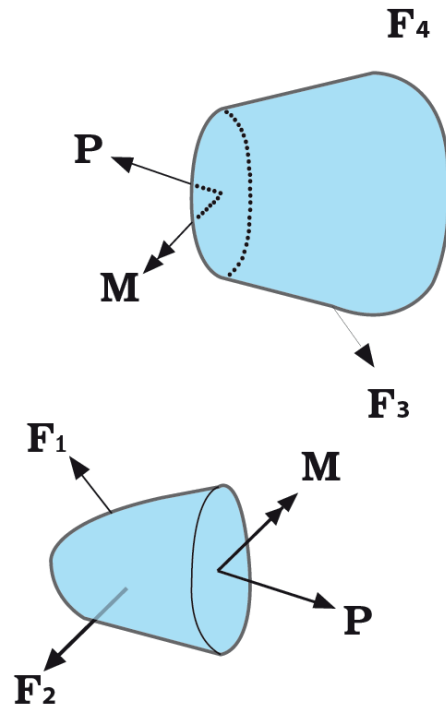
12.3 İç Kuvvetler ve Momentler

Şekil. 12.1’de gösterildiği gibi, dış kuvvetlere maruz kalmış belirli bir şekle sahip olmayan nesneyi düşünün. Uygulanan bu kuvvetlerin bileşkesinin ve cisim üzerindeki net momentin sıfıra eşit olduğunu varsayalım. Yani, nesne statik denge durumunda demektir. Ayrıca, nesnenin içinden geçen bir ABCD düzlemi ile imgesel olarak iki kısma ayrıldığını varsayalım. Cisim bir bütün olarak dengede ise, her bir parçası da dengede olmalıdır. Bu parçalardan bir tanesi dikkate alındığında, dengede olması için, o bölgede nesneye uygulanan dış kuvvetlerin ve momentlerin etkilerini dengeleyebilmek için kesilmiş bölüme etki eden bir kuvvet vektörünün

ve/veya moment vektörünün bulunmasını gerekir. Bunlar *iç kuvvet* ve *iç moment* vektörleri olarak adlandırılmaktadır. Tabii ki, bu çıkarım nesnenin diğer kısmı içinde geçerlidir. Ayrıca, nesnenin genel dengesi için, kesilmiş bölümün her iki yüzeyindeki kuvvet vektörleri ve moment vektörleri eşit büyüklüklere ve zıt yönlerde sahip olmalıdır (Şekil 12.2).

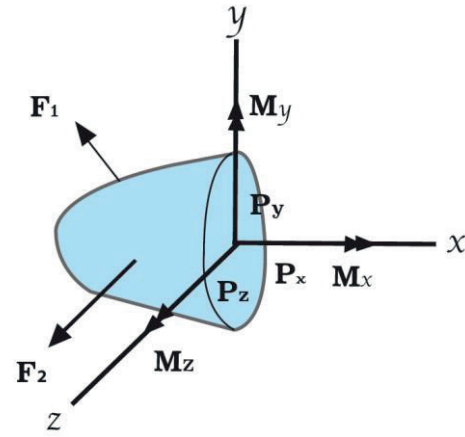


Şekil 12.1 Dış kuvvetlere maruz kalan bir cisim



Şekil 12.2 Bileşenlerine ayırma metodu

Üç boyutlu bir nesne için, iç kuvvetler ve momentler, Şekil 12.3'te gösterildiği gibi birbirine dik üç farklı yönde bileşenlerine ayrılabilir. Kesit bölgesinde ölçülen kuvvet ve moment vektör bileşenleri, yönlerini ve kesit bölgesi üzerindeki etkilerini yansıtan özel tanımlamalar alırlar. Kesit bölgesine normal (dik) yönde olduğu varsayılan x , Şekil 12.3'te gösterilen P_x kuvvet bileşeni *eksenel* veya *normal kuvvet* olarak adlandırılmaktadır ve kesit bölgesine uygulanan harici kuvvetin çekme veya basma hareketinin bir ölçüsüdür. Nesneyi uzatmaya yönelik bir çekme kuvveti olması durumunda, bu kuvvet *çekme kuvveti* olarak veya nesneyi kısaltmaya eğilimli bir impuls hareketine sahipse *basma kuvveti* olarak adlandırılmaktadır. P_y ve P_z kuvvet bileşenleri *kesme kuvvetleri* olarak adlandırılmaktadır ve bu kuvvetler bir kesit bölgesinin diğerinin üzerinde kaymasına karşı direnme ölçütüdür. Bu kuvvetlerin alt sembolleri, hareket çizgisi göstermektedir. Ayrıca, M_x moment bileşeni *burulma torku* olarak adlandırılmakta ve kesit bölgesi düzlemine normal olan bir eksen boyunca (bu durumda, x doğrultusunda) harici olarak uygulanan kuvvetlerin burulma hareketinin bir ölçümüdür. Moment vektörünün M_y ve M_z bileşenleri *eğme momenti* olarak adlandırılmaktadır ve kesitin y ve z yönlerinde maruz bırakıldığı eğme hareketinin kapsamını belirtmektedir.



Şekil 12.3 İç kuvvetler ve momentler

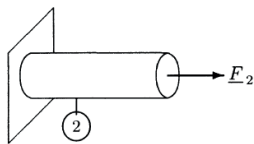
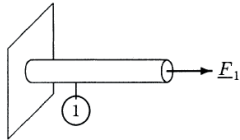
Burada, çift alt sembollere sahip kuvvet ve momentleri belirtmek daha bilgilendirici olabilir. Örneğin, P_y yerine P_{xy} sembolünün kullanılması, normali x yönünde (ilk alt sembol) olan bir kesite y yönünde (ikinci alt sembol) bir kuvvet bileşeninin uygulandığını göstermektedir. Benzer şekilde, M_{xz} , aynı kesit üzerinde ölçülen z yönündeki moment vektörünün bileşenini ifade etmektedir.

12.4 Gerilme ve Gerinim

Şekil değiştirebilen cisimler mekaniği veya malzeme mukavemetini araştırmanın amacı, bir yapının tasarımının uygulanan kuvvetlerin ve momentlerin karma etkilerine karşı güvenilir olmasını sağlamaktır. Tasarım, yapı için uygun malzemeyi seçmek veya var olan bir yapı varsa, bu yapının güvenli ve verimli bir şekilde çalışabileceği yükleme koşullarını belirlemektir. Bununla birlikte, bir seçim yapabilmek için, farklı yükleme koşulları altında malzemelerin mekanik özelliklerinin de bilinmesi gerekmektedir.

Şekil 12.4'te gösterildiği gibi, eşit uzunluğa sahip, ancak farklı boyutlara sahip aynı malzemedeki yapılmış iki çubuğu düşünün. 1 numaralı çubuğun kesit alanı, A_1 , 2 numaralı çubuğun kesit alanından, A_2 , daha küçüktür. Bu çubukların kırılıncaya kadar art arda artan kuvvetlere maruz kaldığını varsayalım. 1 ve 2 numaralı çubukları kırabilecek F_1 ve F_2 kuvvetleri kaydedilirse, 2 numaralı çubuk 1 numaralı çubuğa göre daha büyük kesit alanına ve hacme sahip olduğundan dolayı, 2 numaralı çubuğu kırmak için gerekli olan F_2 kuvvetinin 1 numaralı çubuğu kırmak için gerekli olan F_1 kuvvetinden daha büyük olduğu gözlemlenebilir. Bu kuvvetler, çubukların mukavemetlerinin bir göstergesi olabilir. Ancak, kırılmaya kadarki kuvvetin nesnenin kesit alanına bağlı olduğu (diğer faktörlere ek olarak) gerçeği, kuvvetin malzemenin mukavemetinin saptanmasında elverişsiz kılmaktadır. Bu elverişsizlikten kurtulabilmek amacıyla *gerilme* adıyla bir kavram tanımlanmış ve bu kavram kuvvetin malzeme kesit alanına oranı olarak tanımlanmaktadır;

$$\text{GERİLME} = \frac{\text{KUVVET}}{\text{ALAN}}$$

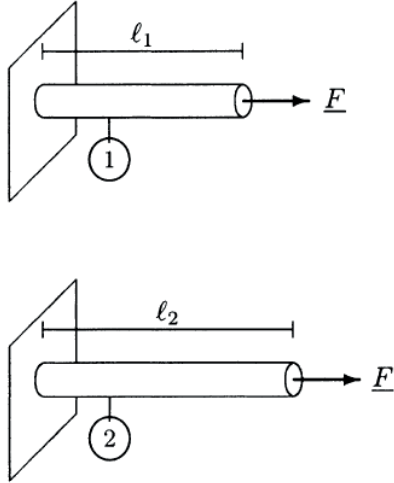


Şekil 12.4 Aynı malzemedeki yapılmış, aynı uzunlukta fakat farklı kesit alanına sahip iki çubuk

Şekil 12.4'teki çubuklar farklı kesit alanına sahip olmalarına ve farklı kırılma kuvvetleri gerektirmelerine rağmen, aynı malzemedeki yapıldıklarından dolayı kırılma anındaki gerilme ölçümleri birbirine eşit olacaktır.

Daha önce de bahsedildiği gibi, şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği uygulanan kuvvetler ve bu kuvvetlerin cisim üzerindeki iç etkileri ile ilgilidir. Bu etkilerden biri şekil değişikliği veya deformasyondur. Bir nesnenin uğrayabileceği deformasyon miktarı, nesnenin boyutuna, malzeme özelliklerine, uygulanan kuvvetin büyüklüğüne ve süresine bağlıdır. Şekil 12.5'te gösterildiği gibi, eşit kesit alanına, ancak farklı uzunluğa sahip ve aynı malzemedeki yapılmış iki çubuğu düşünün. 1 numaralı çubuğun l_1 uzunluğu, 2 numaralı çubuğun l_2 uzunluğundan küçüktür. Çubuklara eşit büyüklükte bir F kuvveti uygulandığını ve çubukların uzama miktarlarının ölçüldüğünü varsayalım. 2 numaralı çubuğun uzunluğundaki artışın 1 numaralı çubuğun uzunluğundaki artıştan büyük olması, uzama miktarının numunenin ilk boyuna bağlı olduğunu göstermektedir. Deformasyon ölçümlerini ortadan kaldırmak için *gerinim* adı verilen bir kavram tanımlanmış ve bu kavram numunedeki uzama miktarının numunenin uzama yönündeki ilk uzunluğuna bölünmesi olarak tanımlanmaktadır;

$$\text{GERİNİM} = \frac{\text{UZAMA MİKTARI}}{\text{İLK UZUNLUK}}$$



Şekil 12.5 Aynı malzemeden yapılmış, aynı kesit alanına sahip fakat farklı uzunluklu iki çubuk

Bu bölümde, gerilme ve gerinim kavramlarının geniş tanımları yapılmıştır. Bu kavramların daha ayrıntılı açıklamaları ilerleyen bölümlerde verilecektir.

12.5 Genel Prosedür

Şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinde problem analizi ve analizlerin amacı için genel bir prosedür aşağıda verilmiştir.

- **Statik Analizi.** Bu ilk aşamada statik analitik yöntemler, harici etki kuvvetlerini ve momentlerini belirlemek için kullanılır. Bu aşama, serbest cisim diyagramlarının çizilmesi ve bilinmeyen tepki kuvvetlerini ve momentlerini belirlemek için denge koşullarının uygulanması, eşdoğrultulu kuvvet sistemleri gibi kavramlar kullanmayı içerir.
- **İç Kuvvetlerin ve Momentlerin Analizi.** İç kuvvetler ve momentler *bileşenlerine ayırma metodu* ile belirlenebilir. Bölüm

12.3'te kısaca tartışıldığı üzere, cisim kuvvet ve momentlerin hesaplanması gereken yerde iki kısma ayrılarak yapılabilmektedir. Buradaki ilgi alanı, maksimum gerilme değerine karşılık gelen kritik yükleme koşullarının belirlenmesidir. Bu kritik yükler, temelde tüm cisim boyunca bileşenlerine ayırma metodu uygulanmasını gerektiren cisme ait kesme ve eğme diyagramlarının çizilmesiyle belirlenebilir.

- **Gerilme Analizi.** Bu aşama, iç kuvvetler ve momentleri, özellikle de kritik kuvvetler ve momentlerin, problemin malzeme ve geometrik özelliklerini de analizlere dahil eden formüller kullanarak karşılık gelen gerilmelere dönüştürmeyi içerir.
- **Malzeme Seçimi.** Malzemeler sahip oldukları fiziksel ve mekanik özelliklerle bir birinden ayırt edilebilir. Analizin bu son aşamasında, malzeme seçimi hesaplanan gerilmeler temel alınarak yapının güvenli bir şekilde çalışmasına olanak sağlayacak şekilde seçilmelidir. Malzeme seçimi ve tasarımı çoktan yapılmış ise, hesaplanan maksimum gerilme, izin verilebilir yükleme koşullarını belirlemek için kullanılabilir.

Şekil değiştirebilen cisimler mekaniği, analizlerinin önkoşulunun statik olduğunu unutmayın. Bununla birlikte, yukarıda özetlenen prosedür dengede olan sistemlerin analiziyle sınırlı değildir. Harici kuvvetlerin

etkisi altında, nesne şekil değiştirebilir ve eş zamanlı olarak nesne tümüyle hareket edebilir. Bu tür bir problem de *d'Alembert ilkesi* kullanılarak yukarıda özetlenen prosedür ile analiz edilebilir. Bu ilke, cismin ivmesinden kaynaklanan atalet etkilerine, ivme yönünün tersi yönünde cismin ağırlık merkezinde etkili olan bir başka dış kuvvet olarak davranılmasıyla uygulanır.

12.6 Matematiksel İlişki

Kitabın bu bölümündeki (Bölüm 12-15) analizler vektör cebiri, diferansiyel ve integral hesabını hesaplama araçları olarak kullanacaktır. Bu nedenle, okuyucunun A'dan C'ye kadar olan ekleri gözden geçirmeleri önerilmektedir. Analizlerin bazıları basit diferansiyel denklemlere aşinalık gerektirebilir.

12.7 İşlenecek Konu Başlıkları

Bölüm 13'ün başında gerilme ve gerininin detaylı tanımlamaları verilecektir. Gerilme-gerinim diyagramına dayanarak, malzemenin süneklik, rijitlik ve kırılma gibi özellikleri tartışılacaktır. Elastik ve plastik şekil değiştirmeler, Hooke Yasası, boyun verme olgusu ve iş ve şekil değiştirme enerjisi kavramları açıklanacaktır. Bölüm 13'de yer alan analizler, tek eksenli şekil değiştirmeler ile sınırlı kalacaktır. Sunulan kavramlar nispeten basit sistemleri analiz etmek için uygulanacaktır.

Bölüm 14'te, gerilme-gerinim analizlerindeki daha ileri konular tanıtılacaktır. İki ve üç boyutlu gerilme analizleri, gerilmeleri bir düzlemde diğerine taşınması teknikleri, kritik gerilmeleri bulma yöntemleri, yapıların tasarımında gerilme analizlerinin neden önemli olduğu, kırılma teorileri, yorulma, dayanıklılık ve gerilme yığılması gibi kavramlar da Bölüm 14'te tartışılacaktır. Ayrıca, Bölüm 14'te, burulma, eğme ve birleştirilmiş yüklemeye tabi tutulan cisimlerin analizleri anlatılacaktır.

Bölüm 15'te, malzemelerin viskoelastik davranışı ve viskoelastisitenin deneysel modelleri gözden geçirilecek ve elastisite ve viskoelastisite karşılaştırılacaktır. Ayrıca Bölüm 15'te, kemik, tendonlar, ligamentler, kaslar ve artiküler kartilaj gibi biyolojik dokuların mekanik özellikleri tartışılacak ve daha önce ortopedi ile ilgili mekanik kavramların uygunluğu gösterilecektir.

Okuma Önerileri

Beer, F.P., Johnston, R.E., DeWolf, J.T. and Mazurek, D.F., 2015. *Mechanics of Materials*, 7th Edition. New York: McGraw-Hill Education.

Boresi, A.P. and Schmidt, R.J., 2002. *Advanced Mechanics of Materials*, 6th Edition. New York: Wiley.

deSilva, C.W., 2013. *Mechanics of Materials*. Boca Raton: CRC Press.

Gere, J.M. and Goodno, B.J., 2012. *Mechanics of Materials*. Stamford: CENGAGE Learning.

Hibbeler, R.C., 2013. Mechanics of Materials, 9th Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall.

Phipot, T.A., 2012. Mechanics of Materials: An Integrated Learning System, 3rd Edition. Somerset: Wiley.

Popov, E.P. 1999. Engineering Mechanics of Solids. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Shames, I.H. 1989. Introduction to Solid Mechanics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Timoshekno, S.P., 1969. Strength of Materials: Elementary Theory and Problems. New York: Van Nostrand Reinhold, Inc.

¹Şekil değiştirebilen cisim mekaniği alanı, katı mekaniği, malzeme mekaniği ve malzemelerin dayanımı gibi çeşitli başlıklar altında incelenmiştir. Şekil değiştirebilen cisim mekaniği kapsamında ele alınan konular elastisite, esnek olmayan davranış, süreklilik mekaniğindeki daha ileri konuların çalışılması için temel oluşturur. Aşağıdaki kitaplar, şekil değiştirebilen cisim mekaniğinin ilkeleri hakkında daha ayrıntılı bilgi edinmek için incelenebilir.

Bölüm 13

GERİLME VE GERİNİM

Çeviren: Fatma Kübra Erbay Elibol

13.1 Temel Yükleme Koşulları

13.2 Tek Eksenli Çekme Testi

13.3 Yük-Uzama Diyagramı

13.4 Basit Gerilme

13.5 Basit Gerinim

13.6 Gerilme-Gerinim Diyagramı

13.7 Elastik Deformasyon

13.8 Hooke Kanunu

13.9 Plastik Deformasyon

13.10 Boyun Verme

13.11 İş ve Gerinim Enerjisi

13.12 Gerinim Sertleşmesi (Pekleşme)

13.13 Histerezis Döngüsü

13.14 Gerilme Gerinim Diyagramına Bağlı Özellikler

13.15 Malzeme Davranışının İdealleştirilmiş Modelleri

13.16 Malzemelerin Mekanik Özellikleri

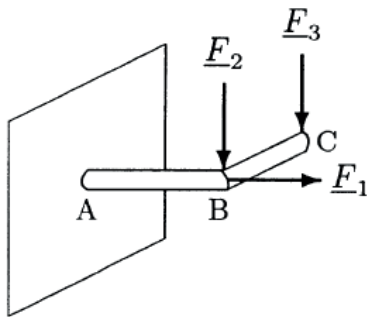
13.17 Örnek Problemler

13.18 Çalışma soruları

13.1 Temel Yükleme Koşulları

Dış kuvvete maruz kalan bir cisim uygulanan kuvvetin yönünde hareket edecektir. Eğer hareket alanı kısıtlı ise cisim, uygulanan kuvvetin yönünde şekil değiştirecektir. Deformasyon, cisim içerisindeki herhangi iki noktanın birbirine göre yer değişimini belirtir. Deformasyon miktarı, uygulanan kuvvetin büyüklüğü, yönü ve süresi; cismin malzeme özelliği, geometrisi ve ısı, nem gibi çevresel faktörlere bağlıdır.

Genel olarak, malzemeler farklı yüklenme biçimlerine farklı şekilde tepki verir. Belirli bir malzeme için, örneğin eğme veya burulmaya neden olabilecek yükleme ile karşılaştırıldığında çekme yüküne verilen tepkiyi analiz ederken dikkate alınması gereken farklı mekanik özellikler olabilir. Şekil 13.1, L şeklindeki bir kirişin F_1 , F_2 ve F_3 kuvvetlerine maruz kaldığı farklı yükleme koşullarını göstermek için çizilmiştir. F_1 kuvveti kirişin AB koluna çekme kuvveti uygulamaktadır. F_2 kuvveti AB kolunu eğmeye çalışmaktadır. F_3 kuvveti BC koluna eğme kuvveti oluşturmakta ve AB koluna döndürme (burulma) kuvveti uygulamaktadır. Buna ek olarak, bu kuvvetlerin tümü, kirişin farklı bölümlerini kesme yüklemesine maruz bırakmaktadır.

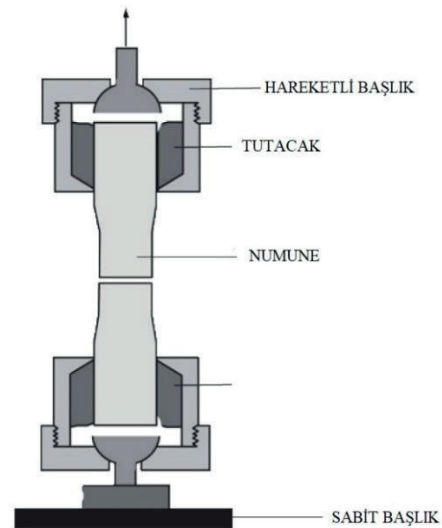


Şekil 13.1 Yükleme koşulları

13.2 Tek Eksenli Çekme Testi

Malzemelerin mekanik özellikleri, farklı deneylere tabii tutularak tespit edilir. Malzemelerin çekme yükü altındaki mekanik tepkileri birazdan bahsedilecek *tek eksenli* veya *basit çekme testi* ile analiz edilir. Materyallerin eğme ve burulmaya neden olan kuvvetlere tepkisi bir sonraki bölümde incelenecektir.

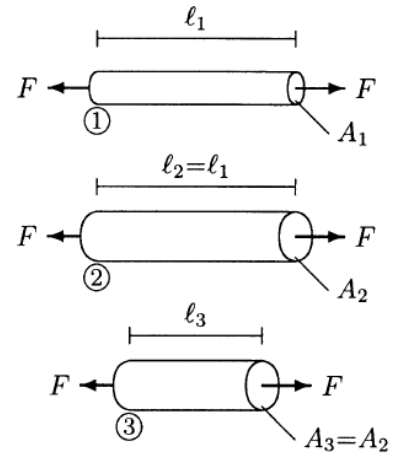
Tek eksenli çekme testinin deneysel düzeneği Şekil 13.2'de gösterilmiştir. Düzenek, test edilecek numuneyi tutacak bir sabit ve bir hareketli başlık içerir. Numune, ekipmana sağlam bir şekilde sabitlenir, hareketli başlık aracılığı ile çekme kuvveti uygulanır ve bunun sonucunda numune üzerinde görülen uzama ölçülür. Bir materyalin çekme yüküne olan tepkisi farklı sayıda aynı materyalden yapılmış, uzunluğu ve kesitleri farklı numunelerin, değişken büyüklüklerdeki kuvvetler altında test edilmesiyle gözlemlenebilir.



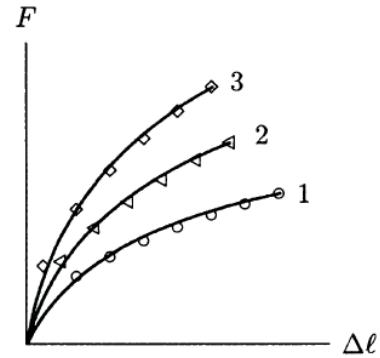
Şekil 13.2 Tek eksenli çekme testi

13.3 Yük-Uzama Diyagramı

Şekil 13.3'te görülen üç tane çubuğu ele alalım. Çubukların hepsinin aynı malzemeden yapıldığını varsayalım. Birinci ve ikinci çubuğun uzunluğu aynı, fakat kesit alanları farklı, ikinci ve üçüncü çubukların kesit alanları aynı fakat boyları farklıdır. Her bir çubuk, uygulanan kuvvetleri kademeli olarak arttırarak ve uzunluklarında karşılık gelen artışları ölçerek bir dizi tek eksenli çekme testine tabi tutulabilir. Eğer, F uygulanan kuvvetin büyüklüğü ve (Δl) uzunluğundaki artış ise elde edilen veriler her bir numune için yük-uzama eğrisi çizmek için kullanılabilir. Her bir numune için eğrilerin tek bir grafik üzerine çizilmesiyle geometrik parametrelerin (kesit alanı ve uzunluk) yüke karşı koyma etkisi tespit edilebilir ve karşılaştırılabilir (Şekil 13.4). Basit çekme testinde belirli bir kuvvet altında 1 ve 2 numaralı eğriler karşılaştırıldığında kesit alanı arttıkça numunenin zarar görmesinin zorlaştığı ve 2 ve 3 numaralı eğriler karşılaştırıldığında ise numune ne kadar uzunsa çekme kuvveti altında deformasyonun daha fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 13.3 Numuneler

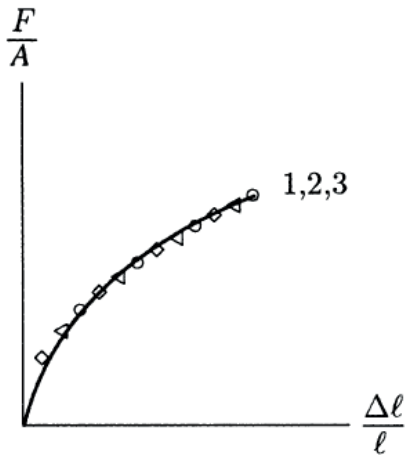


Şekil 13.4 Yük-uzama diyagramı

Tek bir numuneye bir dizi çekme kuvveti uygulamak yerine, hemen hemen aynı geometrilere sahip olan bir dizi numuneyi incelemenin ve bir numuneyi sadece bir kez bir kuvvete maruz bırakmanın tercih edileceğini unutmayın. Daha sonra tartışılacağı gibi, nesneye uygulanan bir kuvvet, nesnenin mekanik özelliklerini değiştirebilir.

Tek eksenli çekme testinde elde edilen sonuçların gösterilmesine yönelik bir başka yöntem ise, önce uygulanan kuvvetin büyüklüğünün F , numunenin kesit alanı A ile

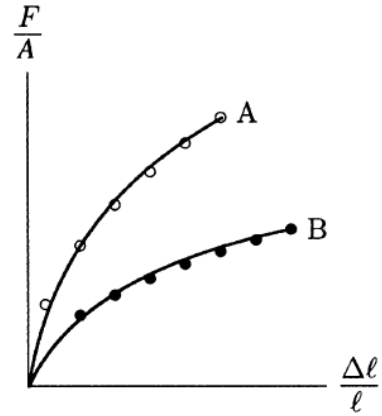
bölünmesi, ölçülen uzamanın ilk uzunluğuna bölünmesiyle deformasyon miktarının normalleştirilmesi ve Şekil 13.5'teki grafikte gösterildiği gibi F/A 'ya karşı $\Delta l / l$ eğrisinin çizilmesidir. Aynı malzemeden yapılmış üç numuneyi gösteren Şekil 13.4, Şekil 13.5'te tek eğri olarak gösterilmiştir. Şekil 13.4'ten elde edilebilen bilgilerin bazılarının Şekil 13.5'te görülemediği açıktır. Bu nedenle Şekil 13.5'teki gösterim Şekil 13.4'teki gösterime göre daha avantajlıdır. Şekil 13.5'te görülen tek eğri deneyde kullanılan numunelerin geometrilerinden bağımsız olarak belirli bir malzemeye özgüdür. Bu şekildeki gösterim geometriyi değişkenlerden biri olmaktan çıkartır ve farklı malzemelerin mekanik özelliklerine odaklanılmasını sağlar.



Şekil 13.5 Kuvvet-alan değerine karşılık yük-uzunluk diyagramı

Örnek olarak Şekil 13.6'daki A ve B malzemelerinin basit çekme testindeki mekanik davranışlarını gösteren eğrileri ele

alalım. Malzeme B'nin malzeme A'ya kıyasla tek eksenli test sonucunda daha kolay deforme olduğu veya malzeme A'nın malzeme B'den daha rijit olduğu açıktır.

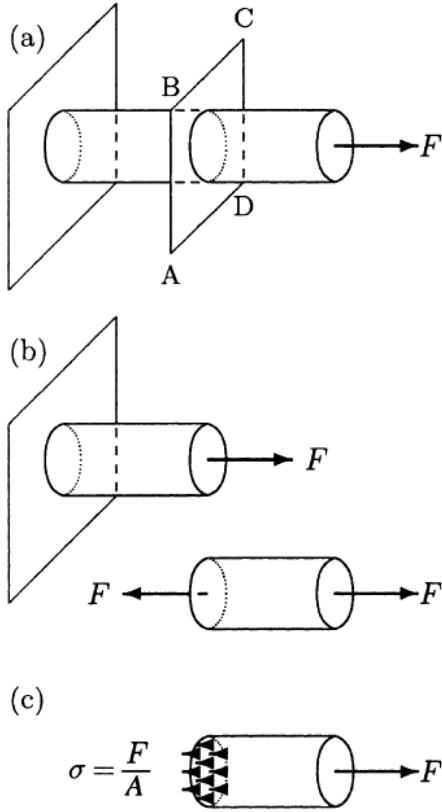


Şekil 13.6 Malzeme A, malzeme B'den daha rijittir

13.4 Basit Gerilme

Şekil 13.7a'daki ankastre kirişi ele alalım. Dairesel kesiti olan ve kesit alanı A olan kiriş bir ucundan duvara kaynak ile sabitlenmişken, diğer ucundan F büyüklüğünde çekme kuvveti uygulanmaktadır. Çubuk dengede olduğundan dolayı hareket etmemektedir. Kirişe etki eden kuvvetlerin incelenmesi için bileşenlerine ayırma metodu, kirişi farazi olarak ABCD düzlemi ile dik olarak ikiye bölerek uygulanabilir. Kiriş bir bütün olarak dengede olduğu için bu iki parça da dengede olacaktır. Bunun sağlanması için her bir parça üzerinde dışarıdan uygulanan kuvvet ile aynı doğrultuda olan iç bir kuvvet olmalıdır. Denge koşullarının sağlanması için iç kuvvetlerin büyüklüğü dış

kuvvete eşit olmalıdır (Şekil 13.7b). Kesim alanındaki iç kuvvet, kirişin kesit alanı üzerine dağıtılan bir kuvvet sisteminin bileşimini temsil eder (Şekil 13.7c).



Şekil 13.7 Normal gerilme

İç kuvvetin kesit alanı üzerindeki yoğunluğu (birim alan üzerindeki kuvvet) *gerilme* olarak bilinir. Şekil 13.7’de gösterilen durumda, kesit alanında ortaya çıkan kuvvet kesit alanı düzlemine dik (dikey) olduğu için, buna karşılık gelen gerilme *normal gerilme* olarak adlandırılır. Normal gerilmeyi göstermek için σ (sigma) sembolünün kullanılması alışılmış bir yöntemdir. Bu yayılı kuvvetin yoğunluğu kesit

boyunca homojendir (sabit). Yayılı kuvvetin kesit yüzeyi boyunca yoğunluğunun homojen olduğu varsayılırsa, normal gerilme aşağıdaki formül ile hesaplanabilir;

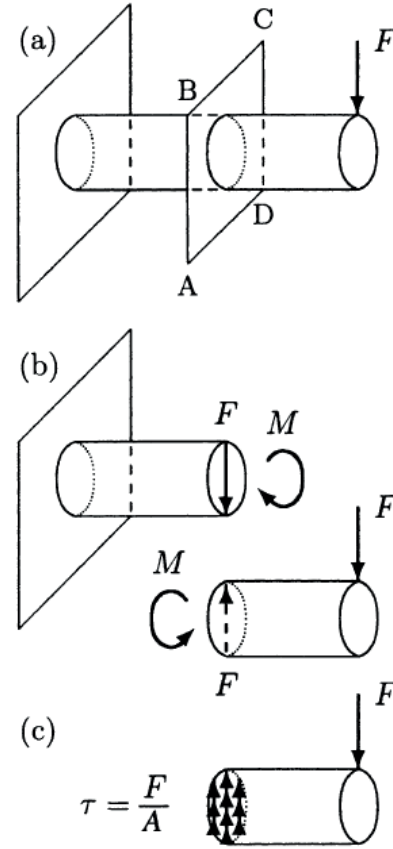
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (13.1)$$

Eğer kuvvetin yoğunluğu alan üzerinde homojen dağılmamışsa, 13.1’deki formülün kullanımı *ortalama normal gerilmeyi* verecektir. Normal gerilmelerle bağlantılı olarak çekme kuvvetini *çekme gerilmesi* olarak ifade etmek kullanılan bir yöntemdir. Diğer yandan *basma gerilmeleri* basma kuvveti ile bağlantılıdır. Ayrıca çekme gerilmesinin pozitif, basma gerilmesinin ise negatif olduğu varsayılmaktadır.

Diğer gerilme biçimine, kesme kuvvetine paralel veya teğet olarak etki eden iç kuvvetlerin yoğunluğunun bir ölçüsü olan *kesme gerilmesi* denir. Kesme gerilmesini anlamak için bir dizi kağıdı tutun. Bir eliniz dizinin altından diğer eliniz dizinin üstünden olacak şekilde iki eliniz ile tutun. İlk olarak kağıt dizisini bir araya sıkıştırın. Sonrasında bir elinizi kağıtların yüzeyine paralel kaydırırken, diğer elinizi de aksi yönde yavaşça kaydırın. Bu, kağıtları birbirine göre kaydırır ve bütün kağıtların yüzeylerinde sürtünme kuvveti oluşturur. Kesme gerilmesi, uygulandığı anda yüzey alanı üzerinde oluşan sürtünme kuvvetinin yoğunluğu ile karşılaştırılabilir. Şekil 13.8a’da çizilen ankastre kirişi ele alalım.

Boş ucuna aşağı yönlü ve büyüklüğü F olan bir kuvvet uygulanmaktadır. İç kuvvetleri ve momentleri inceleyebilmek için kirişin merkez doğrusuna dik, kirişi hayali olarak ikiye ayıran ABCD düzlemi ile bileşenlerine ayırma metodu uygulanabilir. Kiriş bir bütün olarak dengede olduğu için ortaya çıkan iki parça da dengededir. Sağ taraftaki parçanın serbest cisim diyagramı sol taraftaki parça üzerindeki iç kuvvet ve moment, Şekil 13.8b’de çizilmiştir. Sağ taraftaki parçanın dengede olması için, yukarı doğru bir kuvvet oluşmalı ve kesilmiş yüzeyde bir iç moment olmalıdır. Bu parçanın dengede olması için iç kuvvetin büyüklüğü F olmalıdır. Bu kuvvet, *iç kesme kuvveti* olarak bilinir ve kesit yüzeyi üzerinde dağılan kuvvetin sonucu olarak ortaya çıkmaktadır (Şekil 13.8c). Kesit yüzeyi üzerinde oluşan kesme kuvvetinin yoğunluğu kesme gerilmesi olarak adlandırılmakta ve genellikle τ sembolü ile gösterilmektedir. Bu yüzeyin alanı (bu durumda kirişin kesit alanı) A ise, τ aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (13.2)$$



Şekil 13.8 Kesme gerilmesi

Denklem 13.2’nin altında yatan varsayım; kesme gerilmesinin alan üzerinde homojen olarak dağıldığına dayanır. Bazı durumlarda bu varsayım doğru olmayabilir. Bu tür durumlarda 13.2’deki denklem ile hesaplanan kesme gerilmesi, ortalama bir değer olacaktır.

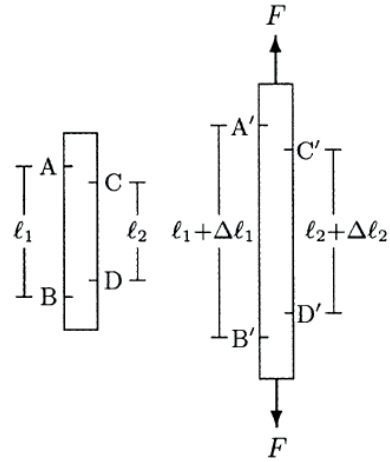
Gerilmenin boyutları, kuvvet boyutlarını $[F] = [M][L]/[T^2]$ kesit alanı boyutları $[L^2]$ ile bölerek bulunabilir. Gerilmenin farklı birim sistemlerindeki birimleri Tablo 13.1’de listelenmiştir. Gerilmenin, basınç ile boyutları ve birimlerinin aynı olduğu unutulmamalıdır.

Tablo 13.1 Gerilmenin birimleri

Sistem	Gerilme Birimleri	Özel ismi
SI	N/m	Pascal(Pa)
c-g-s	dyn/cm	
İngiliz	lb/ft veya lb/in	psf veya psi

13.5 Basit Gerinim

Gerinim, aynı zamanda birim deformasyon olarak bilinen, deformasyonun derecesinin veya yoğunluğunun ölçüsüdür. Şekil 13.9'daki çubuğu ele alalım. A ve B noktalarının çubuk üzerinde ve birbirlerinden l_1 uzaklıkta, C ve D noktalarının ise birbirlerinden l_2 uzaklıkta çubuk üzerinde iki nokta olduğunu ve $l_1 > l_2$ olduğunu varsayalım. l_1 ve l_2 ölçü uzunlukları olarak adlandırılmaktadır. Çubuk, çekme kuvvetine maruz kaldığında uzayacaktır. Δl_1 , A ve B noktaları arasındaki uzama ve Δl_2 'de C ve D noktaları arasındaki uzama olsun. Δl_1 ve Δl_2 bir tür deformasyonun ölçümü olur. Ancak, $\Delta l_1 > \Delta l_2$ gibi, ilgili ölçüm uzunluklarına bağlıdır. Diğer bir yandan uzamanın ölçüm uzunluğuna oranı her durum için hesaplanıp karşılaştırılırsa ($(\Delta l_1 / \Delta l_1) \approx (\Delta l_2 / \Delta l_2)$) olduğu görülecektir. Her bir birim ölçüm uzunluğu için uzama, gerinim olarak bilinmektedir ve deformasyonun ölçümü için daha temel bir araçtır.

**Şekil 13.9** Normal gerinim

Gerilmenin olduğu durumlarda, iki tür gerinim ortaya çıkmaktadır. *Normal* veya *eksenel gerinim*, aksenal kuvvetler ile ilişkilidir ve uzunluktaki değişimin Δl (artma veya azalma) ilk ölçüm uzunluğuna, l , oranlanması ile hesaplanır ve ϵ ile gösterilir;

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (13.3)$$

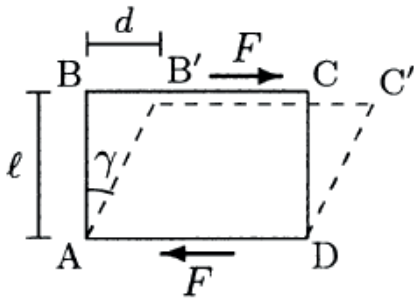
Bir kütle çekme kuvvetine maruz kaldığında uzunluğu artar ve bunun neticesinde hem Δl hem de ϵ pozitiftir. Basma kuvveti altında numunelerin boyu kısalmış ve hem Δl hem de ϵ negatif olur.

Gerinimin ikinci türü, kesme kuvvetlerinin neden olduğu şekil değişikliği ile ilgilidir. Şekil 13.10'da gösterilen, bir çift kesme kuvvetine karşı hareket eden ABCD dikdörtgenini ele alalım. Kesme kuvvetleri dikdörtgeni bozarak paralelkenara çevirir (AB'C'D). Dikdörtgenin üst kısmının yatay yer değiştirmesi d ve yüksekliği l ise, *ortalama kesme gerinimi* aynı

zamanda G (gamma) açısının tanjantına, γ , eşit olan, d 'nin l 'ye oranı olarak tanımlanır. Açı genellikle çok küçüktür. Küçük açılar için açının tanjantı yaklaşık olarak açının kendisine eşittir. Bunun neticesinde ortalama kesme gerinimi, açığa, γ , (radyan olarak ölçülen) eşittir ve aşağıdaki formül ile hesaplanır;

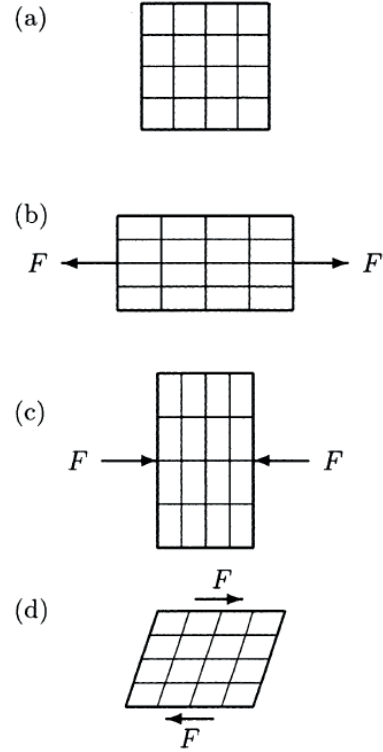
$$\gamma \cong \tan(\gamma) \cong \frac{d}{l} \quad (13.4)$$

Gerinim, uzunluk ölçü birimine sahip iki değer birbirine bölünmesiyle hesaplanır. Bu nedenle boyutsuzdur ve gerinim ile ilişkilendirilen bir birim yoktur. Birçok uygulama için deformasyonlar ve buna bağlı olarak gerinimler çok küçüktür ve ölçümlerin tutarlılığı çok önemlidir. Alınan ölçümlerin türünü belirtmek için, bir gerinim değerinin yanında cm / cm veya mm / mm gibi üniteleri belirtmek sık görülen bir uygulamadır. Gerinimler ayrıca yüzdelik olarak da verilebilirler. Mühendislik uygulamalarında gerinimler 0.1% veya 0.001 büyüklüğünde kullanılırlar.



Şekil 13.10 Kesme gerinimi

Şekil 13.11 çekme, basma ve kesme yüklerinin etkilerini karşılaştırmak için çizilmiştir. Şekil 13.11a iki boyutlu bir kare cismine hiçbir yükün etki etmediği anı göstermektedir. Kare cisim, farklı deformasyonları gösterebilmek adına 16 küçük kareye bölünmüştür. Cisim Şekil 13.11b'de bir çift çekme kuvvetine maruz bırakılmıştır. Çekme kuvvetleri kareleri dikdörtgene dönüştürür, böylece uygulanan kuvvetin (eksenel boyut) yönündeki her bir karenin boyutu artar ve uygulanan kuvvetin (enine boyut) yönüne dik olan boyutu azalır. Şekil 13.11c'de, cisim, kareleri dikdörtgene dönüştüren, her bir karenin ekstenel boyutu, enine boyutu arttıkça azalan bir çift basma kuvvetine maruz bırakılmıştır. Şekil 13.11d'de, nesne kareleri elmaslara dönüştüren bir çift kesme kuvvetine maruz bırakılmıştır.



Şekil 13.11 Kare bir şeklin (a), çekme (b), basma, (c) ve kesme (d) yükleri altında şekil değişimi

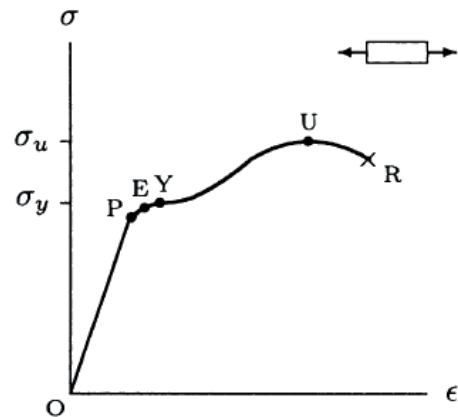
13.6 Gerilme-Gerinim Diyagramı

Bölüm 13.3’de gösterildiği gibi aksenal çekme testlerinin sonuçları, malzeme için yük ve yer değiştirme arasındaki ilişkiyi gösteren, kendine özgü eğriyi elde etmek için kullanılabilir. Uygulanan yükün malzemenin kesit alanına bölünmesi (F/A), boydaki değişimin ilk boya bölünmesi $\Delta l / l$ ve F/A ya karşılık $\Delta l / l$ ’nin çizdirildiği grafikten elde edilebilir. Çekme yükü altında F/A çekme gerilmesi σ , $\Delta l / l$ ise ortalama çekme gerinimini ϵ ifade eder. Bu sebeple bir malzemenin F/A ’a karşılık $\Delta l / l$ grafiğini temel olarak bir malzemenin *gerilme-gerinim diyagramı* olarak adlandırılır.

Farklı malzemeler farklı gerilme-gerinim diyagramlarına sahiptir ve iki veya daha fazla malzemenin rijitliği, sertliği, tokluğu, sünekliliği veya gevrekliği gerilme-gerinim diyagramlarından karşılaştırılabilir. Malzemenin dayanımıyla ilgili bu kavramlar açıklanmadan önce, ilk olarak tipik bir gerilme-gerinim diyagramını detaylı olarak ele almak daha uygun olacaktır.

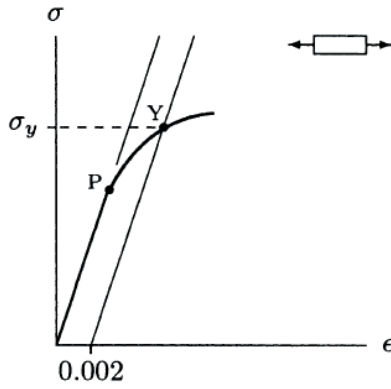
Şekil 13.12’i dikkate alındığında, O, P, E, Y, U ve R harfleriyle adlandırılan 6 farklı nokta olduğu görülmektedir. O noktası, $\sigma - \epsilon$ diyagramının başlangıç yükü ve deformasyonun olmadığı başlangıç noktasıdır. P noktası *orantılılığın sınırını* temsil etmektedir. O ve P arasında gerilme gerinim doğrusal olarak orantılıdır ve $\sigma - \epsilon$ eğrisi düz bir çizgi şeklindedir. E noktası *elastik limiti* temsil

etmektedir. Elastik limite karşılık gelen gerilme, malzemeye uygulandığında malzemede kalıcı deformasyona sebep olmayan en büyük gerilmedir. Eğer malzeme elastik sınırın üzerinde gerilme seviyesine maruz bırakılırsa, yüklenmeden önceki merkez al büyüklüğü ve şekline geri dönemeyecektir. Y noktası *akma noktasıdır* ve akma noktasıyla bağlantılı gerilme σ_y malzemenin akma dayanımı olarak adlandırılır. Bu gerilme seviyesinde, yükte artış gerçekleşmeden de büyük ölçüde uzama (sünme) gerçekleşebilir. U noktası $\sigma - \epsilon$ eğrisindeki en yüksek gerilme noktasıdır. Bu gerilme σ_u , malzemenin *maksimum dayanımıdır*. Bazı malzemelerde, maksimum dayanıma ulaşıldığında, uygulanan kuvvet düşebilir ya da sürekli sünme gözlemlenebilir. Bu olay daha sonra tartışılacak olan *boyun verme* olarak adlandırılır. $\sigma - \epsilon$ eğrisindeki son nokta R’dir ve *kopma* ya da *hasar görme* noktasını temsil eder. Kopmanın olduğu gerilme malzemenin *kopma dayanımı* olarak adlandırılır.



Şekil 13.12 Aksenal yüklenme için gerilme-gerinim diyagramı

Bazı malzemeler için elastik sınır ve akma noktasını ayırmak ya da belirlemek kolay olmayabilir. Bazı malzemelerin akma dayanımı Şekil 13.13'de gösterildiği gibi ofset metodu ile belirlenir. Ofset metodunda gerilme-gerinim diyagramının doğrusal kısmına, % 0.2 (0.002) gerinim seviyesinden geçen paralel bir çizgi çekilerek hesaplanır. Bu çizginin $\sigma - \epsilon$ eğrisi ile kesiştiği nokta akma noktası, bu noktadaki gerilme ise malzemenin *görünür akma dayanımı* olarak adlandırılır.



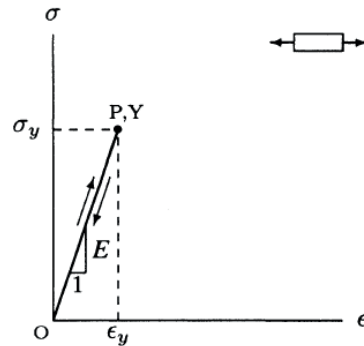
Şekil 13.13 Ofset metodu

Malzemelerin farklı yükleme ve çevresel koşullar altında farklı davranış sergileyebileceği unutulmamalıdır. Şekil 13.12'de gösterilen grafik bir malzemenin çekme yükü altında verdiği cevap olan gerilme-gerinim ilişkisini gösterirken, grafik aynı materyal için basma veya kesme yükleri altında benzer ancak farklı olabilir. Sıcaklığın da gerilme-gerinim arasındaki ilişkiyi değiştirdiği bilinmektedir. Örneğin belirli bir malzemenin sabit yükleme altında değişen sıcaklık değerlerinde farklı gerilme-gerinim diyagramları çıkartacaktır. Buna ek olarak

uygulanan çekme yükü oranı da çekme testi esnasında toplanan verileri etkileyebilir. Gerinim ve gerilme arasındaki ilişkiyi etkileyen faktörlerin bazıları daha sonra tartışılacaktır.

13.7 Elastik Deformasyon

Şekil 13.14'deki gerilme-gerinim diyagramı göz önüne alındığında Y akma noktası bu grafik için orantısallık ve elastik limiti de temsil eder. σ_y akma dayanımı, akma dayanımına denk gelen gerinim ϵ_y 'dir. ($\sigma - \epsilon$ eğrisinde elastik sınır sonrası gösterilmemektedir). Şekil 13.14'deki düz çizgi elastik bölgedeki gerilme-gerinim ilişkisini temsil etmektedir. Elastisite, uygulanan yük kaldırıldığında malzemenin ilk boyutuna (gerilme olmadan önce) ve şekline geri dönebilme yeteneğidir. Başka bir deyişle, malzemeye σ_y ' a eşit veya daha düşük gerilme oluşturacak yük uygulandığında, uygulanan yük kaldırıldığında malzemede oluşan deformasyon tamamen geri döner.



Şekil 13.14 Doğrusal elastik bir malzeme için gerilme-gerinim diyagramı (↑: yüklenme altında, ↓: yüklenme yok)

$\sigma - \epsilon$ diyagramı düz çizgi şeklinde olan elastik malzemelere *doğrusal elastik malzeme* denir. Böyle malzemeler için gerilme gerinime doğrusal orantılıdır ve orantısallık sabiti *elastik* ya da *Young modülü* olarak adlandırılır. Elastik modülü E;

$$\sigma = E \epsilon \quad (13.5)$$

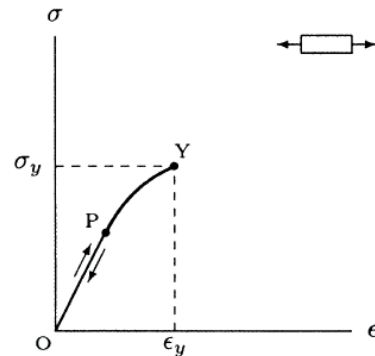
Elastik modülü, E, $\sigma - \epsilon$ diyagramının elastik bölgesinin eğimine eşittir ve doğrusal elastik malzemeler için bu değer bir sabittir. E malzemenin *rijitliğini* temsil eder ve elastik modülü büyük olan malzeme daha rijit bir malzemedir. Doğrusal elastik malzemelerde ayırt edici faktör elastik modülüdür ve farklı doğrusal elastik malzemeler farklı elastik modülüne sahiptir. Eğer malzemenin elastik modülü biliniyorsa, uygulanan yük ve buna bağlı oluşan deformasyon arasındaki ilişki gerilme ve gerinimin ($\sigma = F/A$ ve $\epsilon = \Delta l / l$) matematiksel tanımı Denklem (13.5)'te yerine konulduğunda elde edilebilir:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (13.6)$$

Denklem 13.6'da F, malzemeye uygulanan basma ya da çekme kuvveti büyüklüğü, E malzemenin elastik modülü, A uygulanan kuvvetin etki çizgisini dik açıda kesen yüzey alanı, l uygulanan kuvvetin etki çizgisi boyunca ölçülmüş malzemenin uzunluğu, Δl uygulanan yüke bağlı olarak l'nin uzama ya da kısalma miktarıdır. Bilinen doğrusal elastik malzeme (ya da $\sigma - \epsilon$ diyagramının doğrusal

elastik bölgesinde deformasyonu olan herhangi bir malzeme) ve uygulanan yükün oluşan deformasyonunu hesaplamak için Denklem (13.6) kullanılabilir. Bu denklem numune çekme ya da basma yükü altındayken kullanılabilir.

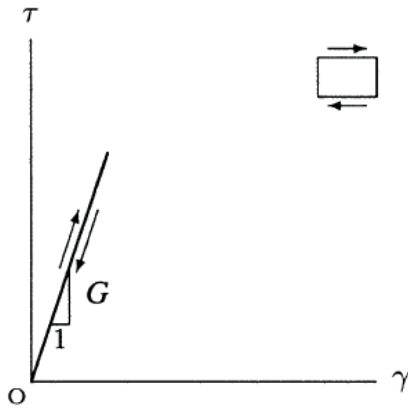
Bütün elastik malzemeler doğrusal davranış sergilemez. Şekil 13.15'de gösterilen bir malzemenin $\sigma - \epsilon$ diyagramında orantılılık limitine kadar olan doğrusallığı bir eğri takip edebilir. Eğri, eğimin değişmesi ve doğrusal olmaması ile ifade edilir. Elastik bölgesi düz çizgi olmayan malzemeler *doğrusal olmayan elastik malzemeler* olarak bilinir. Doğrusal olmayan elastik malzemelerde, $\sigma - \epsilon$ eğrisinde elastik bölgenin eğimi sabit olmadığı için tek bir elastik modülü yoktur. Dolayısıyla doğrusal olmayan malzemeler için gerilme-gerinim ilişkisi daha karmaşık bir hal almaktadır. Yine de doğrusal olmayan malzemelerin de $\sigma - \epsilon$ diyagramında düşük gerilme seviyelerinde (Şekil 13.15'de O ve P noktaları arasındaki bölge) doğrusal elastik bölgeye sahip olabileceği unutulmamalıdır.



Şekil 13.15 Doğrusal olmayan elastik malzemenin gerilme-gerinim diyagramı

Bazı malzemeler kesme yüküne maruz bırakıldıklarında doğrusal olarak elastik davranış sergileyebilirler (Şekil 13.16). Bu tip malzemeler için, kesme gerilmesi, τ , kesme gerinimine, γ , doğrusal orantılıdır ve orantılılık sabiti, *kesme modülü* veya *rijitlik modülü* olarak adlandırılır ve genellikle G sembolüyle gösterilir:

$$\tau = G\gamma \quad (13.7)$$



Şekil 13.16 Doğrusal elastik malzeme için kesme gerilme-kesme gerinimi diyagramı

Bilinen bir doğrusal malzemenin kesme modülü, $\tau - \gamma$ eğrisinde elastik bölgenin eğimine eşittir. Kesme modülü yüksek olan malzemenin, rijitliği de yüksektir.

Denklem (13.5) ve (13.6) gerilme ve gerinimi ilişkilendirir ve *malzeme fonksiyonu* olarak adlandırıldığı unutulmamalıdır. Açıkça görülmektedir ki bilinen bir malzemede farklı deformasyon çeşitleri için farklı malzeme

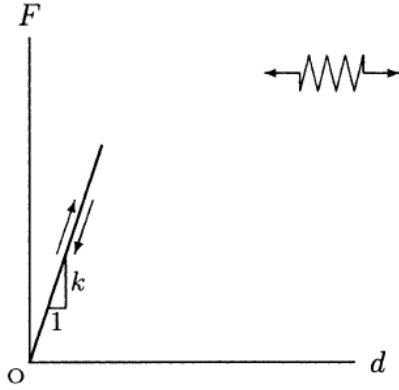
fonksiyonları mevcut olabilir. Bütün malzeme fonksiyonlarını kapsayan temel denklemler de mevcuttur.

13.8 Hooke Kanunu

Elastik malzemelerin yük taşıma özelliklerinin yaylara benzerliği ilk olarak Robert Hooke tarafından fark edilmiştir. Yaylar gibi elastik malzemelerin de dışardan bir yüke maruz kaldıklarında potansiyel enerjiyi depolama özellikleri vardır. Üzerlerindeki yük kaldırılırken bu enerjiyi deforme olmadan önceki haline gelmek için kullanır. Düz bir yay, çekme yüküne maruz bırakılırsa uygulanan yük ile doğrusal orantılı olarak uzama gerçekleşecektir (Şekil 13.17). *Yay sabiti* veya *yay rijitliği* olarak bilinen, yük ve deformasyon arasındaki orantılılık sabiti genellikle k sembolü ile gösterilir. k yay sabitine sahip doğrusal yay için uygulanan yük F ve uzama miktarı d arasındaki ilişki:

$$F = kd \quad (13.8)$$

Denklem (13.5) ve (13.8) karşılaştırıldığında, elastik malzemelerdeki gerilme yayda uygulanan kuvvete, elastik malzemelerdeki gerinim, yayda meydana gelen deformasyon miktarına ve elastik malzemelerdeki modülün ise yayda yay sabitine benzer olduğu gözlemlenmektedir. Elastik malzemeler ve yaylar arasındaki bu benzerlik *Hook Kanunu* olarak bilinmektedir.



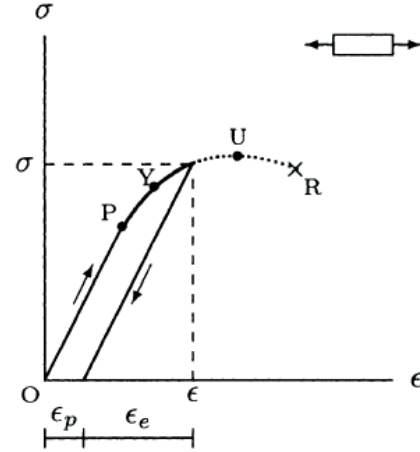
Şekil 13.17 Doğrusal bir yay için yük-uzama diyagramı

13.9 Plastik Deformasyon

Elastisiteyi, malzemeye uygulanan yük kaldırıldığında tamamen ilk haline dönebilme yeteneği olarak tanımlıyoruz. Elastik davranış kalıcı deformasyonun olmadığı durumları belirtir. *Plastisite* ise kalıcı deformasyonu belirtir. Genel olarak malzemeler elastik sınır ya da akma noktalarından daha fazla yüklendiklerinde plastik deformasyon görülür.

Şekil 13.18'de görülen gerilme-gerinim diyagramı dikkate alındığında, çekme yüküne maruz bırakıldığı varsayılan aynı malzemeden yapılan numunenin gerilmesi $\sigma > \sigma_y$ seviyesine getirilir. Numunede meydana gelen gerinim ϵ ölçülür. Malzeme üzerindeki yükün kaldırılmasıyla, malzeme baştaki doğrusal elastik bölgeye paralel yük boşaltma yolunu (O ve P noktaları arasındaki düz çizgi) takip ederek oluşan plastik deformasyon ortadan

kalkar. Bu yolun gerinim eksenini kestiği nokta plastik gerinim ϵ_p olarak adlandırılır, numunede yer alan kalıcı (düzeltilemez) şekil değişiminin boyutunu belirtir.



Şekil 13.18 Plastik deformasyon

Yüklemeye öncesi ve yüklemeye sonrası gerinim değerleri arasındaki fark ($\epsilon - \epsilon_p$), malzeme üzerindeki yük kaldırıldıktan sonraki geri dönüşümde oluşan elastik gerinimine (ϵ_e) eşittir. Bu nedenle elastik limitin üzerinde bir gerilme seviyesine kadar yüklenen malzeme için, toplam gerinim elastik ve plastik gerinimlerin toplamına eşittir:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (13.9)$$

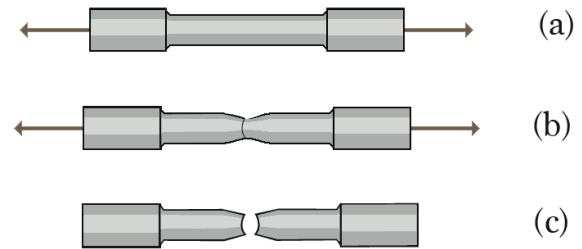
Elastik gerinim, ϵ_e , yük kaldırıldığında tamamen eski haline dönerken, plastik gerinimde (ϵ_p) kalıcı şekilde deformasyon kalıntıları mevcuttur.

13.10 Boyun Verme

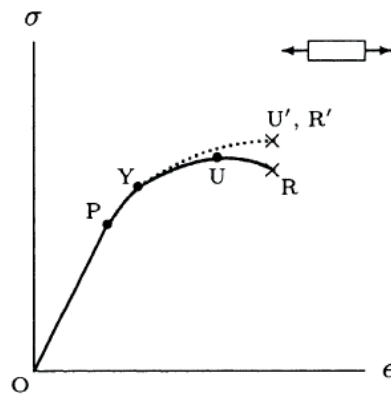
Bölüm 13.6'da tanımlandığı üzere, malzemenin dayanabildiği en yüksek gerilme, o malzemenin maksimum dayanımı olarak adlandırılır. Malzeme maksimum dayanımına kadar olan gerilmeye maruz bırakıldığında deformasyon oranında artış gözlemlenir ve çoğu olayda yük azaltıldığı takdirde bile sürekli akma gerçekleşir. Malzeme bir kereliğine maksimum dayanımına eşit gerilmeye maruz bırakıldığında, artan oranda deformasyon gözlemlenirken, çoğu olayda uygulanan yük azalsa bile sürekli akma gerçekleşmektedir. Malzeme bir süre sonra belli bir yük altındayken kopacaktır. Kopma anındaki gerilme, malzemenin kopma dayanımı olarak adlandırılır ve bu değer maksimum dayanımından düşük olabilir. Bu durum her ne kadar gerçekçi görünmese de, sebebi *boyun verme* olgusu ve gerilmelerin hesaplanma şeklidir. Gerilme, genellikle malzemenin ilk kesit alanı temel alınarak hesaplanır.

Gerilmeler genellikle malzemenin merkezal enine kesit alanı esas alınarak hesaplanır. Bu tür gerilmelere *konvansiyonel gerilmeler* denir. Uygulanan kuvvetin ilk kesit alanı ile bölünmesiyle bir gerilme hesaplanması elverişli olmakla birlikte, kesin olarak doğru değildir. *Gerçek* veya *kesin* gerilme hesaplamaları, deforme olmuş malzemenin kesit alanı dikkate alınarak yapılmalıdır. Şekil 13.19'da gösterildiği gibi, çekme yükü altında, bir malzeme uygulanan yük yönünde uzayabilir,

ancak eninde daralma gerçekleşebilir. Kırılma noktasına yakın bir gerilme seviyesinde, hızlı bir uzama gerçekleşebilirken, aynı zamanda malzemenin eninde daralma da meydana gelecektir. Daralmış kısımdaki kesit alanı azalır ancak malzemeyi daha fazla deforme etmek için gereken kuvvet azalsa da birim alandaki kuvvet (gerilme) artabilir. Şekil 13.20'de noktalı eğri ile gösterildiği gibi, gerçek gerilme-gerinim eğrisi pozitif bir eğime sahip olarak devam edebilir, bu da azalan gerilme ile artan gerinim anlamına gelen negatif eğim yerine artan gerilme ile azalan gerinim anlamına gelir. Ayrıca, kopma noktası ve malzemenin maksimum dayanımına karşılık gelen nokta aynı olabilir.



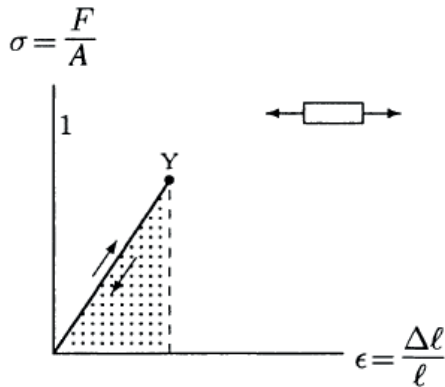
Şekil 13.19 Boyun verme



Şekil 13.20 Geleneksel (düz çizgi) ve gerçek (kesikli çizgili) gerilme-gerinim diyagramları

13.11 İş ve Gerinim Enerjisi

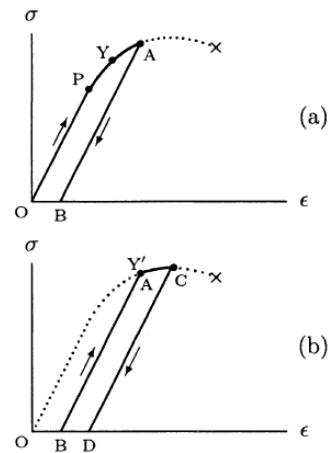
Dinamikte *yapılan iş*, kuvvetin ürünü ve uygulanan kuvvetin yönüne göre kat edilen mesafe olarak tanımlanır ve *enerji*, bir sistemin iş yapabilme kapasitesidir. Şekil değiştirebilen cisim mekaniğinde gerilme ve gerinim, sırasıyla, kuvvet ve yer değiştirme ile ilgilidir. Alan ile gerilme çarpılarak kuvvet, gerinim uzunluk ile çarpılarak yer değiştirme elde edilir. Bu nedenle, gerilme ve gerinimin ürünü, cismin birim hacmi başına cisim üzerinde yapılan işe ya da dışardan uygulanan yükler tarafından yapılan cisim üzerindeki *içsel işe eşittir*. Elastik bir malzeme için, bu iş *iç elastik gerinim enerjisi* olarak depolanır ve yüklemeyi kaldırılırken cismi eski haline getirmek için kullanılır. Bir cisimde depolanabilen en yüksek elastik gerinim enerjisi (birim hacimde) $\sigma - \epsilon$ diyagramında elastik bölge altında kalan toplam alana eşittir (Şekil 13.21). Ayrıca cismi deforme ederken ısı olarak dağıtılan bir *plastik gerinim enerjisi* de vardır.



Şekil 13.21 Yapılan içsel iş ve her birim hacim için elastik gerinim enerjisi

13.12 Gerinim Sertleşmesi (Pekleşme)

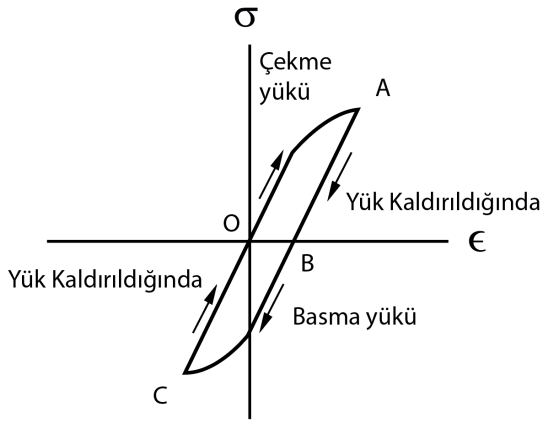
Şekil 13.22 bir malzemenin $\sigma - \epsilon$ diyagramını temsil etmektedir. Bu malzemenin elastik sınırını (akma noktasını) aşacak çekme yüküne maruz bırakıldığı varsayalım. Malzemedeki gerilme seviyesi, $\sigma - \epsilon$ diyagramındaki A noktası ile belirtilir. Uygulanan kuvvetin kaldırılmasıyla malzeme, $\sigma - \epsilon$ diyagramındaki başlangıç doğrusal kısım olan OP'ye neredeyse paralel olan AB yolunu takip edecektir. B'deki gerinim malzemedeki plastik deformasyon miktarına karşılık gelir. Eğer malzeme tekrar yüklenirse, B ve A arasında elastik davranış sergileyecektir. A noktasında gerilme malzemenin yeni akma dayanımı olacaktır. Malzemenin akma noktasını değiştirme tekniği *pekleşme* olarak adlandırılmaktadır. A'daki gerilme malzemenin ilk akma dayanımından daha büyük olduğu için, pekleşme malzemenin akma dayanımını artırır. Yeniden yüklemenin akabinde, eğer malzeme A'dan sonra geriliyorsa, malzeme merkez al $\sigma - \epsilon$ eğrisine göre deforme olacaktır.



Şekil 13.22 Gerinim sertleşmesi (pekleşme)

13.13 Histerezis Döngüsü

Şekil 13.23'teki $\sigma - \epsilon$ diyagramı dikkate alındığında, malzemeye O ve A noktaları arasında, çekme kuvveti uygulanır ve malzeme elastik sınırının üzerinde deforme edilir. A noktasında çekme kuvveti kaldırılırsa AB yük boşaltma yolunu temsil edecektir. B noktasında malzeme bu kez bir sıkıştırma kuvveti ile tekrar yüklenir. C'de, malzemeye uygulanan sıkıştırma kuvveti çıkarılır. C ve O arasında, ikinci bir boşaltma meydana gelir ve sonuç olarak malzeme ilk şekline döner. OABCO döngüsü *histerezis döngüsü* olarak adlandırılır, bu döngü tarafınca çevrelenen alan, çekme ve basmada cismi deforme etmek için ısı olarak dağıtılan toplam gerinme enerjisine eşittir.

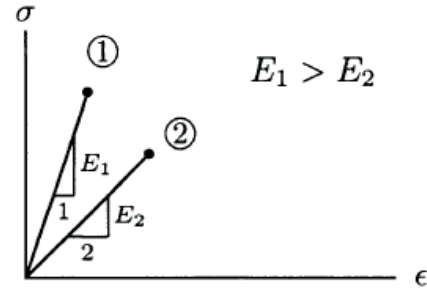


Şekil 13.23 Histerezis döngüsü

13.14 Gerilme Gerinim Diyagramına Bağlı Özellikler

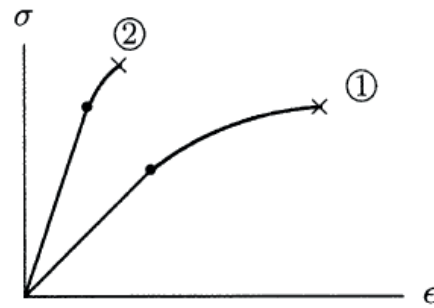
Önceden de tanımlandığı gibi, malzemenin elastik modülü, gerilme-gerinim diyagramında elastik bölgenin eğimine eşittir. Elastik modül, bir malzemenin bir diğerine göre *rijitliğinin*

göreceli bir ölçüsüdür. Elastik modülü yüksek olan malzeme, daha rijit ve deformasyona direnci daha yüksektir. Örneğin, Şekil 13.24'te malzeme 1, malzeme 2'ye göre daha rijittir.



Şekil 13.24 Malzeme 1 malzeme 2'den daha rijittir

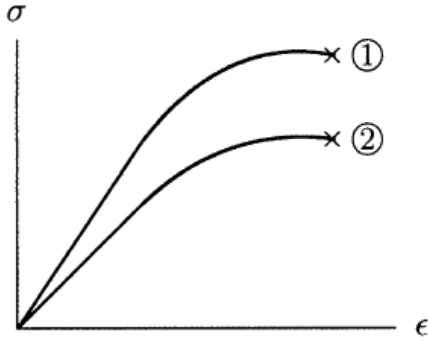
Sünek malzemeler, kopmadan önce uzun plastik deformasyon sergilerler. Örneğin, Şekil 13.25'de malzeme 1, malzeme 2'ye göre daha sünektir. *Gevrek* malzemelerde ise önemli bir plastik deformasyon görülmeden ani kopmalar görülmektedir. Cam, gevrek malzemelerin tipik bir örneğidir.



Şekil 13.25 Materyal 1, materyal 2'den daha fazla sünektir ve daha az kırğındır

Tokluk, bir malzemenin kalıcı deformasyonu sürdürme kapasitesinin bir ölçüsüdür. Bir malzemenin tokluğu, gerilme-gerinim

diyagramı altındaki toplam alan ile belirlenir. Bu alan ne kadar büyükse, malzeme daha toktur. Örneğin Şekil 13.26'da malzeme 1, malzeme 2'den daha toktur.



Şekil 13.26 Malzeme 1, malzeme 2'den daha toktur.

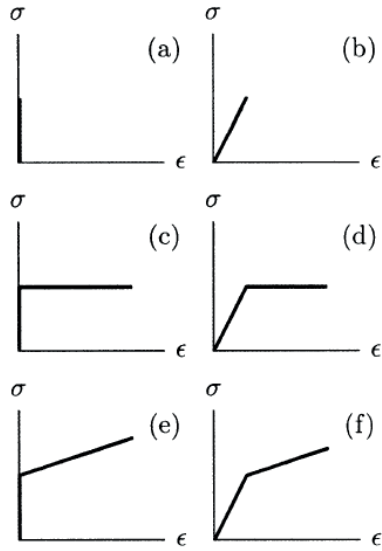
Bir malzemenin kalıcı deformasyon olmadan enerjii depolama veya soğurma yeteneği malzemenin *rezilyansı* olarak adlandırılır. Malzemenin rezilyansı, gerilme-gerinim diyagramının elastik bölgesi altında kalan alana eşit olan *rezilyans modülü* ile hesaplanır. Doğrusal elastik malzemelerin rezilyans modülü $\sigma_y \epsilon_y / 2$ veya $\sigma_y^2 / 2E$ 'ye eşittir.

Gerilme-gerinim diyagramları ile doğrudan ilişkili olmasalar da, malzeme özelliklerini tanımlamak için kullanılan diğer önemli kavramlar vardır. Malzemenin içinde bölgeden bölgeye özelliklerin değişmemesi durumunda malzeme *homojen* olarak adlandırılır. Bir malzemenin özellikleri yönden bağımsızsa *izotropik* olarak adlandırılır. Eğer malzeme sabit bir yoğunluğa sahipse, *sıkıştırılmayan* malzeme olarak adlandırılır.

13.15 Malzeme Davranışının İdealleştirilmiş Modelleri

Gerilme-gerinim diyagramları matematiksel fonksiyonlar olarak sunulduğunda daha çok fayda sağlar. Malzemelerin gerilme-gerinim diyagramları çeşitli biçimlerde olabilir ve bunları temsil etmek için tek bir matematiksel fonksiyon bulmak mümkün olmayabilir. Matematiksel modelleme ve materyal davranışının analitik yaklaşımı için, bu diyagramlar basitleştirilebilir. Belirli idealize edilmiş malzeme davranışını temsil eden bu diyagramların bazıları, Şekil 13.27'de gösterilmiştir.

Sert bir malzeme, çok büyük yükler altında bile deforme edilemeyen bir malzemedir (Şekil 13.27a). *Doğrusal elastik* bir malzeme, gerilme ve gerinimin doğrusal olarak orantılı olduğu bir malzemedir ve elastisite modülü orantılılık sabitidir (Şekil 13.27b). *Tamamen rijit* bir plastik malzeme herhangi bir elastik davranış göstermez ve bir kez kritik bir gerilme seviyesine ulaşıldığında, kopmaya kadar sürekli ve kalıcı olarak deforme olur (Şekil 13.27c). Doğrusal elastik cevaptan sonra *doğrusal elastik tamamen plastik* malzeme sabit gerilme seviyesinde daimi olarak deforme olur (Şekil 13.27d). Şekil 13.27e, *rijit doğrusal plastik* davranış için olan gerilme-gerinim diyagramını temsil etmektedir. *Doğrusal elastik-doğrusal plastik* malzemenin gerilme-gerinim diyagramı, gerilmeler ve gerinimlerin doğrusal orantılı olduğu iki farklı eğime sahip iki ayrı bölgeye sahiptir (Şekil 13.27f).

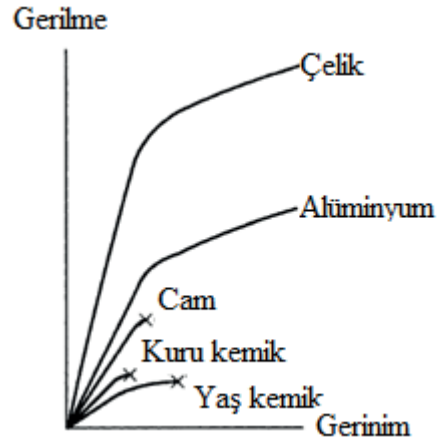


Şekil 13.27 Malzeme davranışının idealleştirilmiş modelleri

13.16 Malzemelerin Mekanik Özellikleri

Tablo 13.2’de bazı malzemelerin çekme akma dayanımı (σ_y), maksimum çekme dayanımı (σ_u), elastik modülü (E), kesme modülü (G) ve Poisson oranı (ν) verilmiştir. Poisson oranının önemi gelecek bölümde işlenecektir. Bir malzemenin mekanik özelliklerinin, içerik (örneğin çelik, karbon içeriği) ve malzemeyi imal etmek için kullanılan işlemler de (örneğin sert çekilmiş, pekleştirilmiş veya ısıl işlem görmüş) dahil olmak üzere birçok faktöre bağlı olarak değişebileceğini unutulmamalıdır. Daha sonraki bölümlerde tartışılacağı gibi, biyolojik materyaller zamana bağlı özellikler sergiler. Yani, dış kuvvetlere tepkileri, kuvvetlerin uygulandığı orana bağlıdır. Örneğin kemik anizotropik bir malzemedir. Farklı yönlerde çekme yüküne cevabı farklıdır ve farklı yönlerde cevabını hesaba katmak için farklı

elastik modüller oluşturulmuştur. Şekil 13.28 bazı malzemelerin çekme gerilme-gerinim diyagramlarını göstermektedir. Çelik ve alüminyum diğerlerine göre daha rijit ve daha yüksek maksimum dayanıma sahiptir. Cam ve kuru kemik gevreklerdir. Yaş kemik en düşük maksimum dayanıma ve elastik modülüne sahiptir. Bu nedenle, Tablo 13.2’de listelenen bazı ortalamalar ve aralıklar ilgili sayıların büyüklüklerinin sıralanışını anlatmayı amaçlamaktadır.



Şekil 13.28 Seçilen malzemelerin gerilme-gerinim diyagramlarının karşılaştırması

Tablo 13.2 Seçili malzemelerin ortalama mekanik özellikleri

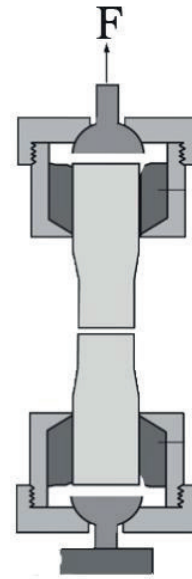
Malzeme	Akma Dayanımı σ_Y (MPa)	Maksimum Çekme Dayanımı σ_U (MPa)	Elastik Modülü E (MPa)	Kesme Modülü G (MPa)	Poisson Oranı ν
Kas	-	0.2	-	-	0.49
Tendon	-	70	0.4	-	0.40
Deri	-	8	0.5	-	0.49
Kortikal kemik	80	130	17	3.3	0.40
Cam	35-70	-	70-80	-	-
Dökme demir	40-260	140-380	100-190	42-90	0.29
Alüminyum	60-220	90-390	70	28	0.33
Çelik	200-700	400-850	200	80	0.30
Titanyum	400-800	500-900	100	45	0.34

13.17 Örnek Problemler

Aşağıdaki örnekler bu bölümde bahsedilen kavramların bazı kullanımlarını göstermektedir.

Örnek 13.1 Yarıçapı $r=1,26$ cm olan dairesel silindirik çubuk, tek eksenli bir çekme kuvveti ile test edilmiştir (Şekil 13.29). 1000 N'luk çekme kuvveti uygulanmadan önce, A ve B noktaları arasındaki mesafe 30 cm (ölçüm boyu) olarak belirlenmiş ve A, B noktaları çubuk üzerinde işaretlenmiştir. Yük uygulandıktan sonra, A ve B arasındaki mesafe $l_1=31,5$ cm olarak ölçülmüştür.

Rod üzerinde oluşan çekme gerinimi ve ortalama gerilmeyi hesaplayınız.

**Şekil 13.29** Örnek 13.1

Çözüm

Tanım olarak, çekme gerinimi uzama miktarının ilk uzunluğa oranına eşittir. Uzama miktarı, Δl , deformasyon öncesi ve sonrası ölçüm uzunlukları arasındaki farktır;

$$\Delta l = l_1 - l_0 = 31,5 - 30,0 = 1,5 \text{ cm}$$

Bu sebeple, rodta oluşan çekme gerinimi ε ;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1,5}{30} = 0,05 \text{ cm/cm}$$

Çubuğun yarıçapı $r = 1,26 \text{ cm}$ veya $r = 0,0126 \text{ m}$ olan dairesel bir kesiti vardır. Çubuğun dairesel kesit alanı A ;

$$A = \pi r^2 = (3,1416)(0,0126)^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Ortalama çekme gerilmesi, kuvvetin etki çizgisini dik açıda kesen yüzeyin birim alanı başına uygulanan kuvvete eşittir. Bu durumda, çubuğun kesit alanı;

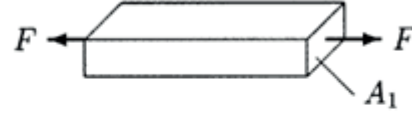
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1.000}{0,0005} = 2.000.000 = 2 \times 10^6 \text{ Pa} = 2 \text{ MPa}$$

Örnek 13.2 İki farklı materyalden yapılmış iki örnek, her bir örnek üzerinde 20 kN ($20 \times 10^3 \text{ N}$)'lık kuvvet uygulanarak tek eksenli çekme testine tabi tutulmuştur (Şekil 13.30). Numune 1, elastik modülü $E_1 = 7 \text{ GPa}$ ($70 \times 10^9 \text{ Pa}$) ve dikdörtgen kesit yüzeyine ($1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$) sahip alüminyum çubuktur. Numune 2, elastik modülü $E_2 = 200 \text{ GPa}$ ($200 \times 10^9 \text{ Pa}$) ve dairesel kesit yüzeyine (yarıçapı 1 cm) sahip çelik çubuktur.

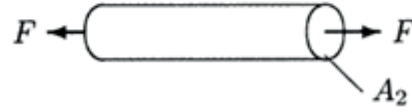
Her numunede oluşan çekme gerilmelerini hesaplayınız. Her numunedeki çekme gerilmesinin, malzemenin orantılılık sınırının altında olduğu varsayılarak, her bir numune için çekme gerinimini hesaplayınız. Ayrıca, her

numunenin merkezaz uzunluğu 30 cm ise, deformasyon sonrası uzunlukları nedir?

Numune 1 : Alüminyum Çubuk



Numune 2: Çelik Rod



Şekil 13.30 Örnek 13.2

Çözüm

Çekme gerilmesi, uygulanan kuvvetin numunenin kesit alanına oranına eşittir. Örneklerin kesit alanları;

$$A_1 = (1 \text{ cm})(2 \text{ cm}) = 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi(1 \text{ cm}^2) = 3,14 \text{ cm}^2 = 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Bu yüzden, her numunede oluşan çekme gerilmeleri;

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{20 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 100 \times 10^6 \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{20 \times 10^3}{3,14 \times 10^{-4}} = 63,7 \times 10^6 \text{ Pa} = 63,7 \text{ MPa}$$

Alüminyum çubuk (numune 1) çelik çubuğa (numune 2) göre daha fazla gerilme altındadır.

σ_1 ve σ_2 çekme gerilmelerine karşılık gelen çekme gerinimlerini hesaplamak için,

deformasyonların elastik olduğunu, σ_1 ve σ_2 gerilmelerinin alüminyum ve çelik için orantılılık sınırlarının altında olduğunu varsayabiliriz. Diğer bir deyişle, gerilmeler gerinimlerle doğrusal orantılıdır ve elastik modüller E_1 ve E_2 orantılılık sabitleridir. Bu yüzden;

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{100 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 1,43 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{63,7 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 0,32 \times 10^{-3}$$

Sonuçlar incelendiğinde, alüminyum çubuk çelik çubuğa göre daha çok gerilmiştir. Örneklerin ilk uzunluğu $l_0 = 30$ cm'dir. Deformasyondan sonra alüminyum çubukta Δl_1 'den l_1 'e kadar, çelik çubukta ise Δl_2 'den l_2 'e kadar uzama gerçekleşmiştir. Tanımlamak gerekirse, çekme gerilme $\varepsilon = \Delta l / l_0$ veya uzama miktarı $\Delta l = \varepsilon l_0$ 'dır. Diğer bir deyişle, deformasyondan sonra numunenin uzunluğu, ilk boy ve uzama miktarının toplamına eşittir. Örneğin, alüminyum çubuk için, $l_1 = l_0 + \Delta l_1$, veya $l_1 = l_0 (1 + \varepsilon_1)$. Bu yüzden;

$$l_1 = l_0 (1 + \varepsilon_1) = 30(1 + 0,00143) = 30,0429 \text{ cm.}$$

$$l_2 = l_0 (1 + \varepsilon_2) = 30(1 + 0,00320) = 30,0960 \text{ cm.}$$

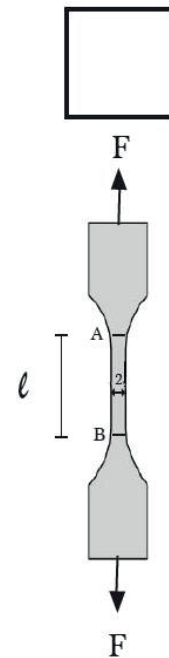
Başka bir deyişle, alüminyum çubuğun ve çelik çubuğun uzunluğundaki artış 1 mm'den azdır.

Örnek 13.3 İnsan kortikal kemiğinin elastik modülünü belirlemek için bir deney tasarlanmıştır. 3 tane, yaklaşık olarak aynı olan 3 kemik numunesi kullanılmış ve kare (2 x 2

mm) enine kesite sahip olan numunelerin boyutu ve şekli, Şekil 13.31'de gösterilmiştir. A ve B örneklerinin, sabitlendiği aralıklar işaretlenmiştir. Her numune daha sonra değişen büyüklüklerde çekme yüklemesine tabi tutulmuş ve işaretli bölümler arasındaki uzunluklar yine elektronik olarak ölçülerek aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Uygulanan yük F (N)	Ölçülen aralık l (mm)
0	5
240	5,017
480	5,033
720	5,05

Her numunede oluşan çekme gerilmesini ve gerinimini belirleyiniz, kemik için gerilme gerinim diyagramını çizin ve kemik için elastik modülü belirleyiniz.



Şekil 13.31 Numunenin üstten ve yandan görünümü

Çözüm

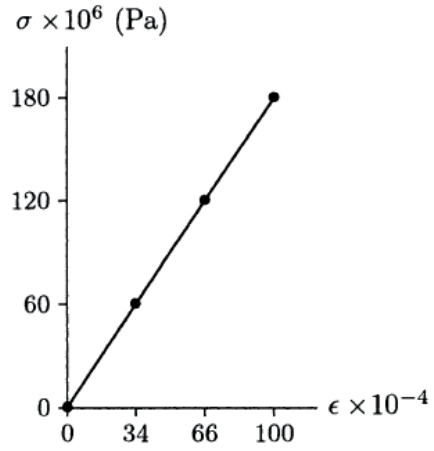
Her bir numunenin kesit alanı $A = 4 \text{ mm}^2$ veya $4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 'dir. Uygulanan yük sıfırken, ilk deforme olmamış halinin ölçüm mesafesi, 5 mm 'dir. Böylece her numunede oluşan gerilme ve gerinim aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Aşağıdaki tabloda bu formülleri kullanarak hesaplanan gerilme gerinim değerleri verilmiştir:

F (N)	$\sigma \times 10^6$ (Pa)	l (mm)	ε (mm / mm)
0	0	5	0
240	60	5,017	0,0034
480	120	5,033	0,0066
720	180	5,05	0,01

Şekil 13.32'de hesaplanan gerilme ve gerinim değerleri, kemik için bir $\sigma - \varepsilon$ grafiği elde etmek üzere çizilmiştir. Şekil 13.32'de düz bir çizgi ile gösterilen gerilme ve gerinim arasındaki ilişkinin hemen hemen doğrusal olduğuna dikkat edilmelidir.

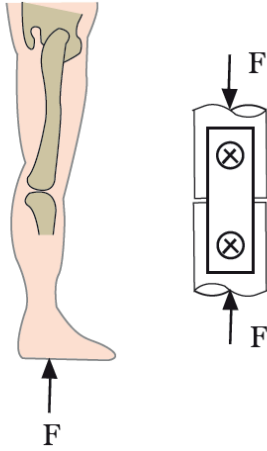


Şekil 13.32 Kemik gerilme-gerinim diyagramı

Doğrusal elastik bir malzemenin elastik modülünün, bu malzeme için $\sigma - \varepsilon$ ilişkisini temsil eden düz çizginin eğimine eşit olduğu düşünüldüğünde;

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{180 \times 10^6}{0,0100} = 18 \times 10^9 \text{ Pa} = 18 \text{ GPa}$$

Örnek 13.4 Şekil 13.33'de kırılmış kemikleri sabitlemede kullanılan plak ve 2 vidadan oluşan sabitleme aleti gösterilmektedir. Tek ayak üstünde duruşta, bir insan tüm ağırlığını tek ayakla yere uygulayabilir. Bu tür durumlarda, kişinin toplam ağırlığı aynı ayağı üzerinden kişiye geri uygulanır, bunun sonucunda bacak kemikleri ve eklemleri üzerinde basma etkisi oluşur. Kırık bacak kemiği olan bir hastada (bu durumda femur kemiği), bu kuvvet kırığın aşağısından yukarıya doğru (distalden proksimale) sabitleme aletinin vidaları boyunca aktarılır.

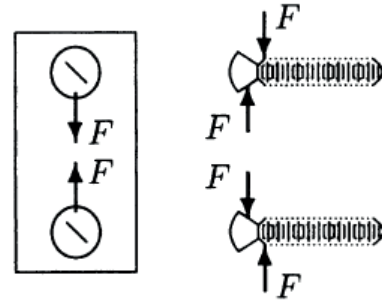


Şekil 3.33 Örnek 13.4

Vidanın çapı $D = 5$ mm ve hastanın ağırlığı $W = 700$ N ise, kırık olan bacak üzerinde tek ayak duruşu ile sabitleme cihazının vidaları üzerinde oluşan kesme gerilmesini belirleyiniz.

Çözüm

Şekil 13.34'te sabitleme aleti ve vidaların serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Kırığın üzerindeki vidanın plağı aşağı doğru ittiği, aşağıdaki vidanın ise plağı yukarı doğru ittiği dikkate alınmalıdır. Her vida, plak üzerinde kişinin ağırlığına eşit kuvvet uygulamaktadır. Vida üzerinde aynı büyüklükte kuvvet zıt yönde de etki etmektedir. Örneğin, kırık üzerindeki vida için plak, vida başına yukarı yönlü kuvvet uygularken, kemik aşağı yönlü kuvvet uygulamaktadır. Vidalara uygulanan kuvvetlerin etkileri, vidaların merkez hattına dik bir düzlemde kesmeye çalışacakları şeklindedir. Vidaların kesit alanlarına bağlı olarak bu kuvvetler kesme kuvvetidir.



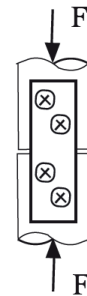
Şekil 13.34 Uygulanan kuvvetler, plaka ve vidalar

Vidalarda oluşan kesme gerilmesi τ , kesme kuvveti F ve A alanı arasındaki ilişki kullanılarak hesaplanabilir;

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Bu durumda, F hastanın ağırlığına ($W = 700$ N) eşittir. Vidaların çapları verildiği için, her vidanın kesit alanı $A = \pi D^2/4 = 19.6$ mm² ya da $A = 19.6 \times 10^{-6}$ m² ile hesaplanabilir. A ve $F = W = 700$ N sayısal değerinin yukarıdaki formüle yerleştirilerek hesaplama yapıldığında $\tau = 35,7 \times 10^6$ Pa olarak hesaplanır.

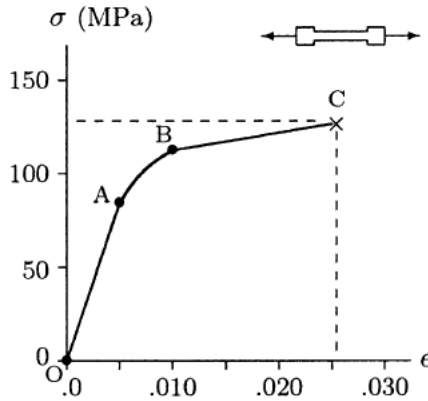
Şekil 13.35'te gösterildiği gibi iki vidalı bir sabitleme cihazından ziyade dört vidaya sahip olunsaydı, her bir vidanın hastanın toplam ağırlığının yarısına eşit bir kesme kuvvetine maruz kalacağı unutulmamalıdır.



Şekil 13.35 4 vidalı sabitleme aleti

Örnek 13.5 İnsan kortikal kemik dokusu basit çekme testine tabi tutulmuştur. Test sonucunda Şekil 13.36'daki 3 farklı bölgeye sahip gerilme-gerinim diyagramı elde edilmiştir. Bölgelere bakıldığında, başlangıçta doğrusal olan elastik bölge (O ve A arasında) vardır, arada doğrusal olmayan elasto-plastik bölge (A ve B arasında), ve son bölge olarak da doğrusal plastik bölge (B ve C arasında) bulunmaktadır. O, A, B ve C noktalarındaki ortalama gerilme ve gerinim değerleri;

Nokta	Gerilme σ (MPa)	Gerinim ϵ (mm/mm)
O	0	0
A	85	0,005
B	114	0,01
C	128	0,026



Şekil 13.36 Kortikal kemiğin çekme yükünde gerilme-gerinim diyagramı (1 MPa = 10^6 Pa)

Bu bilgileri kullanarak, kemik dokularının elastik ve gerinim sertleşme modüllerini, $\sigma - \epsilon$ diyagramının doğrusal bölgelerinde belirleyiniz. Gerinim sertleşme modülü, $\sigma - \epsilon$ diyagramının plastik bölgesinin eğimi ile

hesaplayınız. Ayrıca doğrusal elastik ve doğrusal plastik bölgelerdeki gerinimlere ilişkin matematiksel ifadeleri bulunuz.

Çözüm

Elastik modülü, E, $\sigma - \epsilon$ grafiğinin elastik bölgesinin eğimidir. Kemik, O ve A arası doğrusal elastik malzeme davranışı sergiler. $\sigma - \epsilon$ eğrisi düz bir çizgidir. Bu çizginin eğimi;

$$E = \frac{\sigma_A - \sigma_0}{\epsilon_A - \epsilon_0} = \frac{85 \times 10^6 - 0}{0,005 - 0,0} = 17 \times 10^9 \text{ Pa} = 17 \text{ GPa}$$

Gerinim sertleşme modülü E', $\sigma - \epsilon$ diyagramının plastik bölgesinin eğimine eşittir. Kemik, B ve C arasında doğrusal plastik davranış sergilemektedir. Bu eğri yine düz bir çizgidir ve bu sebeple;

$$E' = \frac{\sigma_C - \sigma_B}{\epsilon_C - \epsilon_B} = \frac{128 \times 10^6 - 114 \times 10^6}{0,026 - 0,010} = 0,875 \times 10^9 \text{ Pa}$$

O ve A arasındaki gerilme-gerinim ilişkisi;

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{or} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

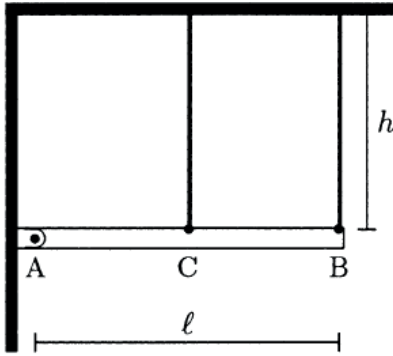
Doğrusal plastik bölgede σ ve ϵ ilişkisi B ve C arasında şu şekilde ifade edilir;

$$\sigma = \sigma_B + E' (\epsilon - \epsilon_B) \quad \text{or} \quad \epsilon = \epsilon_B + \frac{1}{E'} (\sigma - \sigma_B)$$

Örneğin, $\sigma = 120$ MPa'lık çekme gerilmesine karşılık gelen gerinimin hesaplanması;

$$\epsilon = 0,010 + \frac{120 \times 10^6 - 114 \times 10^6}{0,875 \times 10^9} = 0,017$$

Örnek 13.6 Şekil 13.37’de gösterilen yapıda yatay düzlemde AB uzunluğu $l = 4$ m, ağırlığı $W = 500\text{N}$ ’dur ve A noktasından duvara menteşelenmiştir. Bu kiriş, $h = 3$ m uzunluğunda, 2 cm^2 kesit alanına sahip, elastik modülü $E = 200\text{ GPa}$ olan iki çelik çubuk tarafından desteklenmektedir. Ve çelik çubuklar kiriş B ve C noktalarından tutturulmuştur. C, sistemi orta noktasından bölmektedir.



Şekil 13.37 Statik olarak kararsız bir sistem

Kiriş tarafından çelik çubuklara uygulanan yükü belirleyiniz. A’daki tepki kuvvetini, her çelik çubukta oluşan uzama miktarı ve gerilme miktarını belirleyiniz. Kiriş malzemenin çelik çubuklara göre daha rijit bir malzeme olduğunu varsayınız.

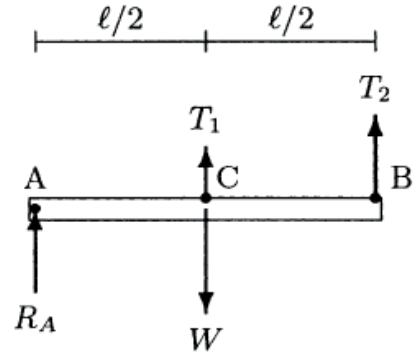
Çözüm

Bu problem 3 aşamada çözülecektir.

Statik Analiz

Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 13.38’de gösterilmektedir. Toplam ağırlığın, W , geometrik merkez C’den etki edeceği

varsayılır. R_A , A noktasında menteşe üzerinden kirişe etki eden yerin tepki kuvvetinin büyüklüğü ve T_1 ve T_2 ise çelik çubuklar tarafından kirişe uygulanan kuvvetlerdir. Kirişe etki eden yatay kuvvet olmadığı için sadece dikey tepki kuvveti göz önünde bulundurulmalıdır.



Şekil 13.38 Kirişin serbest cisim diyagramı

Üç bilinmezle aynı düzlemlili bir kuvvet sistemimiz var; R_A , T_1 ve T_2 . Statiklerden elde edilen üç denge denklemi vardır. Yatay kuvvet olmadığından, kirişin yatay dengesi otomatik olarak sağlanır. Bu yüzden 2 denklem 3 bilinmeyen mevcuttur. Diğer bir deyişle, statik olarak belirsiz bir sistemimiz vardır ve bu problemi tam olarak analiz etmek için denge denklemleri yeterli değildir. Sistemi oluşturan parçaların deforme olabilirliliği dikkate alınarak türetilen ek bir denkleme ihtiyacımız vardır.

Kirişin dikey dengesi aşağıdakileri gerektirir;

$$\sum F_Y = 0 : T_1 + T_2 + R_A = W \quad (i)$$

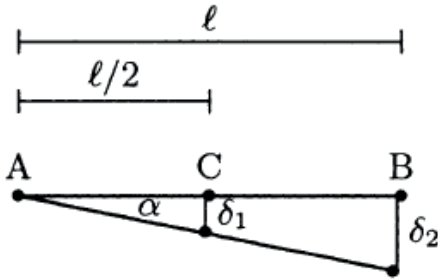
Kirişin A noktasındaki rotasyonel dengesi için;

$$\sum M_A = 0 : \frac{1}{2}T_1 + T_2 = \frac{1}{2}W \quad (ii)$$

Geometrik Uygunluk

Yatay kiriş, A noktasından duvara menteşelenir ve kirişin ağırlığı, A noktasından kirişi saat yönünde döndürme eğilimindedir. Çubuklarda T_1 ve T_2 çekme kuvvetleri olarak uygulanan kirişin ağırlığından dolayı, çelik çubuklar (uzayacak) bükülecek ve kiriş hafifçe A noktasından dönecektir (Şekil 13.39). Kiriş üzerindeki yüklerden dolayı kirişte az bir miktar eğilme olabilir. Kirişin çelik çubuklardan daha rijit olduğu belirtildiği için, kirişte deformasyonun olmadığı ve düzgün yapısını devam ettirdiği varsayılabilir. δ_1 ve δ_2 çelik çubuklardaki sehim miktarını temsil etmekte ve Şekil 13.39'dan;

$$\tan \alpha \approx \frac{\delta_1}{l/2} \approx \frac{\delta_2}{l} \quad (\text{iii})$$



Şekil 13.39 Kirişin sehimi

Sehimler (δ_1 ve δ_2) ve α açısı küçük olduğu zaman bu ilişkinin doğru olduğunu unutmayın.

Daha sonra, uygulanan kuvvetler ve kuvvetlere karşılık gelen deformasyonlar arasındaki ilişkiyi dikkate almamız gerekiyor.

Gerilme-gerinim (yük-deformasyon) analizi

H uzunluğuna sahip çelik çubuklar δ_1 ve δ_2 kadar uzar. Bu nedenle, çubuklardaki çekme gerinimleri;

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{h}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{h} \quad (\text{iv})$$

Çubuklar T_1 ve T_2 çekme kuvvetlerine maruz bırakılıyor. Her çubuğun kesit alanı A olarak veriliyor. Bu sebeple, çelik çubuklar üzerinde kiriş tarafından oluşturulan çekme gerilmesi;

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{A} \quad (\text{v})$$

İlgili gerilmenin çeliğin orantılılık sınırı içinde olduğunu varsayarsak, gerilme ve gerinim arasındaki bağlantıyı kurmak için Hooke Kanunu'nu kullanabiliriz:

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = E \varepsilon_2 \quad (\text{vi})$$

Şimdi, gerilme ve gerinimleri ortadan kaldırmak için (iv) ve (v) denklemleri, denklem (vi)'da yerine konulduğunda;

$$\delta_1 = \frac{T_1 h}{EA}, \quad \delta_2 = \frac{T_2 h}{EA} \quad (\text{vii})$$

Denklem (iii)'de belirtilen;

$$\delta_2 = 2\delta_1 \quad (\text{viii})$$

Denklem (vii)'yi denklem (viii)'e koyduğumuzda;

$$T_2 = 2T_1 \quad (\text{ix})$$

Şimdi denklem (i), (ii) ve (ix) olmak üzere toplamda 3 bilinmeyenli (R_A , T_1 ve T_2), 3 denklem elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü;

$$T_1 = \frac{1}{5}W = 100 \text{ N}$$

$$T_2 = \frac{2}{5}W = 200 \text{ N}$$

$$R_A = \frac{2}{5}W = 200 \text{ N}$$

İlk olarak, T_1 ve T_2 çekme kuvvetleri belirlenir. Denklem (viii) uzama miktarlarını, denklem (v) çekme gerilmesini, denklem (iv) ise çelik çubuklardaki çekme gerinimini hesaplamak için kullanılabilir;

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A} = 0,5 \times 10^6 \text{ Pa} = 0,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A} = 1,0 \times 10^6 \text{ Pa} = 1,0 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = 2,5 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = 5,0 \times 10^{-6}$$

Hesaplanan gerinimlerin çok küçük olduğu unutulmamalıdır. Bununla bağlantılı olarak, deformasyonlar da denklem (iii)'de ilişkiyi türetirken önceden tahmin edildiği gibi çok küçüktür. Ayrıca, çelik çubuklarda oluşan gerilmenin, çeliğin orantılılık limitinden çok daha küçük olduğu unutulmamalıdır. Bu yüzden, denklem (vi) de yapılan gerilme ve gerinim ile ilgili varsayım da doğrudur.

13.18 Örnek Problemler

Bu kısımdaki bütün problemlerin cevapları bölümün sonunda verilmiştir.

Problem 13.1 Aşağıdaki tanımları uygun ifadelerle tamamlayınız.

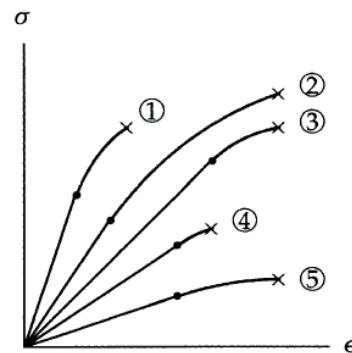
- Malzemenin uygulanan yük sonucu oluşan birim deformasyonuna _____ denir.
- Dışardan uygulanan yük sonucunda bir malzemenin deformasyona karşı oluşturduğu iç direncine _____ denir.
- _____, kesit düzlemine dik olan iç kuvvetlerin yoğunluğu ile ilişkilendirilirken, _____, bir kesit düzlemine paralel veya teğet olarak etki eden iç kuvvetlerin yoğunluğunun bir ölçüsüdür.
- Gerilme-gerinim diyagramlarında, _____ ilişkili gerilme, malzemeye hasar vermeden uygulanabilen en yüksek gerilmedir.
- Gerilme gerinim diyagramlarında, en yüksek gerilme seviyesi malzemenin _____ bağlantılıdır.
- Bazı malzemeler için, akma noktasını belirlemek kolay olmayabilir. Bu tip malzemelerin akma dayanımları _____ ile belirlenmektedir.
- _____, malzemenin üzerindeki yükün kaldırılmasıyla ilk boyutuna (gerilmesiz) ve şekline geri dönme kabiliyetidir.
- Doğrusal elastik malzemeler için, gerilme gerinime doğrusal orantılıdır ve orantılılık sabiti malzemenin _____ olarak adlandırılır.

- (i) Doğrusal elastik malzemelerde ayırıcı faktör, _____.
- (j) Gerilme gerinim eğrilerinde elastik bölgesi düz çizgi olmayan _____ malzemeler denir.
- (k) _____, doğrusal elastik malzemeler için kesme gerilmesi ve kesme gerinimi arasındaki orantılılık sabittir.
- (l) Gerilme ve gerinim arasındaki ilişkiyi belirten matematiksel denkleme _____ denir.
- (m) Elastik malzemeler ve yayları arasındaki benzerlik _____ olarak adlandırılır.
- (n) _____, kalıcı (geri dönüştüremeyen) deformasyonları belirtir.
- (o) Gerilme gerinim eğrisinde elastik bölge altındaki alan, malzeme deforme olurken depoladığı _____ enerjisi ile bağlantılıdır.
- (p) _____ enerjisi, malzeme deforme olurken ısı olarak ortaya çıkar.
- (q) _____ ile oluşturulan alan, bir malzemeyi yüklerken ve malzemedan yükü kaldırırken ısı olarak çıkan toplam gerinim enerjisini ifade eder.
- (r) Malzemenin akma noktasının üstünde bir noktaya kadar yükleme yaparak malzemenin akma noktasını değiştirme yöntemine _____ denir.
- (s) Bir malzemenin elastik modülü, bir malzemenin diğerine göre _____ göreceli bir ölçüsüdür.
- (t) _____ malzemeler, hasar görmeden önce uzun plastik deformasyon davranışı sergilerler.

- (u) _____ malzemelerde, çok küçük miktar plastik deformasyona uğradıktan sonra ani kırılmalar gözlemlenir.
- (v) _____, bir malzemenin kalıcı deformasyonu sürdürme kapasitesinin bir ölçüsüdür. Bir malzemenin tokluğu, gerilme-gerinim diyagramı altındaki toplam alan göz önüne alınarak ölçülür.
- (w) Bir malzemenin kalıcı deformasyon olmadan enerji depolama veya soğurma yetisine malzemenin _____ denir.
- (x) Malzemenin mekanik özellikleri malzeme içinde bölgeden bölgeye değişmiyorsa, malzeme _____ olarak adlandırılır.
- (y) Bir malzeme sabit yoğunluğa sahipse, _____ malzeme olarak tanımlanır.
- (z) Malzemenin mekanik özellikleri, yönden bağımsızsa _____ olarak adlandırılır.

Problem 13.2

Şekil 13.40'daki grafik, 5 farklı malzeme için çekme gerilmesi ve çekme gerinimi arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Her eğrideki nokta işareti, akma noktasını, çarpı işareti ise hasar noktasını belirtmektedir. Aşağıdaki boşlukları, malzemeyi tanımlayan rakamları uygun yerlere yazarak doldurunuz.



Şekil 13.40 Problem 13.2

En yüksek elastik modülüne sahip malzeme _____'dir

En sünek malzeme _____'dir

En gevrek malzeme _____'dir

En düşük akma dayanımına sahip malzeme _____'dir

En yüksek dayanıma sahip malzeme _____'dir

En tok malzeme _____'dir

Rezilyansı en yüksek malzeme _____'dir

En rijit malzeme _____'dir

Problem 13.3

Farklı malzemelerden yapılmış 2 farklı çubuk düşünün. Bu çubuklara tek eksenli çekme testi yapıldığını varsayalım. Çubuk 1 ve Çubuk 2'ye uygulanan çekme kuvvetlerinin büyüklükleri sırasıyla, F_1 ve F_2 , elastik modülleri ise E_1 ve E_2 'dir. A_1 ve A_2 ise uygulanan yüke dik olan kesit alanlarıdır. Aşağıda belirtilen koşullar için, çekme gerilmeleri, σ_1 ve σ_2 çekme gerinimleri ε_1 ile ε_2 ilgili doğru sembolü belirleyiniz. ">" büyüktür, "<" küçüktür, "=" eşittir, "?" ise bir yargıya varabilmek için yetersiz veri olduğunu ifade eder.

(a) Eğer $A_1 > A_2$ ve $F_1 = F_2$ ise $\sigma_1 \geq ? < \sigma_2$ ve $\varepsilon_1 \geq ? < \varepsilon_2$.

(b) Eğer $E_1 > E_2$, $A_1 = A_2$ ve $F_1 = F_2$ ise $\sigma_1 \geq ? < \sigma_2$ ve $\varepsilon_1 \geq ? < \varepsilon_2$.

Problem 13.4

Şekil 13.29'da gösterilen dairesel silindir çubuğun eksenel çekme testine tabi tutulduğunu düşünün. A ve B noktaları arası mesafe $l_0 = 32$ cm ve çubuğa uygulanan yük $F = 980$ N'dir. Çubukta oluşan çekme gerinimi ve çekme gerilmesi $\varepsilon = 0,06$ cm / cm ve $\sigma = 2,2$ MPa ise;

- Yük uygulandıktan sonra çubuğun yarıçapı r 'yi
- Yük uygulandıktan sonra çubuğun toplam uzama miktarı Δl 'yi hesaplayınız.

Problem 13.5

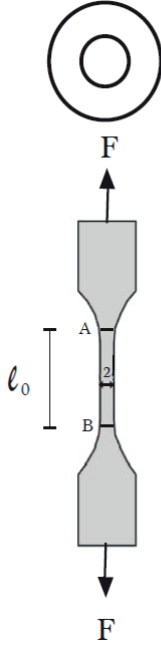
1,5 cm yarıçapına sahip alüminyum çubuğun eksenel çekme testine tabi tutulduğunu düşünün. Yük $F = 23$ kN, alüminyum çubuğun elastik modülü $E = 70$ GPa ise;

- Çubukta oluşan çekme gerilmesini σ ,
- Çubukta oluşan çekme gerinimini ε belirleyiniz.

Problem 13.6

Şekil 13.41 dairesel kesite sahip bir kemik örneğini temsil ediyor. A ve B arası $l_0 = 6$ mm olarak numune üzerinde işaretlenmiştir. A ve B bölgesi arası örneğin yarıçapı $r_0 = 1$ mm'dir. Örneğe her seferinde uygulanan yükün büyüklüğünü arttırarak seri eksenel çekme testleri uygulanmış ve bu yüklere karşılık gelen deformasyonlar ölçülmüştür. Testler sonucunda elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir;

Test	Kuvvet, F(N)	Deformasyon, Δl (mm)
1	94	0,009
2	190	0,018
3	284	0,027
4	376	0,05
5	440	0,094



Şekil 13.41 Problem 13.6

Test 3, doğrusal elastik bölgenin sonu ve test 5 kopmanın olduğu bölge ise;

- Her test için ortalama gerilme ve gerinimi hesaplayınız
- Kemik örneği için çekme gerilme-gerinim grafiğini çiziniz
- Kemik örneği için elastik modülü hesaplayınız
- Kemik örneğinin en yüksek dayanımı nedir?
- Kemik örneğinin akma dayanımı nedir? (offset metodunu kullanınız)

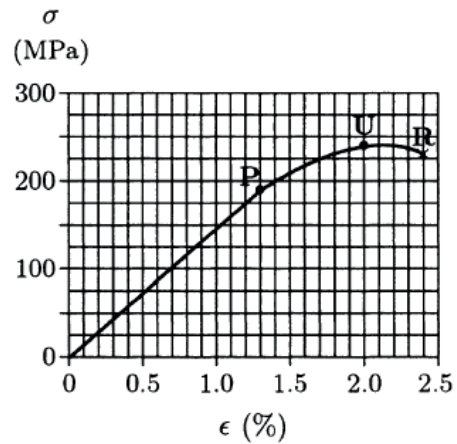
Problem 13.7

Bir hastanın femurundaki kırığı sabitlemek için kullanılan plak ve 2 vidadan oluşan sabitleme aleti Şekil 13.33'te gösterilmektedir. Hastanın ağırlığı $W = 833 \text{ N}$ 'dir. Vidalarda oluşan kesme gerilmesi $\tau = 35,12 \times 10^6 \text{ Pa}$ ise vidaların çapını, d , hesaplayınız.

Problem 13.8

İnsan femur kemiği aksenal çekme testine tabi tutuluyor. Bir seri deney sonrası elde edilen gerilme-gerinim grafiği Şekil 13.42'de verilmiştir. Bu grafiğe göre;

- Elastik modülü, E
- Görünen akma dayanımını, σ_y (offset metodunu kullanınız)
- Maksimum dayanımı, σ_u
- Akma gerilmeine karşılık gelen gerinim, ϵ_1
- Maksimum dayanıma denk gelen gerinimi, ϵ_2
- Gerilme orantılılık limitindeyken gerilme enerjisini belirleyiniz.

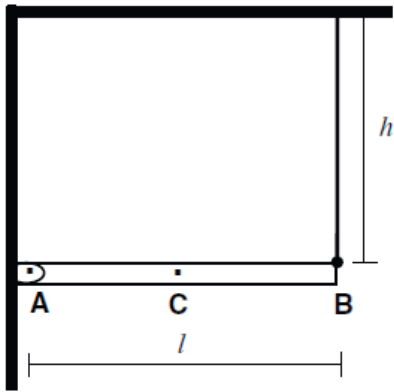


Şekil 13.42 Problem 13.8

Problem 13.9

Şekil 13.43'de gösterilen, A noktasından duvara menteşelenen yatay kiriş AB, B noktasından çelik bir çubukla desteklenmektedir. Kirişin uzunluğu $l = 3,7$ m, ağırlığı ise $W = 450$ N'dir. Çelik çubuğun uzunluğu $h = 2,5$ m, yarıçapı $r = 1,2$ cm'dir. Çelik çubukların elastik modülü, $E = 200$ GPa ise;

- A noktasında tepki kuvvetinin büyüklüğü R_A ,
- Kiriş tarafından çelik çubuğa uygulanan çekme gerilmei, σ
- Çubukta oluşan çekme gerinimi, ϵ hesaplayınız.

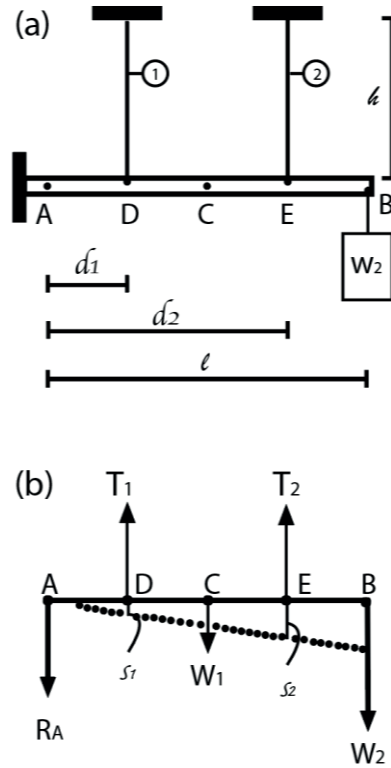


Şekil 13.43 Problem 13.9

Problem 13.10

Şekil 13.44a'de verilen yatay yekpare kiriş, A noktasından duvara menteşelenmiş ve B noktasından $W_2 = 400$ N ağırlığı takılmıştır. C noktası, kirişin ağırlık merkezini belirtir. C noktası A ve B noktalarına eşit uzaklıktadır. Kirişin ağırlığı $W_1 = 100$ N ve uzunluğu $l = 4$ m'dir. Kiriş 2 dikey çubukla

desteklenmektedir. Çubuk 1 ve çubuk 2, sırasıyla D ve E noktalarından kirişe bağlıdır. Çubuk 1, elastik modülü, $E_1 = 200$ GPa olan çelikten yapılmış ve kesit alanı $A_1 = 500$ mm² iken çubuk 2 elastik modülü, $E_2 = 80$ GPa olan bronzdan yapılmış kesit alanı ise $A_2 = 400$ mm²'dir. İki çubuğun da ilk (deforme olmamış) uzunluğu $h = 2$ m'dir. A ve D arasındaki mesafe, $d_1 = 1$ m, A ve E arasındaki mesafe ise $d_2 = 3$ m'dir.



Şekil 13.44 Problem 13.10

Kirişin serbest cisim diyagramı ve yönlenmesi Şekil 13.44b'de gösterilmektedir. T_1 ve T_2 çubukların kiriş üzerinde yarattığı kuvvetleri temsil etmektedir. δ_1 ve δ_2 sembolleri çelik ve bronz çubuklarda meydana gelen sehim miktarını temsil etmektedir. Kirişin

malzemesinin çubuklarla karşılaştırıldığında çok rijit bir malzeme olduğu varsayılmalıdır ki düzgün şeklini korumuş olsun.

- (a) T_1 ve T_2 gerilmelerini ve A noktasında kirişte oluşan tepki kuvvetini R_A hesaplayınız.
- (b) Çubuklarda oluşan ortalama çekme gerilmelerini, σ_1 ve σ_2 hesaplayınız

Cevaplar

Problem 13.1:

- (a) Gerinim
- (b) Gerilme
- (c) Kesme gerilme, normal gerilme
- (d) Elastik sınıır
- (e) Maksimum dayanım
- (f) Ofset metodu
- (g) Elastisite
- (h) Elastik (Young) modülü
- (i) Doğrusal olmayan elastik
- (j) Kesme modülü
- (k) Malzeme fonksiyonu
- (l) Hook Kanunu
- (m)Plastisite
- (n) Elastik gerinim
- (o) Plastik gerinim
- (p) Histerizis döngüsü
- (q) Gerinim sertleşmesi (pekleşme)
- (r) Rijitlik
- (s) Sünek
- (t) Gevrek
- (u) Tokluk

- (v) Rezilyans
- (w) Homojen
- (x) Sıkıştırılmaz
- (y) İzotropik
- (z)

Problem 13.2: 1,2,4,5,2,2,3,1

Problem 13.3: (a) $\sigma_1 < \sigma_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (b) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Problem 13.4: (a) $r = 1,2$ cm; (b) $\Delta l = 1,92$ cm

Problem 13.5: (a) $\sigma = 32,6$ MPa, (b) $\varepsilon = 0,47 \times 10^{-3}$

Problem 13.6: (c) $E = 20$ GPa, (d) $\sigma_u = 140$ MPa, (e) $\sigma_y = 118$ MPa

Problem 13.7: $d = 5,5$ mm

Problem 13.8: (a) $E = 14,6$ GPa

(b) $\sigma_y = 235$ MPa

(c) $\sigma_u = 140$ MPa

(d) $\varepsilon_2 = 0,018$

(e) $\varepsilon_1 = 0,02$

(f) $1,235$ MPa

Problem 13.9:

(a) $R_A = 225$ N;

(b) $\sigma = 0,5$ MPa;

(c) $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-6}$

Problem 13.10:

(a) $T_1 = 464$ N, $T_2 = 445$ N, $R_A = 409$ N

(b) $\sigma_1 = 0,928$ MPa, $\sigma_2 = 1,113$ MPa

Bölüm 14

ÇOK EKSENLİ DEFORMASYONLAR VE GERİLME ANALİZLERİ

Çeviren: Yunus Uslan

14.1 Poisson Oranı

14.2 İki ve Üç Eksenli Gerilmeler

14.3 Gerilme Dönüşümleri

14.4 Asal Gerilmeler

14.5 Mohr Çemberi

14.6 Hasar Teorileri

14.7 Kabul Edilebilir Gerilme ve Emniyet Faktörü

14.8 Malzeme Mukavemetini Etkileyen Faktörler

14.9 Yorulma ve Dayanıklılık

14.10 Gerilme Konsantrasyonu

14.11 Burulma

14.12 Eğme

14.13 Birleşik Yükleme

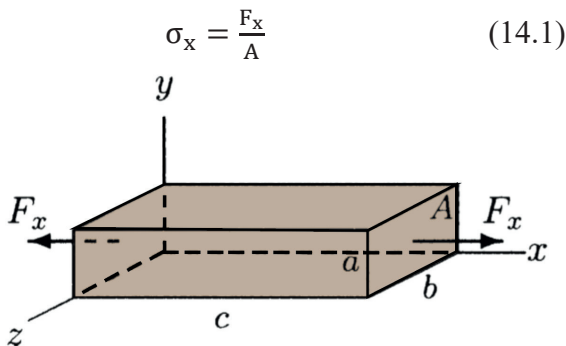
14.14 Örnek Problemler

14.1 Poisson Oranı

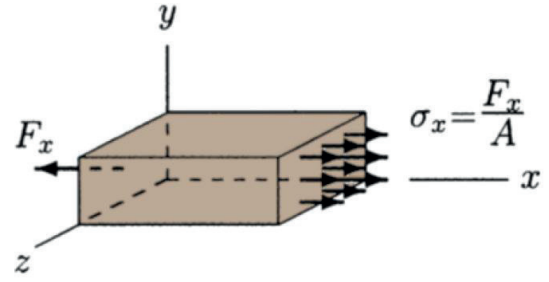
Bir yapıya tek eksenli çekme uygulandığında, enine boyutları azalırken (yapı yanal daralmaya maruz kalır) ve uygulanan yük yönünde uzar. Bu, önceki bölümde boyun verme denen olgu ile gösterilmiştir. Orantılılık limiti içindeki gerilmeler için, tek eksenli çekme ve basma deneylerinin sonuçları, eksenel ve yanal doğrultularda oluşan deformasyonların oranının sabit olduğunu göstermektedir. Belirli bir malzeme için bu sabit *Poisson oranı* olarak adlandırılır ve yaygın olarak ν (nu) sembolü ile belirtilir:

$$\nu = -\frac{\text{yanal gerinim}}{\text{eksenel gerinim}}$$

Şekil 14.1'te gösterilen a , b ve c ebatlarında dikdörtgen bir çubuk ele alınsın. Farklı yönlerdeki gerinimleri ayırt edebilmek için bir dik koordinat sistemi ele alınmıştır. Çubuğa, σ_x çekme gerilmesini oluşturan F_x büyüklüğündeki çekme kuvveti x yönünde uygulanmıştır (Şekil 14.2). Bu gerilmenin kesit alanı ($A = ab$) üzerinde eşit bir şekilde dağıldığı varsayıldığında, gerilmenin şiddeti aşağıdaki formülle hesaplanabilir.



Şekil 14.1 Tek eksenli çekme uygulanan dikdörtgen bir çubuk



Şekil 14.2 Gerilme dağılımı çubuğun kesit alanı $A = ab$ üzerinde eşittir.

F_x kuvvetinin etkisi altında çubuk, x yönünde uzar, y ve z yönlerinde kısalmır. Eğer çubuğun malzemesinin E elastik modülü biliniyor ve deformasyonlar orantılılık limiti içerisindeyse, x yönündeki gerilme ve gerinim Hooke yasasıyla ilişkilidir:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (14.2)$$

Denklem 14.2 çubuğun, kuvvetin uygulandığı yöndeki birim deformasyonunu vermektedir. Yanal yöndeki gerinimler Poisson oranının tanımından yararlanarak hesaplanabilir. Eğer ϵ_y ve ϵ_z , x yönündeki tek eksenli yüklemekten oluşan y ve z yönlerindeki birim kısalmalarsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (14.3)$$

Bir başka deyişle, eğer çubuk malzemesinin Poisson oranı biliniyorsa yanal yönlerdeki gerinim değerleri hesaplanabilir:

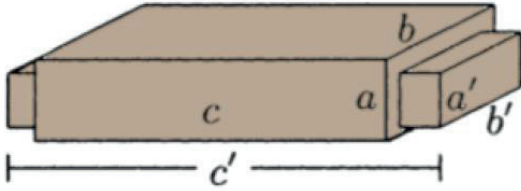
$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \quad (14.4)$$

Denklem 14.3 ve 14.4'teki eksi işareti eksenel boyut arttığında yanal boyutlarda azalma

olduğuna işaret etmektedir. ε_y ve ε_z gerinimleri negatif olduğunda ε_x pozitifdir ve bu durum çekme yükleme koşulunda gerçekleşir. Bu denklemler, ayrıca σ_x ve ε_x 'in negatif, ε_y ve ε_z 'nin pozitif olduğu basma yükleme koşulu için de geçerlidir.

Üç yöndeki gerinim değerleri hesaplandıktan sonra çubuğun deforme ölçüleri a' , b' ve c' de (Şekil 14.3) belirlenebilir. Tanım gereği gerinim boydaki değişimin ilk boy oranına eşittir. Bu eşitlik x yönü için aşağıda gösterilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{c' - c}{c}$$



Şekil 14.3 Çubuk uzarken eş zamanlı olarak yanıl kısılmaya maruz kalır

Bu denklem x ve benzer şekilde y ve z yönleri için çözümlerse $c' = (1 + \varepsilon_x)c$, $a' = (1 + \varepsilon_y)a$ ve $b' = (1 + \varepsilon_z)b$ eşitlikleri elde edilir.

Burada sunulan gerilme-gerinim ilişkilerinin sadece lineer elastik malzemeler için olduğuna veya herhangi bir elastik-plastik malzemenin orantılılık sınırları içerisinde geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

Belirli bir elastik malzeme için; elastik modül, kesme modülü ve Poisson oranı aşağıdaki ifade ile ilişkilidir:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{veya} \quad \nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (14.5)$$

Bu formül malzemenin elastik ve kesme modülleri biliniyorsa Poisson oranının hesaplanması için kullanılabilir.

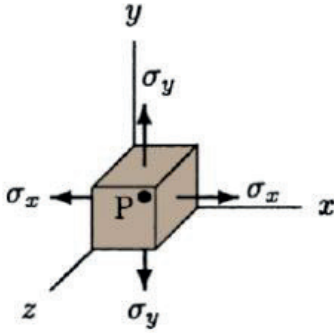
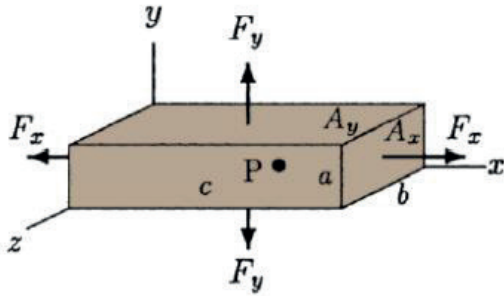
14.2 İki ve Üç Eksenli Gerilmeler

Bir önceki bölümde tartışıldığı üzere, bir nesne tek eksenli yüklemeye tabi tutulduğunda, her üç yönde de gerinim meydana gelebilir. Lateral yönlerdeki gerinimler, Poisson oranının tanımından yararlanılarak hesaplanabilir. Poisson oranı, aynı zamanda birden fazla yönde etki eden birden fazla normal gerilmenin olduğu durumları analiz etmeyi mümkün kılar. Şekil 14.4'te gösterilen dikdörtgen çubuk ele alınsın. Çubuğa xy düzleminde iki eksenli yükleme uygulanmıştır. P, çubuğun içerisinde herhangi bir nokta olsun. P noktasında oluşan gerilmeler, noktanın etrafında bir kübik malzeme elemanının oluşturulmasıyla analiz edilebilir. Çubuğun kenarlarına, paralel kenarları olan bir kübik malzeme elemanı, üzerine etki eden gerilmeler ile birlikte Şekil 14.4'te gösterilmiştir. σ_x ve σ_y , sırasıyla x ve y yönlerinde çubuk üzerine uygulanan gerilme kuvvetlerine bağlı normal gerilmelerdir. Eğer $A_x = ab$ ve $A_y = bc$ dikdörtgen çubuğun

normalleri x ve y yönlerindeki alanlarıysa, σ_x ve σ_y aşağıda gösterildiği şekilde hesaplanabilir.

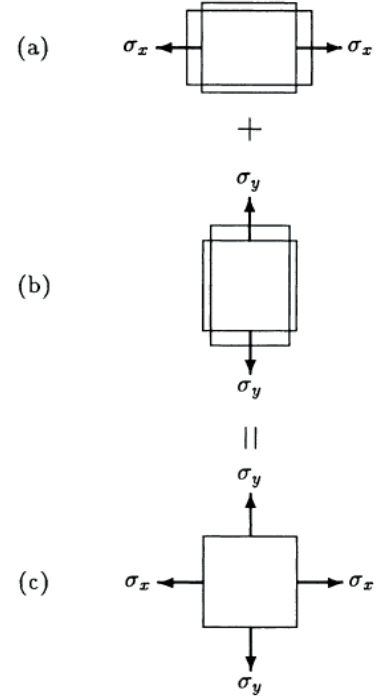
$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_x}{ab}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_y}{bc}$$



Şekil 14.4 Üzerine x ve y yönlerinde çekme kuvveti uygulanan dikdörtgen bir çubuk ve iki eksenli gerilme altındaki malzeme elemanı

Bu iki eksenli gerilmelerin etkileri, Şekil 14.5'te grafik olarak gösterilmiştir. σ_x gerilme, malzemeyi x yönünde uzatır ve y (ayrıca z) yönünde bir kısılmaya neden olur. σ_x kaynaklı x ve y yönlerindeki gerinimler aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 14.5 Süperpozisyon metodu

$$\epsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_{y1} = -\nu\epsilon_{x1} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

Benzer şekilde σ_y , y yönünde malzemeyi uzatır ve x yönünde bir kısılmaya neden olur (Şekil 14.5b). Bu sebeple, σ_x kaynaklı x ve y yönlerindeki gerinimler:

$$\epsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_{x2} = -\nu\epsilon_{y2} = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

σ_x ve σ_y 'nin düzlem materyal elemanı üzerindeki birleşik etkisi Şekil 14.5c'de gösterilmektedir. Aynı etki, σ_x ve σ_y 'nin tek tek etkileri eklenerek matematiksel olarak gösterilebilir. Sonuçta x ve y yönlerinde ortaya çıkan gerinimler belirlenebilir:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (14.6)$$

Bu denklemler gerektiğinde gerilme değerlerini gerinim cinsinden ifade etmek için eş zamanlı olarak çözülebilir.

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)E}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = \frac{(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)E}{1 - \nu^2} \quad (14.7)$$

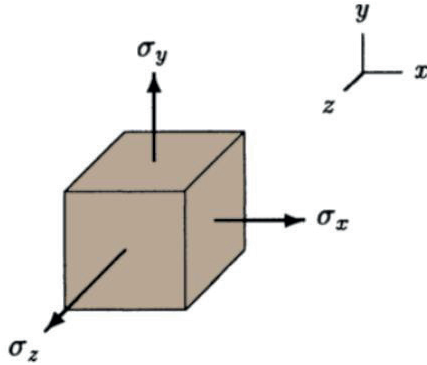
Bu konu, üç eksenli yükleme durumunda aşağıdaki gerilme-gerinim ilişkilerini türetmek için genişletilebilir (Şekil 14.6).

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (14.8)$$

Bu formüller lineer elastik malzemeler için geçerlidir ve çekme gerilmelerinin pozitif olduğu ve basma gerilmelerinin negatif olduğu düzene uyarlanarak oluşan gerilmeler çekme veya basma olduğunda kullanılabilirler.



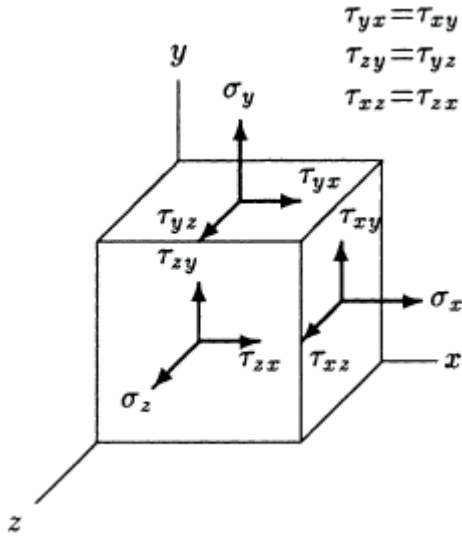
Şekil 14.6: Üç eksenli normal gerilmeler

Lineer elastik malzemeler için gerilme-gerinim ilişkilerinin daha da genelleştirilmesi için kesme gerilmeleri ve kesme gerinimleri arasındaki ilişki dikkate alınmalıdır. Şekil 14.7'de gösterildiği gibi, bir nesne normal ve kesme gerilmesine üç karşılıklı doğrultuda maruz kaldığında en fazla malzeme yüklemesi meydana gelir. Bu gerilmelere karşılık olarak normal ve kesme gerinimleri vardır. Şekil 14.7'de, kesme gerilmeleri, çift simgeli sembollerle tanımlanmaktadır. İlk alt simge, kesme gerilmesinin etki ettiği yüzeyin normal yönünü belirtir ve ikinci alt simge, gerilmenin hareket ettiği yönü gösterir. Toplamda altı kesme gerilmesi (τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz}) tanımlanmıştır. Ancak statik denge koşulu $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ve $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ eşitliklerini gerekli kılar. Bu sebeple, sadece üç bağımsız kesme gerilmesi (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx}) ve bunlara karşılık gelen üç tane kesme gerinimi (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}) vardır. Lineer elastik malzemeler için kesme gerilmesi ile kesme gerinimi lineer olarak orantılıdır. Bu oran sabit olup kesme modülü, G , olarak tanımlanmaktadır.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

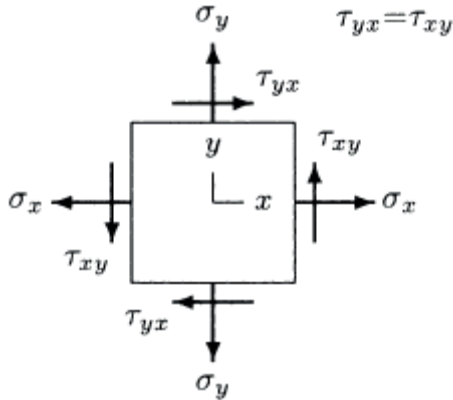
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (14.9)$$



Şekil 14.7 Gerilmenin normal ve kesme bileşenleri

Şekil 14.8’de gösterildiği üzere, xy düzlemindeki iki boyutlu problemler için sadece bir kesme gerilmesi (τ_{xy}) ve iki normal gerilme (σ_x ve σ_y) göz önüne alınmalıdır.



Şekil 14.8 Düzlem (iki eksenli) gerilme bileşenleri

Yukarıdaki bilgiler, gerilme ve gerininin sadece altı tanesi bağımsız olmak üzere toplam dokuz bileşene sahip olduğunu göstermektedir. Gerilme ve gerininin ikinci dereceden tensorler

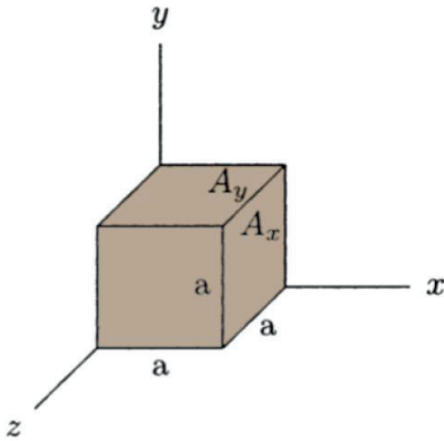
olarak bilinir. Skaler bir niceliğin sadece büyüklüğü vardır. Bir vektör ise hem büyüklüğe hem de yöne sahiptir ve üç bileşen cinsinden temsil edilebilir. Vektörler *birinci dereceden tensorler* olarak bilinirlerken, skaler nicelikler *sıfırıncı dereceden tensorler* olarak bilinmektedirler. İkinci dereceden tensor bileşenleri sadece kendileriyle ilişkili büyüklük ve yönlerle sahip olmakla kalmayıp aynı zamanda belirlendikleri düzleme de bağlıdır. Örneğin, gerilme tensorü durumunda, malzemenin bir noktasında gerilme tensor bileşenlerinin büyüklükleri ve yönleri, etrafına inşa edilen kübik malzeme elemanının yönüne bağlı olarak değişebilir. Bununla birlikte, eğer gerilme tensorünün bir malzeme elemanına göre bileşenleri biliniyorsa, bir başka malzeme elemanına göre gerilme tensorünün bileşenleri, aşağıdaki bölümde ele alınacağı üzere uygun koordinat dönüşümleri vasıtasıyla belirlenebilir. Bir malzemedeki gerilme tensor bileşenlerinin büyüklüğü ve yönünün, belirli bir yük koşulu altında, etrafındaki malzeme elemanının yönelimi ile değişebilmesine rağmen, malzeme noktasındaki genel gerilme durumunun her zaman aynı olduğuna dikkat etmek gerekir.

Örnek 14.1 Şekil 14.9’da gösterilen kenarları $a = 10$ cm olan bir küp ele alınсын. Bu blok x ve y yönlerinde uygulanan iki eksenli kuvvetler altında test edilmektedir. Uygulanan kuvvetlerin eşit büyüklükte ve $F_x = F_y = F = 2$

x 10^6 N değerinde olduğu varsayalım. Blok malzemesinin elastik modülü ve Poisson oranı sırasıyla $E = 2 \times 10^{11}$ Pa ve $\nu = 0.3$ olarak verilmiştir.

x , y ve z yönlerindeki gerinimleri ve deforme olmuş bloğun ebatlarını

- F_x ve F_y çekme kuvvetiyse (Şekil 14.10a)
- F_x çekme ve F_y basma kuvvetiyse (Şekil 14.10b)
- F_x ve F_y basma kuvvetiyse (Şekil 14.10c) belirleyiniz.



Şekil 14.9 Örnek 14.1

Çözüm

İlgili gerilmeleri hesaplayabilmek için, F_x ve F_y 'nin uygulandığı alanların bilinmesi gerekmektedir. A_x ve A_y normalleri x ve y yönlerinde normalde olan küpün yan alanları olsun. Numune bir küp olduğu için, bu alanlar eşittir:

$$A_x = A_y = A = a^2 = 100 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Şimdi x ve y yönlerindeki normal gerilmeler hesaplanabilir. Uygulanan kuvvetlerin x ve y yönlerindeki büyüklüklerinin ve uygulandıkları alanların eşit olduğu için bu yöndeki gerilmelerin büyüklükleri de eşittir.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma = \frac{F}{A} = \frac{2 \times 10^6 \text{ N}}{1 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = 2 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Bloğa z yönünde uygulanan bir kuvvet olmadığı için bu yönde normal gerilme bileşeni sıfırdır.

Koşul (a) İki kuvvet de çekme olduğu için σ_x ve σ_y çekme gerilmesi olup işaretleri pozitifdir (Şekil 14.10a). Oluşan gerinimleri hesaplamak için Denklem 14.8'den yararlanılır. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ve $\sigma_z = 0$ olduğu için bu eşitlikler aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1 - \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1 - \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-2\nu}{E} \sigma$$

$\varepsilon_x = 1E\sigma_x - \nu\sigma_y = 1 - \nu EE$, ν ve σ 'nın sayısal değerleri yukarıdaki denklemlerde yerine konup, hesaplamalar yapılırsa sonuç aşağıdaki gösterildiği üzere elde edilir.

$$\varepsilon_x = 0.7 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = 0.7 \times 10^{-3}$$

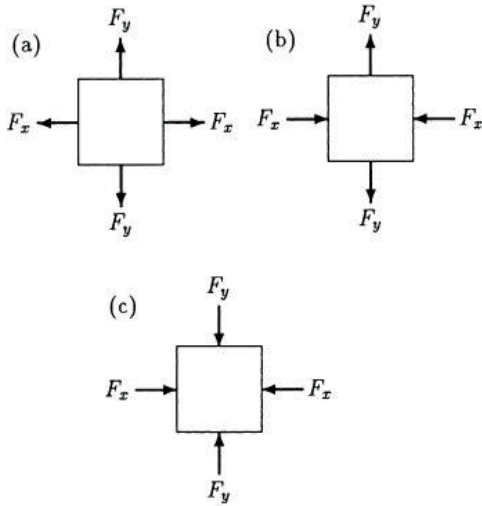
$$\varepsilon_z = -0.6 \times 10^{-3}$$

ε_x ve ε_y değerlerinin pozitif, ε_z değerinin negatif olduğuna dikkat edilmelidir. Uygulanan kuvvetlerin neticesi olarak x ve y yönlerinde bloğun ölçüsünde artış olurken, z yönünde azalma gerçekleşmiştir. a_x , a_y , a_z bloğun yeni (deforme olmuş) ölçüleri olarak tanımlanmıştır. Bu ölçüler:

$$a_x = (1 + \varepsilon_x)a = (1 + 0.0007)(10 \text{ cm}) = 10.007 \text{ cm}$$

$$a_y = (1 + \varepsilon_y)a = (1 + 0.0007)(10 \text{ cm}) = 10.007 \text{ cm}$$

$$a_z = (1 + \varepsilon_z)a = (1 - 0.0006)(10 \text{ cm}) = 9.994 \text{ cm}$$



Şekil 14.10 Bloğun iki eksenli olarak farklı şekillerde yüklenmesi

Koşul (b) Bu koşulda σ_x çekme yönünde ve pozitif, σ_y basma yönünde ve negatiftir. Bu durumda, gerilme-gerinim ilişkisi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\varepsilon_x = 1/E \sigma_x + \nu \sigma_y = 1 + \nu E \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x + \nu \sigma_y) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\sigma_y - \nu \sigma_x) = -\frac{1 + \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Verilen parametrelerin sayısal değerleri yukarıdaki denklemlerde yerine konup, hesaplamalar yapılırsa sonuç aşağıdaki gösterildiği üzere elde edilir.

$$\varepsilon_x = 1.3 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = -1.3 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

x yönünde uygulanan çekme kuvveti ve y yönünde uygulanan basma kuvveti, x yönünde bloğu uzatır ve y yönündeki boyutunu azaltır. z yönünde, σ_x çekme gerilmesinin neden olduğu kısılma, σ_y basma gerilmesinin neden olduğu genişleme ile dengelenir.

Koşul (c) Bu koşulda iki kuvvet de basma kuvvetidir. Bu sebeple, σ_x ve σ_y basma yönünde ve negatiftir (Şekil 14.10c). Bu durumda, gerilme-gerinim ilişkisi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (-\sigma_x + \nu \sigma_y) = \frac{1 - \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\sigma_y - \nu \sigma_x) = -\frac{1 + \nu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} (-\sigma_x - \sigma_y) = \frac{2\nu}{E} \sigma$$

Verilen parametrelerin sayısal değerleri yukarıdaki denklemlerde yerine konup, hesaplamalar yapılırsa sonuç aşağıdaki gösterildiği üzere elde edilir.

$$\varepsilon_x = -0.7 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = -0.7 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = 0.6 \times 10^{-3}$$

Uygulanan kuvvetlerin neticesi olarak x ve y yönlerinde bloğun ölçüsünde azalma olurken, z yönünde artma gerçekleşmiştir. Bloğun deforme olmuş yeni ölçüleri Koşul (a)'da belirtilen yöntemle hesaplanabilir.

14.3 Gerilme Dönüşümleri

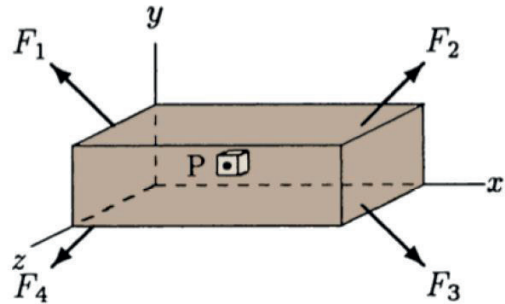
Şekil 14.11'te dikdörtgen bir çubuk gösterilmiştir. Çubuk, içerisinde çeşitli şekillerde deformasyona neden olan dış kuvvetlere maruz bırakılmıştır. P noktasının bu yapının içerisinde bir nokta olduğunu varsayalım. Çubuğun kenarlarına paralel kenarları olan, P noktasında yer alan küçük bir kübik malzeme elemanının kesip çıkarılarak analiz edildiğini varsayalım. Şekil 14.12'de gösterildiği gibi, bu malzeme elemanı, xy düzleminde normal (σ_x ve σ_y) ve kesme (τ_{xy}) gerilmelerinin bir kombinasyonuna tabi tutulur. Malzemenin aynı noktasından ilk elemandan farklı yerleşime sahip ikinci bir eleman alındığını varsaydığımızda (Şekil 14.13), bu malzeme elemanının, ilk elemanın saat yönünün tersine θ dönmesiyle elde edilebileceği görülmektedir. x' ve y' , dönüştürülmüş malzeme elemanının yüzey normallerini temsil eden karşılıklı iki dik doğrultudadır. Dönüştürülmüş malzeme elemanı üzerindeki gerilme dağılımı, ilkinden

farklı olacaktır. Genel olarak, ikinci eleman da normal (σ_x' ve σ_y') ve kesme gerilmelerine ($\tau_{x'y'}$) maruz kalabilir. Eğer σ_x , σ_y , τ_{xy} ve θ dönüş açısı verilirse, aşağıdaki formüller kullanılarak σ_x' , σ_y' ve $\tau_{x'y'}$ değerleri hesaplanabilir.

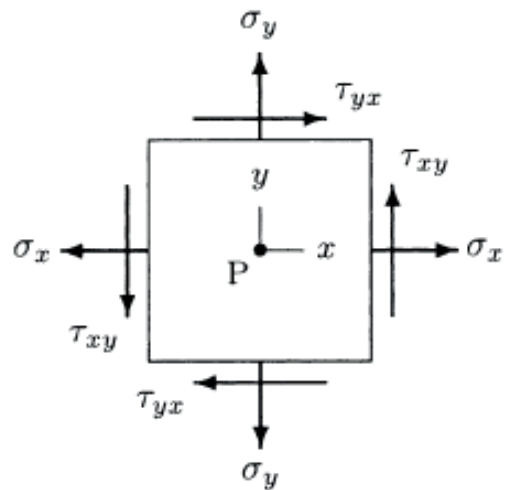
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

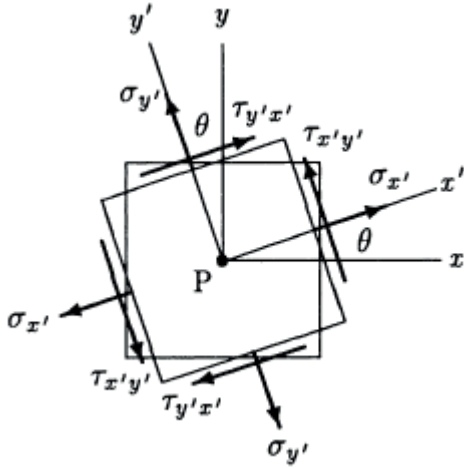
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



Şekil 14.11 xy düzleminde harici kuvvetler uygulanan bir çubuk



Şekil 14.12 xy düzlemindeki gerilme tensörü bileşenleri



Şekil 14.13 Gerilme tensorü bileşenlerinin dönüşümü

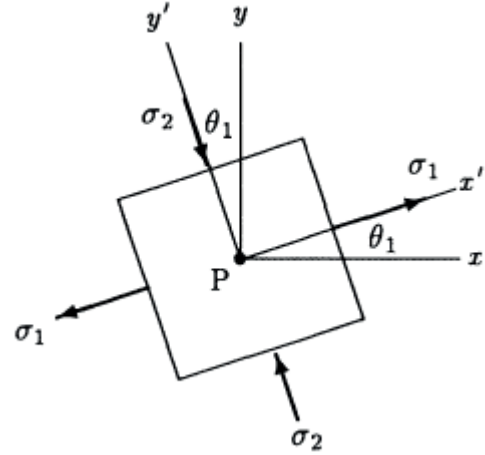
Bu denklemler, gerilmeleri bir dizi koordinattan (x,y) bir diğerine (x',y') dönüştürülmesinde kullanılır.

14.4 Asal Gerilmeler

Bir yapı içinde belirli bir nokta etrafında birçok eleman oluşturma olasılığı vardır. Bu olasılıklar arasında, normal gerilmelerin maksimum ve minimum olduğu bir eleman olabilir. Bu maksimum ve minimum normal gerilmeler *asal gerilmeler* olarak, maksimum ve minimum gerilmelerin yönleri ile eşdoğrultulu olan normal düzlemlere sahip düzlemler, *asal düzlemler* olarak adlandırılır. Bir asal düzlemden kesme gerilmesi sıfırdır (Şekil 14.14). Sıfır kesme gerilme koşulundan ve denklem (14.10) ile denklem (14.12)'den yararlanılarak asal normal gerilme ve asal düzlemin konumu belirlenebilir. Bu, Denklem 14.12'nin sıfıra eşitlenip θ açısı için

çözülmesiyle sağlanır. Bu şekilde belirlenen açı θ_1 ile ifade edilirse:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (14.13)$$



Şekil 14.14 Asal gerilmeler

Burada θ_1 asal düzlemlerin x ve y eksenlerine göre yönelim açısını ifade etmektedir. Eğer denklem (14.10)'daki θ değeri yerine θ_1 değeri kullanılırsa σ_1 ve σ_2 asal gerilmeleri aşağıdaki ifadeler ile çıkarılabilir.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14.14)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14.15)$$

Asal gerilme kavramı, gerilme analizlerinde önemlidir. Kırılma ya da malzeme hasarlarının, maksimum gerilmelerin düzlemleri boyunca meydana geldiği bilinmektedir ve yapılar ilgili maksimum gerilmeler dikkate alınarak tasarlanmalıdır. Bir malzemenin farklı yükleme koşullarına verdiği yanıtın farklıdır ve belirli bir malzemenin, kesme, çekme ve basma

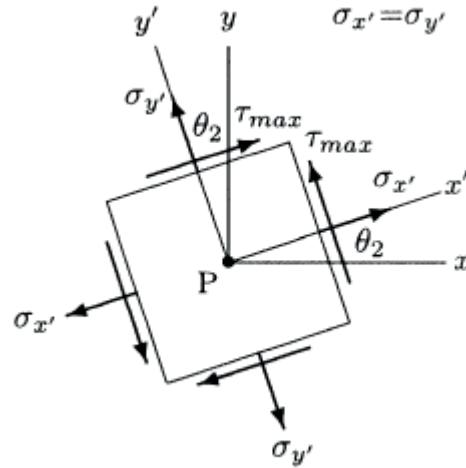
yükleri altında davranışlarını analiz ederken farklı fiziksel özelliklerinin dikkate alınması gerekmektedir. Denklem (14.14) ve denklem (14.15)'in maksimum ve minimum normal gerilmelerin hesaplanmasında faydalı olduğu göz önünde tutulmalıdır. Belirli bir yapı ve yükleme koşulları için, denklem 14.14 aracılığıyla hesaplanan maksimum normal gerilme operasyonel güvenlik sınırları içinde olmalıdır. Bununla birlikte, yapının, maksimum kesme gerilmesi olarak adlandırılan kritik kesme gerilmesi değeri için de kontrol edilmesi gerekmektedir. *Maksimum kayma gerilmesi*, τ_{max} , normal gerilmelerin eşit olduğu bir malzeme elemanında gerçekleşir (Şekil 14.15). Bu nedenle, (14.10) ve (14.11) numaralı denklemler eşit olarak ayarlanır ve ortaya çıkan denklem, kayma gerilmesinin maksimum olduğu elemanın yönelme açısı (θ_2) için çözülebilir. Bu çözüm:

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \right) \quad (14.16)$$

Maksimum kesme gerilmesinin, τ_{max} , hesaplanması için denklem (14.12)'deki θ açısı yerine θ_2 açısı konularak bir ifade elde dileyebilir:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14.17)$$

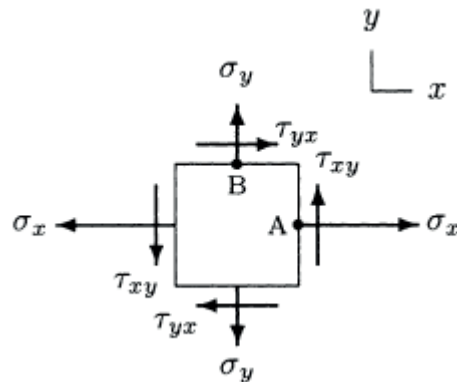
Asal gerilmelerin hesaplanmasında kullanılan grafik metodu bir sonraki konuda ele alınacaktır.



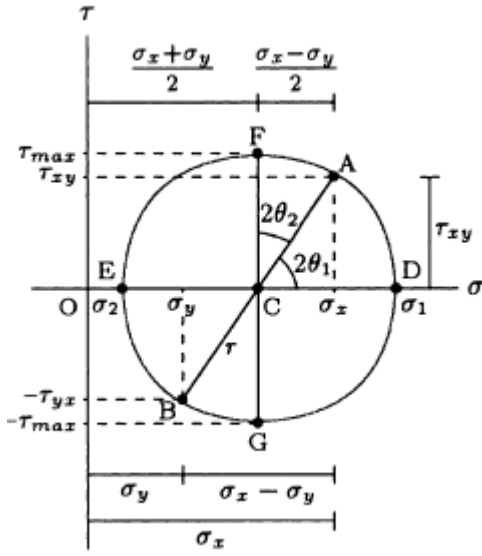
Şekil 14.15 Maksimum kesme gerilmesi

14.5 Mohr Çemberi

Mohr çemberi, malzemenin bir noktasındaki gerilme durumunu görselleştirmenin ve asal gerilmelerin hesaplanmasının etkili bir yoludur. Şekil 14.17'te, Şekil 14.16'da gösterilen düzlemsel gerilme elemanı için tipik bir Mohr çemberi gösterilmiştir. Böyle bir diyagramın oluşturulması ve maksimum ve minimum gerilmelerin bulunmasındaki adımlar aşağıda özetlenmiştir.



Şekil 14.16 Pozitif gerilmeler



Şekil 14.17 Mohr çemberi

- Şekil 14.16'da olduğu gibi, gerilmelerin bilindiği elemanın bir taslağı çizilir ve bu eleman üzerinde ilgili gerilmelerin doğru yönleri belirtilir. Şekil 14.16'da gösterilen gerilmelerin hepsi pozitiftir. Pozitif ve negatif gerilmeler için işaretleme, çekme gerilmesinin pozitif, basma gerilmesinin negatif olmasıdır. Malzeme elemanını saat yönünün tersine döndürme eğilimi gösteren sağ taraftaki kesme gerilmesi ve saat yönünde döndürme eğilimi gösteren üst yüzey üzerindeki kesme gerilmesi pozitiftir.
- Yatay eksenin normal gerilmelerini ve dikey eksen kesme gerilmelerini temsil eden dikdörtgen bir koordinat sistemi kurulur. τ 'ye karşı σ diyagramında, O merkez noktasının sağına pozitif normal gerilmeler çizilirken, negatif normal gerilmeler O'nun soluna çizilir.
- $\tau - \sigma$ diyagramında, malzeme elemanının sağ yüzeyine etki eden normal ve kayma gerilme değerlerine eşit koordinatlara sahip bir A nokta

olsun. Yani, A, σ_x ve τ_{xy} koordinatlarına sahiptir. Benzer şekilde, B, elemanın üst yüzeyindeki gerilme bileşenleri σ_y ve $-\tau_{yx}$ eşit olan koordinatlara sahip bir noktadır.

- A ve B noktaları düz bir çizgi ile birbirlerine bağlanır. AB doğrusu ile yatay eksenin kesişim noktası C noktası olarak adlandırılır ve bu nokta Mohr çemberinin merkezidir. Mohr çemberinin merkezi O noktasından $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ mesafe kadar uzaklıktadır. Bu sebeple C noktasındaki gerilme:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

- A ve C (veya B ve C) noktaları arasındaki mesafe Mohr çemberinin yarıçapıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanabilir.

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- C merkezli r yarıçaplı bir çember çizilir. Bu çemberin yatay eksenle ($\tau = 0$ olduğu eksen) kesiştiği noktalar maksimum ve minimum (asal) normal gerilmelere eşittir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\sigma_1 = \sigma_c + r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Eğer Mohr çemberi dikkatli bir biçimde çizilirse σ_1 ve σ_2 doğrudan $\tau - \sigma$ diyagramından da ölçülebilir. Yukarıdaki denklemlerin aslında denklem (14.14) ve (14.15)'e eşit olduğuna dikkat edilmelidir.

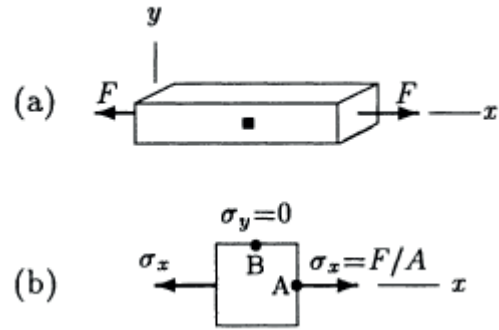
- $\tau - \sigma$ diyagramında, F ve G noktaları Mohr çemberinin C'den geçen bir dikey çizgiyle kesişme noktalarıdır. F ve G'de normal gerilmeler hem σ_c 'ye eşittir hem de kesme gerilmesinin büyüklüğü maksimumdur. Bu nedenle Mohr çemberindeki F ve G noktaları, maksimum kesme gerilmesi durumuna karşılık gelir. Basit olarak, maksimum kesme gerilmesi Mohr çemberinin yarıçapına eşittir:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Yine dikkat edilmelidir ki bu denklem, önceki bölümde τ_{\max} için verilen denklemle aynıdır.

- Mohr çemberinin açılarının yorumlamasında kendini özgü bir yolu vardır. Şekil 14.16'da gösterilen düzlem gerilme elemanında, A ve B yüzeylerinin normalleri dik açılardadır. $\tau - \sigma$ diyagramında A ve B, 180° bir açı yapar. Bu nedenle, θ° dönüşü Mohr çemberinde $2\theta^\circ$ 'lik bir açıya karşılık gelir. $\tau - \sigma$ diyagramındaki D noktası, maksimum normal gerilmeyle ve dolayısıyla asal yönlerden biriyle ilgilidir. $\tau - \sigma$ diyagramında D noktası, A noktasından saat yönünden $2\theta_1$ derece mesafede bulunur. Asal düzlemin (σ_1 yönü) normal yönü x ekseninin saat yönünün tersinde θ_1 döndürülmesiyle bulunabilir. Benzer işlem, elemanın kesme gerilmesinin maksimum olduğu konumunun belirlenmesinde de geçerlidir.

Örnek 14.2 x yönünde çekme uygulanan bir çubuk Şekil 14.18a'da gösterilmiştir. F uygulanan kuvvetin büyüklüğü, A çubuğun kesit alanıdır. Tek eksenli gerilme durumu düzlem malzeme elemanı üzerinde Şekil 14.18b'de gösterilmiştir. Bu elemanın kenarları x ve y yönlerinde normallere sahiptir.



Şekil 14.18 Örnek 14.2

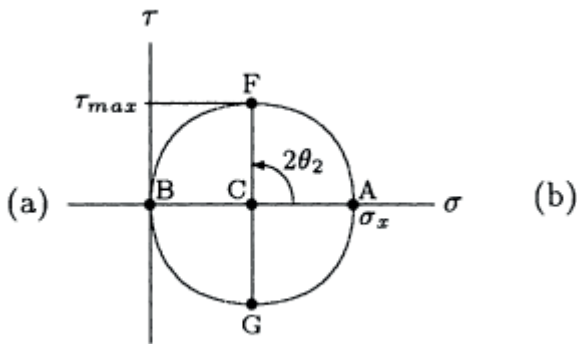
Mohr çemberini kullanarak maksimum kesme gerilmesini ve maksimum kesme gerilmesinin düzlemini belirleyiniz.

Çözüm

Harici kuvvetin ve çubuğun kesit alanının verilen büyüklükleri için, x yönünde çubukta oluşan normal gerilme, $\sigma_x = F/A$ olarak belirlenebilir. Şekil 14.18b'de gösterildiği üzere σ_x ; x ve y yönlerine paralel kenarları olan bir malzeme elemanı üzerindeki gerilme tensorünün tek bileşenidir.

Şekil 14.18b'deki düzlem gerilme elemanı temel alınarak Şekil 14.19a'da bir Mohr çemberi çizilmiştir. A yüzeyinde sadece σ_x büyüklüğünde bir çekme gerilmesinin

bulduğuna ve B yüzeyinde herhangi bir gerilme bulunmadığına dikkat edilmelidir. Bu nedenle, $\tau - \sigma$ diyagramında, A noktası, σ -ekseni üzerinde, merkezden σ_x uzaklığında bulunurken ve B noktası merkezde yer alır. Mohr çemberinin merkezi olan C noktası, σ -ekseni üzerinde A ve B noktaları arasında, her ikisine de $\sigma_x/2$ uzaklıkta bulunmaktadır. Bu sebeple Mohr çemberinin yarıçapı $\sigma_x/2$ 'dir.



Şekil 14.19 Şekil 14.18'de verilen malzeme elemanın analizi

Mohr çemberi üzerindeki F noktası kesme gerilmesinin maksimum olduğu malzeme elemanı yönünü işaret etmektedir. Maksimum kesme gerilmesinin büyüklüğü Mohr çemberinin yarıçapına eşittir.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{F}{2A}$$

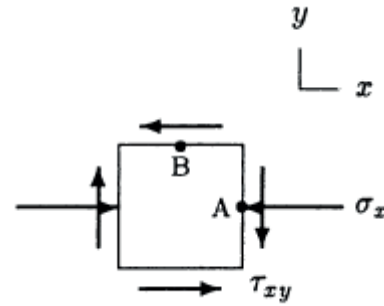
Mohr çemberi üzerinde F noktası A noktasına saat yönünün tersinde 90° mesafede yer almaktadır. Bu sebeple Şekil 14.19b'de gösterildiği üzere, kesme gerilmesinin maksimum olduğu malzeme elemanı, Şekil

14.18b'de verilen malzeme elemanını $\theta_1 = 45^\circ$ saat yönünde döndürerek elde edilebilir.

σ_x 'in Mohr çemberinde maksimum normal gerilme olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle, Mohr çemberinin üzerindeki A noktası, normal gerilmelerin maksimum ve minimum olduğu malzeme elemanının yönünü temsil eder ve Şekil 14.18b'deki malzeme elemanı asal gerilmelerin durumunu temsil eder.

Örnek 14.3 Şekil 14.20'de gösterilen malzeme elemanı ele alındığında, bu eleman xy düzleminde σ_x basma ve τ_{xy} kesme gerilmelerine maruz kalmaktadır.

Mohr çemberini kullanarak asal gerilmeleri, maksimum kesme gerilmesini ve asal düzlemleri belirleyiniz.



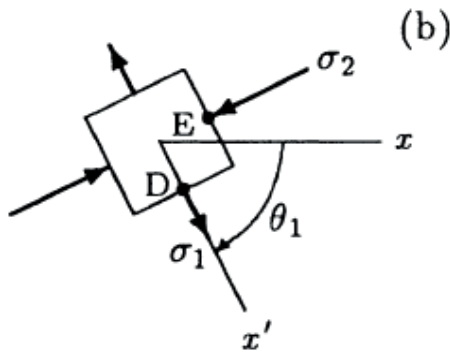
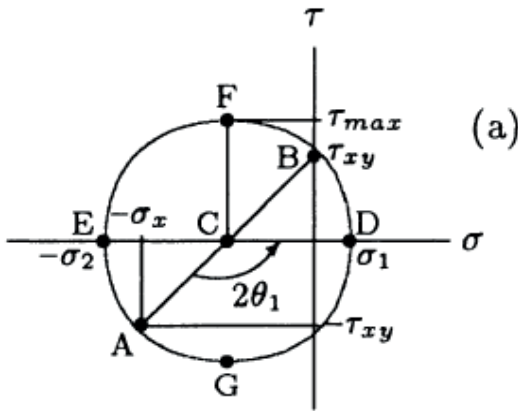
Şekil 14.20 Örnek 14.3

Çözüm

Şekil 14.20'deki düzlem gerilme elemanı kullanılarak Şekil 14.21a'da gösterilen Mohr çemberi çizilmiştir. Şekil 14.20'deki malzeme elemanının A yüzeyinde σ_x büyüklüğünde negatif (basma yönünde) bir normal gerilme ve

τ_{xy} büyüklüğünde bir kesme gerilmesi mevcuttur. Bu sebeple A noktasının koordinatları $-\sigma_x$ ve $-\tau_{xy}$ 'dir. Gerilme elemanı üzerindeki B yüzeyinde ise sadece τ_{xy} büyüklüğünde bir kesme gerilmesi vardır. Bu sebeple B noktası, τ - σ diyagramının τ ekseninde merkezden τ_{xy} mesafe uzaklıkta bulunmaktadır. Mohr çemberinin merkezi olan C noktası, A ve B'yi birleştiren çizgi ile σ ekseninin kesişim noktasından bulunabilir. Mohr çemberinin yarıçapı, dik üçgenlerin özelliklerinden yararlanılarak da belirlenebilir. Bu durumda,

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Şekil 14.21 Şekil 14.20'de verilen malzeme elemanının analizi

Mohr çemberinin yarıçapı belirlendikten sonra σ_1 ve σ_2 asal gerilmeleriyle τ_{max} maksimum kesme gerilmesinin bulunması kolaydır.

$$\sigma_1 = r - \frac{\sigma_x}{2} \quad (\text{çekme})$$

$$\sigma_2 = r + \frac{\sigma_x}{2} \quad (\text{basma})$$

$$\tau_{max} = r$$

Gerilmelerin maksimum ve minimum olduğu düzlemin θ_1 dönüş açısını belirlemek için, Şekil 14.21a'daki CA ve CD çizgileri arasındaki açığı $2\theta_1$ 'e eşit olarak okumalıyız. Sorunun geometrisinden:

$$2\theta_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}\right)$$

Şekil 14.21b'de gösterildiği gibi, normal gerilmelerin maksimum ve minimum olduğu malzeme elemanını oluşturmak için θ_1 açısı hesaplanır ve Şekil 14.20'deki malzeme elemanı saat yönünde θ_1 açısıyla döndürülür.

14.6 Hasar Teorileri

Hem güvenlik hem de güvenilirlik sağlamak için yapı, dayanımı hizmete girdiğinde maruz kalacağı gerilmelerden önemli ölçüde daha fazla olacak şekilde tasarlanmalı ve uygun bir malzeme seçilmelidir. Örneğin, bir malzeme sadece çekme yüklerine maruz kalırsa, malzemenin mukavemeti kopma dayanımı (veya akma dayanımı) ile değerlendirilmelidir. Önceki bölümde ele alındığı gibi, yaygın

malzemelerin çoğu için oluşturulmuş normal gerilme-gerinim ve kesme gerilmesi-gerinimi diyagramları bulunmaktadır. Bu nedenle, tek eksenli gerilme veya sadece kesme gerilmesine maruz kalan bir malzemenin cevabını tahmin etmek nispeten basit bir görevdir. Bununla birlikte, birleşik yükleme koşullarında oluşan karmaşık bir gerilme durumu için böyle doğrudan bir yaklaşım mevcut değildir.

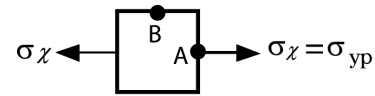
Malzeme birleşik yüklemeye tabi tutulduğunda, malzeme hasarının meydana gelebileceği koşulları tahmin etmek için birkaç kriter belirlenmiştir. Malzeme ve yapısal hasar ile malzemenin herhangi bir yükü destekleyemeyecek şekilde kırıldığı veya aşırı kalıcı deformasyona (akma) maruz kaldığı anlatılmaktadır. Ne yazık ki, herhangi bir yükleme türünde malzeme cevabını tahmin etmek için kullanılabilir tek bir tam başarısızlık kriteri yoktur. Bu teorilerin amacı, gerilmeleri malzemenin mukavemeti ile ilişkilendirmektir. Bununla birlikte, mevcut veriler, genellikle basit çekme ve saf kesme deneylerinde elde edilen, malzemenin akma ve kopma dayanımı cinsinden ifade edilir. Burada fikir, nispeten sınırlı bilgiyi, birden fazla gerilme bileşeninin olabileceği karmaşık durumları analiz etmek için kullanmaktır. Bu hata kriterlerinin birkaçı aşağıda ele alınacaktır. *Maksimum kesme gerilmesi teorisi* akma değerinin tahmin edilmesinde kullanıldığı için sünek malzemelere

uygulanabilir. Bu teori, aynı zamanda *Coulomb teorisi* veya *Tresca teorisi* olarak bilinmektedir. Bu teori, bir malzeme elemanındaki maksimum kayma gerilmesinin, malzemenin tek eksenli gerilmeye maruz kalması durumunda gözlemlenebilecek maksimum kesme gerilmesi değerine ulaştığında, akmanın gerçekleştiğini varsayar.

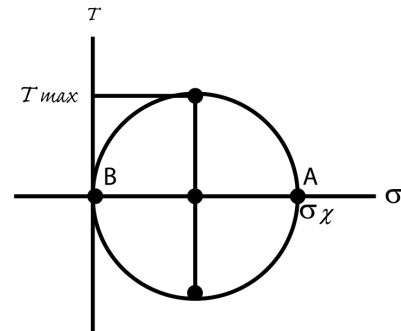
Bir malzemenin, akana kadar basit (tek eksenli) bir çekme testine maruz kaldığını varsayalım. Akmadaki gerilme değeri σ_{yp} olarak kaydedilir. Malzemenin maruz kaldığı maksimum kesme gerilmesi Şekil 14.22'de gösterilen Mohr çemberi (bkz. Şekil 14.17) oluşturularak belirlenebilir. Basit çekme durumunda maksimum kesme gerilmesinin normal gerilmenin yarısına eşit olduğu açıktır. Bu koşulda, normal gerilme ayrıca malzemenin çekme yönündeki akma dayanımıdır.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_{yp}}{2}$$

(a)

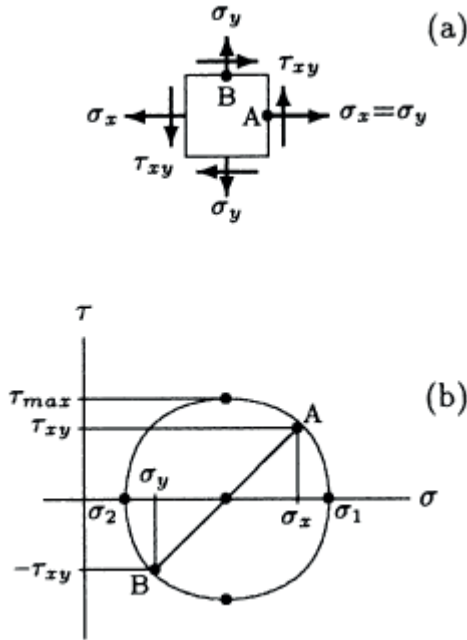


(b)



Şekil 14.22 Maksimum kesme gerilmesi teorisinin açıklanması

Maksimum gerilme teorisinde, aynı malzemenin normal ve kesme gerilmelerinden herhangi bir kombinasyona maruz kalması ve maksimum kesme gerilmesinin hesaplanması durumunda, maksimum kesme gerilmesinin τ_{\max} 'a eşit olduğu zaman akmanın başlayacağını belirtir. Örneğin, malzemenin Şekil 14.23a'da gösterildiği gibi xy düzleminde normal ve kesme gerilmelerinin bir kombinasyonuna tabi tutulduğu varsayalım. Bu gerilme durumu için maksimum kesme gerilmesi τ_{\max} Mohr çemberi çizilerek (Şekil 14.23a) veya denklem (14.17) kullanılarak belirlenebilir. τ_{\max} 'ın $\sigma_{yp}/2$ 'ye eşit veya büyük olması durumunda akma gerçekleşir.



Şekil 14.23 Birleşik gerilme durumu ve Mohr çemberi

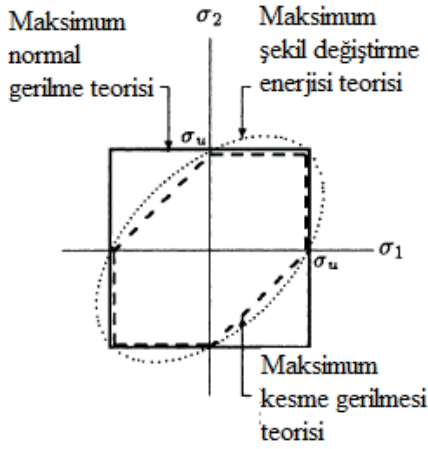
Maksimum şekil değiştirme enerjisi teorisi sünek malzemelerin akma koşulları için yaygın bir şekilde kabul görmüş bir kriterdir. Bu teorem ayrıca *von Mises* veya *Mises-Hencky teorisi* olarak da bilinmektedir. Bu teori akmanın, asal gerilmeler arasındaki farkın ortalama karekökünün, basit çekme testiyle belirlenen malzemenin akma dayanımına eşit olduğunda gerçekleştiğini varsayar. σ_1 ve σ_2 asal gerilmeler, σ_{yp} malzemenin akma dayanımı olsun. Biçim değiştirme enerjisi teorisine göre akmadan kaynaklı hasar aşağıdaki koşulla tahmin edilir.

$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_{yp} \quad (14.19)$$

Maksimum normal gerilme teorisi en büyük asal gerilme değerinin malzemenin σ_{yp} akma dayanımına veya σ_u kopma dayanımına eşit olduğunda akma kaynaklı hasar oluştuğuna dayandırılır. Bu nispeten basit bir teori olup hem sünek hem de gevrek malzemeler için uygulanabilir.

Yukarıda gözden geçirilen hasar teorileri, Şekil 14.24'te gösterildiği gibi, ortak bir σ_1 - σ_2 grafiğinde karşılaştırılabilir. Verilen bir teori için, gerilme seviyesi bu teoriyi temsil eden kapalı sınırın üstüne veya dışına düştüğünde hasar oluşur. Bu üç hasar teorisinin arasında, sünek malzemelere uygulandığında maksimum şekil değiştirme enerjisi teorisi akmayı en yüksek doğruluk payıyla tahmin eder ve deneysel sonuçlarla en iyi benzerliği gösterir.

Gevrek malzemeler için, maksimum normal gerilme teorisi daha uygundur. Şekil değiştirme enerjisi teorisi, karşılaştırmanın temeli olarak kabul edilirse, maksimum kesme gerilmesi teorisi her zaman daha ihtiyatlı ve güvenliyken, asal gerilmelerin işaretleri benzer olduğunda, maksimum normal gerilme teorisi daha ihtiyatlıdır.



Şekil 14.24 Hasar teorilerinin karşılaştırılması

Burada ele alınan hasar teorileri statik yükleme koşulları için geçerlidir. Bu teoriler, yorulmaya neden olabilecek dinamik veya tekrar tekrar uygulanan yükleri hesaba katmak için değiştirilmelidir.

14.7 Kabul Edilebilir Gerilme ve Emniyet Faktörü

Gerilme ve hasar analizleri, yapı tasarımının temel bileşenlerini oluşturur. Bir yapı, hizmete alındığında maruz kalabileceği *çalışma gerilmesi* adı verilen olası maksimum gerilme seviyesine dayanacak şekilde tasarlanmalıdır. Bununla birlikte, yapı üzerine etki edecek olan yüklerin tam büyüklükleri bilinemeyebilir.

Yapı beklenmedik şekilde yüksek yüklere, dinamik yükleme koşullarına veya yapısal malzemenin fiziksel özelliklerini değiştirebilen korozyon yaratan ortama maruz kalabilir. Belirsizliklerin etkilerini hesaba katmak için, *Kabul edilebilir gerilme* olarak adlandırılan bir gerilme seviyesi, malzemenin kopma mukavemetinden önemli ölçüde daha düşük bir değere ayarlanmalıdır. Kabul edilebilir gerilme, güvenlik payı sağlamak için yeterince düşük olmalıdır. Aynı zamanda malzemenin verimli kullanılmasına da izin vermelidir.

Öngörülemeyen koşullara karşı güvenlik, bir *emniyet faktörü* göz önünde bulundurularak sağlanabilir. Güvenlik faktörü n genellikle, malzemenin kopma mukavemetinin kabul edilebilir gerilmeye oranı olarak belirlenir. Emniyet faktörü birden büyüktür ve malzemenin çekme, basma veya kesme kuvvetleri altında yüklü olduğuna bağlı olarak değişebilir. Emniyet faktörü kopma dayanımı yerine malzemenin akma dayanımına da dayanabilir. Bu, akma değerinin geçildiği veya plastik deformasyonların tolere edilemediği işletme koşullar için özellikle önemlidir. Yorulma yüklemesi durumunda, dayanma sınırı veya malzemenin yorulma mukavemeti kullanılmalıdır. Emniyet faktörü belirlendikten sonra, kabul edilebilir gerilme, σ_{all} , belirlenebilir. Örneğin σ_u kopma dayanımı kriterine göre:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{n} \quad (14.20)$$

14.8 Malzeme Mukavemetini Etkileyen Faktörler

Önceki bölümde ele alındığı gibi, elastik ve kesme modülleri, akma mukavemeti, kopma mukavemeti, hasarın oluştuğu gerilme değeri ve bir malzeme için gerilme-gerinim diyagramının altındaki alan, malzemenin mukavemetinin belirtileridir. Bir malzemenin özelliklerini etkileyebilecek birçok fiziksel ve çevresel faktör vardır. Örneğin sıcaklık, fiziksel özelliklerini değiştirerek bir malzemenin mukavemetini değiştirebilir. Sıradan malzemeler ısıtıldığında genişler, soğutulduğunda daralır. Sıcaklık artışı, bir malzemenin kopma mukavemetini düşürecektir. Yapılarda sıcaklık değişikliklerinin neden olduğu gerilmeler oldukça dikkate değerdir.

Sürtünme, iki yüzey birbiri üzerinde yuvarlandığında veya kayduğunda oluşur. Sürtünme, enerjii öncelikle ısı olarak dağıtır. İki yüzeyin kayma hareketinin bir başka sonucu da *aşınma* olarak adlandırılan malzemenin yüzeylerinden parça ayrılmasıdır. Aşınma, yapıların yüzey kalitesini değiştirerek onları korozyonun gerçekleştiği ortamlara maruz bırakabilir ve sonuç olarak mekanik mukavemetini azaltabilir. *Korozyon*, mekanik hasarların başlıca nedenlerinden biridir. Aşınma nedeniyle korozyon hızlanabilir. Korozyon malzemede, gerilmeli bir ortamda ilerleyebilen küçük çatlakların oluşmasına

neden olabilir. Genel olarak, sürtünme, aşınma, korozyon ve malzemedeki süreksizliklerin varlığı malzemenin mukavemetini azaltabilir.

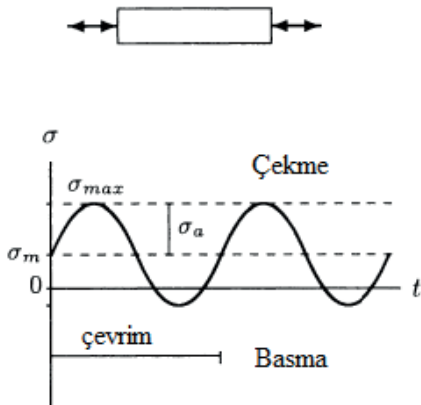
14.9 Yorulma ve Dayanıklılık

Bölüm 14.6'da gözden geçirilen hasar teorileri statik yükleme koşulları altındaki malzeme özelliklerine dayanmaktadır. Bu teoriler bir malzemenin belirli bir yönde uygulanan bir yükleme konfigürasyonuna cevabını tahmin etmeye çalışır. Makine parçaları ve insan vücudundaki kas ve kemikler dahil olmak üzere birçok yapı, tekrarlanan yükleme ve (yük) boşaltma işlemine maruz kalır. Tek bir uygulamada yapının bozulmasına neden olmayan yükler, tekrar tekrar uygulandığında hasara neden olabilir. Uygulanan yükün genliğine, malzemenin fiziksel özelliklerine, yapının büyüklüğüne, yapının yüzey kalitesine ve işletme durumuna bağlı olarak birkaç yükleme ve boşaltma döngüsünden sonra veya milyonlarca döngüden sonra hasar meydana gelebilir. Tekrarlanan yüklemeye kaynaklanan kırılma *yorulma* olarak adlandırılır ve mekanikte yorulma, tam yapısal hasarın bir koşulunu ifade eder.

Yapıların yorulma analizi oldukça karmaşıktır. Malzemelerin yorulma davranışını anlamak için geliştirilmiş birkaç deneysel teknik vardır. Bir malzemenin yorulma davranışı, çekme, basma, eğme veya burulma kuvvetleri kullanılarak bir yorulma testinde belirlenebilir.

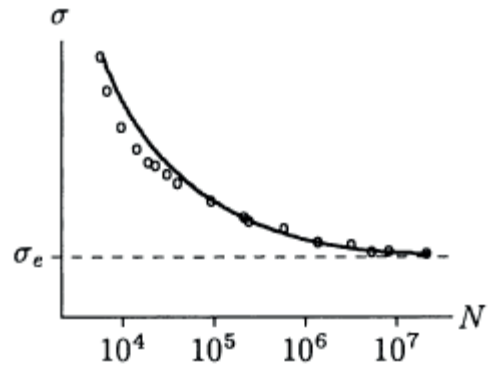
Burada çekme ve basma kombinasyonundan kaynaklanan yorgunluk açıklanmaktadır.

Şekil 14.25'te gösterilen çubuk ele alınmaktadır. Çubuğun kopma mukavemeti σ_u olan bir malzemeden yapıldığı varsayalım. Bu çubuğa ilk olarak σ_u değerinin oldukça altında olan σ_m (ortalama gerilme) gerilmesi uygulanmaktadır. Çubuk daha sonra zaman içinde bazen çekme bazen basma olacak şekilde dalgalanan bir gerilmeye maruz kalır. Gerilmenin genliği, σ_u , çubuğun malzemesinin en yüksek mukavemetinden daha az olan, $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ maksimum çekme gerilmesine maruz kalacak şekildedir. Bu tersinir ve periyodik gerilme, çubuk kırılana kadar uygulanır ve kırılma çevrimi (N) kaydedilir. Bu deney, değişen genlikte sinüzoidal gerilmeler uygulayarak aynı geometrik ve malzeme özelliklerine sahip örnekler üzerinde tekrarlanır. Sonuçlar, hasar çevrim sayısının σ_a gerilme genliğine bağlı olduğunu göstermektedir. σ_a ne kadar yüksekse, N o kadar düşük olur.



Şekil 14.25 Tek eksenli yorulma deneyi

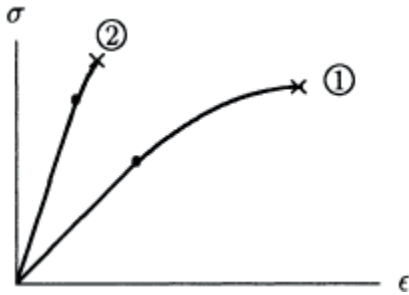
Yorulma testinin tipik bir sonucu, Şekil 14.26'da, gerilme genliğine karşı hasarın olduğu çevrim sayısını gösteren (σ - N) diyagramı üzerinde gösterilmiştir. Belirli bir N için, karşılık gelen gerilme değerine, malzemenin bu sayıda çevrimdeki *yorulma mukavemeti* denir. Belirli bir gerilme seviyesi için N , malzemenin yorulma ömrünü temsil eder, bu da azalan gerilme genliği ile hızla artar. Şekil 14.26'da, deneysel veriler tek bir eğri ile temsil edilir. Bazı malzemeler için, $s - N$ eğrisi azalır ve esasen yatay bir çizgi olur. Yorulma eğrisinin yatay bir hal aldığı gerilme değerine, malzemenin *dayanıklılık sınırı* denir. Dayanıklılık sınırı, Şekil 14.26'da gösterilmektedir. Dayanıklılık sınırının altında, malzemenin, ne kadar gerilme döngüsüne maruz kaldığı önemli olmaksızın, yorulma testinden başarıyla geçme olasılığı yüksektir.



Şekil 14.26 Gerilme genliği – hasar çevrim sayısı grafiği

Cam veya seramik gibi gevrek bir malzeme giderek artan bir yüke maruz kaldığında, elastik deformasyona uğrayacaktır. Gevrek kırılma,

belirgin plastik deformasyon sergilemeden aniden ortaya çıkar (Şekil 14.27). Diğer taraftan sünek kırılma, önemli elastik ve plastik deformasyonların eşlik ettiği hasarla karakterizedir. Sünek bir malzeme yorulma yüküne maruz kaldığında, ciddi plastik deformasyon göstermeden aniden hasara uğrar (akma). Sünek malzemenin yorulma hasarı, gevrek bir malzemenin statik hasarına benzer bir şekilde gerçekleşir.



Şekil 14.27 Sünek (1) ve gevrek (2) kırılmanın karşılaştırılması

Bir malzemenin yorulma davranışı birkaç faktöre bağlıdır. Sıcaklık ne kadar yüksekse, yorulma mukavemeti o kadar düşük olur. Yorulma, yüzey kusurlarına ve gerilme konsantrasyonlarına neden olan materyal içindeki süreksizliğin varlığına çok duyarlıdır. Yorulma hasarı, malzemenin yüzeyinde küçük bir çatlak oluşturularak başlar, bu da tekrarlanan yüklerin etkisi altında ilerler ve malzemenin kopmasına neden olur. İyi bir yüzey kalitesi, bir malzemenin yorulma ömrünü iyileştirebilir.

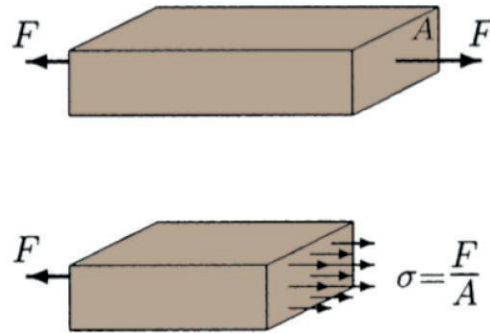
Ortopedi cihazları, hastaların aktiviteleri ve kaslarının hareketleri nedeniyle tekrarlanan

yüklemeye ve boşaltmalara maruz kalır. Ağırlık taşıyan bir protez ya da bir sabitleme cihazı, normal günlük aktiviteye bağlı olarak yıllar içerisinde önemli sayıda gerilme çevrimine maruz kalabilir. Bu döngüsel yüklemeye ve boşaltma, bir protezin bileşenlerinde yorulma hasarına neden olabilir.

14.10 Gerilme Konsantrasyonu

Şekil 14.28’te dikdörtgen bir çubuk gösterilmiştir. A kesit alanına sahip çubuğa F çekme kuvveti uygulanmaktadır. Birim yüzey alanına düşen iç tepki kuvveti gerilme olarak tanımlanmaktadır.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (14.21)$$

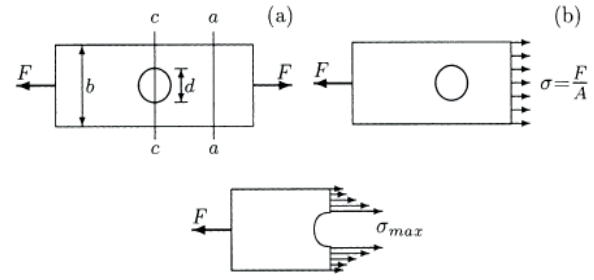


Şekil 14.28 Homojen gerilme dağılımı

Gerilmenin klasik tanımı, F dış kuvvetinin tek bir noktadan ziyade nispeten geniş bir alan üzerinde uygulandığı ve çubuğun kesit alanının çubuğun uzunluğu boyunca sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Sonuç olarak, Şekil 14.28’de gösterildiği gibi, gerilme dağılımı çubuğun uzunluğu boyunca çubuğun

kesit alanı üzerinde eşittir. Çubuğun kesit alanının homojenliği deliklerin, çatlakların, köşelerin, çiziklerin veya çentiklerin varlığıyla bozuluyorsa veya kuvvet çok küçük bir alana uygulandığında, bu durumda gerilme dağılımı süreksizliğin bulunduğu bölümde veya kuvvetin uygulandığı bölgede düzenli olmayacaktır.

Şekil 14.29a'da d çapında dairesel bir deliği olan bir plak gösterilmiştir. Plağa F çekme yükü uygulanmaktadır. Plâğın denge koşulu, elde edilen iç tepki kuvvetinin, plâğın herhangi bir bölümünde F 'e eşit olmasını gerektirir. Şekil 14.29b'de gösterildiği gibi, delikten (örn., aa kesitinde) uzak bir bölümde, gerilme dağılımının homojen olduğu varsayılmaktadır. Plâğın kesit alanı A ise, homojen gerilmenin büyüklüğü $\sigma = F/A$ olarak hesaplanabilir. Deliğin merkezinden geçen cc kesiti ele alındığında, ortalama gerilmenin büyüklüğü $\bar{\sigma} = F/(A - A_h)$ olarak hesaplanır. Burada A_h , cc kesitinde plâğın enine kesitinin içi boş alanıdır. $A - A_h$ her zaman A 'dan küçük olduğu için, cc kesitindeki ortalama gerilmenin büyüklüğü aa kesitindeki homojen gerilmenin büyüklüğünden daha fazladır. Cc kesitinde gerilme dağılımı homojen değildir ve gerilme deliğin kenarları boyunca maksimumdur (Şekil 14.29c). Yani, gerilme deliğin etrafında yoğunlaşır. Bu fenomen *gerilme konsantrasyonu* olarak bilinir.



Şekil 14.29 Gerilme konsantrasyonunun etkileri

Deneysel gözlemlere dayanarak, gerilme yoğunlaştırıcılarının varlığına bağlı olarak geliştirilen maksimum gerilmeleri hesaplamak için oluşturulan deneysel formüller vardır. Maksimum gerilme σ_{max} (veya τ_{max}) ile ortalama gerilme $\bar{\sigma}$ (veya $\bar{\tau}$) arasındaki genel ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{max} = k\bar{\sigma} \quad (14.22)$$

Denklem 14.22'de verilen k değeri *gerilme konsantrasyon faktörü* olarak bilinmektedir. Gerilme konsantrasyonu faktörünün değeri, birden büyüktür ve gerilme konsantrasyonun boyutunun yapının boyutuna oranı (ör. Deliğin çapının yapının genişliğine oranı), uygulanan yükün türü (çekme, basma, kesme, eğme, burulma veya kombinasyonları) ve malzemenin fiziksel özellikleri (süneklik, kırılganlık, sertlik) gibi pek çok değişkene bağlıdır. Yapının homojen kesit alanı göz önüne alınarak ölçülen gerilme seviyeleri, malzemenin kırılma mukavemetinin altında olabilse de yapı, gerilme konsantrasyonu etkilerinden dolayı beklenmedik bir şekilde

hasara uğrayabilir. Bir malzemenin kırılma veya kopma mukavemeti, gerilme konsantrasyonunun varlığından dolayı bölgesel olarak aşılabılır. Burada gerilme konsantrasyon etkilerinden dolayı yapıların yorulma hasarının bölgesel gerilme teorisi ile açıklandığını unutulmamalıdır. Bir yapının yüzeyinde veya içerisinde çok küçük kusurlar veya süreksizlikler olabilir. Yapı, statik yüklemeye tabi tutulduğunda, bu küçük delikler veya çentikler ciddi bir soruna yol açmayabilir. Bununla birlikte tekrar tekrar uygulanan yükler, malzemelerde süreksizliklerin bulunduğu yerdeki çatlak oluşumuna sebep olabilir. Yükün her bir uygulaması ile bu çatlaklar ilerleyebilir ve sonunda malzemenin kırılmasına neden olabilir.

Gerilme konsantrasyonlarının kemiklerin ve ortopedik cihazların ömürleri üzerindeki etkisi çok önemlidir. Bir kemikten ortopedik vidaların çıkarılmasından sonra, vida deliklerinin uzun süre kemikte kaldığı bilinmektedir. Vidaların çıkarılmasından sonraki ilk birkaç ay boyunca, kemikler vida deliklerinden birinden kırılabilir. Kemikte bir vida deliği, gerilme konsantrasyonu etkilerine neden olur ve özellikle eğme ve burulmada kemiği daha zayıf hale getirir.

Gerilme konsantrasyonlarının etkileri, iyi yüzey kalitesiyle ve yapıdaki gereksiz delikler veya ani şekil değişikliklerinden kaçınılarak azaltılabilir.

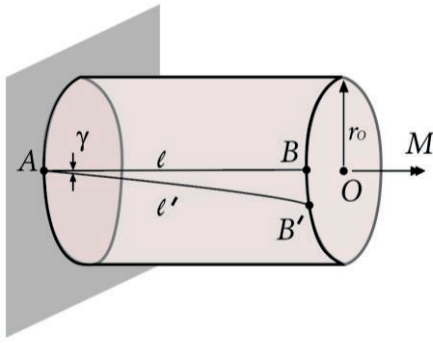
14.11 Burulma

Burulma, uygulanan kuvvetlerin dönme eyleminin sonucu olarak oluşan temel koşullardan biridir. Burada ele alınacak burulma analizleri, dairesel şaftlarla sınırlı kalacak olup, dairesel olmayan yapıların analizleri bu bölümün kapsamı dışındadır. Şekil 14.30'da dairesel bir şaft gösterilmiştir. Bu şaftın uzunluğu l yarıçapı r_0 'dır. AB, şaftın merkez çizgisine paralel olan dış yüzeyinde düz bir çizgiyi temsil eder. Merkez çizgiden geçen ve şaftı iki yarı silindir halinde kesen düzlem *düşey düzlem*, uzunlamasına düzlemlere dik olan düzlem *transvers düzlem* olarak adlandırılmaktadır. (Şekil 14.31'de abcd düzlemi). Bu durumda, AB hattı, düşey düzlemlerden biri boyunca uzanır. Şaft bir ucundan duvara monte edilirken, diğer ucundan şafta M büyüklüğünde bir dönme momenti uygulanır (Şekil 14.30'da çift başlı bir ok ile gösterilmiştir). Dıştan uygulanan tork nedeniyle şaft, AB çizgisi AB' eğrisine dönüşecek şekilde deforme olur. A'daki deformasyon sıfırdır, çünkü şaft bu uçta sabitlenmiştir. Deformasyonun boyutu sabit uçtan serbest uca doğru artar. Şekil 14.30'daki γ açısı şaftın deformasyonunun bir ölçüsüdür ve enine düzlemlerde oluşan kesme gerilmelerine bağlı olarak kesme gerinimini temsil eder. γ açısının tanjantı yaklaşık olarak BB0' eğrisinin uzunluğunun şaftın l uzunluğunun oranına eşittir. Küçük

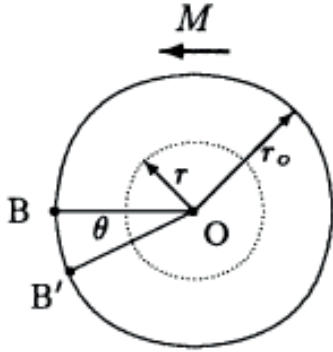
deformasyonlar için, bu açının tanjantı, radyanla ölçülen açının yaklaşık olarak kendisine eşittir.

$$\gamma = \frac{BB' \text{ eğrisinin uzunluğu}}{l} \quad (14.23)$$

$$\gamma = \frac{BB' \text{ eğrisinin uzunluğu}}{l}$$



Şekil 14.30 Burulma uygulanan dairesel bir şaft



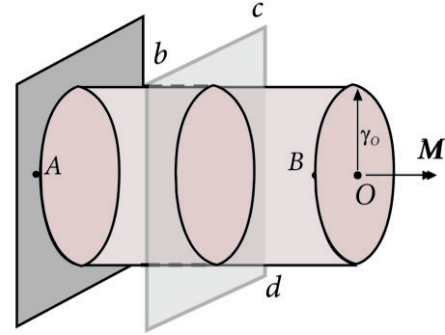
Şekil 14.31 θ , burulma açısı

Şekil 14.32'de gösterildiği gibi, şaft içindeki deformasyon miktarı da şaftın merkez çizgisinden ölçülen radyal mesafe r 'e göre değişir. Bu değişim, deformasyonun merkezde sıfır olması, kenara doğru artması ve dış yüzeyde maksimum seviyeye ulaşması şeklindedir. Şekil 14.32'deki θ açısı, *dönme*

açısı olarak adlandırılır ve şaftın maruz kaldığı burulma hareketinin bir ölçüsüdür. Sorunun geometrisinden,

$$\theta = \frac{BB' \text{ eğrisinin uzunluğu}}{r_o} \quad (14.24)$$

$$\theta = \frac{BB' \text{ eğrisinin uzunluğu}}{r_o}$$



Şekil 14.32 Şaftı orta çizgisine dik olarak ikiye bölen bir düzlem

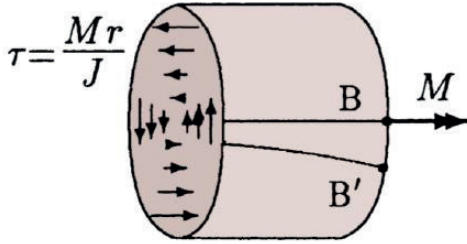
Denklem (14.23) ve (14.24) BB' eğrisinin uzunlukları birbirlerine eşitlenerek birleştirilebilir. Elde edilen eşitlik dönme açısı için çözülürse

$$\theta = \frac{l}{r_o} \gamma \quad (14.25)$$

Şekil 14.32'te gösterilen, şaftı ikiye bölen ve merkez çizgisine dik olan abcd düzlemi ele alınsın. Şaftın tamamı statik dengede olduğu için her bir parçası da statik denge durumunda olmalıdır. Bu durum, şaftın kesit alanı üzerinde dağıtılan iç kesme kuvvetlerinin varlığını gerektirir (Şekil 14.33). Bu iç kuvvetlerin yoğunluğu (birim alan başına kuvvet) τ kesme gerilmesidir. Kesme gerilmesinin büyüklüğü, uygulanan torkun M büyüklüğü, şaftın kesit alanı ve merkez çizgisi ile kesme gerilmesinin

belirleneceği nokta arasındaki radyal r mesafesi ile ilgilidir. Bu ilişki, şaftın sağ veya sol tarafındaki rotasyonel dengenin sağlanmasıyla belirlenebilir. Bu hesaplama sonucunda aşağıda gösterilen *burulma formülü* elde edilir.

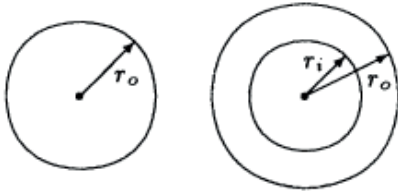
$$T = \frac{Mr}{J} \quad (14.26)$$



Şekil 14.33 Şaftın kesit alanı üzerinde dağılan τ kesme gerilmesi

Denklem (14.26)'da J , şaftın merkez hattı etrafındaki kesit alanının kutupsal atalet momentidir. R_o yarıçaplı içi dolu dairesel şaftın (Şekil 14.34a) merkez çizgisi etrafındaki kutupsal atalet momentini:

$$J = \frac{\pi r_o^4}{2}$$



(a) İçi dolu şaft

$$J = \frac{\pi r_o^4}{2}$$

(b) İçi boş şaft

$$J = \frac{\pi(r_o^4 - r_i^4)}{2}$$

Şekil 14.34 Dairesel kesit alanları için kutupsal atalet momentleri (a) İçi dolu şaft (b) İçi boş şaft

r_o dış yarıçaplı, r_o iç yarıçaplı içi boş dairesel şaftın (Şekil 14.34a) merkez çizgisi etrafındaki kutupsal atalet momentini:

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4)$$

kutupsal atalet momentinin boyutu uzunluğun dördüncü kuvvetidir ve birim SI sisteminde m^4 'dür.

Şaft malzemesi, lineer elastikse veya deformasyonlar orantılılık sınırında ise, bu durumda gerilme ve gerinim doğrusal olarak orantılı olmalıdır. Kesme yükleri uygulanıyorsa, orantılılık sabiti G kesme modülüne eşittir.

$$\tau = G\gamma \quad (14.27)$$

Denklem 14.27, Denklem 14.26'da yerine konulursa sonuç:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Mr}{GJ} \quad (14.28)$$

Şaftın çevresinde Denklem 14.28'deki r değeri r_o 'a eşittir. Denklem 14.28, Denklem 14.25'te yerine konulursa dönme açısının elde edilmesi için faydalı bir ifade ortaya çıkar.

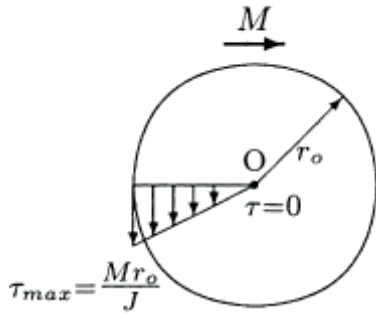
$$\theta = \frac{Ml}{GJ} \quad (14.29)$$

Aşağıda burulma, burulma formülü ve burulma gerilmesi hakkında bazı önemli noktalara değinilmiştir.

- Burulma formülünü türetmek için çeşitli varsayımlar ve idealleştirmeler yapılmıştır.

Örneğin, malzemenin izotropik, homojen ve lineer elastik olduğu varsayılmaktadır.

- Belirli bir şaft ve uygulanan tork için, burulma kesme gerilmesi (τ), şaftın merkezinden ölçülen radyal mesafenin (r), doğrusal bir fonksiyonudur. Kesme gerilmesi, şaftın kesit alanı üzerinde eşit olmayan şekilde dağıtılır. Şaftın merkezinde $r = 0$ ve $\tau = 0$ 'dır. İçi dolu dairesel şaftın gerilmemiş merkez çizgisine nötr eksen denir. Burulma kesme gerilmesinin büyüklüğü, merkezden kenarlara doğru artar ve şaftın çevresinde $r = r_o$ ve $\tau = Mr_o / J$ olduğu zamanın en yüksek seviyesine ulaşır (Şekil 14.35).

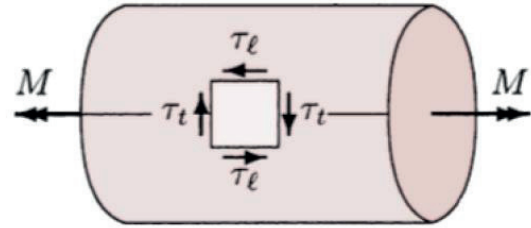


Şekil 14.35 Kesme gerilmesi radyal mesafeyle doğrusal olarak değişir

- İçi dolu dairesel şaftın kutupsal atalet momentinin $J = \pi r_o^4 / 2$ olduğu çevresinde burulma formülü $\tau = 2M / \pi r_o^3$ özel halini alır. Bu denklem yarıçapın artmasıyla, şaftı burulma ile deforme etmenin gittikçe zorlaşacağına işaret eder.
- $\gamma = \tau / G = Mr / GJ$ olduğu için uygulanan torkun büyüklüğü arttıkça kesme gerilmesi ve kesme deformasyonu artacaktır. Şaft

malzemesinin kesme modülünün artması, malzemenin daha rijit olduğuna ve burulma ile deforme etmenin daha zor olduğuna işaret eder.

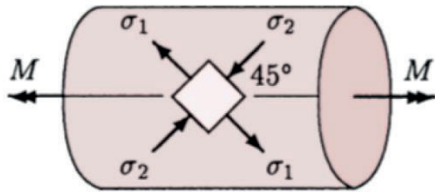
- Burada tartışılan, kesme gerilmesinin transvers düzlemlerde olduğu durumlardır. Burulma yüklemesine maruz kalan bir şaft için, düşey düzlemler boyunca kesme gerilmeleri de geliştirilir. Bu, şaftın iki enine ve iki uzunlamasına düzlemlerle kesilmesiyle elde edilen bir malzeme elemanı üzerinde Şekil 14.36'da gösterilmektedir. Enine ve boyuna gerilmeler, sırasıyla τ_t ve τ_l ile gösterilir ve malzeme elemanının dengesi, τ_t ve τ_l 'nin sayısal olarak eşit olmasını gerektirir.



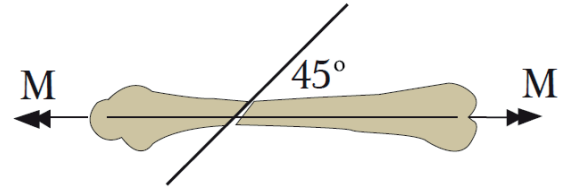
Şekil 14.36 Enine (τ_t) ve boyuna (τ_l) gerilmeler

- Burulmaya maruz kalan bir şaft sadece kesme ile deforme olmaz, aynı zamanda normal gerilmelere de maruz kalır. Bu durum, AB düz çizgisinin Şekil 14.30'da gösterildiği gibi bir AB' sarmalı şeklinde deforme olmasıyla açıklanabilir. Deformasyondan önceki l uzunluğu deformasyondan sonra l' uzunluğa çıkar ve uzunluktaki artış uzama doğrultusu boyunca çekme gerilmelerinin varlığını gösterir.

- Şekil 14.37'deki malzeme elemanı ele alınsın. Bu malzeme elemanının kenarlarının normalleri, shaftın merkez çizgisi ile 45 derecelik bir açı yapar. Böyle bir elemanın kenarları üzerinde oluşan tek gerilmenin normal gerilme olduğu (çekme gerilmesi σ_1 ve basma gerilmesi σ_2) uygun koordinat dönüşümleri ile gösterilebilir. Kesme gerilmelerinin malzeme üzerinde bulunmaması, normal gerilmelerin asal (maksimum ve minimum) gerilmeler olduğunu ve bu gerilmelerin hareket ettiği düzlemlerin ana düzlemler olduğunu gösterir. (Bu kavramlar, aşağıdaki bölümde ele alınmıştır.) Saf burulmaya maruz kalan yapılar için, malzeme hasarı asal düzlemlerin birinin üzerinde oluşur. Bu, bir parça tebeşiri iki parçaya bölünene kadar döndürerek gösterilebilir. Tebeşirin dikkatli incelenmesi, kırığın maksimum çekme yönüne normal bir spiral çizgi boyunca oluştuğunu ortaya çıkaracaktır. Dairesel shaftlar için, spiral çizgiler, nötr eksen (merkez çizgisi) ile 45 derecelik bir açı yapar. Saf burulmaya maruz kalan kemiklerde aynı kırık modeli gözlenmiştir (Şekil 14.38).

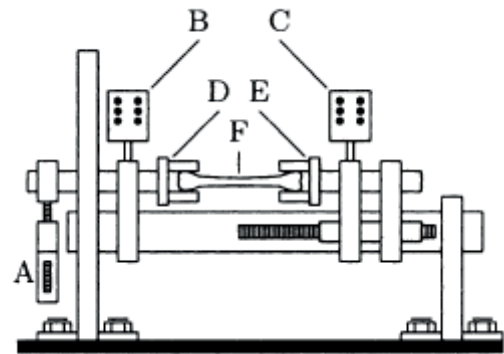


Şekil 14.37 Saf burulma altında temel normal gerilmeler (τ_1 , τ_2) normalleri merkez çizgisiyle 45° açı yapan düzlemlerde oluşur



Şekil 14.38 Saf burulma uygulanan bir kemik için spiral kırılma modeli

Burulma altındaki yapıların davranışlarını analiz etmek için çeşitli deneysel yöntemler vardır. Şekil 14.39'da standart bir burulma test cihazının basitleştirilmiş, şematik bir çizimini gösterilmektedir. Bu cihazın önemli bileşenleri ayarlanabilir bir sarkaç (A), bir açılabilir yer değiştirme dönüştürücü (B), bir tork dönüştürücü (C), bir döner tutucu (D) ve bir sabit tutucudur (E). Bu makine numunelerin, bu örnek için kemiğin (F), burulma özelliklerini belirlemek için kullanılabilir.

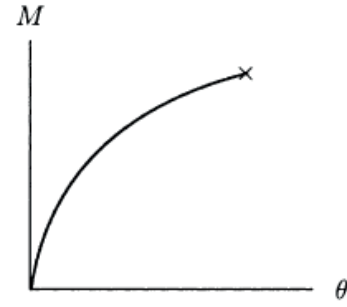


Şekil 14.39 Standart burulma test cihazı

Sarkaç, makinenin döner tutucusuna da bağlı olan, shaftın etrafında bir dönme momenti ile numuneyi açılabilir bir deformasyona zorlar. Örnek üzerinde uygulanan tork büyüklüğü, sarkacın kütlesinin konumunu, dönme

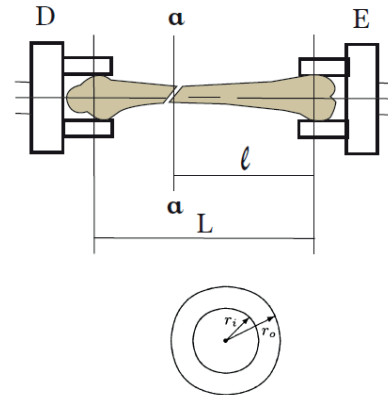
merkezine göre ayarlayarak kontrol edilebilir. Sarkacın dönme merkezine olan kütle ne kadar yakın olursa, merkezden ölçülen moment kolunun uzunluğu o kadar küçük olur ve bu nedenle üretilen tork o kadar küçük olur. Tersine, sarkacın merkezden uzaklığı ne kadar fazla olursa, moment kolunun uzunluğu o kadar büyük olur ve sarkacın ağırlığının sebep olduğu burulma hareketi (tork) o kadar büyük olur. Sarkacın ağırlığı tarafından üretilen tork, döner tutucuya bağlanan bir şaft aracılığıyla iletilir, böylece iki tutucu arasına sıkıca yerleştirilmiş numuneye aynı tork uygulanır. Tork ve açısal yer değiştirme dönüştürücüleri, numuneye uygulanan tork miktarını ve bu değere karşılık gelen açısal deformasyonu ölçer. Kırılma, uygulanan tork yeterince yüksek olduğunda meydana gelir, böylece numunede üretilen gerilmeler, malzemenin en yüksek mukavemetinin üzerindedir.

Burulma test makinesinin transdüserleri tarafından toplanan veriler tork (M) - açısal deformasyon (dönme açısı, θ) grafiğine göre çizilebilir. Şekil 14.40'da tipik bir M - θ grafiği gösterilmektedir. Bu grafik, numunenin malzeme özellikleri hakkında bilgi toplamak için analiz edilebilir.

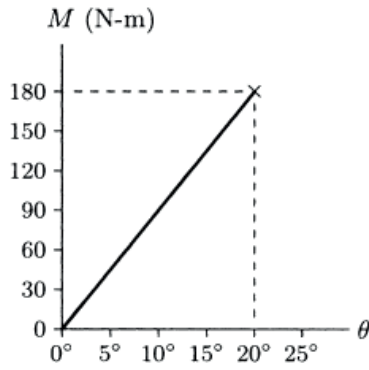


Şekil 14.40 Uygulanan tork – açısal yer değiştirme grafiği

Örnek 14.4 Bir insan femuru, Şekil 14.41'de gösterilen burulma test cihazının tutucularına yerleştirilmiştir. Kemiğin döner (D) ve sabit (E) tutucular arasındaki uzunluğu $L = 37$ cm olarak ölçülmüştür. Femura kırılma kadar burulma yüklemesi uygulanmıştır. Uygulanan torka karşılık gelen açısal yer değiştirme grafiği Şekil 14.42'de gösterilmiştir. Test sonucunda femur, sabit tutucudan $l = 25$ cm uzaklıktaki bir kesitten (Şekil 14.41'de gösterilen aa kesitinden) kırılmıştır. Kırık bölümdeki kemik geometrisinin dairesel iç çapı $r_i = 7$ mm, dış çapı $r_o = 13$ mm olarak gözlemlenmiştir.



Şekil 14.41 Kırılan kemik ve kesit alanının geometrisi



Şekil 14.42 Tork – burulma açısı diyagramı

Verilen bilgiler ışığında, femurun kırılan kesitinde maksimum kesme gerinimi ve kesme gerilmesini hesaplayınız ve femurun elastik kesme modülünü belirleyiniz.

Çözüm

Şekil 14.42’de kırılma gerçekleştiğinde döner tutucuda ölçülen maksimum deformasyon (dönme) açısının $\theta = 20^\circ$ olduğu gösterilmiştir. Kemiğin tutucular arasındaki uzunluğu $L = 37$ cm olduğu için kemik uzunluğunun açısal deformasyonu $(20^\circ)/(37 \text{ cm}) = 0.54^\circ/\text{cm}$ olarak hesaplanmıştır. Kırılma, sabit tutucudan $l = 25$ cm uzaklıktaki aa kesitinden gerçekleştiği için bu kesitte kırılmadan hemen önceki açısal yer değiştirme $\theta_{aa} = (0.54^\circ/\text{cm})(25 \text{ cm}) = 13.5^\circ$ veya $(13.5^\circ)(\pi/180^\circ) = 0.236$ radyan olarak hesaplanır.

Kemiğin aa kesitindeki dış yüzeyinde oluşan γ kesme gerinimi denklem (14.25) ile hesaplanabilir. Bu örnekte $l = 0.25$ m femurun aa kesitiyle kemiği tutan sabit tutucu arasındaki mesafedir. Kırık hattında dış çap $r_o = 0.013$ m ve dönme açısı $\theta_{aa} = 0.236$ radyandır.

$$\gamma = \frac{r_o}{l} \theta_{aa} = \left(\frac{0.013}{0.25} \right) (0.236) = 0.0123 \text{ rad}$$

Denklem 14.26’da tanımlanan burulma formülü uygulanan M torku, radyal r mesafesi, kesit alanının J kutupsal atalet momenti ve τ kesme gerilmesini ilişkilendirmektedir. Kırık bölümdeki kemik geometrisinin dairesel iç çapı $r_i = 7$ mm, dış çapı $r_o = 13$ mm olduğu için kutupsal atalet momenti:

$$J = \frac{\pi(r_o^4 - r_i^4)}{2} = \frac{(3.14)(0.013^4 - 0.007^4)}{2} = 41.1 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Şekil 14.42’de gösterilen kırılma esnasında uygulanan torkun büyüklüğü $M = 180$ Nm’dir. Burulma formülü ile aa kesitindeki maksimum kesme gerilmesi hesaplanır.

$$\tau = \frac{Mr_o}{J} = \frac{(180)(0.013)}{41.1 \times 10^{-9}} = 56.9 \times 10^6 \text{ Pa} = 56.9 \text{ MPa}$$

Deformasyonların elastik olduğu ve kesme gerilmesi ile kesme gerinimi arasındaki ilişkinin lineer olduğu farz edilerek, kemiğin G kayma modülü denklem (14.27)’den belirlenebilir.

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{56.9 \times 10^6}{0.0123} = 4.6 \times 10^9 = 4.6 \text{ GPa}$$

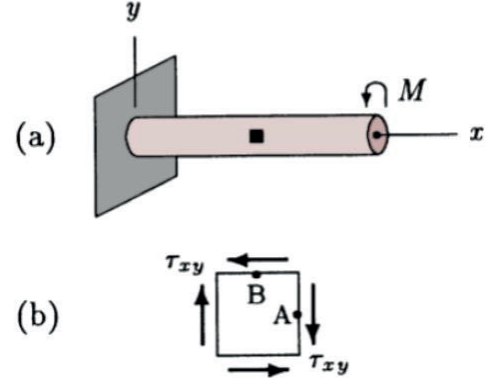
Notlar

- Burulmaya maruz kalan bir örnek için, kırılmadan önceki maksimum kesme gerilmesi, bu örneğin *burulma mukavemeti* olmaktadır. Bu durumda, femurun burulma mukavemeti 56,9 MPa’dır.

- *Burulma sertliği* uygulanan tork ve ortaya çıkan açısall deformasyonun oranıdır. Bu durumda, femurun burulma sertliği $(180\text{Nm}) / (20^\circ \times \pi / 180^\circ) = 515.7 \text{ Nm/rad}$ 'dır.
- *Burulma rijitliği*, numunenin uzunluğu ile burulma sertliğinin çarpılmasıyla elde edilir. Bu durumda, femurun burulma rijitliği $(509.9 \text{ Nm/rad})(0.37 \text{ m}) = 190.8 \text{ Nm}^2/\text{rad}$ 'dır.
- Bir numuneye kırılmadan önce uygulanan maksimum tork miktarı, numunenin *burulma yük kapasitesi* olarak tanımlanır. Bu durumda, femurun burulma yük kapasitesi 180 Nm 'dir.
- Tork - açısall yer değıştirme diyagramının altındaki toplam alan, numunenin *burulma enerjisi depolama kapasitesini* veya *numune tarafından emilen burulma enerjisini* temsil eder. Bu durumda, femurun burulma enerjisi depolama kapasitesi $\frac{1}{2}(180 \text{ Nm}) (20^\circ \times \pi / 180^\circ) = 31,4 \text{ Nm/rad}$ 'dır.
- Burulma kırıkları genellikle enine kesitlerin en küçük olduğu kemik bölgelerinde başlar. İnsan kemiklerinin bazı zayıf bölümleri humerus, femur ve fibulanın üst ve alt üçte ikisidir; radiusun üst üçte biri; ve ulna ve tibianın alt dörtte biridir.

Örnek 14.5 Şekil 14.43a'da gösterilen içi dolu silindir ele alınsın. Silindir, harici olarak uygulanan M torku tarafından saf burulmaya maruz kalmaktadır. Şekil 14.43b'de gösterildiği gibi, silindirin dikey ve transverse düzlemlerine paralel kenarları olan bir malzeme elemanının üzerindeki gerilme durumu saf kesme gerilmesidir. Verilen M

değeri ve silindirin geometrik parametreleri ile denklem (14.26)'da verilen burulma formülü kullanılarak, τ_{xy} burulma kesme gerilmesi hesaplanabilir.

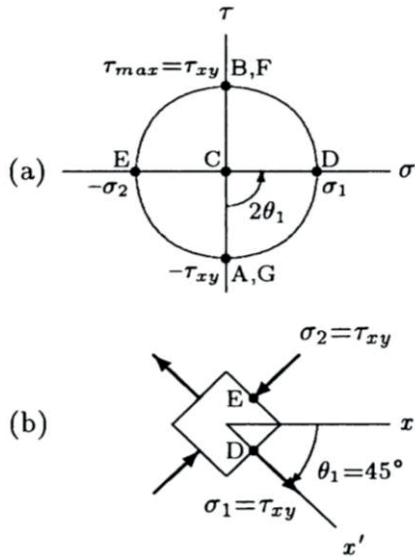


Şekil 14.43 Örnek 14.5

Mohr çemberinden yararlanarak silindirin gerilme durumunu inceleyiniz.

Çözüm

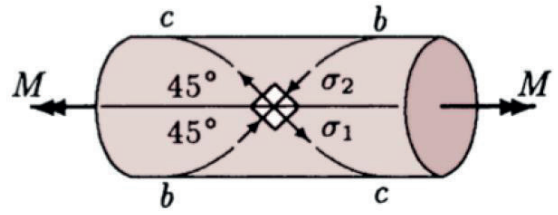
Şekil 14.43b'de verilen gerilme elemanını kullanarak çizilen Mohr çemberi Şekil 14.44a'da gösterilmiştir. Şekil 14.43b'de verilen gerilme elemanının A ve B yüzeylerinde yalnızca τ_{xy} büyüklüğünde negatif bir kesme gerilmesi bulunmaktadır. Bu sebeple, A ve B, τ - σ diyagramında $\sigma = 0$ olan τ eksenini boyunca uzanmaktadır. Ayrıca τ - σ diyagramının merkezi A ve B noktalarının orta noktasında, yani Mohr çemberinin merkezinde yer alır. A ve C noktaları arasındaki mesafe aynı zamanda Mohr çemberinin yarıçapı olan τ_{xy} değerine eşittir. Mohr çemberi yatay eksenini merkezden τ_{xy} uzaklıktaki iki noktadan keser. Bu sebeple asal gerilmeler $\sigma_1 = \tau_{xy}$ (çekme) ve $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ (basma) olacaktır. Dahası τ_{xy} maksimum kesme gerilmesine eşittir.



Şekil 14.44 Şekil 14.43'te verilen malzeme elemanın analizi

τ - σ diyagramında $\sigma = \sigma_1$ olan nokta Şekil 14.44a'da D ile gösterilmiştir. CA ve CD doğruları arasındaki açı 90° 'dir ve bu açı asal yönlerden birinde normal düzlemin yönelme açısının yarısına eşittir. Bu nedenle, maksimum ve minimum normal gerilmelerin düzlemleri, Şekil 14.43b'deki elemanın 45° (saat yönünde) döndürülmesiyle elde edilebilir. Bu, Şekil 14.44b'de gösterilmektedir.

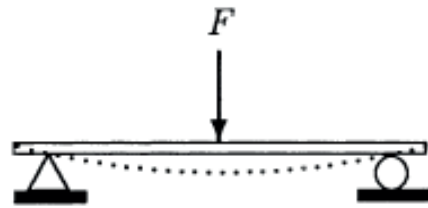
Asal gerilmelerin yönlerini takip eden çizgiler *gerilme yörüngeleri* olarak adlandırılır. Saf burulmaya maruz kalan dairesel bir silindir için Şekil 14.45'te gösterildiği gibi, gerilme yörüngeleri silindirin uzunlamasına eksenine ile 45° (saat yönünde ve saat yönünün tersine) bir açı yapan helezon biçimindedir. Daha önce tartışıldığı gibi, bu gerilme yörüngelerinin önemi, malzemenin gerilme bakımından en zayıf olması durumunda, çekme gerilmelerinin en yüksek olduğu Şekil 14.45'deki gibi bir sarmalda meydana gelmesidir.



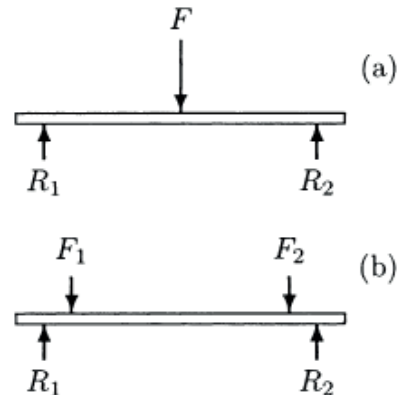
Şekil 14.45 Gerilme yörüngeleri

14.12 Eğme

Şekil 14.46'da gösterilen basitçe desteklenen, düz bir kiriş ele alındığında, aşağıya doğru uygulanan F büyüklüğüne sahip bir kuvvet, kiriş parçalarını kesme, çekme ve basmaya tabi tutarak kirişi eğer. Yapıları eğmeye tabi tutmanın birkaç yolu vardır. Şekil 14.46'daki kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 14.47a'da gösterilmektedir. Kiriş üzerine etki eden üç paralel kuvvet vardır. F uygulanan yük, R_1 ve R_2 tepki kuvvetleridir. Bu kirişin maruz kaldığı eğme tipi *üç-nokta eğme* olarak adlandırılır. Diğer taraftan, Şekil 14.47b'deki kiriş, *dört-nokta eğmeye* tabi tutulmaktadır.



Şekil 14.46 Eğme

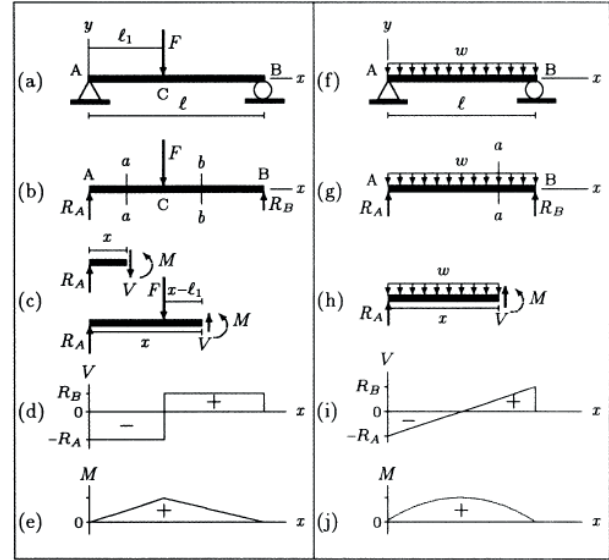


Şekil 14.47 Üç ve dört-nokta eğme

Eğmeye maruz kalan yapıların gerilme analizleri hem dış tepkiler, hem de iç dirençleri belirlemek için kullanılabilir statik analizlerle başlar. xy düzlemindeki iki boyutlu problemler için statikten elde edilen denklemlerin sayısı üçtür. Bu denklemlerin ikisi translasyonel denge koşulları ($\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$), üçüncüsü ise rotasyonel dengedir ($\sum M = 0$). Yapıların harici olarak uygulanan yüklere karşı iç direnci, statik denge durumunda olan bir yapının ayrı parçalarının da dengede olması gerektiği gerçeğine dayanan *bileşenlerine ayırma metodu* uygulanmasıyla belirlenebilir. Bu kavram, iç kuvvetleri ve momentleri hesaplamak için denge denklemlerinden yararlanmayı mümkün kılar, bu da daha sonra gerilmeleri belirlemek için kullanılabilir. Eğmeye maruz kalan bir yapıdaki gerilmeler, bir kesitten diğerine ve belirli bir kesit üzerinde bir noktadan diğerine değişebilir. Tasarım ve hasar analizleri için maksimum normal ve kesme gerilmeleri dikkate alınmalıdır. Bu kritik gerilmeler, yapı boyunca bileşenlerine ayırma yönteminin tekrar tekrar uygulanmasıyla belirlenebilir.

Şekil 14.48a'da gösterilen basit destekli kiriş ele alınmakta ve kirişin ağırlığının ihmal edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Kirişin uzunluğu l 'dir ve kirişin iki ucu A ve B olarak işaretlenmiştir. Kiriş, C noktasında düşey olarak aşağı doğru uygulanan F büyüklüğüne sahip bir yüke maruz bırakılır. A ve C

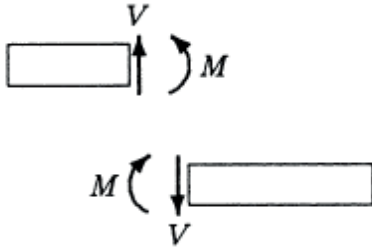
arasındaki mesafe l_1 'dir. Kirişin serbest cisim diyagramı Şekil 14.48b'de gösterilmektedir. Denge denklemleri kullanılarak A ve B noktalarındaki tepki kuvvetleri $R_A = (1 - (l_1/l))F$ ve $R_B = (l_1/l)F$ şeklinde belirlenebilir.



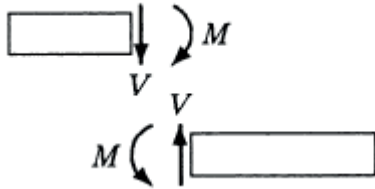
Şekil 14.48 Konsantre ve yayılı yükler uygulanan basit destekli bir kirişin serbest cisim, kesme ve moment diyagramları

İç tepkileri belirlemek için bileşenlerine ayırma metodu uygulanabilir. Şekil 14.48c'de gösterildiği gibi, bu yöntem aa ve bb kesitlerinde uygulanır, çünkü konsantre yükün sol ve sağ taraflarındaki dahili reaksiyonların niteliği farklıdır. Bir hipotetik kesim yapıldıktan sonra kirişin sol ya da sağ bölümü iç tepkiler için analiz edilebilir. Şekil 14.48c'de, kirişin sol bölümlerinin serbest cisim diyagramları gösterilmiştir. Bu bölümlerin her birinin dikey dengesi için, kesimde bir iç kesme

kuvveti olmalıdır. aa kesitindeki bu kuvvetin büyüklüğü, $\Sigma F_y = 0$ denge durumu uygulanarak $V = R_A$ olarak belirlenebilir. Bu kuvvet, dikey olarak aşağı doğru hareket eder ve A ve C arasında sabittir. bb kesitindeki kesme kuvvetinin büyüklüğü, $V = F - R_A = R_B$ 'dir ve F, R_A 'dan büyük olduğu için, dikey olarak yukarı yönlüdür. Bu metinde kesme kuvveti için kabul edilen işaret düzeni Şekil 14.49 ve 14.50'de gösterilmiştir. Sol taraftaki bölümde yukarı doğru iç kuvvet (veya sağ taraftaki bölümde aşağı doğru iç kuvvet) pozitifdir. Aksi takdirde kesme kuvveti negatiftir. Bu nedenle, Şekil 14.48'de gösterildiği gibi, kesme kuvveti A ve C arasında negatif, C ve B arasında pozitifdir.



Şekil 14.49 Pozitif kesme kuvvetleri ve eğme momentleri



Şekil 14.50 Negatif kesme kuvvetleri ve eğme momentleri

Dikey dengeye ek olarak, parçalar dönel denge için de kontrol edilmelidir. Şekil 14.48c'de gösterildiği gibi, aa ve bb kesitlerinde iç direnç momentleri olduğunda bu koşul sağlanır. $\Sigma M =$

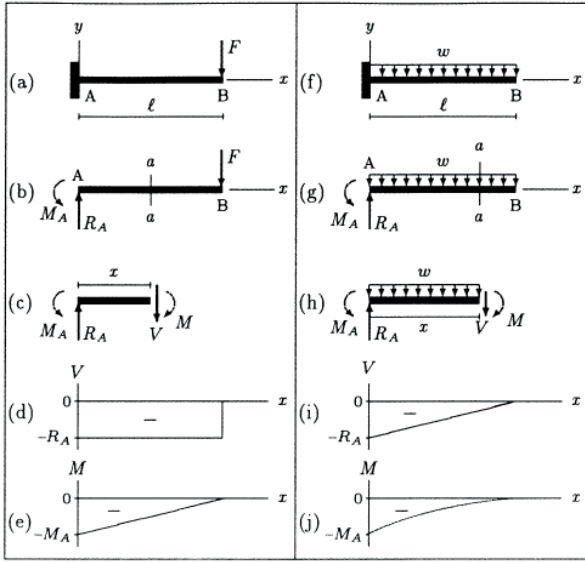
0 denge durumu kullanılarak, aa ve bb kesitleri için saat yönünün tersindeki bu momentlerin büyüklükleri sırasıyla $M = xR_A$ ve $M = xR_A - (x - l_1)F$ olarak belirlenebilir. M değerinin A noktasında ölçülen x aksel mesafesinin bir fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. M ve x'e bağlı bu fonksiyon, A ve C ile B ve C noktaları arasında farklılık göstermektedir. Bu fonksiyonlar Şekil 14.48e'de M - x grafiği olarak gösterilmiştir. Moment, yükün uygulandığı C noktasında maksimumdur. Şekil 14.49 ve 14.50 gösterildiği üzere kabul edilen işaret, bir kesitin sol tarafında saat yönünün tersine bir momentin (ya da sağ tarafında saat yönünde) pozitif olacağı şeklindedir.

Kesme kuvveti ile eğme momenti arasındaki ilişki aşağıdaki denklemle de ifade edilebilir.

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (14.30)$$

Eğer yapının uzunluğu boyunca M momentinin değişimi biliniyorsa, yapının belirli bir kesitindeki kesme gerilmesi de denklem (14.30) kullanılarak hesaplanabilir.

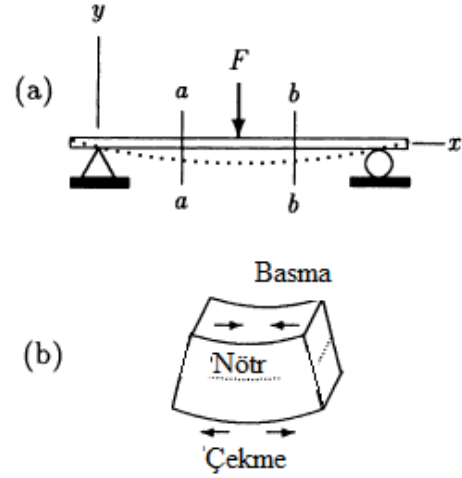
Yukarıda özetlenen prosedür aynı zamanda, Şekil 14.48f-j'de gösterilen, yayılı bir w yüküne (kirişin birim uzunluğuna düşen kuvvet) tabi tutulan basit bir şekilde desteklenen bir kirişin analiz edilmesi için de uygulanır. Konsatire ve yayılı yükler uygulanan ankastre kirişlerde iç kesme kuvvetlerinin ve direnç momentlerinin belirlenmesi için uygulanan prosedür Şekil 14.51'de grafik olarak çizilmiştir.



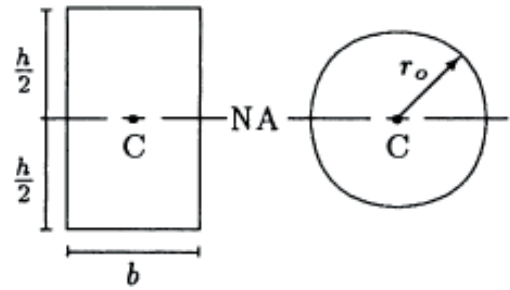
Şekil 14.51 Konsantre ve yayılı yükler uygulanan bir ankastre kirişin serbest cisim, kesme ve moment diyagramları

Bir yapı eğmeye tabi tutulduğunda, yapıda hem normal hem de kesme gerilmeleri oluşur. Örneğin, Şekil 14.52'de gösterilen kiriş ele alındığında, kirişin aşağı yönlü bir kuvvetle eğildiği görülmektedir. Kirişin malzeme katmanlarından oluştuğu varsayılırsa, kirişin üst tabakaları basma kuvvetlerinin etkisi altındayken, kirişin alt kısmındaki tabakalar çekmeye maruz kalır. Sıkışma derecesi veya kısılma miktarı en üst tabakada, uzama miktarı alt tabakada maksimumdur. Kirişin ortasındaki bir yerde, çekmeden basmaya geçişin meydana geldiği bir tabaka vardır. Böyle bir tabaka için çekme veya basma yoktur ve bu nedenle, uzunlamasına yönde deformasyon oluşmaz. Çekme ve basma bölgelerini ayıran gerilmenden serbest bu katman kirişin *nötr düzlemi* olarak adlandırılır. Nötr düzlemin, kirişin uzunlamasına eksenini dik açıda kesen bir

düzlem (enine) ile kesişme çizgisine *nötr eksen* denir. Nötr eksen kütle merkezinin içinden geçer. Simetrik kesitlerin kütle merkezleri geometrik merkezlerinde yer almaktadır (Şekil 14.53).



Şekil 14.52 Eğme esnasında çekme ve basma



Şekil 14.53 Dikdörtgen ve dairesel yapılar için kütle merkezleri (C) ve nötr eksenler (NA)

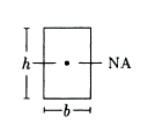
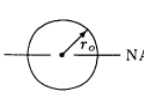
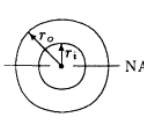
Yukarıdaki tartışma, bir kiriş eğildiğinde uzunlamasına yönde ya da kirişin enine kesiti için normal bir yönde meydana gelen gerilmelere maruz kaldığını göstermektedir. Ayrıca, Şekil 14.52'de gösterilen yükleme koşulları için, bu normal gerilmelerin, kirişin enine kesiti üzerinde dağılımı, nötr eksen üzerinde sıfır, nötr eksenin üzerinde negatif (basma) ve nötr eksenin altında pozitif (çekme)

olacak şekildedir. Saf eğmeye maruz kalan bir kiriş için, kiriş parçasının denge koşulları gözetilerek aşağıdaki denklem çıkarılabilir.

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad (14.31)$$

Bu denklem *eğme formülü* olarak bilinmekte olup, σ_x *eğme gerilmesidir*. Denklem (14.31)'de M eğme momenti, y gerilmenin arandığı nokta ile nötr eksen arasındaki dikey mesafe, I kirişin nötr eksen etrafındaki *alan eylemsizlik momentidir*. Bir dizi basit geometri için eylemsizlik momentleri Tablo 14.1'de listelenmiştir.

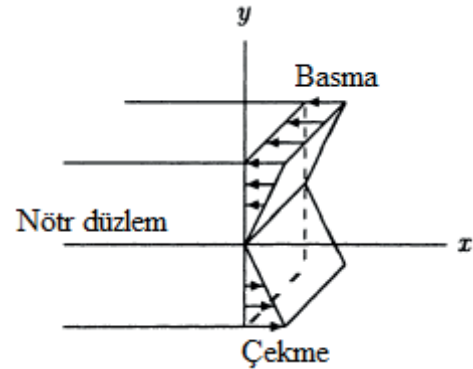
Tablo 14.1 Gösterilen kesit alanlarına sahip kirişler için: alan (A), nötr eksene göre alan eylemsizlik momenti (I), nötr eksen etrafındaki moment (Q), maksimum normal (σ_{max}) ve kesme (τ_{max}) gerilmeleri

	$A = bh$ $I = \frac{bh^3}{12}$	$Q = \frac{bh^2}{8}$ $\sigma_{max} = \frac{Mh}{2I}$ $\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$
	$A = \pi r_o^2$ $I = \frac{\pi r_o^4}{4}$	$Q = \frac{2r_o^3}{3}$ $\sigma_{max} = \frac{Mr_o}{I}$ $\tau_{max} = \frac{4V}{3A}$
	$A = \pi(r_o^2 - r_i^2)$ $I = \frac{\pi(r_o^4 - r_i^4)}{4}$	$Q = \frac{2}{3}(r_o^3 + r_i^3)$ $\sigma_{max} = \frac{Mr_o}{I}$ $\tau_{max} = \frac{4V}{3A} \left(\frac{r_o^2 + r_o \cdot r_i + r_i^2}{r_o^2 + r_i^2} \right)$

Saf eğmeye maruz kalan bir kirişin kesitindeki gerilme dağılımı, Şekil 14.54'te gösterilmektedir. Kirişin belirli bir bölümünde hem eğme momenti hem de enine kesitin alan eylemsizlik momenti sabittir. Eğme formülü ile ilgili olarak, eğme gerilmesi σ_x , hem pozitif hem de negatif değerleri alabilen nötr eksenden ölçülen y dikey

mesafesinin doğrusal bir fonksiyonudur. Nötr ekseninde, $y = 0$ ve σ_x sıfırdır. Nötr eksenin üstündeki noktalar için, y pozitifdir ve σ_x , basmayı gösterecek şekilde negatiftir. Nötr eksenin altındaki noktalar için, y negatiftir ve σ_x çekmeye gösterecek şekilde pozitifdir. Belli bir bölümde, gerilme mutlak maksimum değerine ulaşır, burada y kirişin en üstünde veya altında olacak şekilde maksimumdur. y 'nin maksimum değerini C ile belirterek negatif işareti (tetkik ile bulunabilir) ortadan kaldırmak ve eğme formülünü aşağıdaki gibi yazmak yaygın bir uygulamadır.

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \quad (14.32)$$



Şekil 14.54 Kirişin kesit alanında normal (eğme) gerilme dağılımı

Örneğin genişliği b , yüksekliği h , eğme momenti M olan dikdörtgen kesitli bir kiriş için $c = h/2$ ve maksimum eğme gerilmesinin büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{max} = \frac{Mh}{I} \quad \text{ve} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Eğme formülünün çıkarılmasında bir takım varsayım ve idealleştirmeler yapıldığı unutulmamalıdır. Örneğin, bir kirişin saf

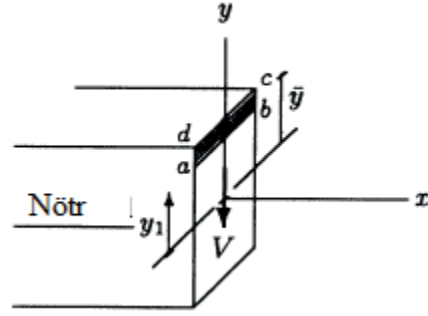
bükülmeye tabi tutulduğu varsayılmaktadır. Yani kesme, burulma veya aksel kuvvetlerin mevcut olmadığı varsayılmaktadır. Kiriş başlangıçta düzgün, simetrik bir kesite sahiptir. Kiriş malzemesi izotropik, homojen ve doğrusal elastiktir. Dolayısıyla, eğme gerilmelerinden kaynaklı gerinimlerin hesaplanmasında Hooke yasası ($\sigma_x = E\varepsilon_x$) kullanılabilir. Dahası, kiriş malzemesinin Poisson oranı, yanal kısalma ve uzamaların hesaplanmasında kullanılabilir.

Eğmeye maruz kalan bir kirişteki iç kesme kuvveti sıfır olmadığında, kirişte bir kesme gerilmesi de gelişir. Bu kesme gerilmesinin kirişin kesit alanındaki dağılımı, kirişin nötr ekseninde en büyük, üst ve alt yüzeylerinde sıfır değerine sahip olacaktır. Eğmede kesme gerilmelerini hesaplamak için aşağıdaki formül oluşturulmuştur.

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} \quad (14.33)$$

Denklem (14.33)'te V , τ_{xy} kesme gerilmesinin arandığı kesitteki kesme kuvvetidir. I nötr eksene göre kesit alanının eylemsizlik momenti, b kesit alanının genişliğidir. Şekil 14.55'te gösterildiği gibi, y_1 nötr eksen ile τ_{xy} 'nin belirleneceği nokta arasındaki dikey mesafe olsun. Bu durumda Q , nötr eksen etrafında abcd alanının ilk momentidir. Abcd alanının ilk momenti $Q = A\bar{y}$ formülüyle hesaplanabilir. Bu formülde A , abcd tarafından sınırlanan alan; \bar{y} , nötr eksenle abcd'nin kütle merkezi arasındaki mesafedir. A ve \bar{y} 'nin nötr

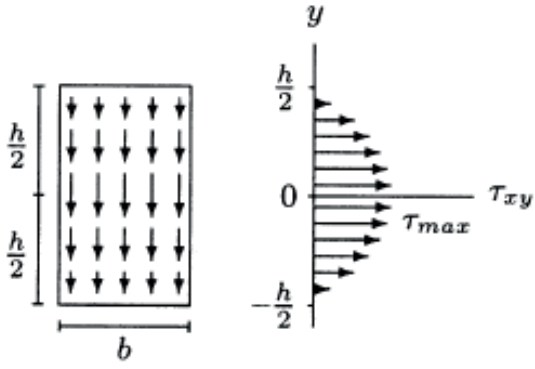
eksende maksimum, A 'nın üst ve alt yüzeylerde sıfır olduğuna dikkat edilmelidir. Bu sebeple Q nötr eksende maksimum değere, alt ve üst yüzeylerde sıfır değerine sahip olur. Farklı kesit alanları için maksimum Q değerleri Tablo 14.1'de sıralanmıştır.



Şekil 14.55 Bağlantılı parametrelerin tanımları

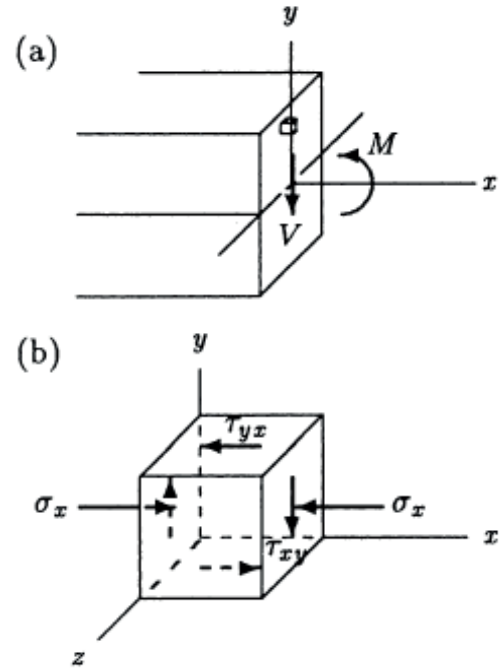
Bir kirişin kesit alanı üzerinde kayma gerilmesi dağılımı Şekil 14.56'da gösterilmektedir. Kayma gerilmesi, nötr eksene paralel çizgiler boyunca sabittir. Kayma gerilmesi, $y_1 = 0$ ve Q 'nun maksimum olduğu nötr eksende maksimumdur. Farklı kesitler için maksimum kayma gerilmeleri, Tablo 14.1'deki I ve Q değerlerinin Denklem 14.19'da yerine konulmasıyla hesaplanabilir. Örneğin dikdörtgen bir kesit alanı için,

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2bh}$$

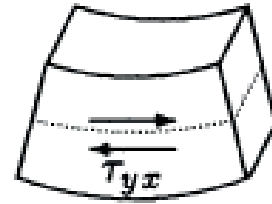


Şekil 14.56 Kirişin bir kesiti üzerinde kesme gerilmesi dağılımı

Şekil 14.57'de gösterildiği gibi kesme kuvvetine ve eğme momentine maruz kalan bir kirişte, bir kübik malzeme elemanı ele alındığında, bu malzeme elemanında M eğme momentinin etkisi normal (eğme) gerilmesi σ_x ile, V kesme kuvvetinin etkisi normali pozitif ve negatif (uzunlamasına) yönlerde olan τ_{xy} ile temsil edilir. Şekil 14.57b'de gösterildiği gibi, bu malzeme elemanının rotasyonel denge için ek olarak küpün üst ve alt yüzeylerinde (pozitif ve negatif y yönlerinde normali olan) kesme gerilmeleri (τ_{xy}) bulunmalıdır. Bu kesme değerleri sayısal olarak birbirlerine eşittir ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$). Kirişin malzeme katmanlarından oluştuğu ve bu tabakaların kiriş eğilmeye maruz kaldığında birbiri üzerinde kayma eğiliminde olduğu varsayılarak τ_{xy} oluşumu anlaşılabilir (Şekil 14.58).

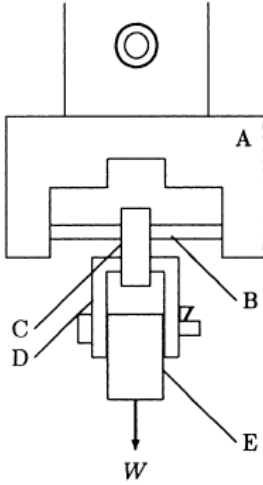


Şekil 14.57 Eğmeye maruz kalan bir malzeme elemanında normal ve kesme gerilmeleri oluşur



Şekil 14.58 Dikey yönde kesme gerilmeleri Eğme kuvvetlerine maruz kalan örneklerin davranışlarını analiz etmek için yapılabilecek çeşitli deneyler vardır. Bu deneylerin bazıları, aşağıdaki örneklerin içeriğinde tanıtılmıştır.

Örnek 14.6 Şekil 14.59'da üç-nokta eğme testi gerçekleştirmek için kullanılan bir aparat gösterilmiştir. Bu aparat numunenin (B) bağlandığı bir sabit kafa (A), iki halka (C ve D) halkalar aracılığıyla W ağırlığının uygulandığı bir kütle (E) oluşmaktadır.

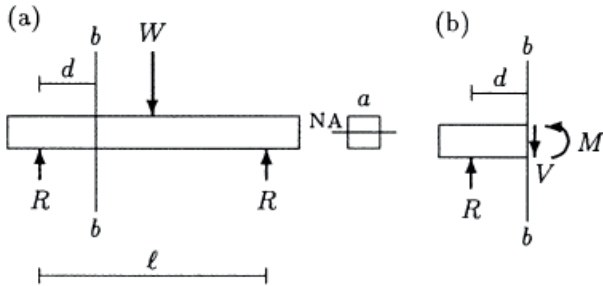


Şekil 14.59 Üç-nokta eğme aparatı

Numunenin ortasına uygulanan $W = 1,000 \text{ N}$ ağırlığı ve $l = 16 \text{ cm}$ destek uzunluğu (sol ve sağ destekler arasındaki mesafe) için, bir numunenin bb kesitindeki maksimum eğme ve kesme gerilmelerini belirleyin. Numune kare bir kesite sahip olup ($a = 1 \text{ cm}$) sol destek ile bb kesiti arasındaki mesafe $d = 4 \text{ cm}$ 'dir (Şekil 14.60a).

Çözüm

Numunenin serbest cisim diyagramı Şekil 14.60a'da gösterilmiştir. Kuvvet (W) numunenin ortasına uygulanır. Numunenin dönme ve translasyonel dengeleri, desteklerde oluşan tepki kuvvetlerinin R büyüklüğünün W 'nin yarısına eşit olmasını gerektirir. Sonuç olarak $R = 500 \text{ N}$ 'dür.



Şekil 14.60 Serbest cisim diyagramları

Numunenin kare bir kesiti vardır ve nötr eksen, numunenin hem üst hem de alt yüzeylerinden $a/2$ dikey uzaklıkta bulunur. Numunenin bb kesitinde oluşan normal (eğme) gerilmeler, bb kesitindeki eğme momenti M 'nin büyüklüğüne ve nötr eksenin etrafındaki bb kesitindeki alan eylemsizlik momentine bağlıdır. bb kesitinde eğme gerilmenin büyüklüğü, numunenin üst (basma) ve alt (gerilme) yüzeylerinde maksimum (σ_{\max}) değerlerini alır.

$$\sigma = \frac{M a}{I} \frac{1}{2}$$

Numunenin bb kesitindeki iç dirençler Şekil 14.60b'de gösterilmiştir. Numunenin rotasyonel denge için,

$$M = dR = (0,04)(500) = 20 \text{ Nm}$$

Kenarları a olan karenin alan eylemsizlik momentini:

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{(0,01)^4}{12} = 8,33 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

M ve I değerlerinin eğme formülünde yerine konulmasıyla,

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{20}{8,33 \times 10^{-4}} \right) \frac{0,01}{2} = 120 \times 10^6 \text{ Pa} = 120 \text{ MPa}$$

Numunenin bb kesitinde meydana gelen kesme gerilmesi, bb kesitindeki V kesme kuvvetinin, Q momentinin ve I alan eylemsizlik momentinin bir fonksiyonudur. Kayma gerilmesi nötr eksen boyunca maksimumdur (τ_{\max}), öyle ki:

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ia}$$

Numunenin dikey yöndeki dengesi için (Şekil 14.60b), bb kesitindeki iç kesme kuvvetinin büyüklüğü (V) tepki kuvvetinin büyüklüğüne (R) eşit olmalıdır; $V = R = 500 \text{ N}$. Numunenin nötr eksen etrafındaki ilk momenti şu şekildedir:

$$Q = \frac{a^3}{8} = \frac{(0,01)^3}{8} = 0,125 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

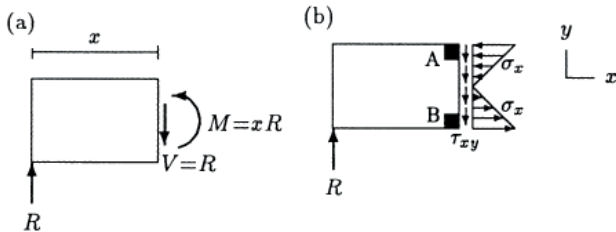
Nötr eksen boyunca bb kesitinde oluşan maksimum kesme gerilmesi:

$$\tau_{\max} = \frac{(500)(0,125 \times 10^{-6})}{(8,33 \times 10^{-10})(0,01)} = 7,5 \times 10^6 \text{ Pa} = 7,5 \text{ MPa}$$

Notlar

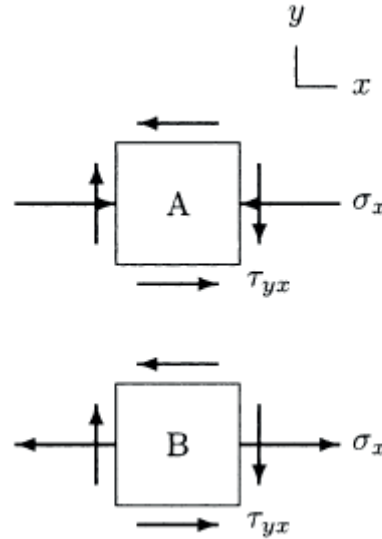
İç kesme kuvvetinin ve eğme momentinin büyüklüklerinin ve yönlerinin, numunenin farklı bölümlerinde farklı olduğu unutulmamalıdır. Belirli bir kesitte, iç kesme kuvveti ve eğme momenti, sol destek (veya sağ destek) ile bölüm arasındaki yatay mesafenin fonksiyonlarıdır. Bu durum, sol destek ile W yükünün numuneye uygulandığı yer arasında yer alan bir kesit için Şekil 14.61a'da gösterilmiştir. Sol destek ile kesit arasındaki mesafe x ise, bölümdeki iç eğme momentinin büyüklüğü şöyledir:

$$M = xR$$



Şekil 14.61 Şekil 14.60a'da gösterilen numunenin bir kesitindeki gerilme dağılımı

Başka bir deyişle M x 'in bir fonksiyonudur. Aynı kesitteki gerilme dağılımı Şekil 14.61b'de gösterilmiştir. Numunenin üst katmanlarında basma (negatif σ_x), alt katmanlarında ise çekme altındadır (pozitif σ_x). Ayrıca, aşağı doğru bir kesme gerilmesi (τ_{xy}) kesit boyunca hareket eder. Aynı zamanda Şekil 14.61b'de gösterilen iki malzeme elemanı, A ve B'dir. Bu malzeme elemanlarının yüzeyleri üzerinde hareket eden sıfır olmayan gerilme tensorü bileşenleri Şekil 14.62'de gösterilmiştir. Numunenin üst katmanlarındaki gerilme durumunun alt tabakalardaki gerilme durumundan farklı olduğu açıktır.



Şekil 14.62 Malzeme elemanı üzerindeki gerilme bileşenleri. Şekil 14.61b'de A ve B.

Örnek 14.7 Şekil 14.63a'da gösterilen kiriş ele alınsın. Uygulanan harici kuvvet ve desteklerdeki tepki kuvvetleri kirişi eğerek (üç-nokta eğme) kesme gerilmelerine maruz

bırakır. Kesmenin yanı sıra kirişin üst katmanları basmaya alt katmanları çekmeye maruz kalır. Şekil 14.63b, F kuvvetinin solunda ve nötr eksenin yukarısında bulunan malzemenin belirli bir kesitindeki (aa kesiti) bir nokta oluşan gerilme durumunu göstermektedir. Şekil 14.63c ise aynı kesitin nötr ekseninin altındaki bir noktanın gerilme durumunu göstermektedir.

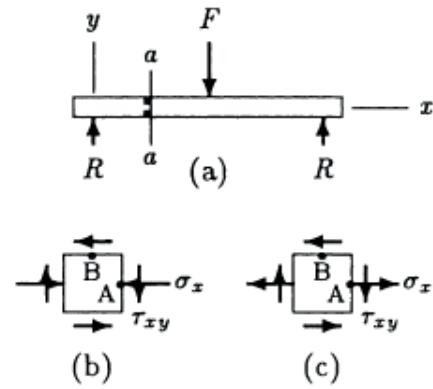
Mohr çemberinden yararlanarak Şekil 14.63b ve c'de gösterilen gerilme durumları için kirişte oluşan asal gerilmeleri ve maksimum kesme gerilmelerini belirleyiniz.

Çözüm

Belirli bir kesitte, harici olarak uygulanan kuvvetin F büyüklüğü, kirişin geometrisini tanımlayan parametreler, σ_x normal (eğme) gerilme ve τ_{xy} kesme gerilmesi dağılımları, Örnek 14.6'da tarif edilene benzer bir şekilde belirlenebilir. Malzeme noktasında gerilme durumu bilindiğinde, Mohr çemberi ilgili gerilmelerin ileri analizinde kullanılabilir.

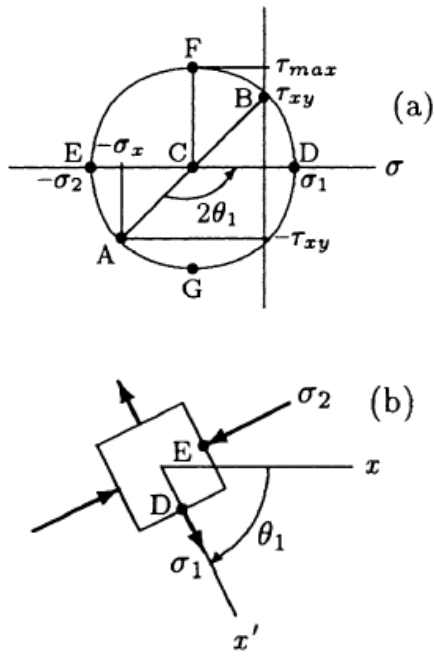
Şekil 14.63b'de gösterilen düzlemsel gerilme elemanı kullanılarak çizilen Mohr çemberi Şekil 14.64a'da gösterilmiştir. Şekil 14.63b'deki gerilme elemanının A yüzeyinin üzerinde σ_x büyüklüğünde negatif bir normal gerilme ve τ_{xy} büyüklüğünde negatif bir kesme gerilmesi bulunmaktadır. Yani Mohr çemberi üzerindeki A noktası $-\sigma_x$ ve $-\tau_{xy}$ koordinatlarına sahiptir. Gerilme elemanının B

yüzeyinde ise τ_{xy} büyüklüğünde pozitif bir kesme gerilmesi mevcuttur. Yani B noktası, $\tau - \sigma$ diyagramında σ ekseninde merkezden τ_{xy} mesafesi yukarıda bulunmaktadır. Mohr çemberinin C merkez noktası A ve B noktalarını birbirlerine bağlayan çizginin σ eksenine ile kesiştiği nokta olarak belirlenebilir. Mohr çemberinin yarıçapı ise dik üçgenlerin özelliklerinden faydalanarak belirlenebilir. Bu durumda $r = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}$ olacaktır.



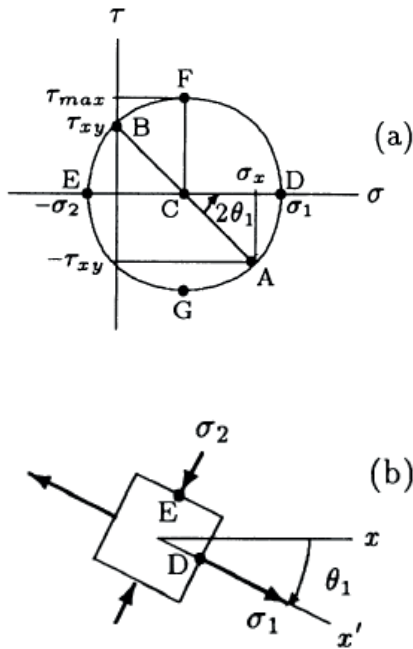
Şekil 14.63 Örnek 14.7

Mohr çemberinin yarıçapı belirlendikten sonra asal gerilmeler ve maksimum kesme gerilmeleri $\sigma_1 = r - \sigma_x/2$ (çekme), $\sigma_2 = r + \sigma_x/2$ (basma) ve $\tau_{\max} = r$ şeklinde hesaplanabilir. Gerilmelerin maksimum ve minimum olduğu düzlemin θ_1 dönme açısının belirlenmesi için CA ve CD doğruları arasındaki açı okunarak (Bu durumda saat yönünün tersinde $2\theta_1$ olmaktadır) ikiye bölünür ve Şekil 14.63b'deki gerilme elemanı saat yönünde θ_1 açısıyla döndürülür. Bu işlem Şekil 14.64b'de gösterilmiştir.



Şekil 14.64 Şekil 14.63b’de gösterilen elemanın analizleri

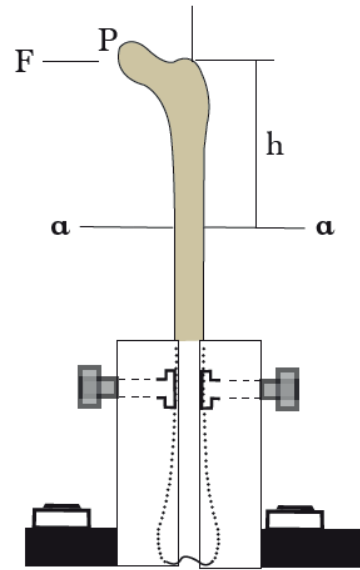
Şekil 14.63c’de gösterilen malzeme elemanın analizleri grafik olarak Şekil 14.65’te gösterilmiştir.



Şekil 14.65 Şekil 14.63c’de gösterilen malzeme elemanın analizleri

Örnek 14.8 Şekil 14.66’ta kemiklerin eğmesinde kullanılabilecek bir tezgah testi gösterilmiştir. Gösterilen koşulda, bir insan femurunun distal ucu tezgaha sıkıca sabitlenmiş, femur başına P noktasından $F = 500 \text{ N}$ büyüklüğünde dikey bir kuvvet uygulamıştır.

P noktasından dikey $h = 16 \text{ cm}$ mesafede yer alan aa kesitinde femurda oluşan maksimum normal ve kesme gerilmeleri belirleyiniz. aa kesitinde femurun geometrisinin dairesel ve iç çap ölçüsünün $r_i = 6 \text{ mm}$, dış çap ölçüsünün $r_o = 6 \text{ mm}$ olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 14.66 Tezgah testi

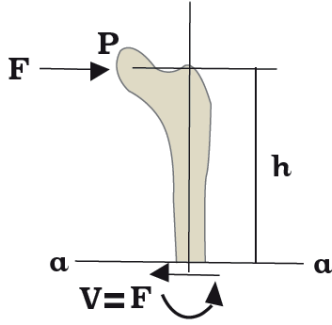
Çözüm

Femur hipotetik olarak aa kesitinden geçen bir düzlem tarafından iki kısma ayrılır ve femurun proksimal kısmının serbest cisim diyagramı Şekil 14.67’de gösterilmiştir. aa kesitinde iç tepkiler, V kesme kuvveti ve M eğme

momentidir. Femurun proksimal bölümünün translasyonel ve dönel dengeleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır.

$$V = F = 500 \text{ N}$$

$$M = hF = (0.16)(500) = 80 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Şekil 14.67 Serbest cisim diyagramı

İçi boş dairesel kesitli bir yapının A kesit alanının, I alan eylemsizlik momentinin ve nötr eksene göre Q ilk kesit alanı momentinin belirlenmesi için kullanılan formüller Tablo 14.1'de verilmiştir. Buna göre,

$$A = \pi(r_o^2 - r_i^2) = 4,18 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4) = 2,14 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$Q = r_o(r_o^2 + r_i^2) = 2,67 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Eğme kuvvetleri uygulanan içi boş dairesel kesitli bir yapı için σ_{\max} maksimum normal gerilmesi ve τ_{\max} maksimum kesme gerilmesinin belirlenmesi için gerekli formüller de Tablo 14.1'de verilmiştir. Buna göre,

$$\sigma_{\max} = \frac{Mr_o}{I} = \frac{(80)(0.013)}{2,14 \times 10^{-8}} = 48,6 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 48,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2V}{A} = \frac{2(500)}{4,18 \times 10^{-4}} = 2,4 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 2,4 \text{ MPa}$$

Uygulanan kuvvetin yönünden dolayı, femurun medial ve lateral kenarlarında eğme gerilmesi en yüksektir. Eğme gerilmesi medial tarafta çekme ve lateral tarafta basma şeklindedir. Kesme gerilmesi, ventral ve dorsal kenarlarda femurun kemik yapısının iç yüzeyi boyunca en yüksektir. Kemiğin yükleme konfigürasyonu, ankastre bir kiriş gibi davranacak şekildedir.

14.13 Birleşik Yükleme

Buraya kadar ele alınan gerilme analizleri aksenal (çekme veya basma), saf kesme, burulma ve eğme yüklerini bunlardan sadece birinin bir yapıya uygulandığı varsayımını temel almaktadır. Temel yükleme tiplerinden kaynaklı oluşan gerilmeler aşağıda verilen formüller kullanılarak hesaplanabilir.

$$\text{Eksenel Yükleme: } \sigma_a = \frac{F_a}{A_a}$$

$$\text{Saf Kesme Yükleme: } \tau_s = \frac{F_s}{A_s}$$

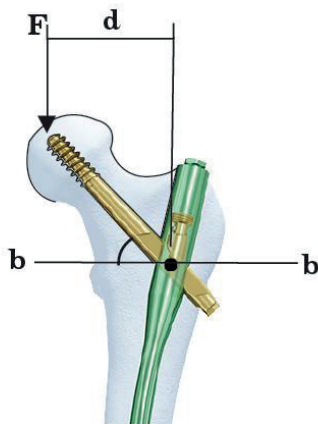
$$\text{Burulma Yükleme: } \tau_t = \frac{M_t r}{J}$$

$$\text{Eğme Yükleme: } \sigma_b = \frac{M_b y}{I}$$

Burada σ_a , bir A_a alanına uygulanan F_a kuvvetinden dolayı oluşan normal gerilme, τ_s bir A_s alanına merkez çizgisinden r uzaklığında bir noktadan uygulanan M_t burulma torkundan dolayı oluşan kesme gerilmesi, J kutupsal atalet momentini ve σ_b I alan eylemsizlik momentine sahip bir yapının nötr eksenine y uzaklıktaki bir noktadan uygulan M_b eğme momentinden dolayı oluşan normal gerilmedir.

Bir yapı bu yüklerin birden fazlasına eş zamanlı olarak maruz kalabilir. Bu tür kombine yükleme konfigürasyonlarının genel etkilerini analiz etmek için, öncelikle her bir yüke bağlı olarak yapının belirli bir kesitinde üretilen gerilmeler ayrı ayrı belirlenir. Daha sonra, normal gerilmeler bir araya getirilir (eklenir veya çıkarılır) ve kesme gerilmeleri bir araya getirilir. Aşağıdaki örnek, birleşik gerilmelerin nasıl ele alınabileceğini göstermeyi amaçlamaktadır.

Örnek 14.9 Şekil 14.68 bir intertrokanterik çivi için test tezgahı gösterilmiştir. Çivi tezgaha sıkıca sabitlenmiş ve $F = 1000$ N büyüklüğünde bir kuvvet aşağı doğru uygulanmıştır.

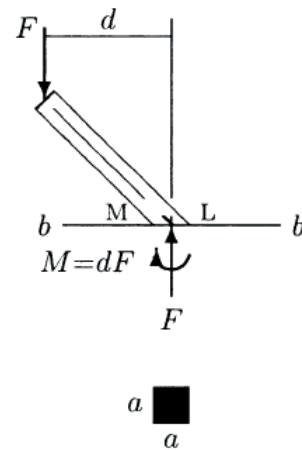


Şekil 14.68 Test tezgahı

Yük uygulama noktasından $d = 6$ cm dikey uzaklıktaki bb kesitinde oluşan gerilmeleri belirleyiniz. bb kesitinde çivinin geometrisi kenar uzunluğu $a = 15$ mm olan bir karedir.

Çözüm

Çivi bb kesitinden geçen bir düzlemle hipotetik olarak ikiye bölünmüş, proksimal kısmının serbest cisim diyagramı Şekil 14.69'da gösterilmiştir.



Şekil 14.69 Serbest cisim diyagramı

Dikey yönde translasyonel dengenin sağlanabilmesi için bb kesitinde, çiviye uygulanan $F = 1000$ N harici kuvvetinin büyüklüğüne eşit büyüklükte bir basma kuvvetinin var olması gerekmektedir. Dönme denge koşulu bb kesitinde saat yönünde bir iç eğme momentini gerekmektedir. Bu momentin sayısal değeri aşağıda hesaplanmıştır.

$$M = dF = (0,06)(1000) = 60 \text{ Nm}$$

bb kesitindeki basma kuvveti bir σ_a aksenal gerilmesine sebep olacaktır. Çivi bu kesitte kare bir geometriye sahiptir ve kesit alanı:

$$A = a^2 = (0,015)^2 = 2,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Dolayısıyla bb kesitinde basma kuvvetinden kaynaklı oluşan eksenli gerilme:

$$\sigma_a = \frac{F}{A} = \frac{(1000)^2}{2,25 \times 10^{-4}} = 4,4 \times 10^{-9} \text{m}^4$$

bb kesitinde çivinin I alan eylemsizlik momenti:

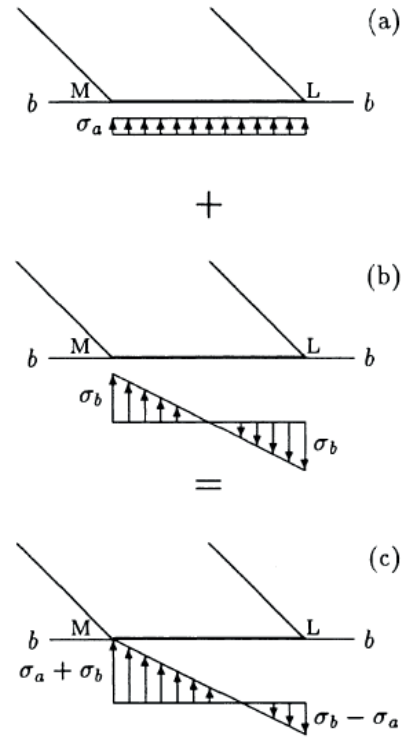
$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{(0,015)^4}{12} = 4,2 \times 10^{-9} \text{m}^4$$

bb kesitindeki M eğme momenti bir σ_b eğme gerilmesine sebep olacaktır. Eğme gerilmesi Şekil 14.69'da M ve L ile gösterilen çivinin medial ve lateral kenarlarında maksimumdur. Maksimum eğme gerilmesi:

$$\sigma_b = \frac{Ma}{2I} = \frac{(60)(0,015)}{2(4,2 \times 10^{-9})} = 107,1 \times 10^6 \text{Pa} = 107,1 \text{MPa}$$

σ_b eğme gerilmesi bb kesiti boyunca doğrusal olarak değişir. Çivinin medial yarısında basma yönünde, orta sıfır değerinde, lateral yarısında çekme yönündedir. F basma kuvveti ve M eğme moneti sebebiyle bb kesitinde oluşan σ_a ve σ_b normal gerilmelerinin dağılımları Şekil 14.70a ve b'de sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 14.70c'de bb kesitinde oluşan bileşke gerilme çivinin medial (M) tarafında maksimumdur. Bu maksimum gerilme basma şeklindedir ve büyüklüğü:

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_{b\max} = 111,5 \text{MPa}$$



Şekil 14.70 Birleşik gerilmeler

$\sigma_{b\max}$ (çekme) değeri σ_a (basma) değerinden büyük olduğu için bb kesitinin lateral ucunda oluşan σ_L bileşke kuvveti çekme yönündedir ve büyüklüğü:

$$\sigma_L = \sigma_{b\max} - \sigma_a = 102,7 \text{MPa}$$

Bölüm 14.14 Örnek Problemler

Cevaplar bölümün sonunda verilmiştir.

Problem 14.1 Aşağıda verilen tanımları uygun ifadelerle tamamlayınız.

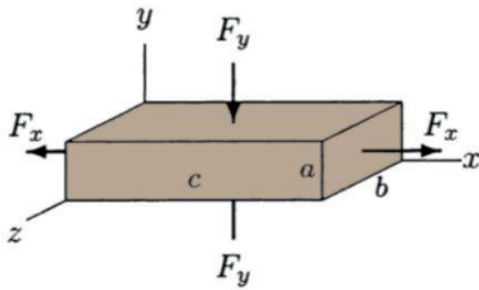
- (a) Belirli bir malzeme ve orantılılık sınırı içerisindeki gerilme değerleri için eksenel ve yanal yönlerde oluşan deformasyonun oranı sabittir ve _____ olarak adlandırılır.

- (b) Kuvvet vektörel bir nicelik iken gerilme ve gerinim _____.
- (c) Bir malzeme noktası üzerindeki maksimum ve minimum normal gerilmeler _____ olarak adlandırılır.
- (d) Maksimum ve minimum normal gerilmeler ile normalleri eşdoğrultulu olan düzlemlere _____ denir.
- (e) _____ normal gerilmelerin eşit olduğu bir malzeme elemanı üzerinde gerçekleşir.
- (f) _____ bir malzeme noktasındaki gerilme durumunun incelenmesinde etkili bir grafiksel yöntemdir.
- (g) Bir malzemenin kopması veya aşırı kalıcı deformasyona maruz kalması _____ olarak adlandırılmaktadır.
- (h) Tekrarlı yüklerin uygulanması sebebiyle oluşan kırığa _____ denir.
- (i) Yorulma eğrisinin sabitlendiği gerilme değerine malzemenin _____ denir.
- (j) _____ kırılma dikkate değer bir plastik deformasyon göstermeden ani bir şekilde oluşur.
- (k) _____ kırılma kayda değer elastik ve plastik deformasyonun eşlik ettiği hasar ile karakterize edilir.
- (l) Deliklerin, çatlakların, köşelerin, çiziklerin ve çentiklerin varlığı _____ sebep olarak beklenmedik yapısal hasarlara neden olabilir.
- (m) Dairesel bir silindirik shaft için _____ formülü; kesme gerilmeleri, uygulanan tork, kutupsal atalet momenti ve shaftın merkez çizgisinden olan radyal mesafeye bağlıdır.
- (n) Saf burulma uygulanan dairesel bir shaftın merkezinde kesme gerilmesi sıfırdır. Gerilmenin olmadığı bu eksene _____ denir.
- (o) Saf burulma uygulanan yapılar için malzeme hasarı merkez çizgisiyle _____ derece açı yapan asal eksenlerin bir boyunca oluşur.
- (p) Eğmeye maruz kalan yapıların gerilme analizleri, dış ve iç tepkilerin belirlenebildiği _____ analizler ile başlar.
- (q) Harici kuvvetlerin uygulandığı yapıların iç dirençleri _____ uygulanarak belirlenebilir.
- (r) _____ formülü, eğmeye maruz kalan yapılar için normal gerilmeleri eğme momenti ve geometrik parametrelerle ilişkilendirir.

Problem 14.2 Merkezal (deforme olmamış) boyutları $a = b = 2$ cm ve $c = 20$ cm olan dikdörtgen kesitli bir kiriş Şekil 14.71'de gösterilmiştir. Kiriş malzemesinin elastik modülü $E = 100$ GPa, Poisson oranı $\nu = 0,30$ 'dur. Kirişe a ve b yönlerinde iki eksenli kuvvetler uygulanmaktadır. Bu kuvvetlerden F_x çekme, F_y basma olup $F_x = 4 \times 10^6$ N'dur.

Kiriş malzemesinin lineer elastik olduğunu varsayarak aşağıda istenilen verileri belirleyiniz.

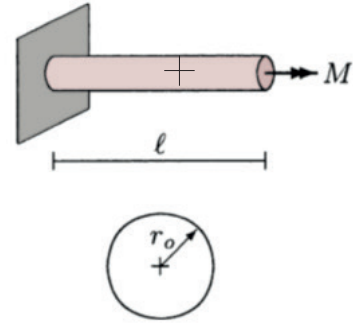
- Kirişte oluşan ortalama normal gerilmeleri ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)
- Ortalama normal gerinimleri ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$)
- Deformasyon sonrası x yönündeki c' boyutu



Şekil 14.71 Problem 14.2 (kiriş ölçekli çizilmemiştir)

Problem 14.3 $l = 10$ cm uzunluğunda, $r_o = 2$ cm yarıçaplı, kesme modülü $G = 10$ GPa olan lineer elastik bir malzemeden yapılmış içi dolu bir silindir Şekil 14.72'de gösterilmiştir. $M = 3000$ Nm büyüklüğünde bir burulma torku uygulanan silindir

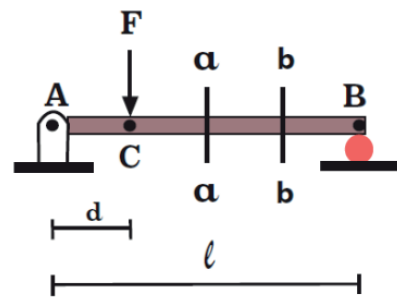
- Kesit alanının J kutupsal atalet momentini
- Maksimum dönme açısını
- Enine düzlemde τ maksimum kesme gerilmesini
- Enine düzlemde γ maksimum kesme gerinimini hesaplayınız.



Şekil 14.72 Problem 14.3

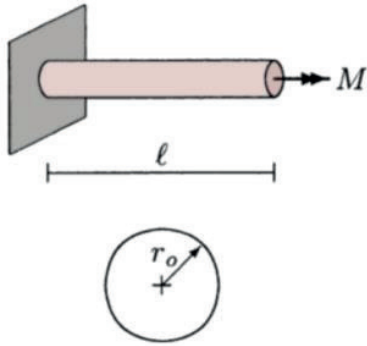
Problem 14.4 Şekil 14.73'te gösterilen $d = 5$ mm çapında dairesel bir delik içeren plâğı düşünün. Plak, $F = 700$ N'luk gerilme yüküne maruz kalır. Plâğın genişliği $a = 13$ mm'dir ve kalınlığı $b = 3$ mm'dir. Delik varlığına bağlı stres konsantrasyon faktörü $k = 2,25$ ise, aşağıdakileri belirleyin:

- Delikten uzakta, cc bölümündeki gerilmeyi, σ ,
- Delik merkezinden geçen, ee bölümündeki gerilmeyi, σ_h ,
- Ee bölümünde oluşan maksimum gerilme, σ_{max}



Şekil 14.73 Problem 14.4

Problem 14.5 Şekil 14.74'te homojen yatay bir kiriş ve kesit alanı gösterilmiştir. Bu kirişin boyu $l = 4$ m, eni $b = 10$ cm, yüksekliği $h = 20$ cm'dir. Kiriş A noktasında yere menteşeli, B noktasında dairesel desteklidir. Kiriş A noktasına $d = 1$ m uzaklıktaki C noktasından $F = 400$ N büyüklüğünde dikey bir kuvvet uygulanmaktadır.



Şekil 14.74 Problem 14.5

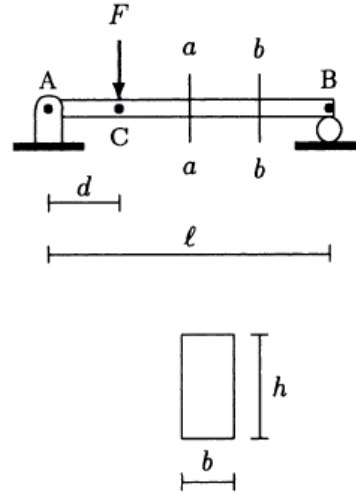
Kirişin ağırlığının ihmal edilebilir olduğunu varsayarak aşağıdaki hesaplamaları gerçekleştiriniz.

- A ve B noktalarında kirişin üzerindeki tepki kuvvetleri
- A noktasından 2 m uzaklıktaki aa kesitinde V_{aa} iç kesme kuvveti ve M_{aa} eğme momenti
- A noktasından 3 m uzaklıktaki bb kesitinde V_{bb} iç kesme kuvveti ve M_{bb} eğme momenti
- Kirişin kesit alanının ilk Q momentini
- aa kesitinde kirişte oluşan τ_{aa} maksimum kesme gerilmesi

Problem 14.6

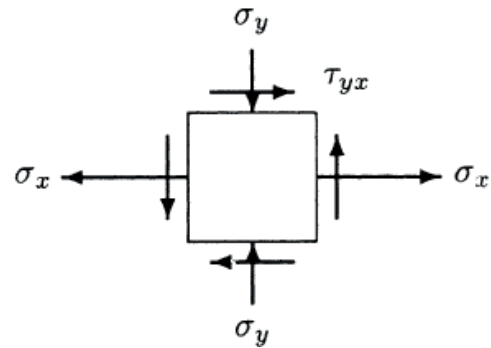
Şekil 14.75'te bir malzeme noktasının gerilme durumunu temsil eden bir düzlemsel gerilme

elemanı gösterilmiştir. $\sigma_x = 200$ Pa, $\sigma_y = 100$ Pa ve $\tau_{xy} = 50$ Pa gerilme büyüklükleri için bu malzeme noktasında oluşan σ_1 ve σ_2 asal gerilmeleriyle τ_{max} maksimum kesme gerilmesini hesaplayınız.



Şekil 14.75 Problem 14.6

Problem 4.7 Şekil 14.76'da gösterilen, malzeme noktasındaki gerilme durumunu temsil eden düzlem gerilme elemanını düşünün. Gerilmelerin büyüklükleri $\sigma_x = 200$ Pa, $\sigma_y = 100$ Pa ve $\tau_{xy} = 50$ Pa olacak şekilde ise, bu malzeme noktasında üretilen ana gerilmelerin σ_1 ve σ_2 ve maksimum kayma gerilmelerinin τ_{max} değerlerini hesaplayınız.



Şekil 14.76 Problem 14.7

Problem 14.8 Tezgah testi sırasında, femur kafasında P noktasında uygulanan yatay kuvvet F ile eğme kuvvetine maruz kalan insan femurunu düşünülürken (Şekil 14.66), aa bölgesinde oluşturulan eğme momenti $M = 91$ Nm, kemiğin P noktasından ölçülen dikey mesafe $h = 17,5$ cm uzaklıktadır. aa bölümündeki kemiğin dairesel geometrisini varsayarak, iç yarıçapı $r_i = 5,5$ mm ve dış yarıçapı $r_o = 12,5$ mm olacak şekilde, aşağıdakileri belirleyiniz;

- (a) aa bölgesinde, kesme kuvvetinin büyüklüğünü, V,
- (b) aa bölgesinde, maksimum normal gerilme, σ_{max}
- (c) aa bölgesinde, maksimum kesme gerilme, τ_{max}

CEVAPLAR

Problem 14.1'in cevapları

(a) Poisson oranı	(j) Gevrek
(b) İkinci dereceden tensor	(k) Sünek
(c) asal gerilmeler	(l) Gerilme konsantrasyonu etkileri
(d) asal düzlemler	(m) Burulma
(e) maksimum kesme gerilmesi	(n) Nötr eksen
(a) Mohr çemberi	(o) 45
(b) Hasar	(p) Statik
(c) Yorulma	(q) Bileşenlerine ayırma yöntemi
(d) Dayanıklılık limiti	(r) Eğme

Problem 14.2'in cevapları

- (a) $\sigma_x = 10$ GPa, $\sigma_y = 1$ GPa, $\sigma_z = 0$
- (b) $\epsilon_x = 0,1030$, $\epsilon_y = -0,0400$, $\epsilon_z = -0,0027$
- (c) $c' = 22,06$ cm

Problem 14.3'in cevapları

- (a) $\theta = 6,84^\circ$
- (b) $\tau = 0,23876$ GPa
- (c) $\gamma = 0,02388$

Problem 14.4'ün cevapları

- (a) $\sigma = 17,9$ MPa, (b) $\sigma_h = 29,2$ MPa, (c) $\sigma_{max} = 65,7$ MPa

Problem 14.5'in cevapları

- (a) $R_A = 300$ N (\uparrow) ve $R_B = 100$ N (\uparrow)
- (b) $V_{aa} = 100$ N ve $M_{aa} = 200$ Nm
- (c) $V_{bb} = 100$ N ve $M_{bb} = 400$ Nm
- (d) $Q = 0,0005$ m³
- (e) $\tau_{aa} = 7500$ Pa

Problem 14.6'in cevapları

- $\sigma_1 = 208$ Pa (çekme), $\sigma_2 = 108$ Pa (basma) ve $\tau_{max} = 158$ Pa

Problem 14.7'nin cevapları

- $\sigma_1 = 208$ Pa (çekme), $\sigma_2 = 108$ Pa (basma), $\tau_{max} = 158$ Pa

Problem 14.8'in cevapları

- (a) $V = 520$ N, (b) $\sigma_{max} = 61,8$ MPa, (c) $\tau_{max} = 3,6$ MPa

Bölüm 15

BİYOLOJİK DOKULARIN MEKANİK ÖZELLİKLERİ

Çeviren: Pelin Coşkun

15.1 Viskoelastisite

15.2 Yaylara ve Damperlere Dayalı Analogiler

15.3 Viskoelastisitenin Deneysel Modelleri

15.3.1 Kelvin-Voight Modeli

15.3.2 Maxwell Modeli

15.3.3 Standart Katı Modeli

15.4 Zamana Bağlı Malzeme Cevabı

15.5 Elastikiyet ve Viskozite Karşılaştırması

15.6 Biyolojik Dokuların Ortak Özellikleri

15.7 Kemiğin Biyomekaniği

15.7.1 Kemiğin Yapısı

15.7.2 Kemiğin Mekanik Özellikleri

15.7.3 Kemiğin Yapısal Bütünlüğü

15.7.4 Kemik Kırıkları

15.8 Tendonlar ve Ligamentler

15.9 İskelet Kası

15.10 Artiküler Kartilaj

15.11 Tartışma

15.12 Örnek Problemler

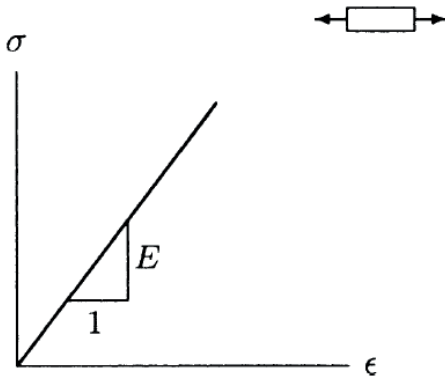
15.1 Viskoelastisite

Önceki bölümlerde ele alınan malzeme cevabı, elastik malzemelerin özellikle doğrusal elastik olan malzemelere tepkisi ile sınırlıydı. Örneğin, çoğu metal oda sıcaklığında nispeten düşük gerilmelere maruz kaldığında doğrusal elastik davranış sergiler, yüksek gerilme seviyelerinde ise plastik deformasyona uğrar. Elastik bir malzeme için gerilme ve gerinim arasındaki ilişki aşağıdaki genel formül ile açıklanır;

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (15.1)$$

Denklem (15.1), normal gerilmenin σ , sadece normal gerinimin ϵ fonksiyonu olduğunu belirtir. Kayma gerilmesi τ ve kayma gerinimi γ arasındaki ilişki aynı şekilde ifade edilebilir. Doğrusal elastik bir malzeme için gerilme gerinim ile doğru orantılıdır ve normal gerilme, gerinim durumunda orantılılık sabiti malzemenin elastisite modülü olan E 'dir (Şekil 15.1).

$$\sigma = E\epsilon \quad (15.2)$$



Şekil 15.1 Doğrusal elastik malzemenin davranışı

Elastik malzemenin tepkisini araştırırken zaman kavramı tartışmaya katılmaz. Elastik malzeme zamandan bağımsız malzeme davranışı sergiler. Elastik malzemeler dışardan uygulanan yüklere maruz kaldıklarında ani olarak deformasyona uğrarlar. Uygulanan yük kaldırıldığında neredeyse hemen merkezal şekline dönerler.

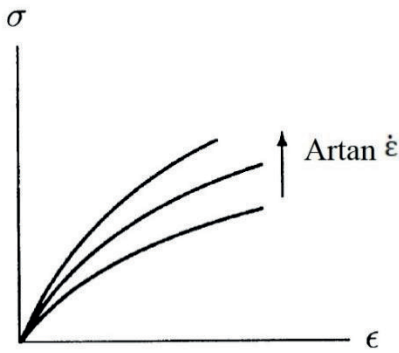
Polimer plastikler, neredeyse tüm biyolojik malzemeler ve yüksek sıcaklıktaki metaller gibi yüklenme ve yükün kaldırılma işlemlerine maruz kaldıklarında kademeli deformasyon ve geri dönme gösteren farklı bir malzeme grubudur. Bu tür malzemelerin tepkileri yükün ne kadar hızlı uygulandığına ya da kaldırıldığına, deformasyonun derecesi de deformasyona neden olan yüklerin uygulanma oranına bağlıdır. Bu zamana bağlı malzeme davranışına *viskoelastisite* denir. Viskoelastisite iki kelimedenden oluşur: viskozite ve elastikiyet. *Viskozite*, bir sıvı özelliğidir ve akışa olan direncin bir ölçüsüdür. Buna karşın, *elastisite* katı malzeme özelliğidir. Bu nedenle viskoelastik bir malzeme hem sıvı hem de katı özelliklere sahiptir.

Viskoelastik malzemeler için gerilme ve gerinim arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad (15.3)$$

Denklem (15.3), gerilmenin, σ , sadece gerinimin, ϵ , değil aynı zamanda gerinim

oranının da, $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ ($t = \text{zaman}$) bir fonksiyonu olduğunu belirtir. Denklemin daha genel bir formu gerininin daha yüksek zamanlı türevlerini dâhil ederek elde edilebilir. Denklem (15.3), bir viskoelastik malzemenin gerilme-gerinim grafiğinin kendine özgü olmadığını, ancak malzemede oluşan gerininin oluşma hızına bağlı olduğunu gösterir (Şekil 15.2).



Şekil 15.2 Gerinim oranına ($\dot{\epsilon}$) bağlı viskoelastik davranış

15.2 Yaylara ve Damperlere Dayalı Analogiler

Bölüm 13.8'de doğrusal elastik malzeme ile doğrusal yaylar arasındaki analogi, Hooke kanunundan bahsederken yapılmıştı. Elastik bir malzeme deforme olur, potansiyel enerjiyi saklar ve deformasyondan yaya benzer şekilde geri döner. Doğrusal elastik bir malzeme için elastisite modülü E , gerilme ve gerinim ile ilintili iken, bir yaya uygulanan kuvvetler ve buna bağlı deformasyonlar, k sabiti ile bağlantılıdır (Şekil 15.3). Hem E hem de k rijitlik ölçütleridir. Elastik malzemeler ile

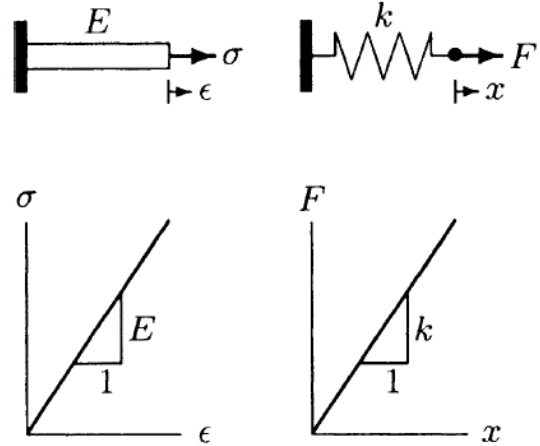
yaylar arasındaki bu benzerlikler, yayların elastik malzeme davranışını temsil etmek için kullanılabilir. Bu benzerlikler ilk Robert Hooke tarafından dikkate alındığı için elastik malzemeler *Hooke katıları* olarak da bilinir.

Dışardan yük uygulandığında sıvılarda da deformasyon görülür. Sıvılarda devamlı olarak deformasyon görülür ya da *akırlar*. Sıvılar için gerilmeler gerinimlere bağlı değildir, gerinim oranına bağlıdır. Eğer bir sıvıda gerilmeyle gerinim oranı doğrusal orantılıysa bu sıvıya *doğrusal viskoz akışkan* ya da *Newton akışkanı* denir. Doğrusal viskoz akışkanların örnekleri su ve kan plazmasıdır. Doğrusal viskoz bir akışkan için;

$$\sigma = \eta(\dot{\epsilon}) \quad (15.4)$$

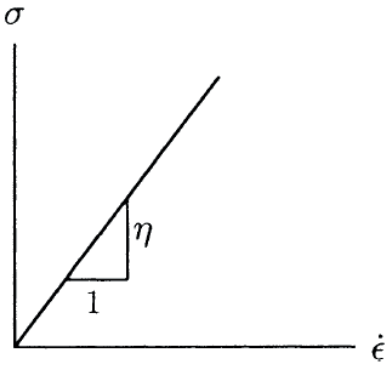
$$\sigma = E\epsilon$$

$$F = kx$$



Şekil 15.3 Elastik katı ile doğrusal yay arasındaki analogi

Denklem (15.4)'te η (eta), gerilme, σ , ve gerinim oranı, $\dot{\epsilon}$, arasındaki orantılılık sabitidir ve bir akışkanın *viskozite katsayısı* olarak tanımlanır. Şekil 15.4'te gösterildiği gibi bir Newton akışkanının $\sigma - \dot{\epsilon}$ grafiğinin eğimi viskozite katsayısıdır. Bu katsayının fiziksel önemi, katı cisimlerin temas yüzeyleri arasındaki sürtünme katsayısı ile benzerdir. Viskozite katsayısı ne kadar yüksekse, sıvıyı "yoğun" halededir ve deformasyonu o kadar zor olur. Su için viskozite katsayısı oda sıcaklığında yaklaşık 1 santipuzaz, kan plazması için yaklaşık 1,2 santipuzazdır.

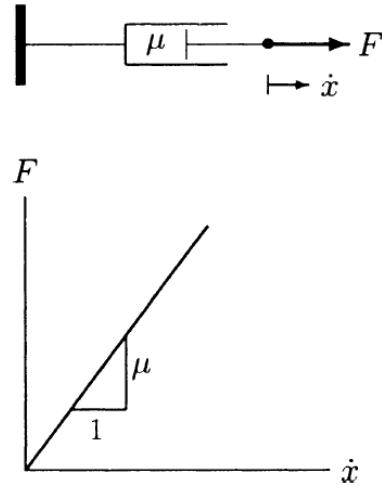


Şekil 15.4 Doğrusal viskoz akışkanın gerilme-gerinim oranı grafiği

Yay, malzemelerin mekanik davranışlarını temsil eden iki temel mekanik elamandan biridir. Diğer temel mekanik elemana *damper* denir ve akışkan davranışını temsil etmek için kullanılır. Şekil 15.5'de damper, basit piston-silindir ya da şırınga tipi düzen şeklinde görselleştirilmiştir. Pistona uygulanan bir kuvvet pistonu uygulanan kuvvet yönünde ilerletir. Pistonun hızı, uygulanan kuvvetin

büyüklüğüne ve piston ile silindirin temas yüzeyleri arasında oluşan sürtünmeye bağlıdır. Doğrusal bir damper için uygulanan kuvvet ve hız (yer değiştirme oranı) ile doğru orantılıdır, *sürtünme katsayısı* μ (mu) orantılılık sabitidir. Uygulanan kuvvet ve yer değiştirme x yönündeyse;

$$F = \mu \dot{x} \quad (15.5)$$



Şekil 15.5 Doğrusal bir damper için kuvvet-gerinim oranı grafiği

Denklem (15.5)'de $\dot{x} = dx/dt$ yer değiştirme veya hızın zamana bağlı değişim oranıdır.

Denklem (15.4) ve (15.5) karşılaştırılarak doğrusal viskoz akışkanlarla, doğrusal damper arasında analogi oluşturulabilir. Doğrusal viskoz olan bir akışkan için gerilme ve gerinim oranı, sırasıyla, bir damper için kuvvet ve yer değiştirme oranına benzer iken viskozite katsayısı bir damper için viskoz sürtünme katsayısına benzemektedir. Bu analogiler, damperlerin akışkan davranışını temsil etmek için kullanılabileceğini önermektedir.

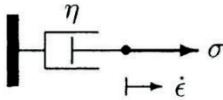
15.3 Viskoelastisitenin Deneysel Modelleri

Yaylar ve damperler, viskoelastisitedeki model analizlerin yapı taşlarını oluşturur. Deneysel viskoelastik modeller oluşturmak için çeşitli şekillerde birbirine bağlı yaylar ve damperler kullanılır. Yaylar, elastik katı davranışı hesaba katmak için kullanılırken damperler, viskoz akışkan davranışını tanımlamak için kullanılır (Şekil 15.6). Sürekli uygulanan bir kuvvetin (gerilme), bir yay içinde sabit deformasyon (gerinim) ve bir damperde sabit deformasyon oranı (gerinim oranı) oluşturduğu varsayılmaktadır. Bir yaydaki deformasyon, uygulanan kuvvetlerin serbest bırakılmasından sonra tamamen geri kazanılabilirken, damperin uğradığı deformasyon kalıcıdır.

YAY: ELASTİK KATI

$$\sigma = E \epsilon$$


DAMPER: VİSKOZ SIVI

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$


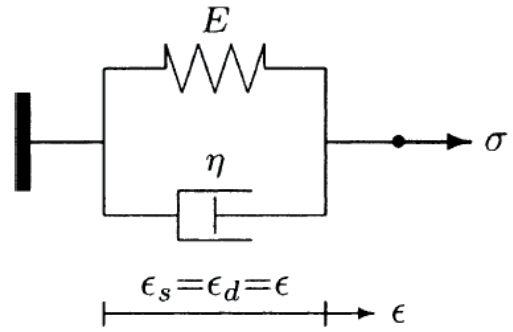
Şekil 15.6 Yay elastik davranışı, damper ise viskoz malzeme davranışını temsil eder

15.3.1 Kelvin-Voight Modeli

En basit deneysel modellerin oluşturulması, yay ve damperin paralel ve seri şekilde bağlanma konfigürasyonlarıyla elde edilir. Şekil 15.7'de gösterildiği gibi, *Kelvin-Voight modeli*, yayın ve damperin paralel bir düzende

birleştirilmesidir. Eğer sırasıyla "s" ve "d" harfleri yay ve damperi belirtecek olursa, tüm sisteme uygulanan bir gerilme σ , yayda ve damperde σ_s ve σ_d gerilmeleri üretecektir. Sisteme uygulanan toplam gerilme bu şekilde yay ve damperle paylaşılacaktır;

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d \quad (15.6)$$



Şekil 15.7 Kelvin-Voight modeli

σ gerilmesi uygulandığında, paralel düzenleri sebebiyle yay ve damper aynı miktarda deforme olacaktır. Bu yüzden sistemde oluşan gerinim ϵ , yayda ve damperde oluşan gerinime, ϵ_s ve ϵ_d , eşit olacaktır;

$$\epsilon = \epsilon_s = \epsilon_d \quad (15.7)$$

Yayda ve damperdeki gerilme-gerinim ilişkisi;

$$\sigma_s = E \epsilon_s \quad (15.8)$$

$$\sigma_d = \eta \dot{\epsilon}_d \quad (15.9)$$

(15.8) ve (15.9) denklemleri, (15.6)'da yerine konulursa;

$$\sigma = E \epsilon_s + \eta \dot{\epsilon}_d \quad (15.10)$$

Denklem (15.7)'den, $\epsilon = \epsilon_s = \epsilon_d$. Bu yüzden;

$$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (15.11)$$

Gerinim oranı ϵ alternatif olarak $d\epsilon/dt$ olarak yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (15.12)$$

Denklem (15.12), iki parametrelili (E ve η) viskoelastik model olan Kelvin-Voight modeli için gerilme, gerinim ve gerinim hızıyla ilişkilendirir. Denklem (15.12) *basit diferansiyel denklemdir*. Daha detaylı olarak inceleyerek, birinci dereceden doğrusal basit diferansiyel denklemdir. Belirli bir gerilme, σ , değerine karşılık gelen gerinme, ϵ , denklem (15.12) ile çözülebilir. Belirli gerinme, ϵ , için gerilme, σ , çözülebilir.

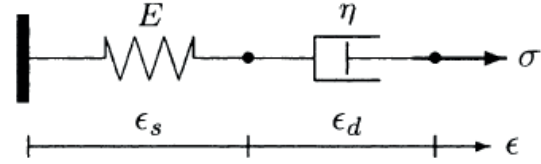
Basit diferansiyel denklemlerin nasıl kullanılacağına dair incelemenin bu metnin kapsamı dışında olduğu unutulmamalıdır. Okuyucunun, "diferansiyel denklemler" ders kitaplarını gözden geçirmesi önerilir.

15.3.2 Maxwell Modeli

Şekil 15.8'de gösterildiği gibi *Maxwell modeli*, yay ve damperin seri şekilde bağlanmasıyla oluşturulmuştur. Bu durumda bütün sisteme uygulanan gerilme σ , yaya ve dampere uygulanan gerilmelere eşittir ($\sigma = \sigma_s = \sigma_d$) ve toplam gerinme yay ve damperin gerinmelerinin toplamına eşittir ($\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d$). Kelvin-Voight modeli için yapılanlara benzer gerilme-gerinim analizleri ile Maxwell modeli için gerilmeler ve gerinimler ile ilgili

diferansiyel denklem aşağıdaki formda türetilebilir;

$$\eta \dot{\sigma} + E\sigma = E\eta \dot{\epsilon} \quad (15.13)$$



Şekil 15.8 Maxwell modeli

Bu da iki parametrelili (E ve η) viskoelastik davranışı temsil eden, birinci dereceden doğrusal basit diferansiyel denklemdir. Belirli bir gerilme (ya da gerinim) değerine karşılık gelen gerinme (ya da gerilme) Denklem (15.13) ile çözülebilir.

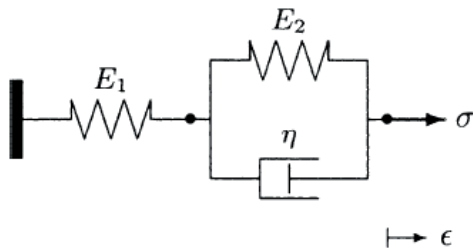
Yayların deforme olabilmesinin bir limiti olduğunu ve elastik katı davranışı temsil ettiği unutulmamalıdır. Diğer bir taraftan, damperler onları deforme edecek kuvvet olduğu sürece devamlı (aktığı) deformasyona uğradıkları ve akışkan davranışı temsil ettikleri kabul edilir. Örneğin, Maxwell modeli durumunda, uygulanan kuvvet hem yayı hem de damperi deforme eder. Yayda deformasyon sınırlı olacaktır. Damper de kuvvet korunduğu sürece deformasyona uğramaya devam edecektir. Bu sebepten dolayı, Maxwell modelinin genel davranışı katıdan çok akışkana benzer ve *viskoelastik akışkan* modeli olarak bilinir. Kelvin-Voight modelinde olduğu gibi, yaya paralel bağlanmış bir damperin deformasyonu, uygulanan yüklerin yaya tepkisi ile sınırlıdır.

Kelvin-Voight modelindeki damper sürekli deformasyona uğrayamaz. Bu nedenle, Kelvin-Voight modeli *viskoelastik katı* davranışı temsil eder.

15.3.3 Standart Katı Modeli

Kelvin-Voight katısı ve Maxwell akışkanı, yayın ve damperin beraber bağlanmasıyla oluşturulan temel viskoelastik modellerdir. Herhangi bilinen gerçek bir malzemeyi temsil etmezler. Ancak, yaylara ve damperlere ek olarak standart katı model gibi daha karmaşık viskoelastik modelleri oluşturmakta kullanılabilir. Şekil 15.9'da gösterildiği gibi *standart katı model*, yay ve Kelvin-Voight katısıyla seri olarak bağlanarak oluşturulmuştur. Standart katı model üç parametre (E_1, E_2, η) modelidir, kıvırdak ve beyaz kan hücreleri gibi bazı biyolojik malzemelerin viskoelastik davranışını tanımlar. Bu model için gerilme, gerinim ve onların oranlarını içeren fonksiyon,

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta\dot{\sigma} = (E_1E_2\varepsilon + E_1\eta\dot{\varepsilon}) \quad (15.14)$$



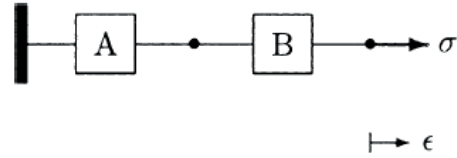
Şekil 15.9 Standart katı model

Denklem (15.14)'de gerilme oranı $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$, gerinim oranı $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ 'dir. Bu denklem şu şekilde türetilir; Şekil 15.10'da gösterilen model seri bağlanan iki birimle, A ve B, temsil

edilmektedir. A birimi elastik katı ve B birimi Kelvin-Voight katısıdır. Eğer σ_A ve ε_A , A birimi için, σ_B ve ε_B , B birimi için gerilme ve gerinmeyi temsil ederse;

$$\sigma_A = E_1\varepsilon_A \quad (i)$$

$$\sigma_B = E_2\varepsilon_B + \eta\frac{d\varepsilon_B}{dt} = \left(E_2 + \eta\frac{d}{dt}\right)\varepsilon_B \quad (ii)$$



Şekil 15.10 A ve B birimleri tarafından temsil edilen standart katı modeli

A ve B birimleri seri bağlandığı için;

$$\varepsilon_A + \varepsilon_B = \varepsilon \quad (iii)$$

$$\sigma_A = \sigma_B = \sigma \quad (iv)$$

Denklem (iv)'ü ε_A ve ε_B gerinimi cinsinden Denklem (i) ve (ii)'de yerine konulursa;

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma}{E_1} \quad (v)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma}{E_2 + \eta\left(\frac{d}{dt}\right)} \quad (vi)$$

Denklem (v) ve (vi) Denklem (iii)'de yerine konulursa;

$$\frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2 + \eta\left(\frac{d}{dt}\right)} = \varepsilon$$

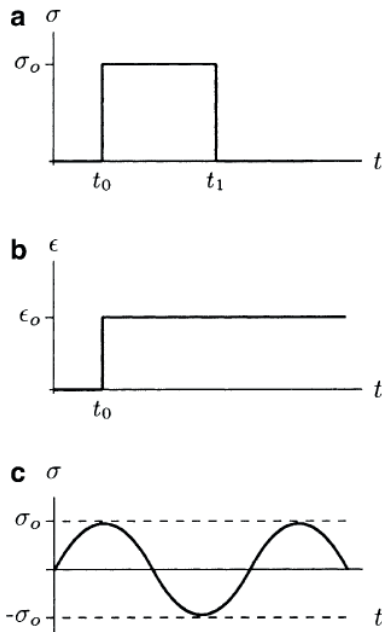
İçler dışlar çarpımı yapıp terimlerin dereceleri tekrar düzenlenirse;

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta\frac{d\sigma}{dt} = E_1E_2 + E_1\eta\frac{d\varepsilon}{dt}$$

elde edilir.

15.4 Zamana Bağlı Malzeme Cevabı

Belirli viskoelastik malzemeler için deney serisi sonucunda bir deneysel model oluşturulmuştur. Zamana bağlı malzeme davranışının yönlerini analiz etmeyi sağlayan birkaç tane deneysel yöntem tasarlanmıştır. Şekil 15.11a'da gösterildiği gibi malzemeye *sünme* ve *geri dönme* testi uygulanmış, t_0 zamanından t_1 'e kadar uygulanan yük (σ_0 gerilme) sabit seviyede tutulmuş, t_1 anında aniden yükü kaldırılarak malzeme davranışı gözlemlenmiştir. Şekil 15.11b'de gösterilen *gerilme gevşemesi* deneyinde, malzemenin gerinimi, ϵ_0 , seviyesinde sabit tutularak, malzemenin gerilme tepkisi gözlemlenmiştir. Bir *salınımlı tepki* testinde, harmonik bir gerilme uygulanır ve malzemenin gerilme tepkisi ölçülür (Şekil 15.11c).



Şekil 15.11 (a) Sünme ve geri dönme (b) gerilme gevşemesi ve (c) salınımlı tepki testi

Bir viskoelastik malzemeyi ele alarak, bu malzemeye sünme testi yapıldığını varsayalım. Sünme testinin sonuçları ölçülen gerinmenin zamana bağlı fonksiyonu grafiğiyle gösterilebilir. Malzeme davranışı için deneysel viskoelastik model, deneme serileri ile elde edilebilir. Bu nedenle, deneysel model, bir takım yay ve damperin seri bağlanmasıyla oluşturulabilir. Gerilme, gerinim ve oranlarını içeren diferansiyel denklem süreci Bölüm 15.3 Kelvin-Voight modeli kapsamında türetilmiştir. Sünme testinde maruz kalınan koşul $\sigma = \sigma_0$ 'dır. Bu sabit gerilme koşulu diferansiyel denklem ile değiştirilir ve bu denklem ϵ niceliği için çözülür (bütünleşik). Elde edilen sonuç gerinimi sabit gerilme, σ_0 , elastisite modülü, deneysel modelin viskozite katsayıları ve zaman ile ilişkilendiren başka bir denklemden elde edilir. Belirli bir σ_0 ve elastik ve viskozite modülü için bu denklem zamana bağlı bir fonksiyona indirgenir. Bu fonksiyon daha sonra zamana karşı gerilmeyi çizmek için kullanılır ve deneysel olarak elde edilen grafiklerle karşılaştırılır. İki (deneysel ve analitik) eğrinin genel özellikleri eşleşiyorsa, analizler malzemenin elastik ve viskozite modüllerini (malzeme sabitleri) oluşturur. Bu deneysel modelde elastik ve viskozite modüllerin değerlerini analitik eğri ile deneysel eğriyi mümkün olduğunca yaklaştıran kadar değiştirerek elde edilir. Genel olarak bu yöntem *eğri uydurma* denir. İki eğri arasında genel bir eşleşme yoksa model bırakılır, yeni bir model oluşturulur ve kontrol edilir.

Bu deneysel modeldeki matematiksel model analizlerinin sonucu; gerilmeler ve gerinimler ile ilgili diferansiyel denklemlerdir. Malzeme için gerilme-gerinim ilişkisi, malzemenin farklı yükleme koşullarına tepkisini analiz etmek için temel mekanik yasalarıyla birlikte kullanılabilir.

Viskoelastik malzemelerde oluşan deformasyon süreci epey karmaşıktır ve bazen viskoelastik malzemenin farklı yükleme koşullarına tepkisini tanımlamak için bir dizi deneysel model kullanmak gerekebilir. Örneğin, bir viskoelastik malzemenin kayma cevabı bir modelle açıklanabilir ve normal yüklemeye olan tepkisini açıklamak için farklı bir modele ihtiyaç duyulabilir. Bir viskoelastik malzemenin düşük ve yüksek gerilme hızlarındaki tepkisini tanımlamak için farklı modellere ihtiyaç duyulabilir.

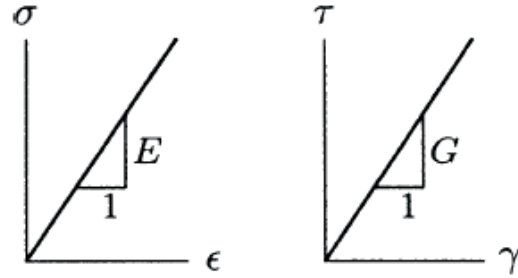
15.5 Elastisite ve Viskozite Karşılaştırması

Malzemelerin elastik ve viskoelastik davranışlarının karşılaştırılabileceği çeşitli ölçütler vardır. Bunlardan bazılarını bu bölümde değinilmektedir.

Elastik malzemenin zamandan ve gerinim oranından bağımsız eşsiz bir gerilme-gerinim ilişkisi vardır. Elastik malzemeler için normal ve kayma gerilmesi, normal ve kayma gerinimi cinsinden şöyle tanımlanabilir:

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \text{ ve } \tau = \tau(\gamma)$$

Örneğin, doğrusal olarak elastik bir katının gerilme-gerinim ilişkisi $\sigma = E\epsilon$ ve $\tau = G\gamma$ 'dir. E ve G malzemenin sabit elastikiyet modülüdür. Şekil 15.12'de gösterildiği gibi doğrusal olarak elastik malzemenin benzeri olmayan normal gerilme-gerinim ve kayma gerilmesi-gerinimi diyagramı vardır.

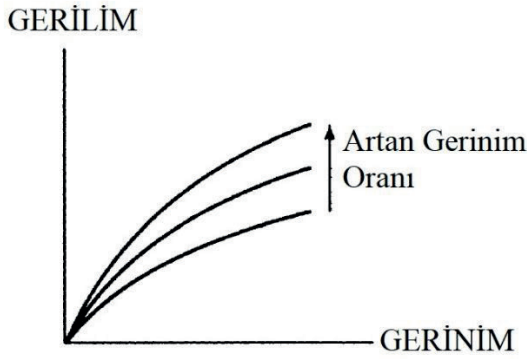


Şekil 15.12 Elastik malzemenin kendine özgü normal gerilme-gerinim ve kayma gerilmesi-gerinimi diyagramı

Viskoelastik malzemeler zamana bağlı malzeme davranışı sergilerler. Uygulanan gerilmeye karşı viskoelastik malzemenin cevabı sadece uygulanan gerilmenin büyüklüğüne değil aynı zamanda gerilmenin ne kadar hızlı uygulandığına veya kaldırıldığına da bağlıdır. Bu sebeple, viskoelastik malzemenin gerilme-gerinim ilişkisi eşsiz değildir ancak malzemede oluşan gerilmenin ve gerinimin zamana ya da orana bağlı fonksiyonudur:

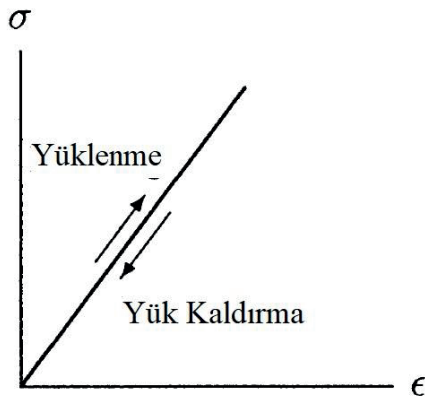
$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, \dots, t) \text{ ve } \tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, \dots, t)$$

Şekil 15.13'de bir viskoelastik malzemenin eşsiz olmayan bir gerilme-gerinim diyagramı gösterilmektedir.



Şekil 15.13 Viskoelastik bir malzeme için benzerleri olan gerilme-gerinim diyagramı

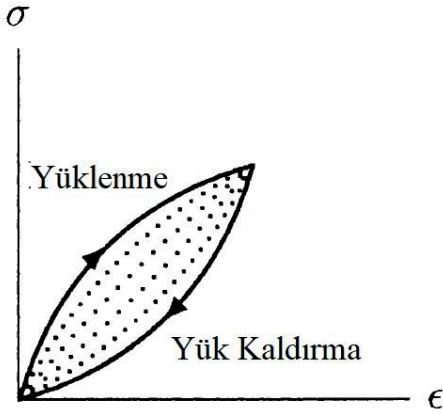
Elastik bir cisimde, cismi deforme etmek için verilen enerji (gerinim enerjisi), cisimde potansiyel enerji olarak depolanır. Bu enerji, cismi, uygulanan gerilme kaldırıldığında merkezî boyutuna (yüksüz) ve şekline döndürmek için kullanılır. Şekil 15.14'de gösterilen elastik malzeme için yükleme ve yükü kaldırma yolları çakışmaktadır. Bu durum, yükleme ve yükü kaldırma sırasında enerji kaybı olmadığını ifade eder.



Şekil 15.14 Elastik malzeme için yükleme ve yükü kaldırma yolları çakışır

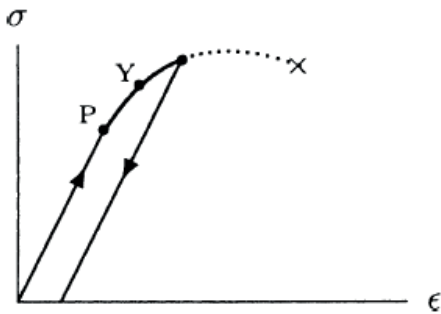
Viskoelastik bir cisim için gerinim enerjisinin bir kısmı potansiyel enerji olarak depolanır diğer bir kısmı sıcaklık olarak yayılır. Örneğin, Maxwell modelini ele alın. Yay gerginleştirmek için sağlanan enerji yayda depolanırken, damperi deforme etmek için sağlanan enerji, damperin hareket eden parçaları arasındaki sürtünmeden dolayı ısı olarak yayılır. Uygulanan yük kaldırıldığında yayda depolanan potansiyel enerji yayın deformasyonunu geri döndürmek için kullanılır ancak damperi merkezî durumuna döndürecek enerji yoktur.

Şekil 15.9'da gösterilen üç parametrelî standart katı modeli ele alın. Bu model için tipik yükleme ve yükü kaldırma diyagramı Şekil 15.15'de gösterilmiştir. Yükleme ve yükü kaldırma yolları tarafından çevrelenen alana, deformasyon ve geri dönme aşamaları esnasında ısı olarak dağılan enerjiyi temsil eden *histerezis döngüsü* adı verilir. Bu alan, sonuçta ısı olarak dağılan enerji miktarıdır ve cismi deforme eden gerinim hızına bağlıdır. Bir viskoelastik malzemenin gerilme-gerinim diyagramında histerezis döngüsünün varlığı sürekli yükleme ve yükü kaldırmanın, malzemenin sıcaklığında bir artışa neden olacağına işaret eder.



Şekil 15.15 Histerezis döngüsü

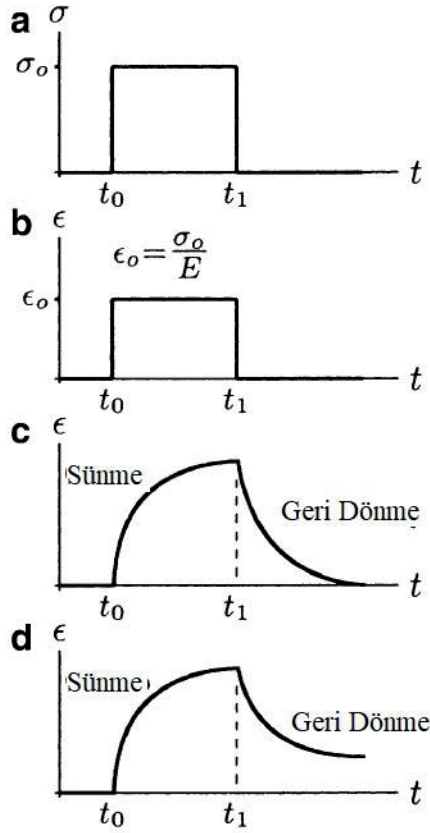
Çoğu elastik malzeme akma noktasının altındaki gerilme değerlerinde plastik davranış sergiler. Elastik-plastik malzeme için gerinim enerjisinin bir kısmı plastik deformasyon sırasında ısı olarak yayılır. Bu durum, yüklenme ve yükü kaldırma diyagramında histerezis döngüsünün varlığına işaret eder (Şekil 15.16). Böyle malzemeler için enerji sadece plastik bölgeye girildiğinde ısı olarak yayılır. Viskoelastik malzemeler gerinim veya gerilmelerin küçük ya da büyük olup olmamasından bağımsız bir şekilde enerjiyi yayar.



Şekil 15.16 Elastik-plastik malzeme için histerezis döngüsü

Viskoelastik malzemeler zamana bağımlı malzeme davranışı sergilediğinden elastik ve viskoelastik malzeme cevapları arasındaki farklar, sürünme ve gerilme gevşemesi deneyleri gibi zamana bağlı yüklenme koşulları altında en belirgindir.

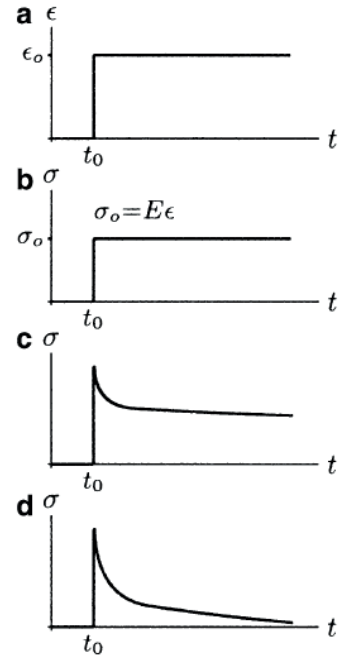
Önceden bahsedildiği gibi, sürünme ve geri dönme testi, t_0 anında uygulanan sabit gerilme σ_0 ve t_1 anında ortadan kaldırıldığında malzemenin verdiği tepkinin gözlenmesiyle yapılır (Şekil 15.17a). Şekil 15.17b'de gösterildiği gibi doğrusal elastik bir malzemeye t_0 anında bir yük $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ gerinimi oluşturur. Bu sabit gerinim, t_1 anına kadar malzeme üzerinde kalır. t_1 anında, malzeme hızlı bir şekilde ilk haline geri döner. Aynı sabit yüklenme koşulunda, viskoelastik malzeme gerinime t_0 ve t_1 zamanları arasında kademeli olarak artış göstererek tepki verir. t_1 anında aşamalı geri dönüş başlayacaktır. Viskoelastik katı bir malzeme için, geri dönüş zamanla tamamlanacaktır (Şekil 15.17c). Viskoelastik bir akışkan için tam geri dönüş elde edilemez ve malzemede deformasyon kalıntısı görülür (Şekil 15.17d).



Şekil 15.17 Sünme ve geri dönme

Şekil 15.18a'da gösterildiği gibi, gerilme gevşeme testi, bir malzemeyi anında gerinime uğratarak, malzemede sabit gerilme seviyesini koruyarak, malzemenin tepkisini gözlemleyerek gerçekleştirilir. Doğrusal elastik malzemenin tepkisi, Şekil 15.18b'de gösterilmiştir. Sabit gerilme $\sigma_0 = E\epsilon_0$, ϵ_0 gerinimi muhafaza edildiği sürece kalacaktır. Başka bir deyişle, elastik bir malzeme gerilme gevşemesi davranışı göstermez. Öte yandan, viskoelastik bir malzeme, ilk yüksek gerilme sonrasında zamanla azalan tepki verecektir. Malzeme viskoelastik bir katıysa, gerilme seviyesi hiçbir zaman sıfıra düşmeyecektir (Şekil 15.18c). Şekil 15.18d'de gösterildiği

üzere gerilme viskoelastik akışkan için bir noktada sıfıra düşecektir.



Şekil 15.18 Gerilme gevşemesi

Zamana bağlı malzeme davranışı nedeniyle, viskoelastik malzemelerin "hafızaya" sahip oldukları söylenir. Diğer bir deyişle, viskoelastik malzemeler deformasyon geçmişini hatırlar ve buna göre cevap verir.

Hemen hemen tüm biyolojik malzemeler viskoelastik özellikler sergiler ve bu bölümün geri kalan kısmı kemikler, tendonlar, ligamentler, kaslar ve artiküler kartilaj dahil biyolojik dokuların mekanik özelliklerinin tartışılması ve gözden geçirilmesi için ayrılmıştır.

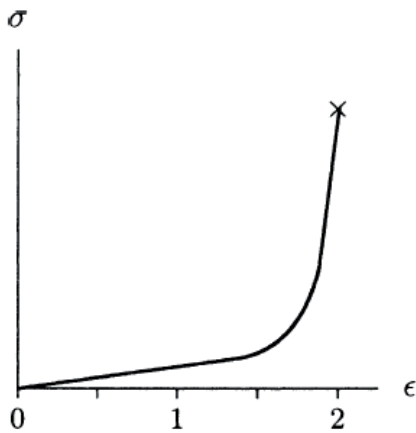
15.6 Biyolojik Dokuların Ortak Özellikleri

Biyomekanik alanında yapılan çalışmaların hedeflerinden biri, biyolojik dokuların mekanik özelliklerini belirleyerek çeşitli yükleme koşullarında davranışlarını tanımlama ve daha fazla araştırmaya yardımcı olan matematiksel modeller geliştirmektir. Biyomekanikte çalışmalar yaparken, mühendislik yöntem ve ilkelerini kullanmak ve aynı zamanda mühendislik malzemeleri gibi biyolojik dokuları tedavi etmek yaygın bir uygulamadır. Bununla birlikte, canlı dokular mühendislik malzemelerinden çok farklı özelliklere sahiptir. Örneğin, canlı dokular kendi kendine adapte olabilir ve kendini onarabilir. Yani, mekanik özelliklerini değiştirerek, değişen mekanik talebe uyum sağlayabilir ve kendilerini onarabilirler. Canlı dokuların mekanik özellikleri yaşla birlikte değişim eğilimi gösterir. Çoğu biyolojik doku, homojen olmayan ve anizotropik özelliklere sahip kompozit (farklı özelliklere sahip malzemelerden içeren) malzemelerdir. Diğer bir deyişle, canlı dokuların mekanik özellikleri dokudaki noktadan noktaya farklılık gösterebilir ve farklı yönde uygulanan kuvvetlere verdikleri tepki farklı olabilir. Örneğin, kemiğin dayanım ve sertlik değerleri, farklı kemiklerde ve aynı kemik içindeki farklı noktalarda farklılık gösterebilir. Dahası, hemen hemen tüm biyolojik dokular doğada viskoelastiktir. Bu nedenle, dayanım ölçümlerinin sonuçlarını bildirirken spesifik bir testin gerçekleştirildiği gerinim veya yükleme hızı da belirtilmelidir. Bu düşünceler, canlı

dokular için bildirilen mekanik özelliklerin çoğunun sadece yaklaşık olduğu ve yaşayan bir dokunun davranışını tanımlamayı amaçlayan matematiksel bir modelin, spesifik bir yükleme konfigürasyonundaki tepkisini tanımlamakta sınırlı olduğunu belirtir.

Mekanik bakış açısından, tüm dokular kompozit malzemelerdir. Biyolojik dokuların ortak bileşenlerinden biri olan kolajen ve elastin lifleri, görüldüğü dokuların mekanik davranışlarını etkileyen en önemli mekanik özelliklere sahiptir. *Kolajen*, proteinden yapılmış kıvrımlı halde biriken fibrillerin birleşerek oluşturduğu lif halidir. Kolajen fibrillerin mekanik özellikleri düşünüldüğünde, her bir fibrilin bir mekanik yay ve her lifin bir yay topluluğudur. Kolajen liflerin birincil mekanik fonksiyonu eksenel çekmeye dayanmaktır. Yüksek uzunluk-çap oranlarına (en-boy oranı) sahip oldukları için, kolajen lifleri basma yükleri altında etkili değildir. Bir lif çekildiğinde kıvrımları düzleşir ve uzunluğu artar. Mekanik bir yay gibi, lifin gerilmesi için sağlanan enerji de depolanır ve uygulanan yük kaldırıldığında bu enerjinin serbest bırakılmasıyla lif gerilmemiş konfigürasyonuna geri döner. Kolajen liflerinin fibrilleri, büyük ölçüde sudan oluşan jel benzeri bir *zemin maddesi* ile çevrilidir. Kolajen lifler, nispeten yüksek gerilme mukavemeti ve basmaya karşı zayıf dirençleri ile iki fazlı, katı-akışkan veya viskoelastik malzeme davranışına sahiptir.

Kolajen liflerin geometrik konfigürasyonu ve bunların kolajen olmayan doku bileşenleri ile etkileşimi, biyolojik dokuların mekanik özelliklerinin temelini oluşturur. Kolajen olmayan doku bileşenleri arasında *elastin*, kauçuk özelliklerine benzeyen malzeme özelliklerine sahip başka bir fibröz proteindir. Elastin ve mikrofibriller elastik lifleri oluştururlar ve bunlar fazlaca uzayabilir ve ekstansiyonları, yüksek gerinimlerde bile tersine çevrilebilir. Elastin lifleri yaklaşık %200 uzamaya kadar elastik olarak düşük sertlik gösterir ve kopma noktasına kadar keskin bir şekilde sertliğin arttığı kısa bölgesel davranış gösterir (Şekil 15.19). Elastin lifleri kopma öncesinde önemli miktarda plastik deformasyon göstermez ve yükleme ve yük kaldırma yolları önemli bir histerezis sergilemez. Özetle, elastin lifleri düşük modüllü bir elastik malzeme özelliğine sahipken, kolajen lifleri daha yüksek bir modüllü viskoelastik malzeme davranışı göstermektedir.



Şekil 15.19 Elastin için gerilme-gerinim diyagramı

15.7 Kemiğin Biyomekaniği

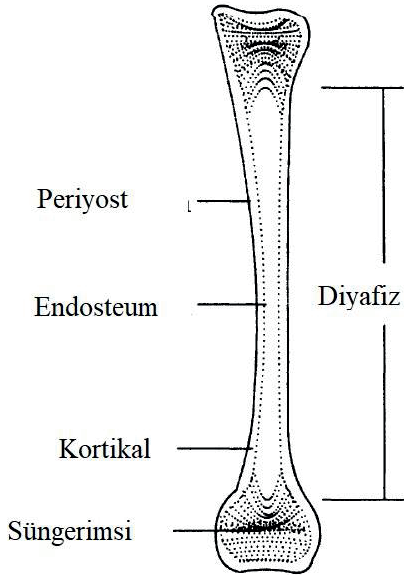
Kemik, insan vücudunun birincil yapısal unsurudur. Kemikler, iskelet sisteminin yapı taşlarını oluşturarak iç organları korur, kinematik bağlantılar sağlar, kaslar için bağlantı noktaları sağlar, kas hareketlerini ve vücut hareketlerini kolaylaştırır. Kemik, bu işlevleri yerine getiren benzersiz yapısal ve mekanik özelliklere sahiptir. Diğer yapısal malzemelerle karşılaştırıldığında, kemik aynı zamanda kendiliğinden onarılması bakımından eşsizdir. Kemik ayrıca mekanik talebin değişimlerine uyum sağlamak için şeklini, mekanik davranışını ve mekanik özelliklerini değiştirebilir. Kemiklerin mekanik davranışını etkileyen başlıca faktörler, kemiğin yapısı, kemiği kapsayan dokuların mekanik özellikleri, kemiğin boyut ve geometrisi, uygulanan yüklerin yönü, büyüklüğü ve oranıdır.

15.7.1 Kemiğin Yapısı

Biyolojik anlamda kemik, vücudun çeşitli yapısal unsurlarını birbirine bağlayan *bağ dokudur*. Mekanik olarak, kemik çeşitli katı ve sıvı fazlara sahip *kompozit bir malzemedir*. Kemik, hücrelerden ve organik bir lif mineral matrisinden ve kolajen liflerini çevreleyen zemin maddesinden oluşur. Kemik ayrıca mineral tuz formunda inorganik maddeler içerir. Kemiğin inorganik bileşeni kemiği sert

ve nispeten rijit yaparken, kemiğin organik bileşeni esneklik ve rezilyans sağlar. Kemik yapısı; yaş, cinsiyet, kemik tipi, kemik dokusu türü ve kemik hastalığının varlığına bağlı olarak değişir.

Makroskopik seviyede, tüm kemikler iki tür dokudan oluşur (Şekil 15.20). *Kortikal* veya *sert* kemik dokusu, kemiklerin dış kabuğunu (korteks) ve uzun kemiklerin diyafizyal bölgesini oluşturur. *Süngerimsi*, *trabeküler* veya *gözenekli* kemik dokusu, kortikal kemik tarafından çevrelenen gevşek ağ yapısında ince tabakalardan (trabeküller) oluşur. Kemikler, *periyost* olarak adlandırılan yoğun fibröz bir zar ile çevrilidir. Eklem kıkırdağı ile kaplı eklem yüzeyleri haricinde, periyost tüm kemiği kaplar.



Şekil 15.20 Kortikal ve süngerimsi dokuları gösteren bölgesel kemik görüntüsü

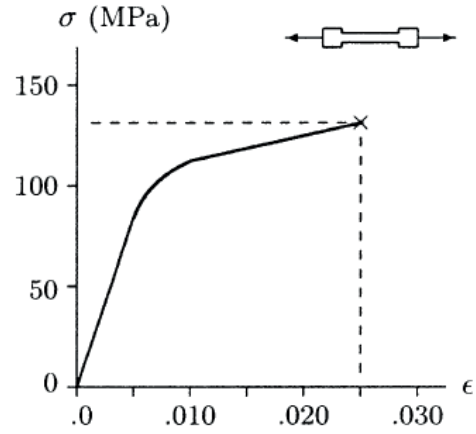
15.7.2 Kemiğin Mekanik Özellikleri

Kemik, homojen olmayan bir malzemedir çünkü çeşitli hücrelerden, farklı malzeme özelliklerine sahip çeşitli organik ve inorganik maddelerden oluşur. Kemik anizotropik bir malzemedir, çünkü mekanik özellikleri farklı yönlerde değişkendir. Yani, kemiğin mekanik tepkisi uygulanan yükün büyüklüğüne olduğu gibi yönüne de bağlıdır. Örneğin, kemiğin basma dayanımı, çekme dayanımından daha büyüktür. Kemik viskoelastik (zamana bağlı) malzeme özelliklerine sahiptir. Kemiklerin mekanik tepkisi, yüklerin uygulanma oranına bağlıdır. Kemik, hızlı uygulanan yüklere, yavaş uygulanan yüklerden çok daha iyi dayanır. Başka bir deyişle, kemik yüksek gerilme hızlarında daha katı ve daha güçlüdür.

Kemik, karmaşık bir yapısal malzemedir. Kemiklerin mekanik tepkileri çekme, basma, eğme ve burulmaya maruz bırakıldığında görülebilir. Bu koşulların uygulanması için çeşitli testler önceki bölümlerde tartışılmıştır. Bu testler, düzgün kemik örnekleri veya tüm kemik kullanılarak yapılabilir. Amaç, spesifik bir kemik dokusunun mekanik yanıtını (kortikal veya süngerimsi) araştırmak ise testler kemik numuneleri kullanılarak yapılır. Tam bir kemiğin test edilmesi diğer yandan, o kemiğin "bir bütün halinde" özelliklerini belirlemeye çalışır.

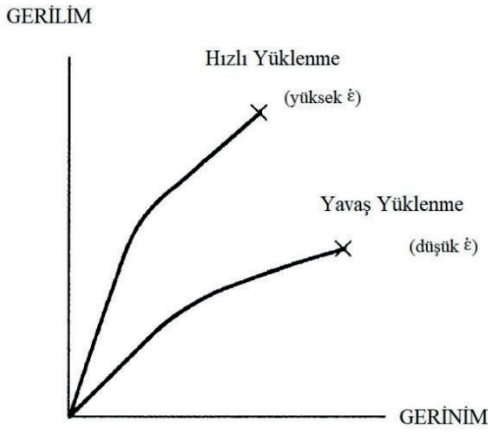
Kortikal kemik için çekme gerilme-gerinim diyagramı Şekil 15.21'de gösterilmektedir. Bu

$\sigma - \epsilon$ eğrisi, orta derecede gerinim oranında ($\dot{\epsilon} = 0,05s^{-1}$) dik uygulanan çekme ve basma yükleri altında test edilen insan femoral kortikal kemiği için belirlenen elastisite modülü, gerinim pekleşmesi modülü, en yüksek gerilme ve en yüksek gerinim değerlerinin ortalamaları kullanılarak çizilmektedir. Şekil 15.21'deki $\sigma - \epsilon$ eğrisi üç farklı bölgeye sahiptir. İlk doğrusal elastik bölgede, $\sigma - \epsilon$ eğrisi neredeyse düz bir çizgidir ve bu çizginin eğimi yaklaşık 17 GPa olan kemiğin elastisite modülüne (E) eşittir. Orta bölgede, kemik doğrusal olmayan elasto-plastik malzeme davranışı sergilemektedir. Malzemenin akması bu bölgede de görülür. Bölüm 13'de tartışılan ofset yöntemi ile Şekil 15.21'de gösterilen $\sigma - \epsilon$ diyagramı için kortikal kemiğin akma dayanımı yaklaşık 110 MPa olarak tespit edilebilir. Son bölgede, kemik doğrusal plastik malzeme davranışı sergiler ve $\sigma - \epsilon$ diyagramı başka bir düz çizgidir. Bu çizginin eğimi, yaklaşık 0,9 GPa olan kemik dokusunun gerinim pekleştirme modülüdür (E'). Çekme gerilmesi yaklaşık 128 MPa olduğunda kemik kırılır ve bu noktada çekme gerinimi yaklaşık 0,026'dır.

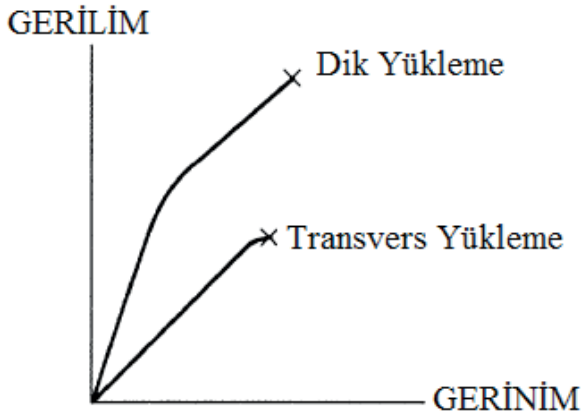


Şekil 15.21 Dik yüklene insan kortikal kemiği için çekme gerilme-gerinim diyagramı (gerinim oranı $\dot{\epsilon} = 0,05s^{-1}$)

Kemik için elastisite modülü ve dayanım değerleri, yüklerin uygulanma hızı gibi test koşulları da dahil olmak üzere birçok faktöre bağlıdır. Kemik dokusunun bu viskoelastik doğası Şekil 15.22'de gösterilmektedir. Şekil 15.22'deki farklı gerinim oranları için gerilme-gerinim diyagramı, hızlı yüklemeye (yüksek $\dot{\epsilon}$) tabi tutulan bir kemik doku örneğinin daha yavaş yüklenen (düşük $\dot{\epsilon}$) bir örneğe göre daha büyük bir elastisite modülüne ve maksimum dayanıma sahip olduğunu gösterir. Şekil 15.22'de kemik dokusu tarafından emilen enerjinin ($\sigma - \epsilon$ eğrisi altındaki alanla orantılı olduğu) artan yüklemeye hızı ile arttığını gösterir. Normal günlük aktivitelerde kemik dokularına yaklaşık $0,01 s^{-1}$ yüklemeye hızı uygulandığı unutulmamalıdır.



Şekil 15.22 Kortikal kemik dokusu için yükleme hızına bağlı gerilme-gerinim eğrileri



Şekil 15.23 Kemik dokusu için yöne bağlı gerilme-gerinim eğrileri

Kemiklerin gerilme-gerinim davranışı, yükleme yönüne göre kemiğin yönüne bağlıdır. Kemiğin bu anizotropik malzeme davranışı Şekil 15.23'te gösterilmektedir. Kortikal kemiğin, transvers yöne göre dik yönünde maksimum dayanımı (daha güçlü) ve daha yüksek elastisite modülü (daha katı) olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca, transvers yönde yüklenen kemik örnekleri, dik yönde yüklenen kemik numuneleri ile karşılaştırıldığında daha gevrek bir biçimde (önemli miktarda akma

göstermeden) hasar görürler. Çeşitli yükleme çeşitleri altında erişkin femoral kortikal kemiğin maksimum dayanım değerleri, elastik ve kayma modülleri Tablo 15.1'de listelenmiştir. Tablo 15.1'deki maksimum dayanım değerleri, dik yönde (osteon yönlendirme yönü) basma yükü altında kemiğin dayanımının en yüksek, transvers yönde (dik yöne dik yönde) çekme yükü altında en düşük olduğunu gösterir. Kortikal kemiğin dik yöndeki elastikiyet modülü, transvers yöndeki elastikiyet modülünden daha yüksektir. Bu nedenle, kortikal kemik dik yönde transvers yönde olduğundan daha serttir.

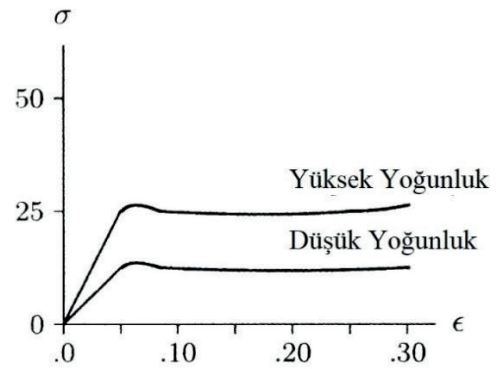
Tablo 15.1 İnsan femuru kortikal kemiği için maksimum dayanım, elastikiyet ve kayma modülleri (1 GPa = 10^9 Pa, 1 MPa = 10^6 Pa)

YÜKLEME MODU	MAKSİMUM DAYANIM
DİK YÖNDE	
Çekme	133 MPa
Basma	193 MPa
Kayma	68 MPa
TRANSVERS YÖNDE	
Çekme	51 MPa
Basma	133 MPa
ELASTİSİTE MODÜLÜ, E	
Dik	17 GPa
Transvers	11,5 GPa
KAYMA MODÜLÜ, G	3,3 GPa

Kemiklerin mekanik özellikleri için bildirilen değerlerde geniş bir değişkenlik aralığı bulunduğu belirtilmelidir. Kemiklerin çekme dayanımının paslanmaz çeliğin çekme dayanımından % 10 daha az olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca, kemiğin sertliği, çeliğin sertliğinin yaklaşık %5'idir. Diğer bir deyişle, aynı boyuttaki ve aynı gerilme yükü altında olan numuneler için, bir kemik numunesi çelik numunenin 20 katına kadar deformasyona uğrayacaktır.

Kortikal ve süngerimsi kemik dokularının kimyasal bileşimleri benzerdir. Süngerimsi kemiğin ayırt edici özelliği gözenekliliğidir. İki kemik dokusu arasındaki bu fiziksel fark, bir birim hacim kemikte bulunan kemik dokusunun kütlesi olarak tanımlanan kemiğin *görünür yoğunluğundan* ileri gelir. Belli bir derecede, hem kortikal hem de süngerimsi kemik dokuları değişken yoğunlukta tek bir malzeme olarak kabul edilebilir. Süngerimsi kemiğin dayanımı, sertliği ve gerilme-gerinim gibi malzeme özellikleri sadece farklı kemik türleri için veya tek bir kemiğin farklı bölümlerinde farklı olabilecek serbest yoğunluğa değil aynı zamanda yükleme çeşidine de bağlıdır. Süngerimsi kemiğin basma yükü altındaki gerilme-gerinim eğrileri (Şekil 15.24) yaklaşık 0,05'lik bir gerinime kadar ilk olarak doğrusal elastik bölge içerir. Trabekül, kırılmaya başladıkça malzemedeki akma oluşur. Bu ilk elastik bölgeyi, kırılmaya kadar neredeyse sabit gerilmeli ve sünek bir

malzeme davranışı gösteren düzlük bölgesi izlemektedir. Kompakt kemiğin aksine süngerimsi kemik, çekme kuvvetleri altında aniden kırılır ve gevrek malzeme davranışı gösterir. Süngerimsi kemik, kortikal kemiğin % 25-30'ü yoğunluğunda, % 5-10'ü sertliğinde ve beş katı kadar daha sünektir. Süngerimsi kemiğin enerji soğurma kapasitesi, basma yükleri altında, çekme yükleri altında olduğundan daha yüksektir.



Şekil 15.24 Süngerimsi kemik dokusu için görünür yoğunluk-bağımlı gerilme-gerinim eğrileri

15.7.3 Kemiğin Yapısal Bütünlüğü

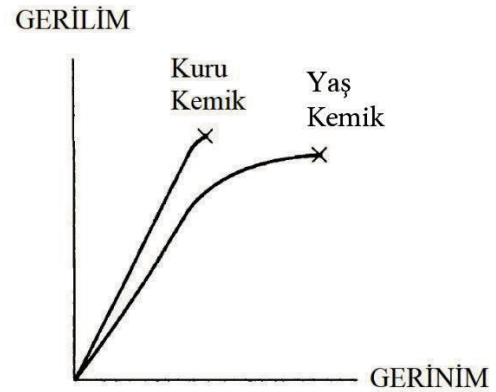
Kemiklerin yapısal bütünlüğünü etkileyebilecek birkaç faktör vardır. Örneğin, bir kemiğin boyutu ve geometrisi, iç kuvvetlerin kemik boyunca dağılımını belirleyerek dışardan uygulanan yüklere olan cevabını etkiler. Kemik ne kadar büyük olursa iç kuvvetlerin dağıtıldığı alan o kadar büyük olur ve bu kuvvetlerin yoğunluğu (gerilmesi) o kadar küçük olur. Sonuç olarak, kemik ne kadar büyükse uygulanan yüklere karşı o kadar dirençlidir.

Uzun kemiklerin ortak özelliği, aynı kütledeki düz dairesel yapılara kıyasla önemli derecede mekanik avantajı olan diyafizyal bölgedeki tübüler yapısıdır. Bir önceki bölümden, burulmaya maruz kalan bir yapıdaki kayma gerilmelerinin, yapının kesit alanının polar atalet momenti (J) ile ters orantılı olduğunu ve eğmeye tabi tutulan bir yapıdaki normal gerilmelerin, yapının kesit alanının atalet momenti (I) ile ters orantılı olduğunu hatırlayın. Bir yapının polar ve kesit alan atalet momentleri ne kadar büyük olursa, burulma ve eğme nedeniyle maksimum normal gerilmeleri de o kadar düşük olur. Tübüler biçimli yapıların, aynı hacimdeki katı silindirik yapılara kıyasla daha büyük polar ve kesit alan atalet momentlerine sahip oldukları için tübüler biçimli yapılar, katı silindirik yapılara kıyasla burulma ve eğme yüklerine daha dayanıklıdır. Buna ek olarak, tübüler şekilli bir yapı, aynı kesit alanlı katı silindirik bir yapıya kıyasla iç kuvvetleri kesitinin üzerine daha eşit bir şekilde dağıtabilir.

Osteoporoz gibi belli iskelet koşulları, görünür yoğunluğunu azaltarak kemiğin yapısal bütünlüğünü azaltabilir. Kemik yoğunluğundaki küçük düşüşler, kemik dayanımında ve sertliğinde büyük düşüşler oluşturabilir. Aynı geometriye sahip normal bir kemikle karşılaştırıldığında, osteoporotik bir kemik daha kolay deformasyona uğrar ve daha düşük yüklerde kırılır. Ayrıca kemik

yoğunluğu, yaşlanmaya başladıkça, belli bir süre kullanmadıkça veya kronik egzersiz sonrasında değişebilir, böylece genel gücünü değiştirir. Normal kemik geometrisini değiştiren bazı cerrahi işlemler de kemiğin sağlamlığını azaltabilir. Vida delikleri gibi kemik kusurları, kusurlar etrafında gerilme konsantrasyonlarına neden olarak kemiğin yük taşıma yeteneğini azaltır.

Kemik yaşla birlikte sertleşir ve sünekleşir. Ayrıca, yaşla birlikte kemiğin enerji soğurma yeteneği ve hasar sırasındaki maksimum gerinimi azalır ve kemik, kuru kemik gibi davranır. Kuru kemik özellikleri ortopedi için herhangi bir değer taşımaya da, yaş ve kuru halde kemik arasında farklılıklar olduğunu belirtmek önemlidir. Kuru kemik serttir, maksimum dayanımı daha yüksektir ve yaş kemikten daha kırılındır (Şekil 15.25).



Şekil 15.25 Kuru ve yaş kemik için gerilme-gerinim eğrileri

15.7.4 Kemik Kırıkları

Kemikler makul yükleme koşullarına maruz kaldıklarında, yükler uygulanırken sadece var olan küçük deformasyonlara tepki verir. Yükler kaldırıldığında, kemikler merkezaz (yüksüz) şekil ve pozisyonlarına geri dönerek elastik malzeme davranışı sergilerler. Uygulanan yükler yüksek olduğunda büyük deformasyonlar oluşur. Kemik kırıkları, herhangi bir kemik bölgesinde gerilmenin, kemiğin maksimum dayanımından daha yüksek olması durumunda oluşur.

Saf çekme kuvvetinin neden olduğu kırıklar, süngerimsi kemik dokusunun büyük bir bölümüne sahip kemiklerde görülür. Basma yüklerine bağlı kırıklar, yaşlanmayla birlikte kemiklerin zayıflaması sebebiyle yaşlı vertebrasında yaygın olarak görülür. Basmanın neden olduğu kemik kırıkları, uzun kemiklerin diyafizyal bölgelerinde görülür. Basma kırıkları, oblik kırık modeliyle tanımlanır. Uzun kemik kırıkları genellikle burulma ve eğmeden kaynaklanır. Burulma kırıkları spiral oblik modeliyle tanımlanırken, eğme kırıkları genellikle "kelebek" parçaları oluşması ile tanımlanır. Kemik yorulması, yinelenen mekanik gerilmenin neden olduğu hasar, kırılmayı önlemek için kemiğin onarım yeteneğinden daha fazla olduğunda, kemik kırılması meydana gelir. Yorulmanın neden olduğu kemik kırıkları, profesyonel sporcular ve koşucular arasında yaygındır. Klinik olarak,

çoğu kemik kırığı, basit yükleme mekanizmalarından ziyade karmaşık, birleşik yükleme durumlarının bir sonucu olarak ortaya çıkar.

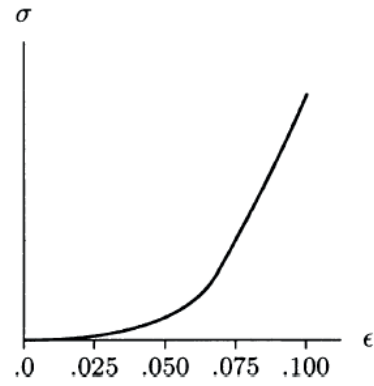
15.8 Tendonlar ve Ligamentler

Tendonlar ve ligamentler fibröz bağ dokulardır. Tendonlar, kaslardan kemiklere mekanik kuvvetler (gerilmeler) göndererek eklem hareketini sağlamaya yardımcı olur. Ligamentler kemiklere katılırlar ve eklemlerde stabilite sağlarlar. Aktif dokular olan ve mekanik kuvvetler üretebilen kaslardan farklı olarak, tendonlar ve ligamentler pasif dokulardır ve kuvvet üretmek için aktif olarak kasılamazlar.

İnsan vücudunun birçok ekleminde, birden fazla veya birkaç kas bağlamak için yeterli alan yoktur. Bu belirli bir görevi yerine getirmek için bir veya birkaç dar kesit alanlı kasların kemik eklemine daha yakın bölgelerde daha yoğun (gerilme) ve daha büyük olan yükleri üretme ve dayanma yükünü paylaşması gerekir. Kaslara kıyasla tendonlar daha serttir, daha yüksek çekme dayanımına sahiptir ve daha büyük gerilmelere dayanabilir. Bu nedenle, alanın sınırlı olduğu eklemlerin etrafında, kemiklerdeki kas bağlantıları tendonlar tarafından yapılır. Tendonlar, çok küçük deformasyonlar ile çok büyük yükleri destekleyebilir. Tendonların bu özelliği,

kasların tendonları germek için enerji harcamasına gerek olmadan kuvvetlerin kemiklere iletmesini sağlar.

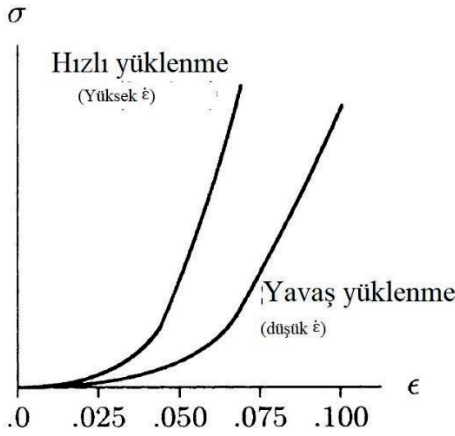
Tendonların ve ligamentlerin mekanik özellikleri, bileşimlerine göre önemli ölçüde farklılık gösterebilir. Tendonların ve ligamentlerin mekanik tepkisinin değerlendirilmesinde en yaygın yöntem tek eksenli çekme testidir. Şekil 15.26, tendonlar için tipik bir çekme gerilme-gerinim diyagramını göstermektedir. Bu eğrinin şekli, elastik elastin lifler ile viskoelastik kolajen lifler arasındaki etkileşimin sonucudur. Düşük gerinimlerde (yaklaşık 0,05'e kadar), daha sert elastik lifler baskındır, kolajen liflerinin kıvrımları düzleşir ve tendonun gerilmesi için çok az kuvvet gerektirir. Kıvrım düzleştirildiğinde tendon sertleşir. Aynı zamanda, kolajen liflerindeki sıvı benzeri zemin maddesi akışa eğilimlidir. Bu nedenle daha yüksek gerinimlerde kolajen liflerinin sert ve viskoelastik doğası uygulanan yükün artan kısmını almaya başlar. Tendonların vücutta 0,04'e kadar olan gerinimlerde işlev gördüğü tahmin edilmektedir, bunun onların akma gerinimi (ϵ_y) olduğuna inanılmaktadır. Tendonlar, yaklaşık 0,1 geriniminde (maksimum gerinim ϵ_u) veya yaklaşık 60 MPa gerilmeye (maksimum gerilme, σ_u) kopar.



Şekil 15.26 Tendonlar için çekme gerilmesi-gerinimi diyagramı

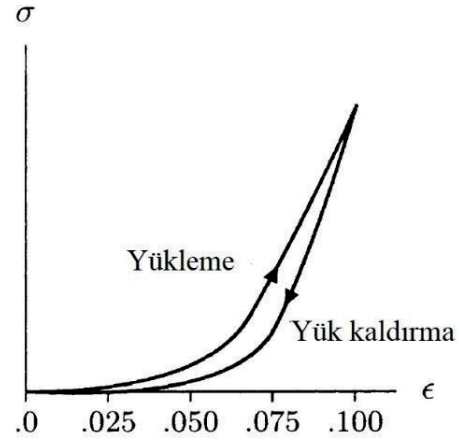
Şekil 15.26'daki gerilme-gerinim eğrisinde eğri altındaki alanın oldukça küçük olduğuna dikkat edin. Bir başka deyişle, tendonun bir gerilme seviyesine gerilmesi için tendonda depolanan enerji, doğrusal olarak elastik bir malzemeyi (düz bir çizgi gerilme-gerinim diyagramı ile) aynı gerilme seviyesine kadar gerginleştirmek için depolanan enerjiden çok daha küçüktür. Bu nedenle, tendon doğrusal elastik malzemelere göre daha esnektir.

Zamana bağlı, viskoelastik doğal tendon şekilleri Şekil 15.27 ve 15.28'de gösterilmiştir. Tendon hızla gerildiğinde, zemin maddenin akış şansı azdır ve sonuç olarak tendon sertleşir. Şekil 15.28'de gösterilen histerezis döngüsü, tendona zaman bağımlı yükleme ve yük kaldırma davranışını gösterir. Tendonu germek, tendonu rahat bırakıp eski haline dönmesine izin vermek için yapılan işten daha fazladır ve bu nedenle bu süreçte enerjinin bir kısmı yayılır.



Şekil 15.27 Tendon için gerilim oranına bağlı gerilme-gerinim eğrisi

Ligamentlerin mekanik rolü, kuvvetleri bir kemikten diğerine iletmektir. Ligamentler ayrıca iskelet eklemleri için stabilite sağlama rolüne de sahiptir. Ligamentlerin yapısı ve birleşimi, işlevlerine ve vücut içindeki konumlarına bağlıdır. Tendonlar gibi ligamentler de zemin madde ile çevrelenen kıvrımlı kolajen lifleri içeren kompozit malzemelerdir. Tendonlara kıyasla, yüksek uzayabilme ama düşük dayanım ve sertlikleri için daha yüksek miktarlarda elastik lif içerir. Ligamentlerin mekanik özellikleri, niteliksel olarak tendonların mekanik özelliklerine benzerdir. Tendonlar gibi viskoelastiktir ve histerezis gösterirler, ancak elastik olarak yaklaşık $\epsilon_y = 0,25$ (tendonların akma geriniminin yaklaşık beş katı) gerinimde ve yaklaşık 5 MPa gerilmelerde deformasyona uğrarlar. Yaklaşık 20 MPa'lık bir gerilmeye ise koparlar.



Şekil 15.28 Tendonun germe ve gevşetme modlarındaki histerezis döngüsü

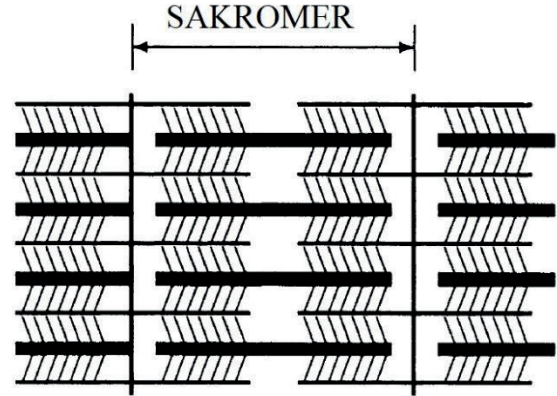
Tendonlar ve ligamentler viskoelastik olduğundan, onları germek için verilen enerjinin bir kısmı zemin madde içindeki sıvının akışına neden olarak yayılır ve geri kalan enerji gerilmiş dokuda saklanır. Tendonlar ve ligamentler sert malzemelerdir ve kolayca kopmazlar. Tendon ve ligamentlerin en sık görülen hasarları kemikle olan bağlantı noktalarında oluşur.

15.9 İskelet Kası

Üç tip kas vardır: iskelet, düz ve kalp. Düz kaslar iç organları, kalp kasları kalbi oluşturur. Burada, aponevrozlar ve/veya tendonlar vasıtasıyla birbirine tutturulmuş, en az iki kemiğin bir diğerine göre göreceli hareketine neden olan ve/veya kontrol eden iskelet kaslarının özellikleriyle ilgileniyoruz. Lifler, bir sinir uyarısı altında kasıldığında, kasın bağlandığı kemikler üzerinde bir çekme etkisi

uygular. *Kasılma*, kastaki çekme oluşumu olarak tanımlanan kas dokusunun eşsiz bir kabiliyetidir. Kas kasılması, kas kısalması (konsantrik kasılma) veya kas uzatma (eksantrik kasılma) sonucunda ortaya çıkabilir veya kas uzunluğunda herhangi bir değişiklik olmadan oluşabilir (statik veya izometrik kasılma).

İskelet kası, kas lifleri ve miyofibrillerden oluşur. Miyofibriller sırasıyla *aktin* ve *miyozin* proteinleri olmak üzere kasılabilir elementlerden oluşur. Aktin ve miyozin, bantlarda veya filamentlerde görülür. Nadir görülen kalın miyozin filamentleri, kasın kasılan elementlerinin temel yapısını oluşturmak üzere nispeten ince aktin filamentleri ile çapraz köprüler üzerinde etkileşime girer, bu basit yapıya *sarkomer* adı verilmektedir (Şekil 15.29). Birçok sarkomer elementi seri dizilim formunda kasın kasılma elementini (motor birimi) oluşturmak için birleşir. Kas kuvvetinin (gerilme) oluştuğu ve kasların kısaltıldığı ve uzatıldığı yer sarkomerdir. Kasın aktif kasılma unsurları, *fasya* adı verilen fibröz bir pasif bağ dokusu içerisinde bulunur. Fasya kasları kapatır, onları katmanlara ayırır ve onları tendonlara bağlar.



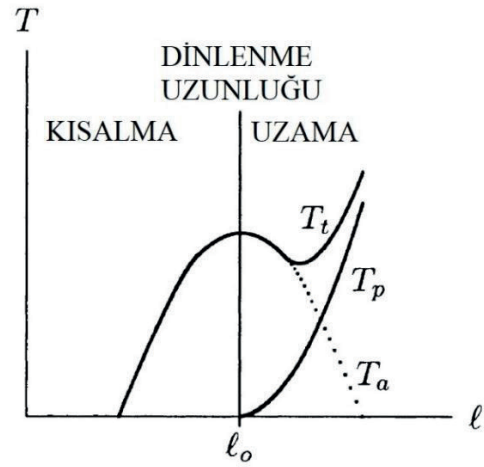
Şekil 15.29 Kasın kasılma elementlerinin basit yapısı (kalın çizgiler miyozin filamentleri, ince yatay çizgiler aktin filamentleri, çapraz tarama çizgileri çapraz köprüleri göstermektedir.)

Bir kas tarafından oluşturulan kuvvet ve moment, kas içindeki motor birimlerin sayısı, iş için kullanılan motor birim sayısı, kasın uzunluğunu değiştirme şekli, kas kasılma hızı ve kas kuvvetinin kol kolunun uzunluğu gibi birçok faktöre bağlıdır. Kaslarda iki farklı kuvvet görülebilir. *Aktif çekme gerilmesi*, kasın kasılan elemanları tarafından üretilen kuvvettir ve isteyerek yapılan kas kasılmalarının bir sonucudur. Öte yandan, *pasif çekme gerilmesi*, kas uzunluğu dinlenme uzunluğunu aştığında bağ dokusu içinde gelişmiş kuvvettir. Bir kastaki net çekme kuvveti, kasın hem aktif hem de pasif bileşenlerinin kuvvet-uzunluk özelliklerine bağlıdır. Kas uzunluğuna karşılık tipik çekme gerilmesi diyagramı Şekil 15.30'da gösterilmiştir. Filamentler arasındaki çapraz köprülerin sayısı maksimumdur ve bu nedenle

aktif çekme gerilmesi (T_a), kasın dinlenme uzunluğunda (l_0) maksimumdur. Kas uzarken filamentler birbirinden ayrılır, çapraz köprülerin sayısı azalır ve aktif çekme gerilmesi azalır. Tam uzunlukta çapraz köprüler yoktur ve aktif çekme gerilmesi sıfıra düşer. Kas kısaldığında çapraz köprüler çakışır ve aktif çekme gerilmesi tekrar azalır. Kas dinlenme uzunluğunda veya daha kısayken, kas pasif (bağlayıcı) bileşeni çekme gerilmesi olmadan gevşek bir durumdadır. Kas uzarken bağlayıcı dokularda pasif bir çekme gerilme kuvveti (T_p) oluşur. Bu pasif bileşenin kuvvet-uzunluk karakteristiği doğrusal olmayan yayınkine benzemektedir. Kas uzunluğu arttıkça pasif çekme gerilme kuvveti artar. Kaslar yoluyla iletilen genel, toplam veya net kas kuvveti (T_t), kasın aktif ve pasif elemanlarındaki kuvvetlerin toplamıdır. Belli bir kas için çekme gerilmesi-uzunluk diyagramı benzersiz değil, iş için kullanılan motor birimlerinin sayısına bağlı olduğu unutulmamalıdır. Kas kuvvetinin aktif bileşeninin büyüklüğü, kasın ne kadar uyarılmış olduğuna bağlı olarak değişiklik gösterebilir ve genellikle maksimum isteğe bağlı kasılmanın yüzdesi olarak ifade edilir.

Bir kasılma kası tarafından üretilen kuvvet genellikle bir tendon yoluyla bir kemiğe iletilir. Kuvvetlerin kaslardan kemiklere aktarımını tendonların yapması için fonksiyonel sebepler vardır. Kaslar, tendonlara kıyasla daha düşük

maksimum dayanıma sahiptir. Nispeten düşük maksimum dayanım, yırtmadan yeterince yüksek kuvvetleri iletmek için kasların nispeten geniş kesit alanlarına sahip olmasını gerektirir. Tendonlar bu işlevi yerine getirmek için daha iyi tasarlanmıştır.



Şekil 15.30 Kas kuvveti (T) – kas uzunluğu (l)

15.10 Artiküler Kartilaj

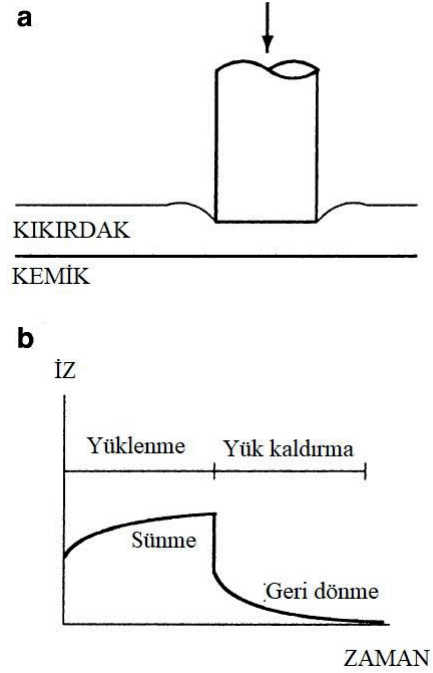
Kıkırdak, diarthrodial (sinoviyal) eklemlerde kemiklerin eklem yüzeylerini örter. Kıkırdakın temel fonksiyonu, eklemlerle kemiklerin göreceli hareketini kolaylaştırmaktır. Kıkırdak, eklem yüzeyleri arasındaki temas alanını arttırarak kemiklere uygulanan gerilmeleri azaltır ve sürtünme etkilerini azaltarak kemik aşınmasını azaltır.

Kıkırdak, yaklaşık %75'i su ve %25'i organik katıdan oluşan iki fazlı bir malzemedir. Kıkırdak malzemesinin katı fazının büyük bir kısmı kolajen liflerden oluşur. Geri kalan

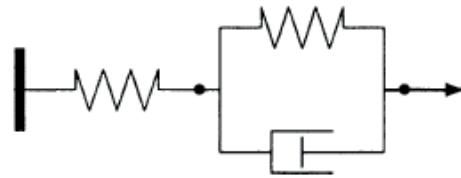
zemin etken madde esas olarak proteoglikandır (hidrofilik moleküller). Proteoglikanlar basmada güçlü iken, kolajen lifleri nispeten çekmede güçlü ve katıdır. Kıkırdak katı-akışkan bileşimi onu viskoelastik bir malzeme yapar.

Çeşitli yükleme koşulları altında kıkırdağın mekanik özellikleri çeşitli teknikler kullanılarak araştırılmıştır. Örneğin, insan patellasının basma yüklerine tepkisi, küçük bir silindirik veya yarı küresel çentik açıcı aygıtın eklem yüzeyine bastırıldığı bir *iz testi* kullanılarak araştırılmış ve ortaya çıkan deformasyon kaydedilmiştir. (Şekil 15.31a). İz testinin tipik bir sonucu Şekil 15.31b'de gösterilmiştir. Sabit büyüklükte bir yük uygulandığında, malzeme başlangıçta nispeten büyük bir elastik deformasyonla tepki verir. Uygulanan yük, dokular arasındaki sıvıda basınç gradiyent oluşmasına neden olur ve basınçtaki değişim, sıvının kıkırdak matrisinden içeri ve dışarı akmasına neden olur. Yük tutulduğu zaman deformasyon miktarı azalan bir oranda artar. Deformasyon, sıvı içerisindeki basınç değişiklikleri giderildiğinde denge durumuna eğilim gösterir. Uygulanan yük kaldırıldığında ani bir elastik geri dönme (geri tepme) olur ve bunu takiben geri dönmenin tamamlanmasına yol açan daha düzgün şekilde geri dönme tamamlanır. Kıkırdağın bu sünme geri dönme tepkisi, doğrusal yay ve seri bağlı bir Kelvin-Voight

biriminden oluşan üç parametrelili viskoelastik katı model (Şekil 15.32) ile niteliksel olarak gösterilebilir.



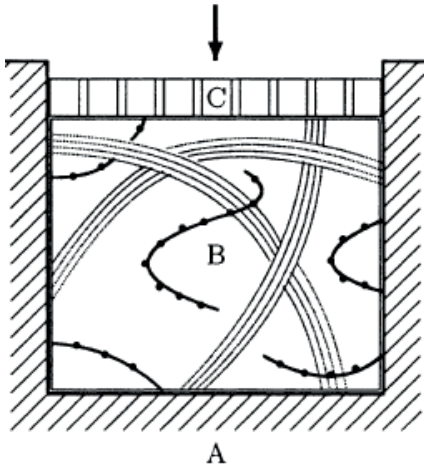
Şekil 15.31 İz testi



Şekil 15.32 Kıkırdağın sürünme-geri dönme davranışını temsil etmek için kullanılan standart katı model

Kıkırdağın basma yükü koşullarına tepkisini araştırmak üzere tasarlanan bir başka deney Şekil 15.33'te gösterilen *sınırlı basma testidir*. Bu testte, numune katı bir silindirik kalıp içine sınırlandırılıp katı geçirgen bir blok ile yüklenmiştir. Basma yükü, dokular arası

sıvıdaki basınç değişimlerine ve bunun sonucunda sıvı sızmasına neden olur. Sonunda basınç değişimleri dağılır ve denge sağlanır. Dengeye ulaşılan durum, kıkırdağın basma sertliğinin de bir göstergesidir. Kıkırdağın basma sertliği ve direnci, dokunun su ve proteoglikan içeriğine bağlıdır. Proteoglikan içeriği ne kadar yüksekse, dokunun basma direnci o kadar yüksektir.



Şekil 15.33 Sınırlandırılmış basma testi. A katı kalıp, B numune ve C'de geçirgen kalıp

Günlük aktiviteler sırasında eklem kıkırdağı, çekme ve kayma gerilmelerinin yanı sıra basma gerilmelerine de maruz kalır. Çekme gerilmesi altındaki kıkırdağ, dokuya uygulanan çekme yüklerini taşıyan kolajen liflerini yeniden hizalayarak tepki verir. Çekme sertliği ve dayanımı dokunun kolajen içeriğine bağlıdır. Kolajen içeriği ne kadar yüksek olursa, kıkırdağın çekme dayanımı o kadar yüksek olur. Eklem kıkırdağı üzerindeki kayma gerilmeleri, eklem yüzeylerinin göreceli

hareketi arasındaki sürtünme kuvvetlerinden kaynaklanmaktadır. Bununla birlikte, sinoviyal eklemler için sürtünme katsayısı o kadar düşüktür ki (0,001-0,06 arası) sürtünme, kıkırdağa etki eden stres sonuçları üzerine önemsiz bir etkiye sahiptir.

Yapısal (eklem içi kırık gibi) yapısal anatomik anomaliler (romatoid artrit ve asetabulum displazi gibi) hem kıkırdağın hasarına, hem de bozulmaya, yıpranmaya ve hasara neden olabilir. Bu anomaliler, mekanik özelliklerini değiştirerek eklem taşıma kapasitesini değiştirebilir. Kıkırdağın taşıma kapasitesinin önemi ve mekanik bütünlüğünün korunması, insan kalça eklemine yer alan kuvvetlerin büyüklüğünün sıradan yürüme sırasında vücut ağırlığının beş katı olduğunu düşünürsek netleşebilir (koşu veya atlama esnasında çok daha yüksektir). Bu kuvvetlerin uygulandığı kalça temas alanı yaklaşık 15 cm^2 'dir ($0,0015 \text{ m}^2$). Bu nedenle, 85 kg 'lık bir kişi için basma gerilmeleri (basınçlar) 3 MPa düzeyindedir.

15.11 Tartışma

Bu bölümde, seçilmiş biyolojik dokuların mekanik özelliklerini kısaca özetledik. Biyolojik dokuların mekanik özellik ve yapısal davranış bilgisinin, vücuttaki fizyolojik işlevlerinin deneysel ya da teorik analizleri için gerekli bir ön şart olduğuna inanıyoruz. Bu konuların her birinin doğru şekilde

kapsanmasının en azından tam bir bölüm hak ettiğinin farkındayız. Buradaki amacımız, biyolojik kavramların daha önce ortaya konan mekanik kavramlar açısından nasıl tanımlandığını göstermek ve ilgilenen okuyucunun konuyla ilgili bilgilerini geliştirmek için daha eksiksiz bilgi kaynaklarına başvurmasını umut etmek için bir özet sağlamaktır.

15.12 Örnek Problemler

Cevaplar bölüm sonundaki kısımda verilmiştir.

Problem 15.1 Aşağıdaki tanımları uygun ifadelerle tamamlayın.

- (a) Elastik malzemeler zamandan bağımsız malzeme davranışı göstermektedir. Elastik malzemeler, harici olarak uygulanan yüklere maruz kaldıklarında _____ deforme olurlar.
- (b) Zamana bağlı malzeme davranışı _____ olarak bilinir.
- (c) Esneklik katı malzeme davranışı iken _____ akışkan özelliğidir ve akışa direncin bir ölçüsüdür.
- (d) Bir viskoelastik malzeme için, gerilme sadece gerinmenin bir fonksiyonu değildir, aynı zamanda _____ fonksiyonudur.
- (e) _____ ve _____ sırasıyla elastik katı ve viskoz akışkan davranışlarını temsil etmek için kullanılan temel mekanik elemanlardır.
- (f) _____, paralel düzenle bağlanmış bir yay ve damperden oluşan viskoelastik bir modeldir.
- (g) _____, seri düzenle bağlanmış bir yay ve damperden oluşan viskoelastik bir modeldir.
- (h) _____, bir yay ve bir seri bağlı bir Kelvin-Voight katısından oluşan viskoelastik bir modeldir.
- (i) _____ testi, malzemeye bir yük uygulayarak, yükü bir müddet sabit bir seviyede tutarak, yükü aniden çıkararak ve malzeme tepkisi gözlemlenerek yapılır.
- (j) _____ testi, malzemenin gerinimini sabit bir seviyede tutarak malzemenin gerilme tepkisini gözlemleyerek gerçekleştirilir.
- (k) _____ testinde, malzeme üzerinde bir harmonik gerilme uygulanır ve malzemenin gerilme tepkisi gözlemlenir.
- (l) Yükleme ve yükü kaldırma yolları tarafından çevrelenen, ısı olarak dağılmış enerjiyi temsil eden bölgeye _____ denir.
- (m) Zaman bağlı davranışlarından dolayı, viskoelastik malzemelerin _____ olduğu söylenir.
- (n) Canlı dokular mühendislik malzemelerinden çok farklı özelliklere sahiptir. Örneğin, _____ ve _____.
- (o) Biyolojik dokuların ortak bileşenleri arasında _____ ve _____ lifleri, dokuların göründükleri mekanik

- davranışlarını etkileyen en önemli mekanik özelliklere sahiptir.
- (p) _____, lif haline getirilen kıvrımlı fibrillerden yapılmış bir proteindir.
- (q) _____, kauçuk özelliklerine benzeyen malzeme özellikli lifli bir proteindir.
- (r) Biyolojik anlamda kemik, vücudun çeşitli yapısal unsurlarını birbirine bağlayan _____ bir dokudur. Mekanik olarak, kemik çeşitli katı ve sıvı fazlara sahip _____ bir malzemedir.
- (s) _____ kemik dokusu, kemiklerin dış kabuğunu (korteks) ve uzun kemiklerin diafizyal bölgesini oluşturan yoğun bir malzemedir.
- (t) _____ kemik dokusu, kortikal kemik tarafından çevrelenen gevşek bir ağ yapısında ince tabaklardan (trabeküler) oluşur.
- (u) Kemik, _____ şekil değiştirme hızlarında daha sert ve daha güçlüdür.
- (v) Kortikal kemiğin çekme dayanımı, _____ yönde (osteon yönlendirme yönü) basma yükü altında en yüksek ve _____ yönde (longitudinal yöne dik olan yönde) çekme yükü altında en düşüktür.
- (w) Kemiklerin çekme mukavemeti paslanmaz çeliğin yüzde _____ az ve kemiğin sertliği çelik sertliğinin yaklaşık yüzde _____'dir.
- (x) Kortikal ve süngerimsi kemik dokularının kimyasal bileşimleri benzerdir. Süngerimsi kemiğin ayırt edici özelliği, _____.
- (y) _____, kastaki çekme gerilme gelişimi olarak tanımlanan kas dokusunun benzersiz bir özelliğidir.
- (z) _____ gerilme, kasın kasılan elemanları tarafından üretilen kuvvettir ve isteğe bağlı kas kasılmasının bir sonucudur ve _____ gerilme kas uzunluğu dinlenme uzunluğunu aştığında bağ dokusunda oluşur.

Problem 15.2 Aşağıdaki tanımları uygun ifadelerle tamamlayın.

- (a) Elastik bir malzeme için gerilme-gerimin ilişkisi zaman ve gerinim oranından _____.
- (b) Viskoelastik bir malzeme için gerilme ve gerininin malzeme üzerinde olduğu oranda, gerilme-gerinim ilişkisi _____.
- (c) Elastik bir cisim için, cismi deformasyona uğratmak için verilen enerji, cisim içerisinde _____ olarak depolanır. Bu enerji, gerilmenin kaldırılmasıyla cismi original boyutu ve şekline _____.
- (d) Yüklenme ve yük kaldırma esnasında _____ kaybı yoktur.
- (e) Viskoelastik bir kütle için cismin deformasyona uğraması için verilen enerjinin bir kısmı _____ olarak ve bir kısmı _____ olarak yayılır. Enerjinin _____ yoktur.

- (f) Neredeyse bütün biyolojik malzemeler _____ özelliklerini gösterir.
- (g) Kemiğin mekanik özelliklerini etkileyen faktörler, kemiğin içeriği, boyutu, geometrisi ve uygulanan kuvvetin _____, _____ ve _____'dür.
- (h) Kortikal kemik _____ yönünde _____ yönüne göre daha sağlam ve serttir.
- (i) Kemiğin yoğunluğu, kemiğin birim hacmindeki doku sayısının _____ olarak tanımlanır.
- (j) _____ gibi bazı iskelet koşulları, görünür yoğunluğunu azaltarak kemiğin iskelet bütünlüğünü azaltabilir.
- (k) Kemik yoğunluğundaki en ufak azalma, kemik _____ ve _____ yüksek miktarda azalma yaratır.
- (l) Kemik, kemiğin her hangi bir bölgesindeki gerilme kemiğin _____ ve _____'sinden daha fazla olduğunda kırılır.
- (m) Saf gerilme kuvvetlerinin neden olduğu kırıklar, _____ oranda _____ kemik dokusu bulunan kemiklerde gözlenir.
- (n) Kemik _____ ilerledikçe daha sert ve daha az sünek olur.
- (o) Kuru kemik _____ kemiğe göre daha sert, kuvvetli ve gevrektiler.
- (p) Kemik büyüdükçe uygulanan yüklere dayanımı _____.
- (q) Uzun kemiklerde kırılma genellikle _____ ve _____ sonucunda olur.
- (r) Tendonlar, mekanik kuvvetleri kaslardan kemiklere _____ eklem hareketini gerçekleştirmeye yardımcı olur.
- (s) Ligamentler kemikleri birbirine bağlar ve eklemlere _____ sağlar.
- (t) Tendonlar ve ligamentler _____ dokulardır ve kuvvet oluşturmak için aktif olarak kasılamazlar.
- (u) Tendonlar _____ kıyasla daha serttir, daha fazla çekme kuvvetine sahiptirler ve daha büyük gerilmelere dayanabilirler.
- (v) Tendonlar çok büyük yükleri çok az _____ ile destekleyebilirler.
- (w) Ligamentlerin mekanik rolü kuvvetleri bir kemikten diğerine _____'tır.
- (x) Ligamentlerin iskelet eklemleri için _____ rolü vardır.
- (y) Tendonlar ve ligamentlere en yaygın hasar kemiklerle olan _____ görülür.
- (z) Üç tür kas vardır; _____, _____ ve _____.

Problem 15.3 Aşağıdaki tanımları uygun ifadelerle tamamlayın.

- (a) Kaslar, bir kemiğin diğerine göre _____ neden olan ve / veya kontrol eden en az iki kemiğe aponeurozlar ve / veya tendonlar vasıtasıyla bağlanırlar.
- (b) Kaslar, bağlandıkları kemikler üzerinde _____ etkisi gösterirler.
- (c) Kaslar, _____ göre daha az çekme dayanımına sahiptirler.

- (d) Kıkırdağın birincil fonksiyonu eklemli kemiklerin _____ sağlamasıdır.
- (e) Kıkırdak, kemikler üzerine uygulanan _____ eklem yüzeyleri arasındaki _____ kontakını artırarak azaltır.
- (f) Kıkırdak, eklem yüzeyleri arasındaki _____ etkisini azaltarak kemik aşınmasını azaltır.
- (g) Günlük hareketler esnasında eklem kıkırdağı çekme ve kayma gerilmesi ve _____ gerinimine maruz kalır.

Cevaplar

Problem 15.1'in cevapları:

(a) ani olarak	(n) kendini uyarlayan, kendi kendini iyileştiren
(b) viskoelastisite	(o) kolajen, elastin
(c) viskozite	(p) Kolajen
(d) gerinim hızı veya zamanı	(q) Elastin
(e) yay, damper	(r) bağlayıcı, kompozit
(f) Kelvin-Voight	(s) kortikal veya kompakt
(g) Maxwell	(t) süngerimsi veya trabeküler
(h) standart katı	(u) daha yüksek
(i) sürünme ve geri dönme	(v) longitudinal, transverse
(j) gerilme gevşemesi	(w) 10, 5
(k) salınımlı tepki	(x) gözeneklilik
(l) histerezis döngüsü	(y) Kasılma
(m) hafıza	(z) Aktif, pasif

Problem 15.2'nin cevapları:

(a) bağımsız	(n) yaş
(b) bağımlı	(o) yaş
(c) potansiyel enerji, geri dönme	(p) daha çok
(d) enerji	(q) burulma, eğme
(e) potansiyel enerji, ısı, kayıp	(r) aktararak
(f) viskoelastik	(s) stabilite
(g) yön, büyüklük, oran	(t) pasif
(h) dik, transverse	(u) kaslar
(i) kütle	(v) deformasyon
(j) osteoporosis	(w) ötelemek
(k) dayanım, sertlik	(x) denge sağlayıcı
(l) en büyük dayanım	(y) bağlantılarında
(m) büyük, süngerimsi	(z) iskelet, düz, kalp

Problem 15.3'ün cevapları:

- (a) Görece hareket
 (b) Çekme
 (c) Tendonlar
 (d) Görece hareket
 (e) Gerilme, alan
 (f) Sürtünme
 (g) Basma

EK A:

DÜZLEM GEOMETRİSİ

A.1 Açılar

A.2 Üçgenler

A.3 Sinüs Teoremi

A.4 Kosinüs Teoremi

A.5 Dik Üçgen

A.6 Pisagor Teoremi

A.7 Sinüs, Kosinüs ve Tanjant

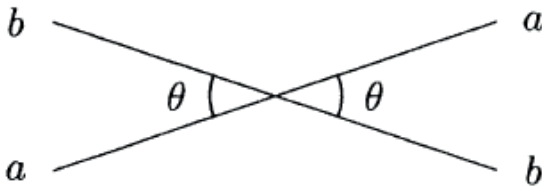
A.8 Ters Sinüs, Kosinüs ve Tanjant

A.9 Çalışma Problemleri

A.1 Açılar

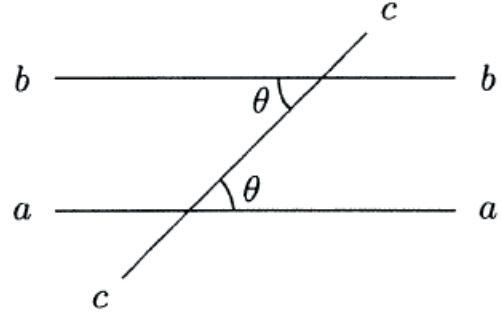
Geometride, temel yapı elemanı *doğrudur*. Doğru dediğimizde doğrunun düz ve sonsuz uzunlukta olduğunu varsayalım. İki nokta bir hat üzerinde birbiri ile belirli bir mesafe uzaklıktaysa, sonlu uzunluğa sahip bir doğru segmentini oluşturur. Doğrular kesiştiğinde *açı* oluştururlar.

Şekil A.1'de *aa* ve *bb* düz doğrularının kesişimi ile oluşan açılar θ olarak tanımlanan eşit açılardır ve *ters açılar* olarak adlandırılır. Eğer iki doğru birbirine dik ise, o zaman oluşan açılara *dik açı* denir. Dik açı 90° eşittir. Grafikselsel olarak, dik açılar genellikle küçük kare kutular ile gösterilir. 90° 'den küçükse bir açı *dar* olarak adlandırılır ve 90° 'den büyük ise *geniş* açı olarak adlandırılır.



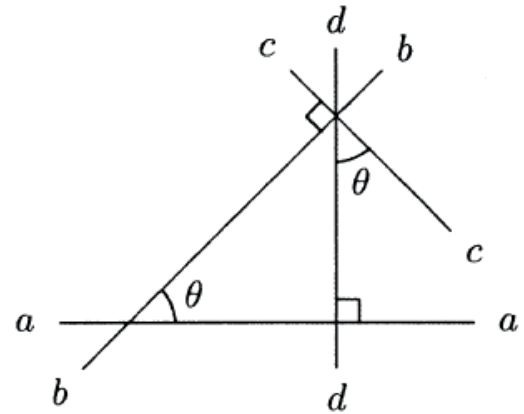
Şekil A.1 Ters Açılar

Şekil A.2'de θ olarak tanımlanan açılar eşittir ve *(iç/dış) ters açılar* olarak adlandırılır. Bu açılar, *cc* düz doğrusu tarafından kesilen iki paralel düz doğru *aa* ve *bb*'de oluşmaktadır.



Şekil A.2 (İç/Dış) Ters Açılar

Şekil A.3'de θ olarak tanımlanan açılar eşittir. Bu durumda, *cc* düz doğrusu *bb*'ye diktir ve *dd*'de *aa*'ya diktir. Şekil A.3'te gösterilen geometri, örneğin, eğimli yüzeyler üzerindeki hareketleri analiz ederken, fizik ve mekanik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür analizler için, *aa* yatayı temsil eder, *bb* yatay bir açı ile θ eğim yapan eğimli yüzeyi temsil eder, *cc* eğimli yüzeye diktir ve *dd* dikeyi temsil eder.

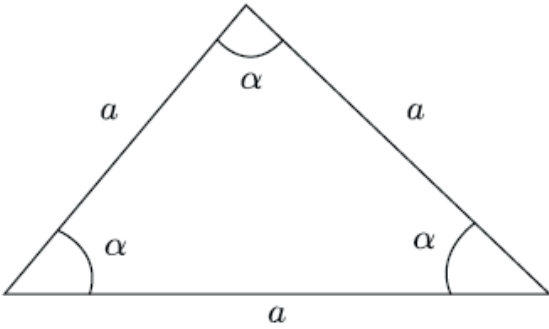


Şekil A.3 *bb* ve *cc* doğruları, *aa* ve *dd* doğruları birbirlerine diktir

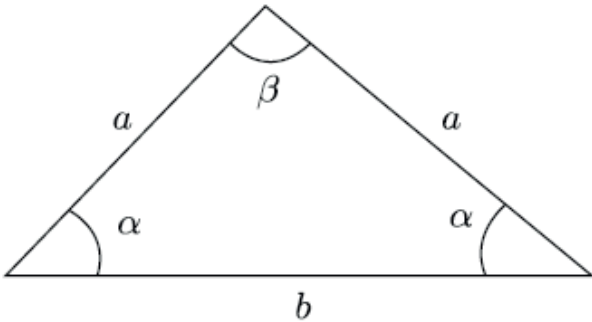
A.2 Üçgenler

Geometrik bir şekil olan *üçgen*, üç kenarlı ve üç iç açıdır. Üçgenin farklı tipleri vardır; eşkenar, ikizkenar, çeşitkenar ve dik üçgen. *Eşkenar* üçgenin üç kenarı da eşit uzunluktadır (Şekil A.4). Eşkenar üçgenin üç iç açısı da eşit büyüklüktedir. Eşit uzunlukta en az iki kenarı olan bir üçgene bir *ikizkenar* üçgen denir (Şekil A.5). İkizkenar üçgeninde iki eşit tarafın karşısındaki açıları birbirine eşittir. Çeşitli uzunluklarda üç kenarı olan bir üçgene *çeşitkenar* üçgen denir (Şekil A.6). Herhangi bir üçgen için iç açıları toplamı 180° 'dir. Çeşitkenar üçgen durumu için:

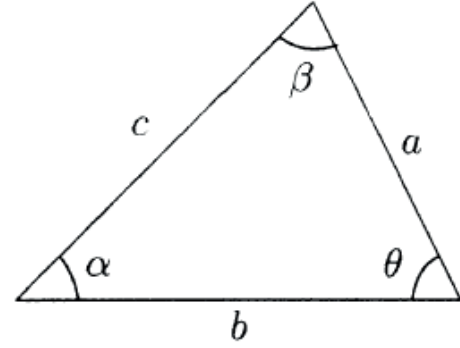
$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$



Şekil A.4 Eşkenar Üçgen



Şekil A.5 İkizkenar Üçgen



Şekil A.6 Çeşitkenar Üçgen

A.3 Sinüs Teoremi

Şekil A.4'teki gibi herhangi bir üçgen için, üçgenin açıları ve kenarları, aşağıda belirten *sinüs teoremi* ile bağlantılıdır:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \theta}{c} \quad (A.1)$$

Sinüsün tanımı (sin olarak kısaltılır) bölüm A.7'de verilmiştir.

A.4 Kosinüs Teoremi

Şekil A.6'daki gibi herhangi bir üçgen için, üçgenin iki yüzü (örneğin a ve b) ve aralarındaki açı (θ) biliniyorsa, bilinmeyen üçüncü kenar (c) kosinüs teoremini uygulayarak bulunabilir:

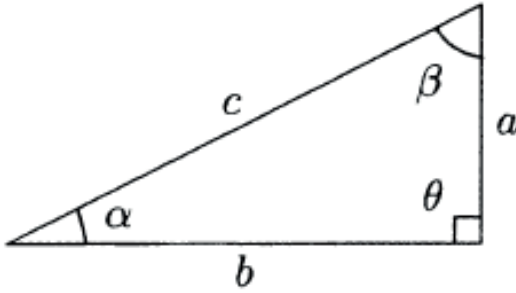
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (A.2)$$

Kosinüsün tanımı (cos olarak kısaltılır) bölüm A.7'de verilmiştir.

A.5 Dik Üçgen

Bir üçgenin açılarından biri 90° 'ye eşitse bu üçgen dik üçgendir. Şekil A.7'de gösterilen dik üçgen için, θ açısı 90° 'ye eşittir ve kalan açıların toplamı da 90° 'ye eşittir:

$$\theta = \alpha + \beta = 90^\circ$$



Şekil A.7 Dik Üçgen

Şekil A.6'da, dik açının karşısındaki üçgenin c kenarı (açı θ) hipotenüs olarak adlandırılır ve dik üçgenin en uzun kenarıdır. θ açısına göre a *karşı* tarafın, b *komşu* tarafın uzunluğudur. Dik üçgeni oluşturan iki kenar sııklıkla dik üçgenin *dik kenarları* olarak adlandırılır.

A.6 Pisagor Teoremi

Pisagor teoremi, bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunun karesinin, dik üçgenin diğer kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamına eşit olduğunu belirtir:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (A.3)$$

İki tarafın karekökü alındığında:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (A.4)$$

A.7 Sinüs, Kosinüs ve Tanjant

Bir dik üçgende bir dar açının (dik açı dışındaki açıların) sinüsü, karşı kenarın ve hipotenüsün uzunluklarının oranına eşittir. Şekil A.7'deki dik üçgen için:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \quad (A.5)$$

Dik üçgende dar açının kosinüsü, komşu kenarın ve hipotenüsün uzunluklarının oranıdır:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad (A.6)$$

Şekil A.7'deki α açısının sinüsü, β açısının kosinüsüne eşit olduğunu ve α açısının kosinüsünün, β açısının sinüsüne eşit olduğunu not edin. Ayrıca (A.5) ve (A.6) denklemleri α açısı için alternatif olarak şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha \\ b &= c \cos \alpha \end{aligned} \quad (A.7)$$

Dahası denklem (A.7) 'deki a ve b'nin kareleri alınıp denklem (A.2)'de toplanırsa:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= (c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 \\ c^2 &= c^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemin iki tarafını c^2 ile bölünürse önemli bir trigonometrik kimlik kazanacaktır:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (A.8)$$

Dik üçgende dar açının tanjantı, karşı ve komşu kenarın uzunluklarının oranıdır:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} \quad (\text{A.9})$$

Seçilen birkaç açının sinüsü, kosinüsü ve tanjantı Tablo A.1'de listelenmiştir. Bir açının tanjantının aynı zamanda o açının sinüs ve kosinüs oranına eşit olduğunu unutmayın:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (\text{A.10})$$

Tablo A.1 Seçilmiş açılarının sinüs, kosinüs ve tanjant değerleri

Açı	sin	cos	tan
0°	0,000	1,000	0,000
30°	0,500	0,866	0,577
45°	0,707	0,707	1,000
60°	0,866	0,500	1,732
90°	1,000	0,000	

Bir dik üçgenin iki kenarı ya da dar açılarından biri biliniyorsa tanımlanabilir. Kalan kenarlar ve açılar trigonometrik kurallar kullanılarak bulunabilir.

A.8 Ters Sinüs, Kosinüs ve Tanjant

Bazen bir açının sinüsü, kosinüsü veya tanjantı biliniyor ve amaç açının kendisinin belirlenmesidir. Bu amaçla, ters sinüs, kosinüs ve tanjant şöyle tanımlanır:

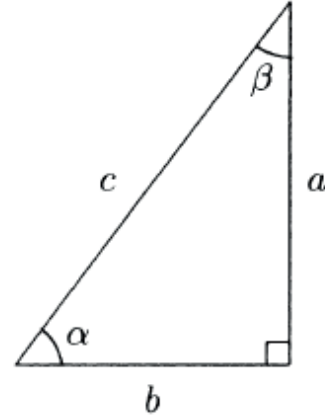
$$\text{Eğer } \sin \alpha = A, \quad \alpha = \sin^{-1}(A)$$

$$\text{Eğer } \cos \alpha = B, \quad \alpha = \cos^{-1}(B)$$

$$\text{Eğer } \tan \alpha = C, \quad \alpha = \tan^{-1}(C)$$

Ters sinüs, kosinüs ve tanjant alternatif olarak sırasıyla arcsin, arccos ve arctan olarak kısaltılmış olan ark sinüs, ark kosinüs ve ark tanjant olarak adlandırılır.

Örnek A.1 Şekil A.8'de gösterilen dik üçgen için $a = 4$ ve $b = 3$ 'dür. α ve β açılarını ve hipotenüs c kenarının uzunluğunu hesaplayın.



Şekil A.8 Örnek A.1 ve A.2

Çözüm:

Denklem (A.4)'den;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A ve b'yi sayısal değerlerini ile değiştirip hesaplamaları yapın;

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

α açısının kosinüsü;

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Her iki tarafın ters kosinüsü alınırsa;

$$\alpha = \cos^{-1}(0,6) = 53,13^\circ$$

β açısının kosinüsü;

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} = 0,8$$

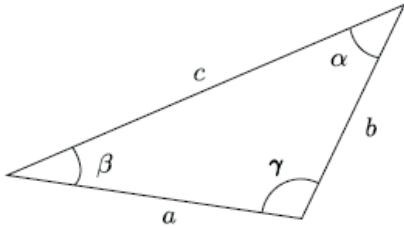
Her iki tarafın kosinüsü alınırsa;

$$\beta = \cos^{-1}(0,8) = 36,87^\circ$$

Sonuçların doğru olduğunu kontrol edin;

$$\alpha + \beta = 53,13^\circ + 36,87^\circ = 90^\circ$$

Örnek A.2 Şekil A.8’de gösterilen dik üçgen için $b = 2$ ve $\alpha = 30^\circ$ ’dir. β açısı ve a ve c kenarlarının uzunluklarını hesaplayın.



Şekil A.9 Problem A.1, A.2 ve A.3

Çözüm:

Dik üçgenin dar açılarının toplamı 90° olmak zorundadır. Bu nedenle;

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

α açısının kosinüsü;

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

c ile her iki taraf çarpılıp $\cos \alpha$ ‘a bölünürse;

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

b ve α sayısal değerleri ile yer değiştirilirse;

$$c = \frac{2}{\cos 30} = \frac{2}{0,866} = 2,31$$

α açısının tanjantı;

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Her iki taraf b ile çarpılırsa;

$$a = b \tan \alpha$$

b ve α sayısal değerleri ile yer değiştirilirse;

$$a = (2) \tan 30^\circ = (2)(0,577) = 1,15$$

Sonuçların doğruluğunu kontrol edin;

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1,15^2 + 2^2 = 2,31^2$$

$$5,3 = 5,3$$

Örnek A.3 Bir dik üçgende iki kenarın uzunluğu birbirine eşitse ($a = b = 5$), hipotenüsü c ve her iki kenarın da hipotenüs ile yaptığı α ve β açılarını belirleyiniz.

Çözüm:

Herhangi bir dik üçgen için dar açılarının toplamı 90° ’ye eşit olmalıdır. Ayrıca a ve b kenarları birbirine eşit olduğu sürece, α ve β açıları da a ve b kenarlarının karşısında oldukları için birbirlerine eşittirler. Bu nedenle;

$$\alpha = \beta = 1/2 \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Denklem (A.4) kullanılarak;

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

a ve b sayısal değerleri denklemde yerine konulduğunda;

$$c = \sqrt{(25^2 + 25^2)} = \sqrt{50} = 7,07$$

Örnek A.4 Şekil A.6'da gösterilen çeşitkenar üçgen için $a = 3,5$, $b = 5,0$ ve $\alpha = 43^\circ$ ise β , θ açılarını ve c kenarının uzunluğunu belirleyiniz.

Çözüm:

Denklem (A.1)'den;

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

Bu nedenle;

$$b \sin \alpha = a \sin \beta$$

ve;

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

Denklemde a , b değerleri ve α açısı yerine konulduğunda;

$$\sin \beta = \frac{5,0 \sin 43^\circ}{3,5} = 0,97$$

O halde;

$$\beta = [(\sin)]^{-1}(0,97) = 75,9^\circ$$

Ayrıca üçgenin iç açılarının toplamı 180° 'ye eşit olması gerekmektedir. O halde;

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ &= 180^\circ - (43^\circ + 75,9^\circ) \\ &= 180^\circ - 118,9^\circ = 61,1^\circ \end{aligned}$$

Denklem (A.1)'den;

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \theta}{c}$$

Bu nedenle;

$$c \sin \alpha = a \sin \theta$$

ve;

$$c = \frac{a \sin \theta}{\sin \alpha}$$

Denklemde a değeri ve α ve θ açıları yerine konulduğunda;

$$c = \frac{3,5 \sin 61,1^\circ}{(\sin 43^\circ)} = 4,5$$

Sonuçların doğruluğunu kontrol edin;

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \theta}{c}$$

$$c \sin \beta = b \sin \theta$$

$$c = \frac{b \sin \theta}{\sin \beta} = \frac{5 \sin 61,1^\circ}{\sin 75,9^\circ} = 4,5$$

Örnek A.5 Şekil A.6'da gösterilen çeşitkenar üçgen için $a = 4,5$, $b = 4,0$ ve $c = 5,5$ ise θ açısını belirleyiniz.

Çözüm:

Denklem (A.2)'den;

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Bu nedenle;

$$2ab \cos \theta = a^2 + b^2 - c^2$$

O halde;

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Denklemden a , b ve c değerleri yerine konulduğunda;

$$\cos \theta = \frac{[(4,5)]^2 + [(4,0)]^2 - [(5,5)]^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = 0,17$$

Her iki tarafında ters kosinüsü alındığında;

$$\theta = [(\cos)]^{-1}(0,17) = 80,2^\circ$$

A.9 Çalışma Problemleri

Problem A.1 Şekil A.9'da gösterilen çeşitkenar üçgen için $a = 3,5$ $b = 2,0$ ve $\gamma = 130^\circ$ ise c kenarını α ve β açılarını hesaplayın.

$$\text{Cevaplar: } c = 5,02 \quad \alpha = 32,3^\circ \quad \beta = 125,4^\circ$$

Problem A.2 Şekil A.9'da gösterilen çeşitkenar üçgenin kenarları $a = 9$ $b = 6$ ve $c = 13,4$ ise üçgenin α , β ve γ iç açılarını hesaplayın.

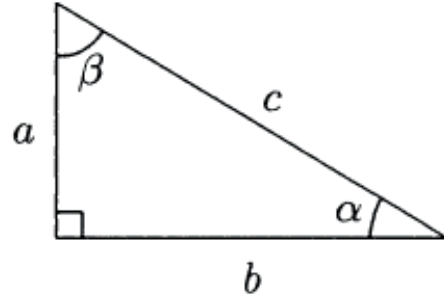
$$\text{Cevaplar: } \alpha = 32,3^\circ \quad \beta = 21,4^\circ \quad \gamma = 125,4^\circ$$

Problem A.3 Şekil A.9'da gösterilen çeşitkenar üçgen için $a = 15$ $\beta = 27^\circ$ ve $\alpha = 36^\circ$ ise b , c kenarlarını ve γ açısını hesaplayın.

$$\text{Cevaplar: } b = 11,6 \quad c = 27,7 \quad \gamma = 117^\circ$$

Problem A.4 Şekil A.10'da gösterilen dik üçgenin hipotenüsü $c = 16,3$ ve $\alpha = 38^\circ$ ise dik açının bilinmeyen iki kenarını hesaplayın.

$$\text{Cevaplar: } a = 10,04 \quad b = 12,8$$



Şekil A.10 Problem A.4, A.5 ve A.6

Problem A.5 Şekil A.10'da gösterilen dik üçgenin kenarları $a = 3,2$ ve $b = 5,6$ ise hipotenüsü c , α ve β açılarını hesaplayın.

$$\text{Cevaplar: } c = 6,5 \quad \alpha = 29,7^\circ \quad \beta = 60,3^\circ$$

Problem A.6 Şekil A.10'da gösterilen dik üçgenin hipotenüsü $c = 12$ α ve β açıları birbirlerine eşitse a ve b kenarlarını, α ve β açılarını hesaplayınız.

$$\text{Cevaplar: } a = b = 8,5 \quad \alpha = \beta = 45^\circ$$

Problem A.7 Şekil A.6'da gösterilen çeşitkenar üçgen için b kenarının uzunluğu $6,5$ ve $\alpha = 43^\circ$ $\theta = 65^\circ$ ise, a ve c kenarlarını ve bu iki kenar arasındaki β açısını bulunuz.

$$\text{Cevaplar: } a = 5,88 \quad b = 5,2 \quad \beta = 62^\circ$$

Problem A.8 Şekil A.7’de gösterilen dik üçgen için hipotenüs $c = 6,0$ ve $\tan \alpha = 0,577$ ise a ve b kenarlarını ve β açısını belirleyiniz.

Cevaplar: $a = 3,0$ $b = 5,2$ $\beta = 60^\circ$

Problem A.9 Şekil A.5’de gösterilen ikizkenar üçgen için $b = 12,0$ ve karşısındaki açı $\beta = 120^\circ$ ise diğer iki kenarın uzunluklarını ve üçgenin iç açılarını bulunuz.

Cevaplar $a = 6,93$ $\alpha = 30^\circ$

Problem A.10 Şekil A.5’de gösterilen ikizkenar üçgen için $a = 4,5$ ve β açısı 55° ise b kenarını ve α açısını belirleyiniz.

Cevaplar $b = 3,9$ $\alpha = 70^\circ$

Problem A.11 Şekil A.6’da gösterilen çeşitkenar üçgende b kenarının uzunluğu $4,6$ ve α ve θ açıları sırasıyla 36° ve 78° ise a ve c kenarlarının uzunluğu ile β açısını hesaplayınız.

Cevaplar $a = 2,96$ $c = 3,17$ $\beta = 66^\circ$

EK B:

VEKTÖR MATEMATİĞİ

B.1 Tanımlar

B.2 Notasyon

B.3 Bir Vektörün Skaler Çarpımı

B.4 Negatif Vektör

B.5 Vektörlerin Eklenmesi: Grafik Metodu

B.6 Vektörlerin Çıkarılması

B.7 İki'den Fazla Vektörün Toplanması

B.8 Vektörlerin İzdüşümü

B.9 Vektörlerin Bileşenlerine Ayrılması

B.10 Birim Vektör

B.11 Dikdörtgensel Koordinatlar

B.12 Vektörlerin Toplanması: Trigonometrik Metot

B.13 Vektörlerin Üç Boyutlu Bileşenleri

B.14 Vektörlerin Nokta (Skaler) Çarpımı

B.15 Vektörlerin Kros (Vektörel) Çarpımı

B.16 Alıştırma Problemleri

B.1 Tanımlar

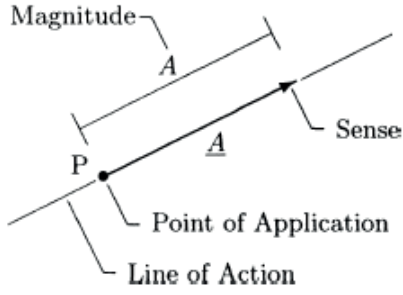
Mekanikteki kavramların çoğu ya skaler ya da vektördür. Skaler nicelik sadece büyüklüğe sahiptir. Kütle, enerji, güç, mekanik iş ve sıcaklık gibi kavramlar skaler niceliklerdir. Örneğin, bir nesnenin 80 kilogram (kg) kütlesi olduğunu söylemek büyüklüğünü belirtmek için yeterlidir. Diğer taraftan, vektör niceliği hem büyüklüğü hem de onunla ilgili bir yön belirtir. Kuvvet, moment, hız ve ivme vektörel niceliklere örneklerdir. Bir kuvveti tam olarak tanımlamak için, ne kadar kuvvet uygulandığını ve hangi yönde uygulandığını belirtmek gerekir. Bir vektörün büyüklüğü, her zaman pozitif bir sayı olan skaler bir büyüklüktür.

Hem skalerlerin hem de vektörlerin tensörler olarak adlandırılan mekaniğin tüm nicelikleri için daha genel bir kategorinin özel formları olduğuna dikkat edilmelidir. Skalerler “sıfırıncı dereceden tensörler” olarak da adlandırılırken, vektörler “birinci dereceden tensörler” dir. Öte yandan gerilme ve gerinme gibi kavramlar “ikinci dereceden tensörler”dir. Bu tanımda, 3^n içindeki n mertebesi güce karşılık gelir. Skaler büyüklükler için n sifira eşittir yani $3^0=1$ dir ya da skaler büyüklük için bir büyüklüğü tanımlamak gerekir. Vektörel büyüklük için n bire eşittir yani $3^1 = 3$ tür. Yani, üç boyutlu uzayda bir vektörü tanımlamak için üç nicelik (3 yöndeki bileşenler) gereklidir. Diğer taraftan ikinci

dereceden tensörler için n ikidir, $3^2 = 9$, gerilim ve gerinim gibi kavramları tanımlamak için 9 nicelik (üç düzlemde üç bileşen) gereklidir.

B.2 Notasyon

Vektör büyüklüğünü göstermek için kullanılan çeşitli notasyonlar vardır. Bu kitapta alt indisleri olan harfleri kullanacağız. Örneğin, \underline{A} vektörel büyüklüğü temsil ederken altında çizgi bulunmayan A skaler büyüklüğü ifade etmek için kullanılacaktır. Grafikselleştirilmiş çözümlerde genellikle vektörler genellikle Şekil B.1 de gösterildiği gibi oklarla temsil edilir. Okun yönü vektörün eylem çizgisini gösterir. Okun ucu kendi hareket çizgisi boyunca vektörün yönünü gösterir. Örneğin eğer vektör uygulanan bir kuvveti temsil ediyorsa, o zaman okun tabanı (kuyruğu), kuvvet vektörünün uygulama noktasına karşılık gelir. Tek bir çizim içinde eğer birden fazla vektör gösterimine ihtiyaç var ise her bir ok uzunluğu, temsil ettiği vektörün büyüklüğü ile orantılı olmalıdır. Bir vektör niceliğinin büyüklüğü her zaman bu niceliğin sayısal ölçüsüne karşılık gelen pozitif bir sayıdır. Bir vektör niceliğinin büyüklüğüne atıfta bulunmanın iki yolu vardır: ya alt çubuğu düşürerek (\underline{A}) ya da vektör niceliğini mutlak işareti olarak bilinen ($|A|$) bir dizi dikey çizgi ile kapatarak.



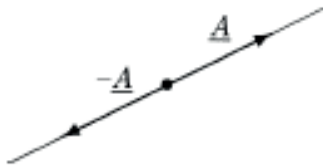
Şekil B.1 \underline{A} vektörünün grafiksel gösterimi

B.3 Bir Vektörün Skaler Çarpımı

Büyüklüğü A ve skaler büyüklüğü m olan bir \underline{A} vektörü olsun. $m\underline{A}$ yeni bir vektöre eşit olacaktır, $\underline{B} = m\underline{A}$, bu yeni vektörün yönü \underline{A} ile aynı ancak büyüklüğü \underline{A} vektörünün m ile çarpımına eşit yeni bir vektör olacaktır. Örneğin, eğer $m=2$ olursa \underline{B} vektörünün büyüklüğü \underline{A} vektörünün iki katı büyük olacaktır.

B.4 Negatif Vektör

\underline{A} büyüklüğü A olan bir vektör olsun. $-\underline{A}$ negatif vektör olarak adlandırılır ve bu vektör \underline{A} vektöründen farklıdır, $-\underline{A}$ vektörünün yönü \underline{A} vektörünün yönünün tersinedir (Şekil B.2). Vektör büyüklükleri pozitif skaler nicelikler olduğundan, \underline{A} ve $-\underline{A}$ 'nın her ikisi de A 'ya eşit büyüklüğe sahiptir. Bu nedenle vektörler için negatif işaret yön değiştirmeyi ifade eder ve vektörün büyüklüğü ile ilgisi yoktur.

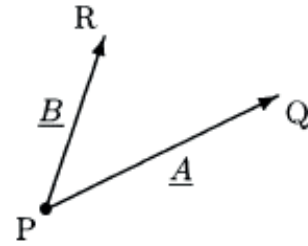


Şekil B.2 Negatif vektör

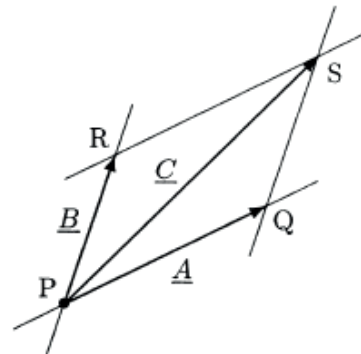
B.5 Vektörlerin Eklenmesi: Grafik Metodu

İki veya daha fazla vektörü grafiksel olarak eklemenin iki yolu vardır: paralelkenar ve üçgen veya uç uca ekleme yöntemi. Şekil B.3'te verilen \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini ele alalım. \underline{A} vektörü Q noktasını \underline{B} vektörü R noktasına doğru işaret eder. Bir vektörün ucunun diğer vektörün ucuna paralel şekilde çizgi çekilmesi ve bunu diğer vektör içinde uygulanması paralelkenar yapımını içerir. Eğer S bu paralel çizgilerin kesişme noktasına karşılık gelirse, P noktasından S'ye doğru çekilen bir ok \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin toplamına eşit olan bir vektörü temsil eder (Şekil B.4). Bu şekilde elde edilen üçüncü vektör bileşke ya da net vektör olarak adlandırılır. Şekil B.4'te elde edilen vektör, matematiksel olarak ifade edilebilen \underline{C} olarak tanımlanır:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} \quad (\text{B.1})$$

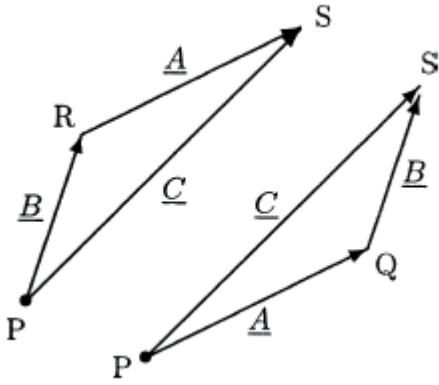


Şekil B.3 \underline{A} ve \underline{B} vektörleri



Şekil B.4 Paralel kenar

İki vektörün üçgen veya uç uca ekleme yöntemi ile toplanması grafiksel olarak Şekil B.5'te gösterilmiştir. Bu durumda, yönünü değiştirmeden, eklenecek vektörün kuyruk kısmı diğer vektörün uç kısmına eklenir. Bu ekleden sonra ilk vektörün kuyruk kısmından diğer vektörün uç kısmına çizilen çizgi bileşke vektörü gösterir.



Şekil B.5 Uç uca ekleme yöntemi

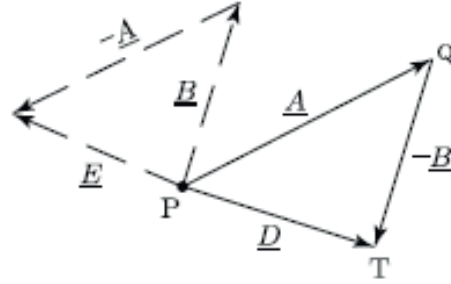
Vektör toplaması yapılırken, vektörlerin görünüm sırasının rastgele yapılabileceğine dikkat edin. Yani vektörlerin eklenmesi değişkenlik gösterebilen bir işlemdir. Aynı \underline{A} ve \underline{B} 'nin toplamı ve aynı vektörlerin \underline{B} ve \underline{A} 'nın toplamı yine \underline{C} vektörüdür:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} = \underline{C} \quad (\text{B.2})$$

B.6 Vektörlerin Çıkarılması

Bir vektörün diğerinden çıkarılması, herhangi bir vektörün negatifi yani aynı büyüklükte ters yönde olan vektör kullanılarak kolayca yapılabilir. Örneğin Şekil B.6'da gösterildiği

gibi \underline{A} 'dan vektör \underline{B} 'yi çıkartmak için $-\underline{B}$ vektörü \underline{A} vektörüne eklenerek bileşke vektör hesaplanır.



Şekil B.6 $\underline{D} = \underline{A} - \underline{B}$, $\underline{E} = \underline{B} - \underline{A}$

\underline{A} vektörünün \underline{B} vektöründen çıkarılmasının da benzer bir yaklaşımı takip ettiğini unutmayın. Eğer \underline{D} ve \underline{E} iki vektör ise

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{D},$$

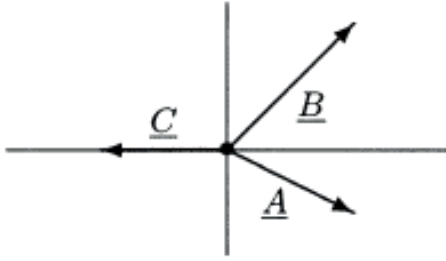
$$\underline{B} - \underline{A} = \underline{E},$$

yani

$\underline{A} - \underline{B} = -(\underline{B} - \underline{A})$, \underline{D} ve \underline{E} vektörlerinin büyüklükleri birbirine eşittir ($D = E$) ama ters yönlüdürler ($\underline{D} = -\underline{E}$)

B.7 İki'den Fazla Vektörün Toplanması

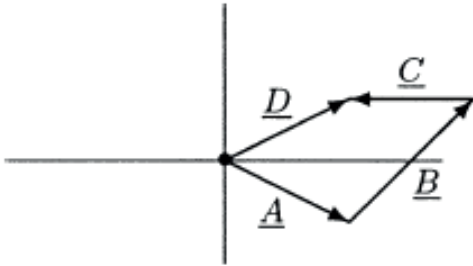
Şekil B.7'de gösterildiği gibi iki boyutlu bir düzlem üzerinde \underline{A} , \underline{B} ve \underline{C} olmak üzere üç vektör olsun. Bu üç vektörün toplanmasında farklı yöntemler vardır. Vektörlerin birbirlerine eklenmesi değişkenlik gösteren bir işlem olduğundan, eklenen vektörlerin hangi sıra ile eklendiği bileşke vektörü etkilemez.



Şekil B.7 Üç vektörler

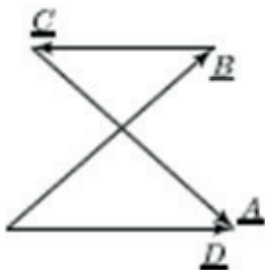
Şekil B.7’ de gösterilmiş olan vektörler, Şekil B.8’de gösterildiği gibi uç uca ekleme metodu ile grafiksel olarak eklenir. Görüldüğü gibi D vektörünü elde etmek için C vektörü B vektörünün ucuna, B vektörü de A vektörünün ucuna eklenir. Yani:

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = \underline{D}$$

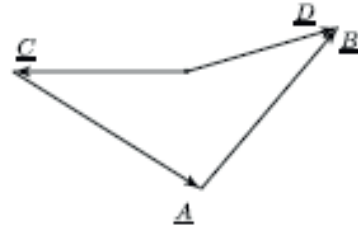


Şekil B.8 A, B ve C vektörlerinin toplamı

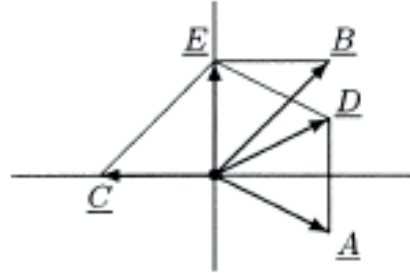
Uç uca ekleme yöntemi kullanılarak A, B ve C vektörlerinin grafiksel olarak ekleniminin başka yöntemleri de vardır. Bunlardan bazıları Şekil B.9 ve B.10’da gösterilmiştir.



Şekil B.9 B, C ve A vektörlerinin toplamı



Şekil B.10 C, A ve B vektörlerinin toplamı



Şekil B.11 Üç vektörün toplanmasında paralel kenar metodu

Şekil B.9’da gösterildiği gibi D bileşke kuvvetini elde etmek için A vektörü C vektörüne, C vektörü de B vektörüne eklenmiştir. Yani:

$$\underline{B} + \underline{C} + \underline{A} = \underline{D}$$

Şekil B.10’da gösterildiği gibi D bileşke kuvvetini elde etmek için B vektörü A vektörüne, A vektörü de C vektörüne eklenmiştir. Yani:

$$\underline{C} + \underline{A} + \underline{B} = \underline{D}$$

A, B ve C vektörlerinin eklendiği sıradan bağımsız olarak, elde edilen D vektörünün aynı büyüklüğe ve yöne sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

Aynı vektörlerin paralel kenar yöntemi ile toplanması Şekil B.11’de verilmiştir. Bu durumda ilk olarak üç vektörden ikisi (B ve C) uç uca eklenir. Daha sonra elde edilen vektör (vektör E) A vektörüne eklenir ve sonuç olarak bileşke vektör elde edilir (vektör D). Şekil B.11’de elde edilen eklemeler dizisi matematiksel olarak şöyle ifade edilir:

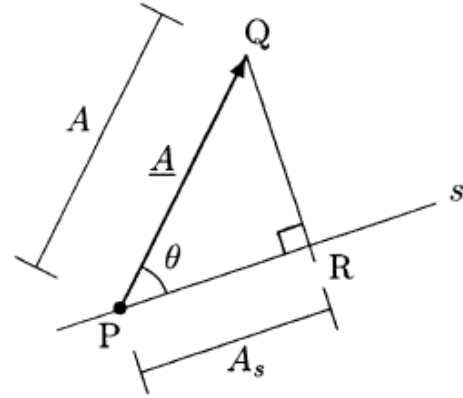
$$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} + \underline{E} = \underline{D}$$

Uç uca ekleme yöntemi kullanılarak birbirine eklenen A, B ve C vektörleri, benzer şekilde, paralel kenar yöntemi kullanılarak da bu vektörlerin birbirlerine eklenmesi gibi bunların eklenme sırasını dikkate alarak farklı uygulanabilen yöntemler de vardır. Yine ekleme sırasından bağımsız olarak, elde edilen vektör, D’nin büyüklüğü ve yönü ile aynı olacaktır.

B.8 Vektörlerin İzdüşümü

Şekil B.12 de gösterildiği gibi A, s çizgisine θ açısı yapan bir vektör olsun. S çizgisi ve A aynı düzlem üzerinde olsun. A vektörünün s çizgisi üzerinde ki izdüşümünü bulabilmek için vektörün uç kısmından (Q noktasından) s çizgisine dik bir çizgi çizilir. R noktası s çizgisi ile bu çizgiye dik olarak çizilen çizginin kesişim noktası ise, P ve R noktaları arasında kalan uzunluk A_s , A vektörünün s çizgisi üzerindeki izdüşümü veya skaler bileşenidir. P, Q ve R noktalarının bir dik üçgeni belirtmektedir bu nedenle:

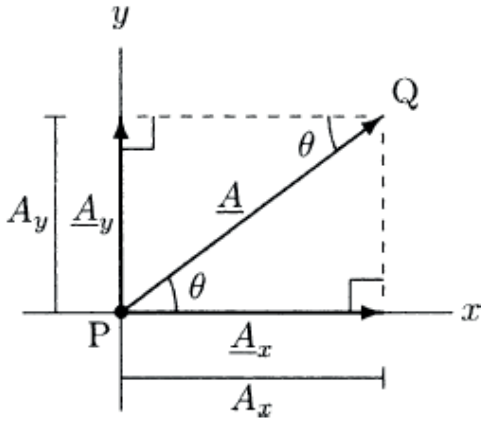
$$A_s = A \cos \theta \quad (\text{B.3})$$



Şekil B.12 Bir vektörün verilen yöndeki izdüşümü

B.9 Vektörlerin Bileşenlerine Ayrılması

Bir vektörün bileşenlerine ayrılması, iki vektörün birbirine eklenmesi işleminin tersidir. Şekil B.13’de x ve y sırasıyla yatay ve dikey eksenlerdir. A, x düzlemi üzerinde hareket eden bir vektördür. A vektörünün x doğrultusu boyunca bileşenini bulmak için, vektörün uç noktasından x doğrultusuna dik olacak şekilde bir çizgi çizilir. Benzer şekilde y eksenini üzerindeki bileşenini bulmak için vektörün uç noktasından y eksenine dik olacak şekilde bir çizgi çizilir. Bu operasyonların sonucunda benzer iki dik üçgen (paralel kenar) oluşur. Oluşan dikdörtgenin kenar uzunlukları, x ve y boyunca A vektörünün bileşenlerini verir ve dik üçgenin özelliklerinden yararlanılarak şu şekilde hesaplanabilir:



Şekil B.13 Birbirine dik karşılıklı iki vektörün bileşenleri

$$A_x = A \cos \theta \quad (B.4)$$

$$A_y = A \sin \theta$$

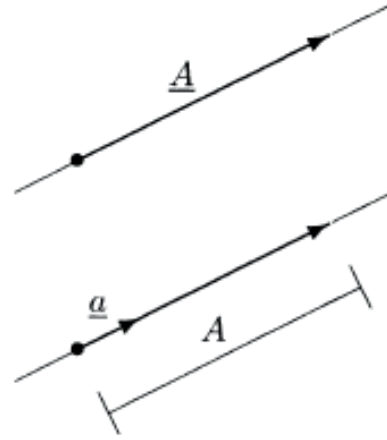
Denklem B.4'te θ açısı \underline{A} vektörünün yatay ile yaptığı açıdır. \underline{A} vektörü x ve y doğrultusu üzerinde sırasıyla $\underline{A_x}$ ve $\underline{A_y}$ 'nin toplamları olarak da temsil edilebilir:

$$\underline{A} = \underline{A_x} + \underline{A_y} \quad (B.5)$$

B.10 Birim Vektör

Genel olarak \underline{A} vektörünü, \underline{A} ile aynı yönde olan birim \underline{a} birim büyüklüğü ile A büyüklüğünün çarpımı olarak ifade etmek mümkündür (Şekil B.14). \underline{a} birim vektör olarak adlandırılır. Verilen bir vektörün birim vektörünü bulmak için; vektörü, vektör büyüklüğüne bölünmesi ile elde edilir:

$$\underline{a} = \frac{\underline{A}}{A} \quad (B.6)$$



Şekil B.14 $\underline{A} = A\underline{a}$

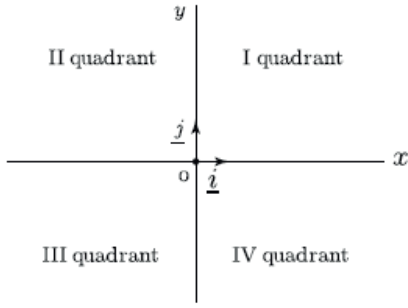
Gerçek \underline{A} vektörü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\underline{A} = A\underline{a} \quad (B.7)$$

B.11 Dikdörtgen Koordinatlar

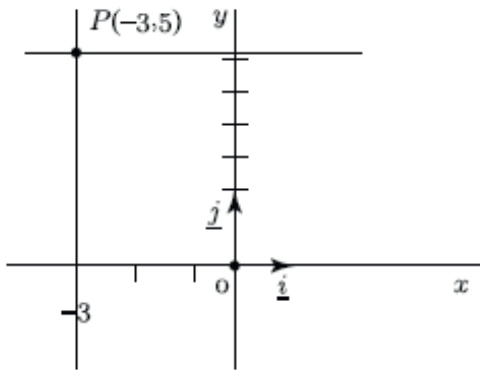
Bir nesnenin uzayda pozisyonunu tanımlayabilmek ve zaman içindeki pozisyonunu analiz edebilmek için, bir referans karesine veya bir koordinat sistemine göre ölçümler yapılmalıdır. Yaygın olarak birçok koordinat sistemi bulunmaktadır. Bunlar arasında Kartezyen veya dikdörtgen koordinat sistemi en yaygın kullanılanıdır.

İki boyutlu Kartezyen koordinat sistemi, karşılıklı birbirine dik x ve y'den oluşur ve Şekil B.15'de gösterildiği gibi düzlem yüzeyini dört çeyreğe böler. x ve y eksenlerinin kesişme noktası, koordinat sisteminin orijin noktası (merkez noktası) olarak adlandırılır ve genellikle O harfi ile gösterilir.



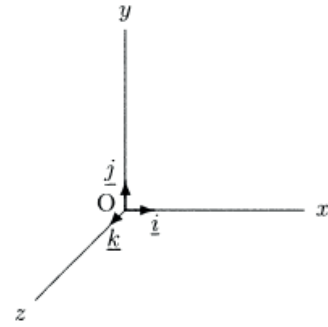
Şekil B.15 İki boyutlu Kartezyen Koordinat sistemi

Birinci bölge içerisinde hem x hem y değerleri ikisi de pozitifdir. İkinci bölgede y değerleri pozitif, x değerleri negatiftir. Üçüncü bölgede hem x hem y değerleri negatiftir ve son olarak dördüncü bölgede x değerleri pozitif, y değerleri negatiftir. Bir noktanın iki boyutlu uzayda konumu belirtmek veya tanımlamak için iki koordinat (x ve y) gereklidir. Örneğin koordinatları $x=3$ ve $y=5$ olan bir nokta, iki boyutlu bir koordinat sisteminde P noktasının ikinci bölgede ki konumunu tanımlar. Şekil B.16'da gösterildiği gibi, P noktasının konumu belirlemek için yatay x eksenine (-3) dik bir çizgi ve dikey y eksenine (5) yatay bir çizgi çizilir. Çizilen bu iki çizginin kesişme noktası P noktasını tanımlar.

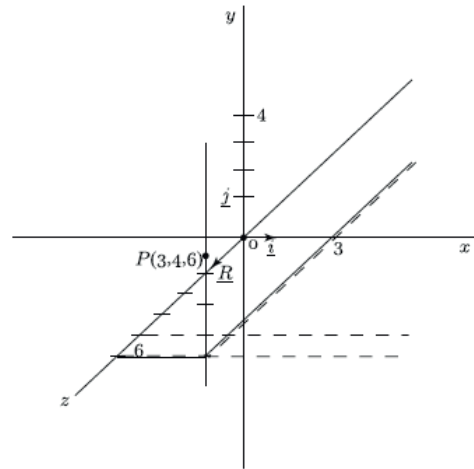


Şekil B.16 İki boyutlu koordinat sisteminde P noktasının konumu

Şekil B.17'de gösterildiği gibi, üç boyutlu koordinat sistemi x , y ve z gibi birbirine dik üç eksenle oluşur. Üç boyutlu uzayda bir noktanın konumu belirleyebilmek için genellikle üç tane koordinata (x,y,z) ihtiyaç vardır. Şekil B.18'de gösterildiği gibi P noktası, $x=3$, $y=4$ ve $z=6$ gibi üç koordinat ile tanımlanır.



Şekil B.17 Üç boyutlu Kartezyen veya dikdörtgen koordinat sistemi



Şekil B.18 Üç boyutlu koordinat sisteminde P noktasının konumu

P noktasının üç boyutlu uzaydaki konumunu bulabilmek için sırasıyla $x=3$ ve $z=6$ koordinatlarından x ve z eksenlerine paralel doğrular çizilir. Daha sonrasında üçüncü çizgi, çizilen bu iki çizginin kesişim noktasından pozitif y yönünde çizilir. P noktası kesişme noktasının dört birim üzerinde bulunur.

Birim vektör kavramı, koordinat sistemlerinin yapısında önemli bir uygulamaya sahiptir. Kartezyen koordinat eksenleri boyunca bulunan birim vektörler yaygın olarak kabul edilen sembollere sahip oldukları için sıklıkla kullanılmaktadır. \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} sembolleri sırasıyla pozitif x , y ve z yönlerini gösteren birim koordinat vektörlerini belirtmek için kullanılır.

B.12 Vektörlerin Toplanması:

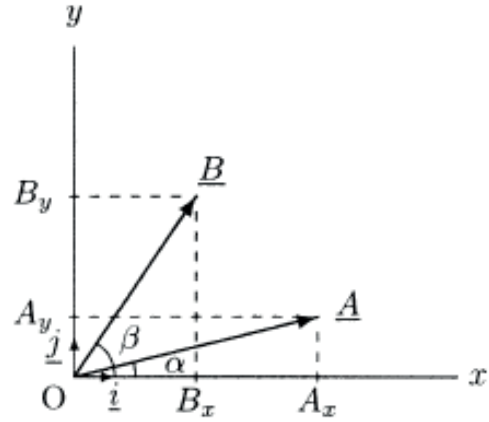
Trigonometrik Metot

Zaman alan ve kesin sonuç vermeyen grafik metot yöntemi ile vektörlerin toplaması, çıkarılması ve bileşenlerine ayrılmasını gördük. Trigonometrik yöntemlerin kullanılmasıyla daha hızlı ve daha kesin sonuçlar elde edilebilir. Vektörlerin trigonometrik yöntem kullanılarak eklenmesi ve çıkarılması için öncelikle vektörün bileşenlerine ayrılması gerekir. Örneğin Şekil B.19'da verilmiş olan iki vektörü göz önünde bulunduralım. \underline{A} ve \underline{B} vektörleri; büyüklükleri A ve B olan ve yatay eksen ile (x eksen ile) α ve β açılara sahiptir. \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin x ve y yönleri boyunca skaler bileşenleri dik

üçgen özelliklerinden yararlanılarak belirlenebilir. Vektör \underline{A} için:

$$A_x = A \cos \alpha \quad (B.8)$$

$$A_y = A \sin \alpha$$



Şekil B.19 A ve B vektörleri

A_x ve A_y , \underline{A} vektörünün sırasıyla x ve y yönleri boyunca skaler bileşenleridir. Pozitif x ve y yönlerini tanımlayan, \underline{i} ve \underline{j} birim vektörlerinden yararlanarak, dikdörtgen koordinat sistemi üzerinde \underline{A} vektörünün skaler bileşenleri kolaylıkla belirlenebilir:

$$\underline{A}_x = A_x \underline{i} \quad (B.9)$$

$$\underline{A}_y = A_y \underline{j}$$

Şimdi, \underline{A} vektörü aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_x + \underline{A}_y, \\ &= A_x \underline{i} + A_y \underline{j}, \quad (B.10) \\ &= A \cos \alpha \underline{i} + A \sin \alpha \underline{j}. \end{aligned}$$

A_x , A_y ve A 'nın Hipotenüsü A olan bir dik üçgenin kenarları olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle:

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \quad (B.11)$$

Benzer şekilde B vektörü de aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \underline{B_x} + \underline{B_y}, \\ &= B_x \underline{i} + B_y \underline{j}, \\ &= B \cos \beta \underline{i} + B \sin \beta \underline{j}. \end{aligned} \quad (B.12)$$

Vektörlerin bileşenleri bulduktan sonra bir sonraki adım tüm vektörlerin x bileşenlerinin birbirine eklenmesi (yada çıkarılması). Bunun sonucunda bileşke vektörün x bileşeni bulunmuş olur. Benzer şekilde tüm vektörlerin y bileşenlerinin birbirlerine eklenmesi bileşke vektörün y bileşenini verir. Örneğin \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin birbirlerine eklenmesi şu şekilde gerçekleştirilir:

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j}) + (B_x \underline{i} + B_y \underline{j}), \\ &= (A_x + B_x) \underline{i} + (A_y + B_y) \underline{j}, \\ &= (A \cos \alpha + B \cos \beta) \underline{i} + (A \sin \alpha + B \sin \beta) \underline{j}. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Eğer \underline{C} vektörü \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin toplamı olarak kabul edilirse, o zaman:

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} + \underline{B}, \\ &= \underline{C_x} + \underline{C_y}, \\ &= C_x \underline{i} + C_y \underline{j}. \end{aligned} \quad (B.14)$$

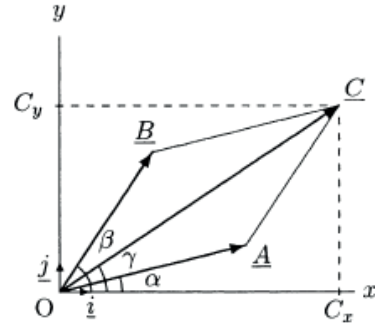
B.13 ve B.14 denklemleri karşılaştırılır ise şu sonuca varılabilir:

$$C_x = A_x + B_x = A \cos \alpha + B \cos \beta, \quad (B.15)$$

$$C_y = A_y + B_y = A \sin \alpha + B \sin \beta.$$

Eğer α ve β değerleri biliniyor ise C_x ve C_y denklem B.15'den hesaplanabilir. Aynı zamanda, C_x , C_y ve C 'nin, hipotenüsü C olan, bir dik üçgen oluşturduğu unutulmamalıdır (Şekil B.20). Bu nedenle:

$$C = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2} \quad (B.16)$$



Şekil B.20 A ve B vektörlerinin toplamı C vektörüne eşittir.

Eğer γ , C vektörünün x eksenine ile yaptığı açısı temsil ediyorsa, o zaman:

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{C_y}{C_x} \right). \quad (B.17)$$

\tan^{-1} ; tanjantın tersi ya da arctangent (arctan olarak kısaltılır) olarak adlandırılır.

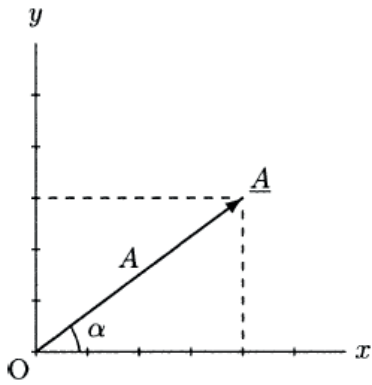
Bir vektörün diğerinden çıkarılması, vektörlerin eklenmesi kadar kolay bir işlemdir.

Örneğin:

$$\begin{aligned}\underline{A} - \underline{B} &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j}) - (B_x \underline{i} + B_y \underline{j}), \\ &= (A_x - B_x) \underline{i} + (A_y - B_y) \underline{j}, \quad (B.18) \\ &= (A \cos \alpha - B \cos \beta) \underline{i} + (A \sin \alpha - B \sin \beta) \underline{j}.\end{aligned}$$

Örnek B.1 Şekil B.21’de verilmiş olan \underline{A} vektörünün büyüklüğü $A=5$ birimdir ve yatay ile yapmış olduğu açı $\alpha=36.87$ derecedir.

- (a) \underline{A} vektörünün yatay ve dikey bileşenlerini bulunuz.
 (b) \underline{A} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.



Şekil B.21 Örnek B.1

Çözüm:

- (a) Denklem (B.8) kullanılarak:

$$A_x = A \cos \alpha = 5 \cos(36,87^\circ) = 4,$$

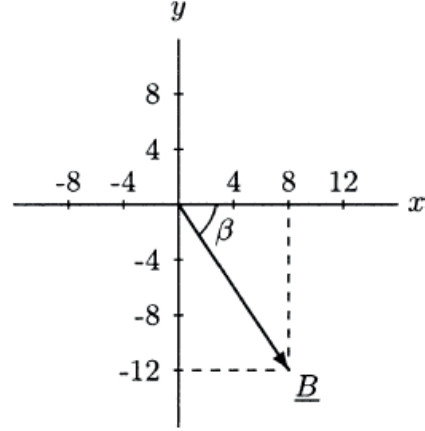
$$A_y = A \sin \alpha = 5 \sin(36,87^\circ) = 3.$$

- (b) Denklem (B.10)’ dan yararlanılarak:

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} = 4 \underline{i} + 3 \underline{j}$$

Örnek B.2 Şekil B.22 de verildiği gibi \underline{B} vektörünün pozitif x doğrultusundaki değeri 8 birim ve negatif y doğrultusundaki büyüklüğü 12 birim ölçülmüştür.

- (a) \underline{B} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz
 (b) \underline{B} vektörünün büyüklüğünü ve pozitif x doğrultusu ile yapmış olduğu β açısını hesaplayınız.



Şekil B.22 Örnek B.2

Çözüm:

- (a) \underline{B} vektörü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\underline{B} = 8 \underline{i} + 12 \underline{j}$$

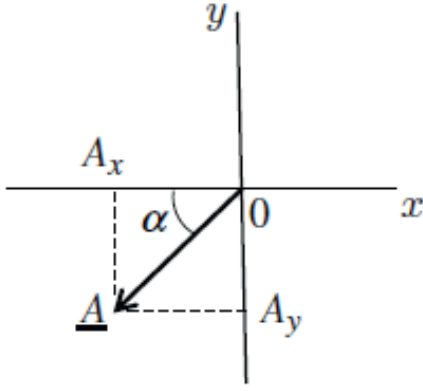
- (a) $B_x = 8$ ve $B_y = 12$. Bu yüzden:

$$B = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2} = \sqrt{(8)^2 + (12)^2} = \sqrt{208} = 14,42.$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{B_y}{B_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{12}{8} \right) = 56,31^\circ.$$

Örnek B.3 Şekil B.23’de verilmiş olan \underline{A} vektörünün büyüklüğü $A=7,2$ birimdir ve yatay ile yapmış olduğu açı $\alpha=45^\circ$ derecedir.

- (a) \underline{A} vektörünün yatay ve dikey bileşenlerini bulunuz.
 (b) \underline{A} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.



Şekil B.23 Örnek B.3

Çözüm:

(a) Denklem (B.8) kullanılarak:

$$A_x = A \cos \alpha = A \cos(45^\circ) = 7,2 \cdot 0,707 = 5,09$$

$$A_y = A \sin \alpha = A \sin(45^\circ) = 7,2 \cdot 0,707 = 5,09$$

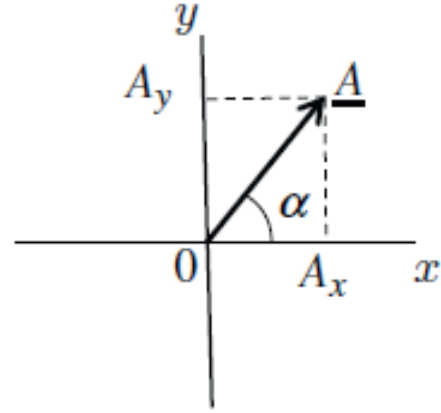
(b) Denklem (B.10)' dan yararlanılarak:

$$\underline{A} = A \sin \alpha \underline{i} + A \cos \alpha \underline{j} = -5,09 \underline{i} - 5,09 \underline{j}$$

Not: Eğer $\alpha = 45^\circ$ ise, vektörün yatay ve dikey bileşenleri birbirine eşittir ($A_x = A_y = 5,09$).

Örnek B.4 Şekil B.24 de verilmiş olan \underline{A} vektörünün yatay ve dikey eksenler boyunca büyüklükleri sırasıyla $A_x = 2$ ve $A_y = 3$ birimdir. Ayrıca \underline{A} vektörünün yatay ile yaptığı açı α dır.

- (a) \underline{A} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.
- (b) \underline{A} vektörünün yatay ile yapmış olduğu α açısını hesaplayınız.



Şekil B.24 Örnek B.4

Çözüm:

$$(a) \underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j}, A = 2 \underline{i} + 3 \underline{j}$$

(b) Buna göre α açısı,

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

Eğer $A_y = 3$ ve $A_x = 2$ ise;

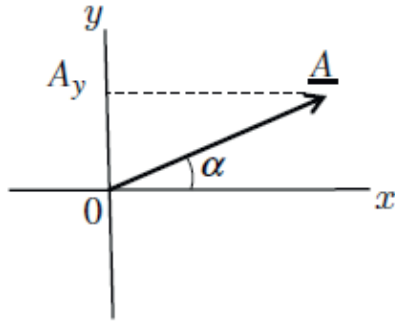
$$\tan \alpha = \frac{3}{2} = 1,5$$

Yani,

$$\alpha = \tan^{-1}(1,5) = 56,3^\circ$$

Örnek B.5 Şekil B.25'te gösterilen \underline{A} vektörünün pozitif y yönündeki bileşeni $A_y = 3$ birim olarak ölçülmüştür ve pozitif x eksenini ile yaptığı açı $\alpha = 30$ derecedir.

- (a) \underline{A} vektörünün büyüklüğünü hesaplayınız.
- (b) \underline{A} vektörünün pozitif x yönündeki bileşenini hesaplayınız.
- (c) \underline{A} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.



Şekil B.25 Örnek B.5

Çözüm:

(a) Eğer $A_y = 3$ ise $\underline{A} = 2A_y = 2 \cdot 3 = 6$ dır.

(b) Denklem (B.8) kullanılırsa:

$$A_x = A \cdot \cos \alpha = A \cdot \cos 30^\circ = 5,2$$

(c) Denklem (B.10)'dan:

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} = 5,2 \underline{i} + 3,0 \underline{j}$$

Örnek 6: \underline{A} ve \underline{B} vektörleri Şekil B.23'de verilmiştir. Bu vektörlerin bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$A_x = 15, B_x = 5,$$

$$A_y = 10, B_y = 10.$$

(a) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini bileşenleri cinsinden ifade ediniz.

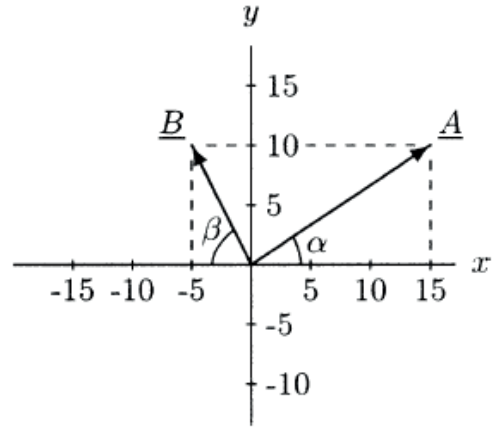
(b) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin büyüklüklerini ve α ve β açılarını hesaplayınız.

(c) $\underline{A} + \underline{B}$ hesaplayınız.

(d) $\underline{A} - \underline{B}$ hesaplayınız.

(e) $\underline{B} - \underline{A}$ hesaplayınız.

(f) $-\underline{A} - \underline{B}$ hesaplayınız.



Şekil B.26 Örnek B.6

Çözüm:

$$(a) \underline{A} = 15 \underline{i} + 10 \underline{j},$$

$$\underline{B} = -5 \underline{i} + 10 \underline{j}.$$

(b) A ve B vektörlerinin büyüklükleri:

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} = \sqrt{(15)^2 + (10)^2} = 18,03,$$

$$B = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2} = \sqrt{(5)^2 + (10)^2} = 11,18.$$

α ve β açıları:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{10}{15} \right) = 33,69^\circ,$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{5} \right) = 63,43^\circ.$$

(c) $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ olsun. O zaman:

$$\begin{aligned} \underline{C} &= (15 \underline{i} + 10 \underline{j}) + (-5 \underline{i} + 10 \underline{j}), \\ &= (15 - 5) \underline{i} + (10 + 10) \underline{j}, \\ &= 10 \underline{i} + 20 \underline{j}. \end{aligned}$$

(d) $\underline{D} = \underline{A} - \underline{B}$ olsun. O zaman:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= (15 \underline{i} + 10 \underline{j}) - (-5 \underline{i} + 10 \underline{j}), \\ &= (15 - 5) \underline{i} + (10 - 10) \underline{j}, \\ &= 20 \underline{i}. \end{aligned}$$

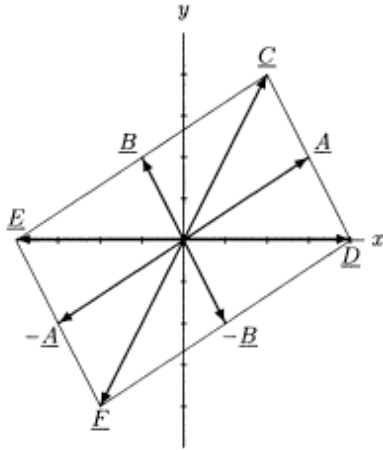
(e) $\underline{E} = \underline{B} - \underline{A}$ olsun. O zaman:

$$\begin{aligned}\underline{E} &= (-5\underline{i} + 10\underline{j}) - (-15\underline{i} + 10\underline{j}), \\ &= (-5 - 15)\underline{i} + (10 - 10)\underline{j}, \\ &= -20\underline{i}.\end{aligned}$$

(f) $\underline{F} = -\underline{A} - \underline{B}$ olsun. O zaman:

$$\begin{aligned}\underline{F} &= (-15\underline{i} + 10\underline{j}) + (-5\underline{i} + 10\underline{j}), \\ &= (-15 + 5)\underline{i} + (-10 - 10)\underline{j}, \\ &= -10\underline{i} - 20\underline{j}.\end{aligned}$$

Elde edilen \underline{C} , \underline{D} , \underline{E} ve \underline{F} vektörleri Şekil B.27'de gösterilmiştir. Bu sonuçların dikkatli bir incelemesi, \underline{C} ve \underline{F} vektörlerinin, eşit büyüklükte ve zıt yönlerde bir çift negatif vektör oluşturmakta ve \underline{D} ve \underline{E} vektörlerinin de benzer bir özellik göstermektedir. Ayrıca, \underline{D} ve \underline{E} vektörlerinin y yönü boyunca hiçbir bileşene sahip olmadığını da unutmayın.

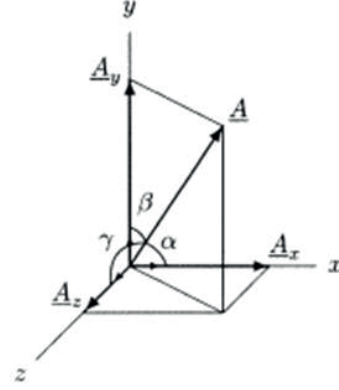


Şekil B.27 Vektörlerin toplanması ve çıkarılması

B.13 Vektörlerin Üç Boyutlu Bileşenleri

Vektörleri x, y ve z yönlerindeki bileşenlerle toplama ve çıkarma trigonometrik yöntemi, iki boyutlu sistemler için tanımlanan ilkelerin bir uzantısıdır. Kartezyen koordinat sistemi ile ilgili

olarak, \underline{A} gibi bir vektörün büyüklüğünü tanımlayabilmek için, \underline{A} vektörünün her üç bileşeni olan A_x , A_y ve A_z , ya da A vektör büyüklüğü ile vektörün x, y ve z yönleri ile yaptığı açı verilmelidir (Şekil B.28).



Şekil B.28 Üç yönde vektör bileşenleri

Alternatif olarak \underline{A} vektörünü şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z, \\ &= A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}.\end{aligned}\quad (B.19)$$

α , β ve γ , \underline{A} vektörünün sırasıyla x, y ve z yönleri ile yaptığı açıyı gösteriyorsa, o zaman; Alternatif olarak \underline{A} vektörünü şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}A_x &= A \cos \alpha \\ A_y &= A \cos \beta \\ A_z &= A \cos \gamma\end{aligned}\quad (B.20)$$

A vektörüne eklenecek ikinci bir B vektörü olduğunu varsayalım. C vektörü bu toplamın bileşkesini temsil ediyorsa, o zaman:

$$\begin{aligned}\underline{C} &= \underline{A} + \underline{B}, \\ &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) + (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}), \\ &= (A_x + B_x) \underline{i} + (A_y + B_y) \underline{j} + (A_z + B_z) \underline{k}.\end{aligned}\quad (B.21)$$

Bileşke C vektörünün x , y ve z yönlerindeki bileşenleri;

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x, \\ C_y &= A_y + B_y, \\ C_z &= A_z + B_z. \end{aligned} \quad (B.22)$$

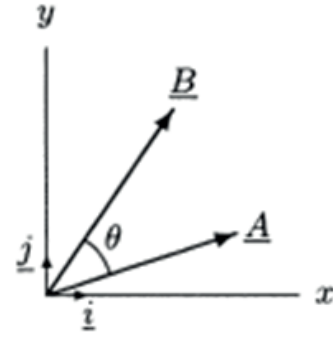
Eş düzlem sistemleri için doğru olduğu gibi, her üç yönde de bileşenlere sahip iki veya daha fazla vektörün eklenmesi, bütün vektörlerin x bileşenlerinin birlikte eklenmesini gerektirir. Aynı prosedür y ve z bileşenleri için de tekrarlanmalıdır. İki veya daha fazla üç boyutlu vektör miktarlarının çıkarılması benzer bir yaklaşımı izler.

B.14 Vektörlerin Nokta (Skaler) Çarpımı

Mekanik olarak en çok karşılaşılan vektör büyüklüklerinden ikisi, kuvvet ve yer değiştirme vektörleridir. Mekanikte, bir kuvvet tarafından yapılan iş, yer değiştirme yönündeki kuvvet bileşeni ile yer değiştirmenin büyüklüğünün çarpımı olarak tanımlanır. Kuvvet ve yer değiştirme vektörel değerler olmasına rağmen, çarpımları – iş – skaler bir büyüklüktür. Bu gibi durumları kısaca temsil eden bir işleme nokta veya skaler ürün denir.

Herhangi iki vektörün nokta çarpımı, iki vektörün büyüklüklerinin ikisi arasındaki en küçük açının kosinüsü ile çarpımına eşit bir skaler nicelik olarak tanımlanır. Örneğin,

Şekil B.29'daki \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini göz önünde bulundurun.



Şekil B.29 İki vektörün nokta çarpım ürünü

Bu vektörlerin nokta çarpım ürünü:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta \quad (B.23)$$

Denklem (B.23)'te, A ve B , herhangi iki vektörün büyüklükleridir ve θ bu iki vektör arasındaki en küçük açıdır. Denklem (B.23)'te verilen işlem, önce \underline{A} vektörünün iz düşümünün \underline{B} vektörünün hareket yönü (veya tam tersi) üzerine alınması ve sonrasında iz düşümü alınan bileşenin diğer vektör ile çarpımını göstermektedir.

Nokta ürününün, vektörler arasındaki en küçük açının 90° 'den küçük veya büyük olmasına bağlı olarak pozitif veya negatif büyüklüklerle sonuçlanabileceğini unutmayın. $\cos 90^\circ = 0$ olduğundan, vektörler birbirine dik ise, iki vektörün nokta çarpımı sifıra eşittir. Sırasıyla, pozitif x ve y yönlerini tanımlayan birim vektörler \underline{i} ve \underline{j} , birim büyüklüğe sahip vektörel değerlerdir. Nokta ürünü kavramı birim vektörlere de uygulanabilir:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1, \quad 1 \cos 0^\circ = 1, \quad (B.24)$$

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0, \quad 1 \cos 90^\circ = 0.$$

Şekil B.29'da gösterilen vektörlerin nokta çarpımını bulmak için, önce her vektörü x ve y yönleri boyunca bileşenlerine ayırmalı ve sonrasında nokta çarpımını birim vektörlere uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j}) \cdot (B_x \underline{i} + B_y \underline{j}) \\ &= A_x B_x (\underline{i} \cdot \underline{i}) + A_y B_y (\underline{j} \cdot \underline{j}) + A_y B_x (\underline{j} \cdot \underline{i}) + A_x B_y (\underline{i} \cdot \underline{j}), \quad (B.25) \\ &= A_x B_x + A_y B_y. \end{aligned}$$

Aşağıdakiler nokta çarpımının özelliklerinden bazılarıdır.

- İki vektörün nokta çarpımı değişimli bir işlemdir:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}.$$

- Nokta ürünü bir dağılımsal bir işlemdir:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}.$$

- Kendisi bir nokta ürün olarak çarpılan bir vektör, vektörün büyüklüğünün karesine eşittir:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = A^2.$$

- Kartezyen bileşenleri açısından ifade edilen iki (2) üç boyutlu vektörel değerler olan \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini nokta ürünü:

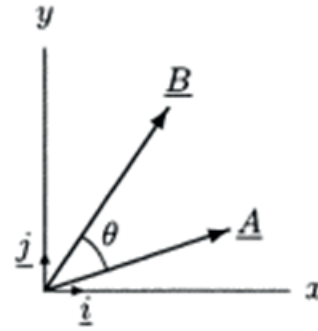
$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

- Bir vektörün belirli bir yön boyunca skaler bileşeni, vektör ile aynı doğrultudaki birim vektörünün nokta çarpımına eşittir. Örneğin, bir \underline{A} vektörünün x ve y bileşenleri:

$$A_x = \underline{A} \cdot \underline{i}, \quad A_y = \underline{A} \cdot \underline{j}.$$

B.15 Vektörlerin Kros (Vektörel) Çarpımı

Diğer vektörel büyüklükler ile sonuçlanan vektörel değerler arasında başka etkileşimler vardır. Bu tür etkileşimlerin bir örneği, uygulanan bir kuvvet tarafından üretilen moment veya torktur. Bu etkileşimleri tanımlamak için geliştirilen matematiksel araç, *kros* veya *vektörel çarpım* olarak adlandırılır. Şekil B.30'daki \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini ele alın. Bu vektörlerin çapraz çarpımı, üçüncü bir vektöre, \underline{C} , eşittir diyelim.



Şekil B.30 \underline{A} ve \underline{B} vektörleri

Çapraz çarpım için yaygın olarak kullanılan matematiksel gösterim:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \underline{C}. \quad (B.26)$$

\underline{C} vektörünün büyüklüğü, \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin büyüklüğü ile iki vektörün arasındaki en küçük açının sinüsü (Şekil B.30'daki θ açısı) değerinin çarpımına eşittir.

$$C = AB \sin \theta. \quad (B.27)$$

\underline{C} vektörü, \underline{A} ve \underline{B} vektörleri tarafından tanımlanan düzleme dik bir yöne sahiptir. Örneğin, \underline{A} ve \underline{B} vektörleri xy - düzlemindeyse, \underline{C} vektörü z yönünde etki etmektedir.

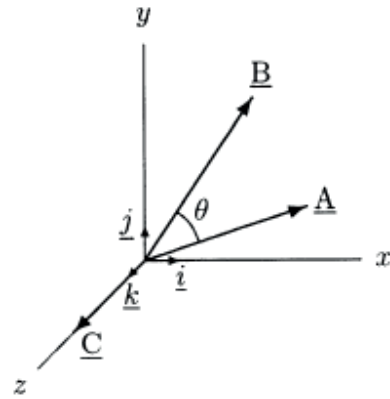
\underline{C} vektörünün etki ettiği yön sağ el kuralı ile belirlenebilir. Bu kuralı uygulamak için, önce sağ elin parmakları \underline{A} vektörü (ilk vektör) yönünde tutulur ve daha sonra aradaki en küçük açıyı kavrayacak şekilde \underline{B} vektörüne (ikinci vektör) doğru kıvrılırlar. Dört parmağımızı dik olarak tuttuğumuz da açılmış olan başparmak \underline{C} vektörünün yönünü gösterir.

Kros çarpım konseptinin karşılıklı olarak dik olan Kartezyen birim vektörleri \underline{i} , \underline{j} ve \underline{k} için geçerli olduğunu tekrar dikkate alınız. $\sin 0^\circ = 0$ ve $\sin 90^\circ = 1$ olduğundan, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} \underline{i} \times \underline{i} &= \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0 \\ \underline{i} \times \underline{j} &= \underline{k}, \quad \underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}, \\ \underline{j} \times \underline{k} &= \underline{i}, \quad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}, \\ \underline{k} \times \underline{i} &= \underline{j}, \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}. \end{aligned} \quad (B.28)$$

Yukarıdaki ilişkiler kullanılarak birim vektör arasındaki, vektörel çarpımın hem büyüklüğü hem de vektörel çarpımın yönünü içerecek matematiksel ilişkiler belirlenebilir. Örneğin, \underline{A} ve \underline{B} xy - düzleminde iki vektör ise (Şekil B.31), o zaman:

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \times \underline{B}, \\ &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j}) \times (B_x \underline{i} + B_y \underline{j}), \\ &= A_x B_x (\underline{i} \times \underline{i}) + A_x B_y (\underline{i} \times \underline{j}) + A_y B_x (\underline{j} \times \underline{i}) + A_y B_y (\underline{j} \times \underline{j}), \\ &= A_x B_x (0) + A_x B_y (\underline{k}) + A_y B_x (-\underline{k}) + A_y B_y (0), \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k}. \end{aligned} \quad (B.29)$$



Şekil B.31 $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$

Aşağıdakiler kros çarpımının özelliklerinden bazılarıdır.

- Kros çarpımın değişme özelliği yoktur:

$$\underline{A} \times \underline{B} \neq \underline{B} \times \underline{A}.$$

Ancak,

$$\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}.$$

- Kros çarpımı bir dağılımsal bir işlemdir:

$$\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C}.$$

- Kartezyen bileşenleri açısından ifade edilen iki (2) üç boyutlu vektörel değerler olan \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini kros çarpımı:

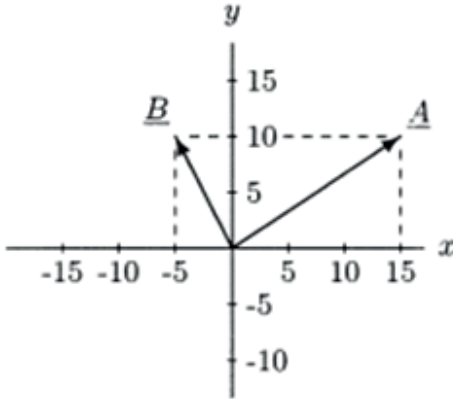
$$\underline{A} \times \underline{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k}.$$

Örnek B.7 Şekil B.32'de gösterilen \underline{A} ve \underline{B} vektörleri Kartezyen bileşenleri cinsinden şu şekilde verilmektedir:

$$\underline{A} = 15\underline{i} + 10\underline{j},$$

$$\underline{B} = -5\underline{i} + 10\underline{j},$$

- $c = \underline{A} \cdot \underline{B}$ skaler çarpımını bulunuz.
- $\underline{D} = \underline{A} \times \underline{B}$ vektörel çarpımını bulunuz.
- $\underline{E} = \underline{B} \times \underline{A}$ vektörel çarpımını bulunuz.



Şekil B.32 Örnek B.7

Çözüm:

- $$c = \underline{A} \cdot \underline{B}$$

$$= A_x B_x + A_y B_y,$$

$$= (15)(-5) + (10)(10),$$

$$= 25.$$
- $$\underline{D} = \underline{A} \times \underline{B},$$

$$= (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k},$$

$$= [(15)(10) - (10)(-5)] \underline{k},$$

$$= -200 \underline{k}.$$

$$(c) \quad \underline{E} = \underline{B} \times \underline{A} = -\underline{D}$$

$$= (B_x A_y - B_y A_x) \underline{k},$$

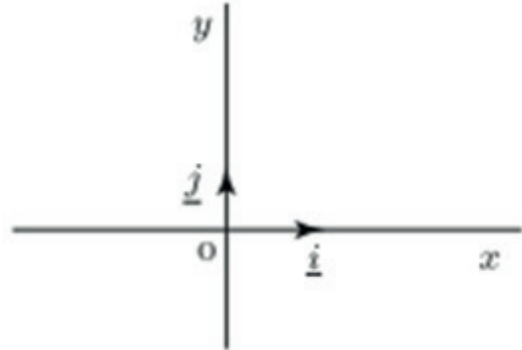
$$= [(-5)(10) - (10)(15)] \underline{k},$$

$$= -200 \underline{k}.$$

\underline{D} ve \underline{E} çarpım vektörlerinin 200 U'luk eşit bir büyüklüğe sahip olduğunu unutmayın. \underline{D} vektörünün saat yönünün tersi bir yönü varken \underline{E} vektörü saat yönündedir. Her iki vektör de sayfanın yüzeyine dik yönde, \underline{D} sayfanın dışına doğru olacak, \underline{E} ise sayfanın içine doğru olacak yönünde hareket eder.

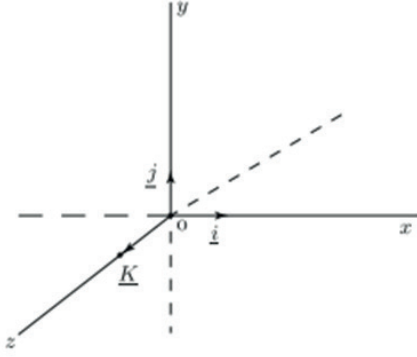
B.16 Alıştırma Problemleri

Problem B.1 Şekil B.33'te gösterilen iki boyutlu koordinat sisteminde A, B, C ve D dört noktası vardır. Bu noktaların koordinatları A (2,5, 3), B (-3,5, -1), C (1,5, -5) ve D (-4, 3,5) ise, bunları koordinat sisteminde bulun.



Şekil B.33 İki boyutlu koordinat sistemi

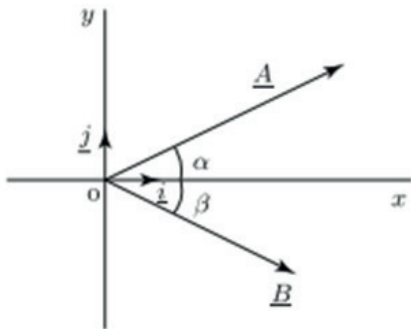
Problem B.2 Şekil B.34'de gösterilen üç boyutlu koordinat sisteminde A, B ve C üç noktası vardır. Bu noktaların koordinatları A (2,0, 2,5, 3,0), B (-1,5, 2,0, 3,5) ve C (-3,0, -2,0, -3,0) ise, bunları koordinat sisteminde bulun.



Şekil B.34 Üç boyutlu koordinat sistemi

Problem B.3 Büyüklükleri $A = 9$ ve $B = 6,5$ olan iki vektör verilmiştir. Şekil B.35'te gösterildiği gibi \underline{A} vektörü yatay ile $\alpha = 66^\circ$, \underline{B} vektörü ise yatay ile $\beta = 52^\circ$ açı yapmaktadır. Buna göre,

- \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin yatay ve dikey yöndeki bileşenlerini belirleyin.
- \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini bileşenleri cinsinden gösteriniz



Şekil B.35 Problem B.3

Cevaplar:

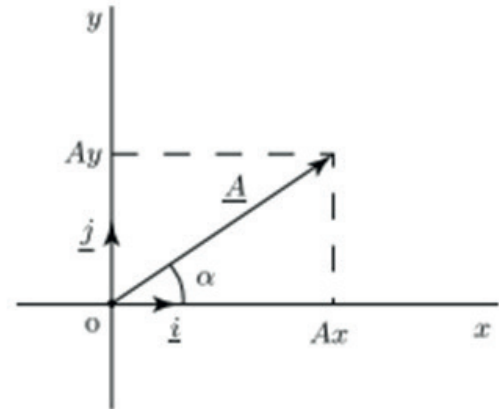
- $A_x = 3,66$; $A_y = 8,22$; $B_x = 4,0$; $B_y = 5,12$
- $\underline{A} = 3,66\underline{i} + 8,22\underline{j}$; $\underline{B} = 4\underline{i} - 5,12\underline{j}$

Problem B.4 \underline{A} vektörünün yatay ve dikey bileşenleri sırasıyla 2 ve 3 U'ya eşitse, \underline{A} vektörünün yatay ile yaptığı bir açıyı belirleyin.

Cevaplar: $\alpha = 56.3^\circ$

Problem B.5 \underline{A} vektörünün yatay yöndeki bir bileşeninin büyüklüğü $A_y = 4,75$ olacak şekilde verilmiştir. \underline{A} vektörü, Şekil B.36'de gösterildiği gibi yatay ile $\tan \alpha = 0.7$ olacak şekilde açı yapmaktadır.

- \underline{A} vektörünün yatay yöndeki bileşenini belirleyin.
- \underline{A} vektörünün büyüklüğünü hesaplayınız.
- \underline{A} vektörünü bileşenleri cinsinden belirtiniz.
- α açısını belirleyiniz.



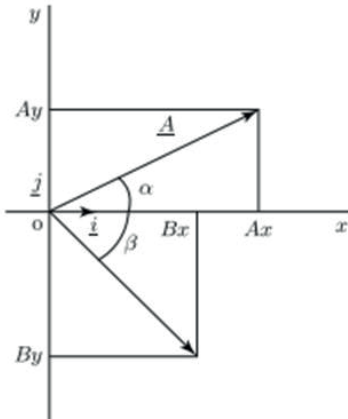
Şekil B.36 Problem B.5

Cevaplar:(a) $A_x=6,8$; (b) $A=8,3$; (c) $-A=6,8-i+4,8-j$; (d) $\alpha = 35^\circ$

Problem B.6 Şekil B.37'te gösterildiği gibi \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini düşünün. Bu vektörlerin yatay ve dikey yönündeki bileşenleri aşağıdaki gibi verilirse:

$$A_x = 5,4; A_y = 3,3; B_x = 3,6; B_y = 6,0$$

- (a) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini bileşenleri cinsinden belirtiniz.
- (b) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin yatay ile yaptıkları α ve β açılarını hesaplayınız.
- (c) $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ vektör büyüklüğünü hesaplayınız.
- (d) \underline{C} vektörünün yatay ile yaptığı γ açısını hesaplayınız.



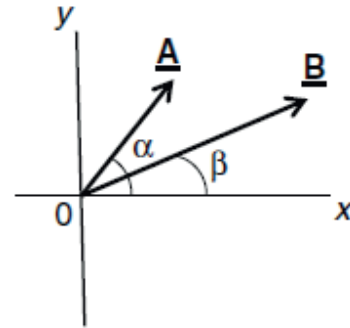
Şekil B.37 Problem B.6

Cevaplar:

- (a) $\underline{A} = 5,4\underline{i} + 3,3\underline{j}$; $\underline{B} = 3,6\underline{i} + 6\underline{j}$.
- (b) $\alpha = 31,4^\circ$; $\beta = 59^\circ$.
- (c) $C = 9,4$
- (d) $\gamma = 16,7^\circ$

Problem B.7 Şekil B.38'de gösterildiği gibi iki vektör \underline{A} ve \underline{B} 'yi düşünün. Bu vektörlerin büyüklükleri sırasıyla $\underline{A} = 3,5$ ve $\underline{B} = 6,3$ birim ise ve yatayla yaptıkları açı $\alpha = 45^\circ$ ve $\beta = 32^\circ$ ise;

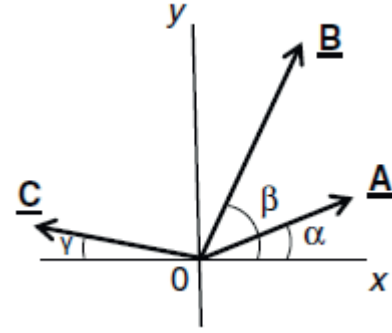
- (a) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerinin yatay ve dikey bileşenlerini belirleyiniz.
- (b) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini bileşenleri cinsinden belirtiniz.
- (c) $\underline{D} = \underline{A} + \underline{B}$ vektör büyüklüğünü hesaplayınız ve \underline{D} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.
- (d) $\underline{E} = \underline{A} - \underline{B}$ vektör büyüklüğünü hesaplayınız ve \underline{E} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.
- (e) $\underline{F} = \underline{B} - \underline{A}$ vektör büyüklüğünü hesaplayınız ve \underline{F} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.
- (f) $\underline{G} = -\underline{A} - \underline{B}$ vektör büyüklüğünü hesaplayınız ve \underline{G} vektörünü bileşenleri cinsinden ifade ediniz.



Şekil B.38 Problem B.7

Cevaplar:

- (a) $A_x = 2,47; A_y = 2,47; B_x = 5,34; B_y = 3,34$
 (b) $\underline{A} = 2,47\mathbf{i} + 2,47\mathbf{j}$
 (c) $D = 9,73; \underline{D} = 7,81\mathbf{i} + 5,81\mathbf{j}$
 (d) $E = 2,99; \underline{E} = -2,87\mathbf{i} - 0,87\mathbf{j}$
 (e) $F = 2,99; \underline{F} = 2,87\mathbf{i} + 0,87\mathbf{j}$
 (f) $G = 9,73; \underline{A} = -7,81\mathbf{i} - 5,81\mathbf{j}$



Şekil B.39 Problem B.8

Problem B.8 Şekil B.39'da gösterilen A,B ve C vektörlerinin büyüklükleri sırasıyla $A = 4,5$, $B = 7,0$ ve $C = 5$ birimdir ve yatayla yaptıkları açılar $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 65^\circ$ ve $\gamma = 27^\circ$ 'dir. Buna göre;

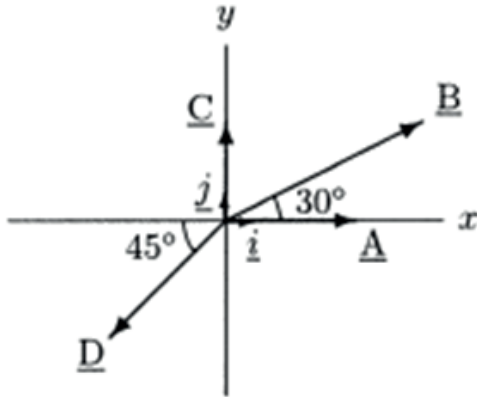
- (a) \underline{A} , \underline{B} ve \underline{C} vektörlerinin yatay ve dikey bileşenlerini belirleyiniz.
 (b) \underline{A} , \underline{B} ve \underline{C} vektörlerini bileşenlerine göre ifade ediniz.
 (c) $\underline{D} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$ vektörünü tanımlayınız.
 (d) \underline{D} vektörünün büyüklüğünü ve yatayla yaptığı θ açısını bulunuz.
 (e) $\underline{E} = \underline{A} + \underline{B} - \underline{C}$ vektörünü tanımlayınız.
 (f) \underline{E} vektörünün büyüklüğünü ve yatayla yaptığı λ açısını bulunuz.
 (g) $\underline{F} = \underline{A} - \underline{B} - \underline{C}$ vektörünü tanımlayınız.
 (h) \underline{F} vektörünün büyüklüğünü ve yatayla yaptığı φ açısını bulunuz.
 (i) $\underline{G} = \underline{A} - \underline{B} - \underline{C}$ vektörünü tanımlayınız.
 (j) \underline{G} vektörünün büyüklüğünü ve yatayla yaptığı \emptyset açısını bulunuz.

Cevaplar:

- (a) $A_x = 3,69; A_y = 2,57; B_x = 2,96; B_y = 6,34; C_x = 4,46; C_y = 2,27$
 (b) $\underline{A} = 3,69\mathbf{i} + 2,57\mathbf{j}; \underline{B} = 2,96\mathbf{i} + 6,34\mathbf{j}; \underline{C} = -4,46\mathbf{i} + 2,47\mathbf{j}$
 (c) $\underline{D} = 2,19\mathbf{i} + 1,18\mathbf{j}$
 (d) $\underline{D} = 11,4; \theta = 78,9^\circ$
 (e) $\underline{E} = 11,11\mathbf{i} + 6,64\mathbf{j}$
 (f) $\underline{E} = 12,9; \lambda = 30,9^\circ$
 (g) $\underline{F} = 5,19\mathbf{i} - 6,04\mathbf{j}$
 (h) $\underline{F} = 7,96; \varphi = 30,9^\circ$
 (i) $\underline{G} = -2,19\mathbf{i} - 11,18\mathbf{j}$
 (j) $\underline{G} = 11,94; \emptyset = 11,1^\circ$

Problem B.9 Şekil B.40'da gösterildiği gibi dört eş merkezli \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} ve \underline{D} vektörlerini ele alalım. Bu vektörlerin büyüklükleri $A=4$, $B=7$, $C=3$ ve $D=5$ şeklinde verilmektedir. \underline{A} vektörü pozitif x eksenine yönünde, \underline{B} vektörü pozitif x eksenine ile 30° açı yapacak şekilde, \underline{C} vektörü pozitif y eksenine yönünde ve \underline{D} vektörü ise negatif x eksenine ile 45° açı yapacak şekilde konumlanmışlardır.

- (a) \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} ve \underline{D} vektörlerinin x ve y eksenindeki skaler bileşenlerini bulunuz.
- (b) \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} ve \underline{D} vektörlerinin x ve y eksenindeki bileşenleri şeklinde ifade ediniz.
- (c) $\underline{E} = \underline{A} + \underline{D}$ vektörünü hesaplayınız.
- (d) $\underline{F} = \underline{C} + \underline{B}$ vektörünü hesaplayınız.
- (e) $\underline{G} = \underline{A} + \underline{C} - \underline{B}$ vektörünü hesaplayınız.
- (f) $\underline{H} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}$ vektörünü hesaplayınız.
- (g) \underline{E} , \underline{F} , \underline{G} ve \underline{H} vektörünün büyüklüğünü hesaplayınız.



Şekil B.40 Problem B.9

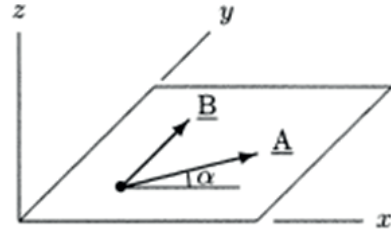
Cevaplar:

- (a) $A_x = 4; A_y = 0; B_x = 6,06; B_y = 3,5; C_x = 0; C_y = 3; D_x = 3,54; D_y = 3,54$.
- (b) $\underline{A} = 4\underline{i}; \underline{B} = 6,06\underline{i} + 3,50\underline{j}; \underline{C} = 3\underline{j}; \underline{D} = -3,54\underline{i} - 3,54\underline{j}$.
- (c) $\underline{E} = 0,46\underline{i} - 3,54\underline{j}$.

- (d) $\underline{F} = 6,06\underline{i} + 6,50\underline{j}$.
- (e) $\underline{G} = -2,06\underline{i} - 0,50\underline{j}$.
- (f) $\underline{H} = 6,52\underline{i} + 2,96\underline{j}$.
- (g) $\underline{E} = 3,57; \underline{F} = 8,89; \underline{G} = 2,12; \underline{H} = 7,16$.

Problem B.10 Şekil B.41'deki \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini el alın. Bu vektörler xy-düzleminde etki etmekte ve büyüklükleri $A = 10U$ ve $B = 7U$ 'dur. \underline{A} vektörü pozitif x eksenine $\alpha = 15^\circ$ açı yapmakta ve \underline{B} vektörü pozitif y yönünde etki etmektedir.

- (a) \underline{A} ve \underline{B} vektörlerini bileşenleri cinsinden belirtiniz.
- (b) $m = \underline{A} \cdot \underline{B}$ skaler çarpımını bulunuz.
- (c) $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$ vektörel çarpımını bulunuz.



Şekil B.41 Problem B.10

Cevaplar:

- (a) $\underline{A} = 9,66\underline{i} + 2,59\underline{j}; \underline{B} = 7\underline{j}$.
- (b) $m = 18,13$.
- (c) $\underline{C} = 67,62\underline{k}$.

C.1 Fonksiyonlar

C.1.1 Sabit Fonksiyonlar

C.1.2 Kuvvet Fonksiyonları

C.1.3 Lineer Fonksiyonlar

C.1.4 İkinci Dereceden Fonksiyonlar

C.1.5 Çok Terimli Fonksiyonlar

C.1.6 Trigonometrik Fonksiyonlar

C.1.7 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

C.2 Türev

C.2.1 Temel Fonksiyonların Türevleri

C.2.2 Sabit Çarpım Kuralı

C.2.3 Toplam Kuralı

C.2.4 Çarpım Kuralı

C.2.5 Bölüm Kuralı

C.2.6 Zincir Kuralı

C.2.7 Kapalı Türevleme

C.2.8 Daha Yüksek Türevler

C.3 İntegral

C.3.1 Belirsiz İntegrallerin Özellikleri

C.3.2 Belirli İntegrallerin Özellikleri

C.3.3 İntegral Alma Yöntemleri

C.4 Trigonometrik Özdeşlikler

C.5 İkinci Dereceden (Kuadratik) Formül

C.6 Çalışma Problemleri

C.1 Fonksiyonlar

Fonksiyon, matematiğin en temel kavramlarından biridir. “Fonksiyon” terimi, bir niceliğin bir diğerine bağımlılığını göstermek için kullanılır. Genel olarak, bir dizi deney sonucunda, iki nicelik arasında bir ilişki kurulabilir. Bu ilişki bir tablo, bir grafik veya *fonksiyon* olarak adlandırılan bir matematiksel denklem biçiminde temsil edilebilir. İki nicelik ile ilgili bir fonksiyon oluşturulduktan sonra, bir niceliğin değişikliklerin sonucu olan diğer nicelikteki değişiklikler, ek deneylere başvurmadan tahmin edilebilir.

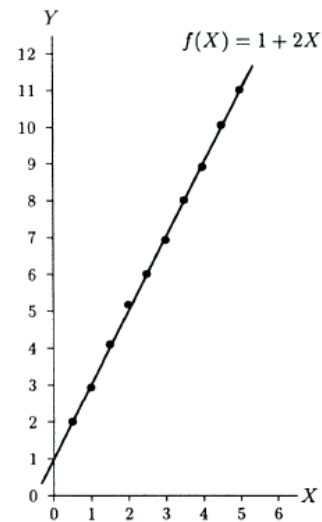
Fiziksel yasaların çoğu matematiksel denklemler biçiminde ifade edilir. Örneğin hız, pozisyonun zaman bağlı değişimi olarak tanımlanır. Bir nesnenin zaman içindeki konum değişimini ölçebilir ve bu değişimi bir fonksiyon olarak ifade edebilirsek, o zaman nesnenin hızını gerçekten ölçmeksizin sadece belirli matematiksel işlemlere tabi tutarak belirleyebiliriz.

X ve Y olarak adlandırılan iki nicelik ele alınsın. Bu niceliklerin ilişkili olduğu ve X niceliğindeki bir değişimin Y niceliğinde bir değişime sebep olduğu varsayalım. Değişen miktar X ile karşılık gelen Y değerlerinin ölçüldüğü bir dizi on deney gerçekleştirildiğini varsayalım. X niceliğinin varyasyonlara göre Y niceliğinin değişimi çeşitli şemalarla temsil edilebilir. Örneğin, toplanan veriler tablo biçiminde sunulabilir (Tablo C.1). Bununla birlikte, bilgi bir dizi

sayıdan ziyade bir diyagramdan daha kolay çıkarılabilir. Yatay koordinatın (apsis) X girdisine ve dikey koordinatın (ordinat) Y çıktısına tahsis edilmesiyle bir diyagram oluşturulabilir (Şekil C.1). Tablo C.1'de kaydedilen her bir X ve Y çifti bu şemadaki bir noktaya karşılık gelecektir. Elde edilen verilerin grafiğini temsil edecek bir eğri bu noktaların birleştirilmesiyle elde edilebilir.

Tablo C.1 Deney Verileri

DENEY	X	Y
1	0,5	2,0
2	1,0	2,9
3	1,5	4,1
4	2,0	5,2
5	2,5	6,0
6	3,0	6,9
7	3,5	8,0
8	4,0	8,9
9	4,5	10,0
10	5,0	11,0



Şekil C.1 Y, X 'in bir fonksiyonu olup $Y = f(X) = 1 + 2X$

X ve Y arasındaki ilişkiyi temsil etmenin başka bir yolu da fonksiyonlardır. Fonksiyonlar genellikle f veya g gibi tek harflerle gösterilir. Örneğin $Y = f(X)$, Y 'nin X 'in bir fonksiyonu olduğunu ifade etmektedir. BU fonksiyonda X işlem ya da sürecin “girdisi” veya “sebebi” iken, Y “çıktı” veya “etkisidir”. Genellikle, bir fonksiyonun girdisi bağımsız değişken, çıktısı bağımlı değişkendir. İki veya daha fazla nicelik ile ilgili fonksiyonların belirlenmesinin çeşitli yolları vardır. Bir yöntem, bir deney veya gözlemin sonucu olarak elde edilen grafiği (Şekil C.1'deki gibi) bilinen fonksiyonların grafikleri ile karşılaştırmaktır. Örneğin Şekil C.1'deki düz çizgi Y niceliğinin X niceliğinin “lineer” bir fonksiyonu olduğunu ve aralarındaki ilişkinin $Y = 1 + 2X$ biçiminde ifade edilebileceğini gösterir. Bu sebeple X ve Y arasındaki ilişki $f(X) = 1 + 2X$ biçiminde ifade edilir. Bu tartışmadan en uygun fonksiyonu kurabilmek için, yaygın olarak karşılaşılan fonksiyonların özelliklerine aşina olunması gerektiği anlaşılacaktır.

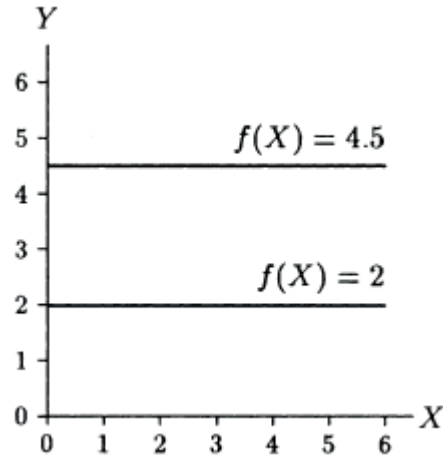
Kalkülüste çok sayıda fiziksel fenomeni tanımlamak için yeterli olabilecek birkaç temel fonksiyon vardır. Bu temel fonksiyonlar arasında sabit, kuvvet, trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonlar bulunur. Daha karmaşık fonksiyonlar oluşturmak için temel işlevler çeşitli yollarla birleştirilebilir.

C1.1 Sabit Fonksiyonlar

Sabit fonksiyonlar aşağıda gösterilen genel formda ifade edilebilir.

$$f(X) = c \quad (C.1)$$

Burada c , sabit bir sayısal değere sahip bir semboldür. Örneğin, $Y = 2$ ve $Y = 4.5$ sabit fonksiyonlardır. Sabit fonksiyonların grafikleri Şekil C.2'de gösterildiği gibi yatay çizgilerden oluşur.



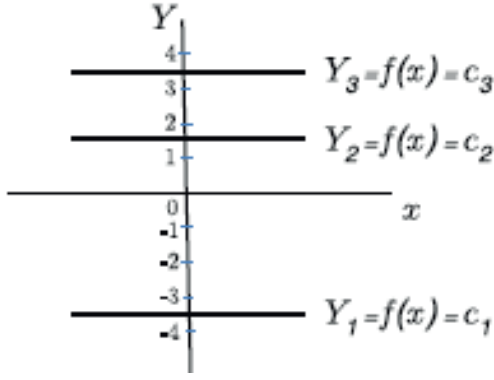
Şekil C.2 Sabit fonksiyonlar

Örnek C.1 Aşağıdaki sabit fonksiyonların grafiğini çiziniz.

$$y_1 = f(x) = -3,5 \quad y_2 = f(x) = 1,5 \quad y_3 = f(x) = 3,5$$

Çözüm: Denklem C.1 kullanılarak; $c_1 = -3,5$; $c_2 = 1,5$; $c_3 = 3,5$.

Bu sabit fonksiyonların grafikleri Şekil C.3'te gösterilmiştir.



Şekil C.3 Örnek C.1

C.1.2 Kuvvet Fonksiyonları

Kuvvet fonksiyonları aşağıda gösterilen genel formda ifade edilebilir. $f(X) = X^r$ (C.2)

Bu denklemde r değeri, sıfır ve kesirli sayılar dahil olmak üzere herhangi bir reel veya tam sayı değerini alabilir. $r = 0$ olması durumunda $X^0 = 1$ olduğu için bu kuvvet fonksiyonun aynı zamanda bir sabit fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir. Aşağıda verilen fonksiyonlar kuvvet fonksiyonlarının birer örneğidir.

$$f(X) = X^1 = X$$

$$f(X) = X^3 = X \cdot X \cdot X$$

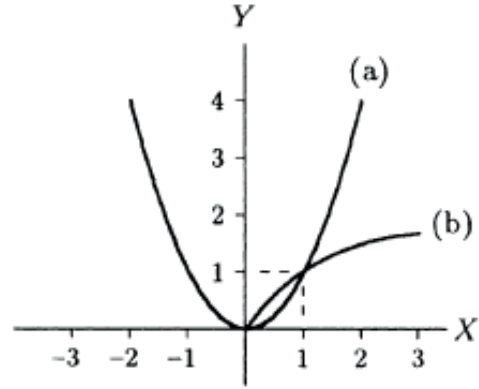
$$f(X) = X^{-1} = \frac{1}{X}$$

$$f(X) = X^{-2} = \frac{1}{X^2}$$

$$f(X) = X^{0.5} = X^{\frac{1}{2}} = \sqrt{X}$$

Bazı kuvvet fonksiyonlarının grafikleri Şekil C.4'te gösterilmiştir. Verilen bir fonksiyon için, X 'e farklı değerler atayıp, bu değerler

için fonksiyonun Y sonucunu elde edip, bu X ve Y çiftlerini grafik üzerinde bir eğri ile birleştirilerek elde edilebilir.



Şekil C.4 Kuvvet fonksiyonlarına örnekler
(a) $f(X) = X^2$ ve (b) $f(X) = \sqrt{X}$

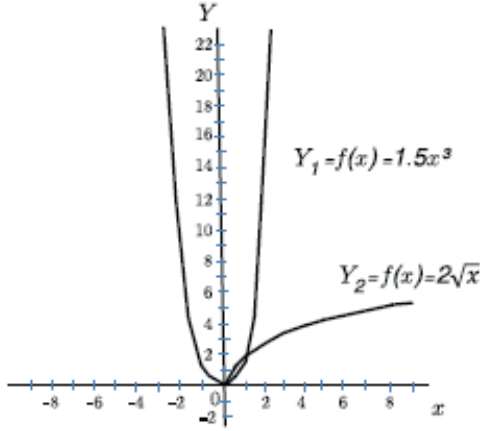
Örnek C.2 Aşağıdaki kuvvet fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

$$y_1 = f(x) = 1,5^3 \quad y_2 = f(x) = 2x^2 \\ = 2\sqrt{x}$$

Çözüm: Verilen fonksiyonlar için denklem (C.2) kullanılarak, x 'e sırasıyla farklı değerler atanır ve bu değerler fonksiyona yerleştirilerek grafik kağıdında y değerleri elde edilir. x ve y 'ye karşılık gelen noktaları Şekil C.5'te gösterildiği gibi bağlayan eğriler çizilerek grafik oluşturulabilir.

$Y_1 = f(x) = 1,5^3$ fonksiyonunda x 'e hem pozitif hem de negatif değerler atanabilirken, $Y_2 = f(x) = 2\sqrt{x}$ fonksiyonunda x 'e yalnızca pozitif değerler atanabileceğini unutmayın. Bu nedenle, ilk fonksiyonun grafiği koordinat sisteminin birinci ve ikinci çeyreğinde

bulunur. Ancak ikinci fonksiyonunun grafiği Şekil C.5'te gösterildiği gibi koordinat sisteminin sadece birinci çeyreğinde bulunur. Verilen kuvvet fonksiyonları için gereken x ve y değerleri Tablo C.2'de gösterilmiştir.



Şekil C.5 Örnek C.2

Tablo C.2 Kuvvet fonksiyonlarının çizilmesi için veriler

$y_1 = f(x) = 1,5^3$	$y_2 = f(x) = 2\sqrt{x}$
$x = 0 \quad y = 0$	$x = 0 \quad y = 0$
$x = 1 \quad y = 1,5$	$x = 1 \quad y = 2$
$x = 1,5 \quad y = 5,06$	$x = 2 \quad y = 2,83$
$x = 2 \quad y = 12$	$x = 3 \quad y = 3,46$
$x = 2,5 \quad y = 23,4$	$x = 4 \quad y = 4$
$x = -1 \quad y = -1,5$	$x = 5 \quad y = 4,47$
$x = -2 \quad y = -12$	$x = 8 \quad y = 5,66$
$x = -2,5 \quad y = -23,4$	$x = 9 \quad y = 6$

C.1.3 Lineer Fonksiyonlar

Lineer fonksiyonlar aşağıda gösterilen genel formda ifade edilebilir.

$$f(X) = a + bX \quad (C.3)$$

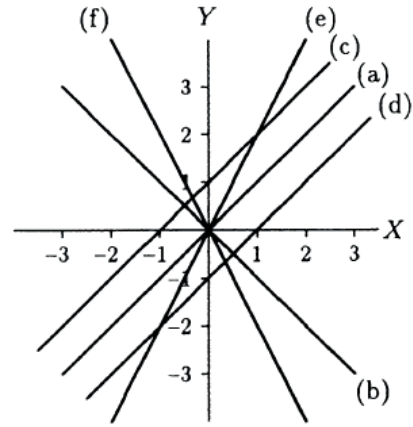
Denklem C.3'te verilen a ve b değerleri sabit katsayılardır. Lineer fonksiyonun grafiği, a 'nın grafiğin Y eksenini kestiği nokta olduğu, b 'nin ise grafiğin eğimi olduğu düz bir çizgidir. Lineer fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

$$f(X) = 1 + 2X$$

$$f(X) = 0.5 - 5X$$

$$f(X) = X$$

Bazı lineer fonksiyonların grafikleri Şekil C.6'da gösterilmiştir. Lineer bir fonksiyonun grafiğinin çizilebilmesi için yalnız iki noktaya ihtiyaç duyulmaktadır.



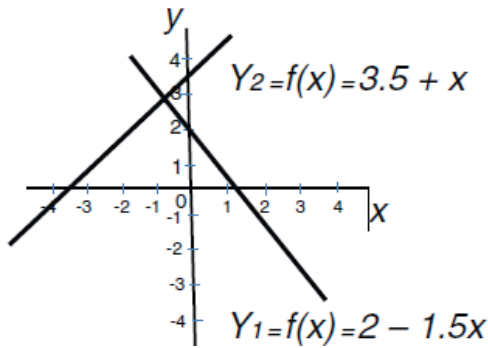
Şekil C.6 Lineer fonksiyonlar

Örnek C.3 Aşağıdaki lineer fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

$$y_1 = f(x) = 2 - 1,5x \quad y_2 = f(x) = 3,5 + x$$

Çözüm: Verilen fonksiyonların grafikleri denklem C.3 kullanılarak ve örnek C.2'de anlatılan prosedürün aynısı kullanılarak çizilir. Öncelikle x 'e farklı değerler atanır ve bu

değerler fonksiyona yerleştirilerek grafik kağıdında y değerleri elde edilir. Bu değerlerin her bir çifti grafik kağıdına işaretlenir ve ilgili noktaları bağlayan düz çizgiler çizilerek grafik oluşturulabilir. Şekil C.7'de gösterildiği gibi doğrusal fonksiyonların grafiği düz çizgiler olduğundan, her bir fonksiyon için en az iki nokta grafikleri çizmek için yeterli olacaktır.



Şekil C.7 Örnek C.3

İlk fonksiyona göre; $x = 0$ iken $y = 2$ ve $x = 3$ iken $y = -2,5$.

İkinci fonksiyona göre; $x = 0$ iken $y = 3,5$ ve $x = -3,5$ iken $y = 0$.

C.1.4 İkinci Dereceden Fonksiyonlar

İkinci dereceden fonksiyonlar aşağıda gösterilen genel formda ifade edilebilir.

$$f(X) = a + bX + cX^2 \quad (C.4)$$

Denklem C.4'te a , b ve c pozitif ya da negatif olabilen reel veya tam sayılardır. a ve b sabitleri sıfır değerini alabilirler. İkinci dereceden fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

$$f(X) = 2 + X - 0.5X^2$$

$$f(X) = 5 + X^2$$

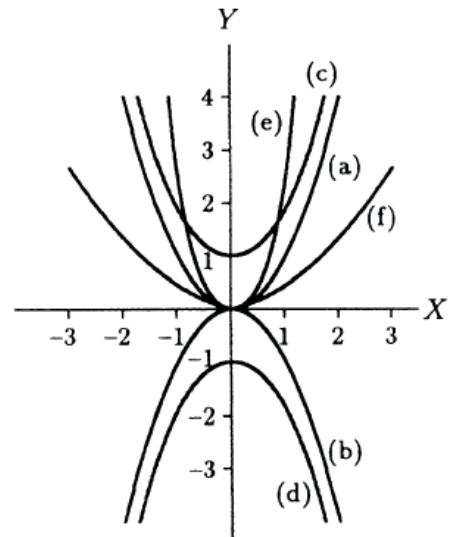
$$f(X) = -3X + 4X^2$$

$$f(X) = X^2$$

Bu fonksiyonların belirleyici özelliği X değerinin en yüksek kuvvetinin iki olmasıdır. Ancak, $f(X)=1 + X^{0.5} - 3X^2$ fonksiyonu $X^{0.5}$ terimini içermesi sebebiyle ikinci dereceden bir fonksiyon değildir. $X^0 = 1$ ve $X^1 = X$ olduğu için, ikinci dereceden fonksiyonları aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$f(X) = aX^0 + bX^1 + cX^2$$

İkinci dereceden fonksiyonların grafikleri paraboldür. Seçilen ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri Şekil C.8'te gösterilmiştir.



Şekil C.8 İkinci dereceden fonksiyonlar (a)

$$Y = X^2, (b) Y = -X^2, (c) Y = 1 + X^2,$$

$$(d) Y = -1 - X^2, (e) Y = 3X^2 \text{ ve } (f) Y = X^2/3$$

C.1.5 Çok Terimli Fonksiyonlar

Çok terimli fonksiyonlar aşağıda gösterilen genel formda ifade edilebilir.

$$f(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \dots + A_nX^n \quad (C.5)$$

A_0, A_1, \dots, A_n terimleri sıfır ya da sıfırdan farklı pozitif ya da negatif reel veya tam sayı olabilirler. n ise X değişkeninin en büyük kuvveti olan pozitif bir tam sayıdır. n kuvveti polinomun derecesi olarak tanımlanır. Örneğin,

$$f(X) = 1 - X - 2X^2 + 5X^3$$

polinomunun derecesi 3, katsayılarının değerleri $A_0 = 1, A_1 = -1, A_2 = -2$ ve $A_3 = 5$ 'tir.

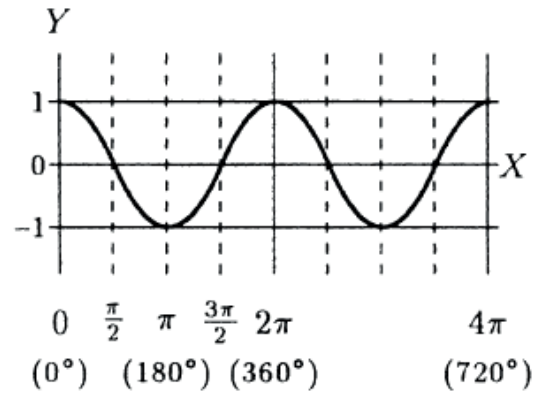
$$f(X) = 2 + 3X^2$$

Fonksiyonunun ise derecesi 2, katsayılarının değerleri $A_0 = 2, A_1 = 0$ ve $A_2 = 3$ 'tür. Bu fonksiyon aynı zamanda katsayıları $a = 2, b = 0$ ve $c = 3$ olan ikinci dereceden bir fonksiyondur.

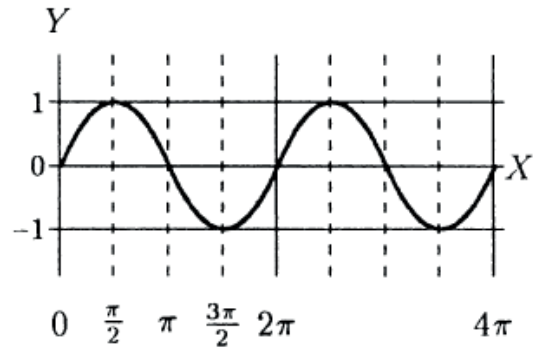
Sabit, lineer ve ikinci dereceden fonksiyonların çok terimli fonksiyonların özel formları olduğuna dikkat edilmelidir. Sabit bir fonksiyon sıfırıncı dereceden, lineer bir fonksiyon birinci dereceden, ikinci dereceden bir fonksiyon ise ikinci dereceden bir çok terimli fonksiyondur.

C.1.6 Trigonometrik Fonksiyonlar

Eğer Y niceliği bir X niceliğine $Y = \sin(X)$ veya $Y = \cos(X)$ gibi trigonometrik bir ilişkiyle bağlıysa, Y, X niceliğinin bir *trigonometrik fonksiyonu* olarak tanımlanır. $f(X) = \sin(X)$ ve $f(X) = \cos(X)$ sırasıyla *sinüs* ve *kosinüs* fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil C.9 ve Şekil C.10'da gösterilmiştir.



Şekil C.9 $Y = f(X) = \cos X$



Şekil C.10 $Y = f(X) = \sin X$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları içerisindeki X değerleri derece veya radyan cinsinden ölçülebilir. 180°lik bir açı π radyana eşittir ($\pi = 3.1416$). Derece radyana aşağıdaki eşitlik yardımıyla çevrilebilir.

$$\text{radyan} = \frac{\pi}{180} \times \text{derece}$$

Örneğin $0^\circ = 0 \text{ rad}$, $45^\circ = \pi / 4 \text{ rad}$, $90^\circ = \pi / 2 \text{ rad}$, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $270^\circ = 3\pi / 2 \text{ rad}$, $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ve $720^\circ = 4\pi \text{ radyandır}$.

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri, kuvvet ve lineer fonksiyonların grafikleri çizilirken basit prosedür kullanılarak oluşturulabilir. Bu fonksiyonları çizmek için kullanılan veriler tablo C.3'te gösterilmiştir.

Tablo C.3 Trigonometrik fonksiyonları çizmek için veriler

$y = \cos(x)$	$y = \sin(x)$
$x = 0 \quad y = 1$	$x = 0 \quad y = 0$
$x = 90^\circ \quad y = 0$	$x = 90^\circ \quad y = 1$
$x = 180^\circ \quad y = -1$	$x = 180^\circ \quad y = 0$
$x = 270^\circ \quad y = 0$	$x = 270^\circ \quad y = -1$
$x = 360^\circ \quad y = 1$	$x = 360^\circ \quad y = 0$

Trigonometrik fonksiyonlar grafiklerinin tekrarlı kalıplardan oluşması sebebiyle döngüsel veya periyodiktir. Şekil C.9 ve Şekil C.10'da gösterilen sinüs ve kosinüs fonksiyonları her 2π radyan veya 360° de bir tekrar eder. Bu durum, bu fonksiyonların periyodlarının 2π radyan olduğu anlamına gelir. Ayrıca sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının -1 ile 1 arasında değer olması bu fonksiyonun *genliğinin* 1 olduğu ifade eder.

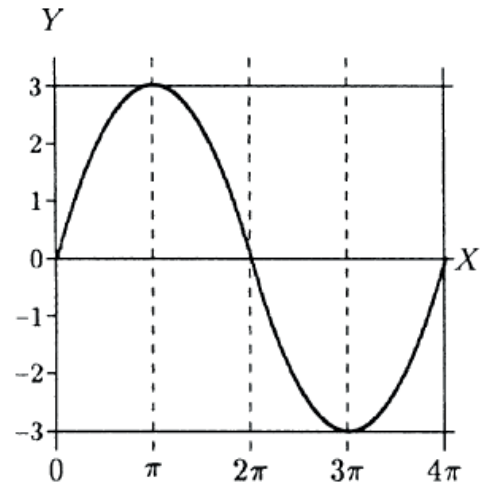
$Y = \sin(X)$ ve $Y = \cos(X)$ fonksiyonları trigonometrik fonksiyonların en basit halidir.

Sinüs fonksiyonu aşağıda belirtildiği şekilde daha genel bir formda ifade edilebilir.

$$f(X) = a \sin(bX) \quad (\text{C.6})$$

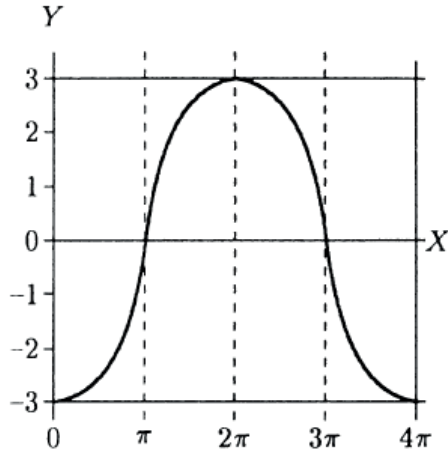
Burada a ve b bazı sabitlerdir. Denklem C.6'da tanımlanan sinüs fonksiyonunun genliği a , periyodu $2\pi/b$ 'dir. Örneğin Şekil C.11'de gösterilen $f(X) = 3 \sin(x/2)$ fonksiyonunun genliği 3, periyodu 2π 'dir. Denklem C.6'daki sinüs fonksiyonu aşağıda gösterildiği periyodu 2π 'dir. Denklem C.6'daki sinüs fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibi daha da geliştirilebilir.

$$f(X) = a \sin(bX + c) \quad (\text{C.7})$$



Şekil C.11 $Y = 3 \sin(x/2)$

Burada a genlik, $2\pi/b$ periyot ve bu fonksiyonun grafiği $f(X) = a \sin(bx)$ fonksiyonun grafiğiyle karşılaştırıldığında c kadar sola veya sağa kayacaktır. Örneğin $f(X) = 3 \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun grafiği Şekil C.12'de gösterilmiştir.



Şekil C.12 $Y = 3 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

$\pi / 2$ kadar kaydırılan sinüs fonksiyonunun negatif kosinüs fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. Bir başka deyişle $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x/2)$ eşitliği mevcuttur. Trigonometrik fonksiyonların çözümlenmesinde yararlanılabilecek çok sayıda trigonometrik kimlik ve formül vardır. Bu formüllerden bazıları Bölüm C.4’de verilmiştir.

C.1.7 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

3^X veya $(1/2)^2$ gibi fonksiyonlar *üstel fonksiyonlar* olarak tanımlanır. Üstel fonksiyonların genel gösterimi b^X şeklindedir. Burada b , *taban* olarak adlandırılmaktadır. Kalkülüste en yaygın kullanılan taban, 2.71 ile 2.72 arasında bir değere sahip olan e irrasyonel sayısıdır. e^X veya $\exp X$ genellikle üstel fonksiyon olarak adlandırılır. $\exp X$ üstel fonksiyonunun $\ln X$ ile gösterilen ve *doğal logaritmik fonksiyon* olarak adlandırılan tersi

mevcuttur. Bu ayrıca e tabanlı logaritma olarak ifade edilen $\log_e X$ şeklinde de yazılabilir.

Eğer $\ln X = Y$ ise $\exp Y = X$

$\ln(\exp X) = X$ ve $\exp(\ln X) = X$

$\ln 1 = 0$ ve $\exp 0 = 1$

$\exp X$ ve $\ln X$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil C.13’de gösterilmiştir. Üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ilgili bazı ilave özellikler aşağıda verilmiştir.

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp(X + Y)$$

$$\frac{\exp X}{\exp Y} = \exp(X - Y)$$

$$\exp(-X) = \frac{1}{\exp X}$$

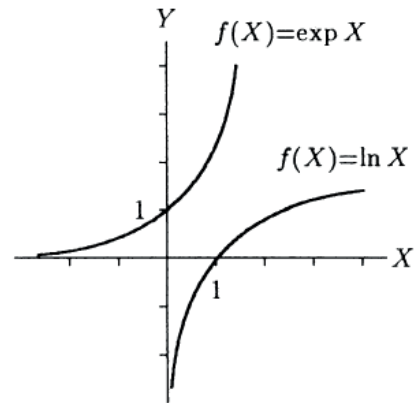
$$(\exp X)^Y = \exp(XY)$$

$$\ln(XY) = \ln X + \ln Y$$

$$\ln\left(\frac{X}{Y}\right) = \ln X - \ln Y$$

$$\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln X$$

$$\ln X^Y = Y \ln X$$



Şekil C.13 Üstel ve logaritmik fonksiyonlar

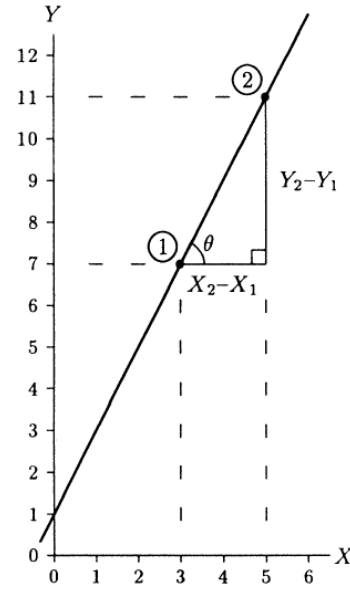
“ln” fonksiyonunun negatif bir sayı alamayacağına ancak ln X değerinin negatif çıkabileceğine dikkat edilmelidir. Bir başka deyişle ln X , sıfırdan büyük X değerleri için tanımlanmıştır. Diğer yandan exp X , tüm X değerleri için tanımlıyken alabileceği değerler daima pozitiftir.

C.2. Türev

Türev, eğrilerin eğimlerini ile maksimum ve minimum değerlerini belirlemek için kullanılan temel matematiksel işlemlerden biridir ve birçok başka uygulamaya sahiptir. Bir fonksiyonun türevini bulma sürecine *türevleme* denir. Türev ile ilgili olan kalkülüs dalına *diferansiyel kalkülüs* denir.

Bir fonksiyonun türevi, o fonksiyonun grafiğinin eğim veya eğimlerini temsil eder. Şekil C.14’de grafiği gösterilen $Y = 1 + 2X$ lineer fonksiyonu örnek olarak ele alınsın. $Y = 1 + 2X$ fonksiyonunu temsil eden çizginin eğimi, bu çizgi üzerinde rastgele seçilecek iki nokta üzerinden hesaplanabilir. Bu örnekte 1 ve 2 numaralı noktaların koordinatları $X_1 = 3$, $Y_1 = 7$, $X_2 = 5$ ve $Y_2 = 11$ şeklinde verilmiştir. Eğim, eğrinin yatayla yaptığı açının tanjantı olduğu için; Şekil C.14’de gösterilen eğrinin eğimi aşağıda gösterildiği üzere hesaplanabilir.

$$\text{eğim} = \tan \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = 2$$



Şekil C.14 Eğimi gösteren türev

Özetle, $Y = 1 + 2X$ fonksiyonunun türevi 2’ye eşit olmalıdır. Bu değer, fonksiyonunun içerisinde X ’in önünde yer alan 2 olduğuna dikkat edilmelidir.

Düz bir çizginin eğimi sabittir. Düz bir çizgiden oluşmayan bir eğrinin ise birden çok eğimi vardır ve eğrinin değişen eğimlerini takip etmek genellikle zordur. Türevleme eğrilerin eğimlerinin belirlenmesini kolay kılar.

Genellikle, bir fonksiyonun türevi bir başka fonksiyona eşittir. $Y = f(X)$ fonksiyonu için türevi belirtmek için birçok sembol kullanılır. Örneğin;

$$f', \quad f'(X), \quad \frac{df}{dX}, \quad Y', \quad \frac{dY}{dX}$$

C.2.1 Temel Fonksiyonların Türevleri

$f(X) = c$ sabit fonksiyonunun grafiği eğimi sıfır olan yatay bir çizgidir. Bu sebeple, sabit fonksiyonların türevleri daima sıfırdır.

$$\frac{d}{dX}(c) = 0 \quad (C.8)$$

$f(X) = X$ lineer fonksiyonunun grafiği eğimi bir olan düz bir çizgidir. Bu sebeple,

$$\frac{d}{dX}(X) = 1 \quad (C.9)$$

$f(X) = c$ ve $f(X) = X$ gibi fonksiyonlarının eğimlerden yararlanılarak türevlerinin hesaplanması kolaydır. Bununla birlikte, X^3 , \sqrt{X} ve X^{-2} gibi kuvvet fonksiyonlarının grafikleri değişen eğimlere sahiptir ve türevlerinin tahmin edilmesi kolay değildir. X^r kuvvet fonksiyonunun türevi, fonksiyonun kuvvet ile çarpılıp, kuvvetin 1 azaltılmasıyla hesaplanır.

$$\frac{d}{dX}(X^r) = rX^{r-1} \quad (C.10)$$

Denklem C.10 kuvvet kuralı olarak bilinmektedir. Aşağıdaki örnekler kuvvet kuralının kullanılmasını göstermektedir.

Fonksiyon, $f(X)$	Türev, f'
X^4	$4X^3$
X^{-2}	$-2X^{-3}$
$X^{2.3}$	$2.3X^{1.3}$
$\sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

Eğer r kuvveti sıfır ise X ne olursa olsun $X = 0$ olacaktır. Bu sebeple 1, X^0 veya r kuvveti 0 olan bir kuvvet fonksiyonudur ve Denklem C.10'da verilen kuvvet kuralı türevinin hesaplanmasında kullanılabilir.

$$\frac{d}{dX}(1) = \frac{d}{dX}(X^0) = 0X^{-1} = 0$$

Sıfırın herhangi bir sayı ile çarpımının sıfıra eşit olduğu unutulmamalıdır. $f(X) = X$ fonksiyonu da $r = 1$ olan bir kuvvet fonksiyonudur. Bu sebeple,

$$\frac{d}{dX}(X) = \frac{d}{dX}(X^1) = 1X^0 = 1$$

Türevin tanımı diğer temel fonksiyonların da türevlenmesinde kullanılabilir. Aşağıda kanıtlarına yer verilmeksizin bazı temel fonksiyonların türevleri gösterilmiştir.

$$\frac{d}{dX}(\sin X) = \cos X \quad (C.11)$$

$$\frac{d}{dX}(\cos X) = -\sin X \quad (C.12)$$

$$\frac{d}{dX}(\exp X) = \exp X \quad (C.13)$$

$$\frac{d}{dX}(\ln X) = \frac{1}{X} \quad (C.14)$$

C.2.2 Sabit Çarpımı Kuralı

Bir c sabitiyle bir fonksiyonun çarpımı formundaki fonksiyonların türevi, fonksiyonun türevi ile sabit çarpılmasıyla elde edilir.

$$\frac{d}{dx}(cf(X)) = c \frac{df}{dx} = cf' \quad (C.15)$$

Aşağıda Denklem C.15'in kullanımına örnekler verilmiştir.

Fonksiyon, $f(X)$	Türev, f'
$2X^2$	$4X$
$-1.25X^{-3}$	$3.75X^{-4}$
$0.5 \cos X$	$-0.5 \sin X$
$-3 \exp X$	$-3 \exp X$

C.2.3 Toplam Kuralı

İki fonksiyonun toplamı formundaki bir fonksiyonun türevi fonksiyonların türevlerinin toplamına eşittir. $f_1(X)$ ve $f_2(X)$ iki fonksiyonu temsil ediyorsa, $f(X) = f_1(X) + f_2(X)$ fonksiyonunun türevi:

$$\frac{d}{dx}[f_1(X) + f_2(X)] = f_1' + f_2' \quad (C.16)$$

Örneğin,

$$\frac{d}{dx}(3X - 2\sin X) = \frac{d}{dx}(3X) + \frac{d}{dx}(-2 \sin X) = 3 - 2 \cos X$$

Toplam kuralının lineer ve ikinci dereceden fonksiyonların türevlerinin alınmasında da kullanılabilir. a , b ve c birer sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dx}(a + bX) = b \quad (C.17)$$

$$\frac{d}{dx}(a + bX + cX^2) = b + 2cX \quad (C.18)$$

Lineer ve ikinci dereceden fonksiyonların çok terimli fonksiyonların özel bir formu olduğu

göz önüne alınarak, A_0 , A_1 , A_2 ve A_3 sabitleri için çok terimli fonksiyonların türevi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}(A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \dots + A_nX^n) \\ = A_1 + 2A_2X + 3A_3X^2 + \dots + nA_nX^{n-1} \quad (C.19) \end{aligned}$$

Türevlemenin polinomun derecesini bir düşürdüğüne dikkat edilmelidir. Örneğin, ikinci dereceden bir fonksiyonun (ikinci dereceden çok terimli) türevi bir lineer (birinci dereceden çok terimli) fonksiyondur. Benzer şekilde üçüncü dereceden birçok terimli fonksiyonun türevi ikinci dereceden bir fonksiyondur. Örneğin,

$$\frac{d}{dX}(3 - 2X + 5X^2 - X^3) = -2 + 10X - 3X^2$$

C.2.4 Çarpım Kuralı

İki fonksiyonun çarpımı şeklindeki bir fonksiyonun türevi, birinci fonksiyon ile ikinci fonksiyonun türevinin çarpımı ile ikinci fonksiyon ile birinci fonksiyonun türevinin çarpımının toplamına eşittir. Eğer $f_1(X)$ ve $f_2(X)$ iki fonksiyon ise; $f(X) = f_1(X) f_2(X)$ ' in türevi:

$$\frac{d}{dx}[f_1(X)f_2(X)] = f_1f_2' + f_1'f_2. \quad (C.20)$$

Örneğin;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(X^2 \cos x) &= X^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(X^2) \\ &= X^2(-\sin x) + (\cos x)(2X) \\ &= 2X \cos x - X^2 \sin x. \end{aligned}$$

Çarpım kuralının uygulanmasının, ikiden fazla fonksiyonun çarpımı şeklindeki fonksiyonları içerecek şekilde genişletilebileceği dikkate alınmalıdır.

Örneğin;

$$\frac{d}{dX} [f_1(X)f_2(X)f_3(X)] = f_1f_2f_3' + f_1f_2'f_3 + f_1f_2f_3'$$

C.2.5 Bölüm Kuralı

İki fonksiyonun oranı şeklindeki bir fonksiyonun türevi, paydaki fonksiyonun türevi ile paydanın çarpımı ile paydaki fonksiyon ile paydadaki fonksiyonun türevinin farkının; paydadaki fonksiyonun karesine bölünmesine eşittir.

Eğer $f_1(X)$ ve $f_2(X)$ iki fonksiyon ise; $f(X) = f_1(X)/f_2(X)$ ' in türevi:

$$\frac{d}{dX} \left[\frac{f_1(X)}{f_2(X)} \right] = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} \quad (C.21)$$

Örneğin;

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dX} \left(\frac{2+3X^2}{X^2} \right) \\ &= \frac{X^2 \frac{d}{dX} (2+3X^2) - (2+3X^2) \frac{d}{dX} X^2}{X^2^2} \\ &= \frac{X^2(6X) - (2+3X^2)2X}{X^4} \\ &= \frac{6X^3 - 4X - 6X^3}{X^4} \\ &= -\frac{4}{X^3}. \end{aligned}$$

Alternatif olarak;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left(\frac{2+3X^2}{X^2} \right) &= \frac{d}{dX} \left(\frac{2}{X^2} + 3 \right), \\ &= \frac{X^2 \frac{d}{dX} (2) - (2) \frac{d}{dX} (X^2)}{X^2^2} + \frac{d}{dX} (3), \\ &= \frac{X^2(0) - 2(2X)}{X^4} + 0, \\ &= -\frac{4}{X^3}. \end{aligned}$$

$\tan X$, $\cot X$, $\sec X$, and $\csc X$ trigonometrik fonksiyonları, $\sin x$ ve $\cos x$ ' in çeşitli bölümleri olduğu dikkate alınmalıdır. Bu sebeple, bölüm kuralı onların türevlerini bulmak için kullanılabilir. Örneğin;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} (\tan x) &= \frac{d}{dX} \left(\frac{\sin X}{\cos X} \right) = \frac{\cos X \frac{d}{dX} (\sin X) - \sin X \frac{d}{dX} (\cos X)}{\cos^2 X}, \\ &= \frac{(\cos X)(\cos X) - (\sin X)(-\sin X)}{\cos^2 X} = \frac{\cos^2 X + \sin^2 X}{\cos^2 X}. \end{aligned}$$

$\cos^2 X + \sin^2 X = 1$ olduğundan;

$$\frac{d}{dX} (\tan X) = \frac{1}{\cos^2 X} = \sec^2 X \quad (C.22)$$

Benzer şekilde;

$$\frac{d}{dX} (\cot X) = -\frac{1}{\sin^2 X} = -\csc^2 X. \quad (C.23)$$

$$\frac{d}{dX} (\sec X) = \frac{\sin X}{\cos^2 X} = \sec X \tan X. \quad (C.24)$$

$$\frac{d}{dX} (\csc X) = -\frac{\cos X}{\sin^2 X} = -\csc X \cot X. \quad (C.25)$$

C.2.6 Zincir Kuralı

Bazen fonksiyonlar, önceki bölümlerde analiz edilenlerden farklı şekillerde görünür. $\cos(X^3)$, $\exp(2-5X)$ ve $\ln(4X)$ gibi

fonksiyonların türevini almak için yukarıdaki kuralların hiçbiri uygulanamaz. Örneğin $\exp(2 - 5X)$ fonksiyonunu düşünelim. $\exp X$ ve $2 - 5X$ 'in türevlerini gördük fakat fonksiyonunun türevi farklı bir türev kuralına sahip.

$f(X) = \exp(2 - 5X)$ fonksiyonunun türevini almak için, $Z = 2 - 5X$ parantezi ile ifadeleri yazalım. Orijinal fonksiyon $f(X) = \exp(Z)$ fonksiyonuna indirgenir.

Zincir kuralına göre;

$$\frac{df}{dX} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dX} \quad (C.26)$$

Şimdi $f(X) = \exp(2 - 5X)$ fonksiyonunun türevini alabiliriz;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}[\exp(2-5X)] &= \frac{d}{dZ}(\exp Z) \frac{d}{dX}(Z) = \frac{d}{dX}(\exp Z) \frac{d}{dX} \exp(2-5X), \\ &= (\exp Z)(-5), \\ &= -5 \exp(2-5X). \end{aligned}$$

Zincir kuralının çok sayıda uygulaması vardır. Örneğin, $Y = \sin(X^2)$ 'nin türevini almak için, $Z = X^2$ ve $Y = \sin Z$ diyelim. Y 'nin Z 'ye göre türevi $\cos Z$, Z 'nin X 'e göre türevi $2X$. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}[\sin(X^2)] &= \frac{d}{dZ}(\sin Z) \frac{d}{dX}(Z), \\ &= (\cos Z)(2X), \\ &= 2X \cos(X^2). \end{aligned}$$

$Y = (3 + X^2)^2$ fonksiyonunu düşünelim, bu fonksiyonun türevini almanın iki yolu vardır. Birinci yol, parantezleri genişletmek

fonksiyonu $Y = 9 + 6X^2 + X^4$ şeklinde yazmak ve türevini almaktır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}[(3 + X^2)^2] &= \frac{d}{dX}(9 + 6X^2 + X^4), \\ &= 0 + 12X + 4X^3, \\ &= 12X + 4X^3. \end{aligned}$$

İkinci yol, $Z = 3 + X^2$ ve $Y = Z^2$; türev alınıp zincir kuralı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}[(3 + X^2)^2] &= \frac{d}{dZ}(Z^2) \frac{d}{dX}(3 + X^2), \\ &= (2Z)(2X) = 2(3 + X^2)(2X), \\ &= 12X + 4X^3. \end{aligned}$$

X 'in herhangi bir Z fonksiyonu için, zincir kuralı şu şekilde özetlenebilir;

$$\frac{d}{dx}(Z^n) = nZ^{n-1} \frac{dZ}{dx}, \quad (C.27)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin Z) = \cos Z \frac{dZ}{dx}, \quad (C.28)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos Z) = -\sin Z \frac{dZ}{dx}, \quad (C.29)$$

$$\frac{d}{dx}(\exp Z) = \exp Z \frac{dZ}{dx}, \quad (C.30)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln z) = \frac{1}{z} \frac{dZ}{dx}. \quad (C.31)$$

C.2.7 Kapalı Türevleme

Bazen bir büyüklük başka bir büyüklüğün kapalı bir fonksiyonu olabilir.

Örneğin;

$$Y^2 - X^2 = 4.$$

Fonksiyonunda y, x 'in kapalı fonksiyonudur.

Aynı eşitlik kapalı şekilde yeniden yazılabilir;

$$Y = (4 + X^2)^{1/2}$$

Y' nin X' e göre türevi, zincir kuralı uygulanarak bulunabilir;

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{2}(4 + X^2)^{-\frac{1}{2}}(2X) = \frac{X}{(4+X^2)^{1/2}}.$$

Y' nin X' e görevi de kapalı ifadeden, her 2 tarafın X' e göre türevini alarak direkt olarak bulunabilir.

$$2Y \frac{dY}{dX} - 2X = 0,$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{(4 + X^2)^{1/2}}$$

C.2.8 Daha Yüksek Türevler

$f(X)$ 'in bir fonksiyonu Türev $f'(X)$ de bir fonksiyondur. $f'(X)$ ' in türevi de, $f(X)$ 'in ikinci türevi olarak adlandırılan $f''(X)$ olarak gösterilen başka bir fonksiyondur.

İkinci türev için kullanılan bazı notasyonlar;

$$f'' \quad f''(X) \quad \frac{d^2 f}{dX^2} \quad Y'' \quad \frac{d^2 Y}{dX^2}$$

Benzer şekilde $f'''(X)$, $f''(X)$ ' in birinci türevini, $f'(X)$ ' in ikinci türevini ve $f(X)$ 'in üçüncü türevini gösterir.

Örnekleri incelediğimizde;

$$Y = 1 + 3X - X^2 + 2X^3,$$

$$Y' = 3 - 2X + 6X^2,$$

$$Y'' = -2 + 12X,$$

$$Y''' = 12.$$

$$Y = X \sin(2X),$$

$$Y' = \sin(2X) + 2X \cos(2X),$$

$$\begin{aligned} Y'' &= 2 \cos(2X) + 2 \cos(2X) - 4X \sin(2X), \\ &= 4 \cos(2X) - 4X \sin(2X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y''' &= -8 \sin(2X) - 4 \sin(2X) - 8X \cos(2X), \\ &= -12 \sin(2X) - 8X \cos(2X). \end{aligned}$$

C.3 İntegral

Bölüm C2' de, verilen $f(X)$ fonksiyonunun türevini $f'(X)$ 'i bulmaya yoğunlaşıldı. Temel fonksiyonların türevinin göreceli olarak basit olduğunu gördük. Göreceli olarak karmaşık fonksiyonların türevini almak, basit fonksiyonların kombinasyonlarının (toplamları, çarpımları ve bölümleri) türevlerini kullanarak mümkün.

Daha sonra türevleri bilinen fonksiyonları belirlemek istiyoruz. Tersine çevirme işlemi integral olarak adlandırılır. Türev ile karşılaştırıldığında, integral daha zordur. İntegral için standart çarpım, bölüm veya zincir kuralları yoktur. Fonksiyon kombinasyonlarını birleştirmek için yeterli kuralların yokluğunda, integral tabloları kullanmak yaygın bir uygulamadır.

İntegral, alan ve hacim hesaplamaları, iş ve enerji hesaplamaları gibi birçok uygulamaya sahiptir.

$Y = f(X)$ fonksiyonunun X ' e göre integralinin gösteriminin iki yöntemi vardır;

$$\int f(X)dX, \quad (C.32)$$

$$\int_a^b f(X)dX. \quad (C.33)$$

Denklem (C.32) belirsiz integral ve Denklem (C.33) belirli integral olarak adlandırılır.

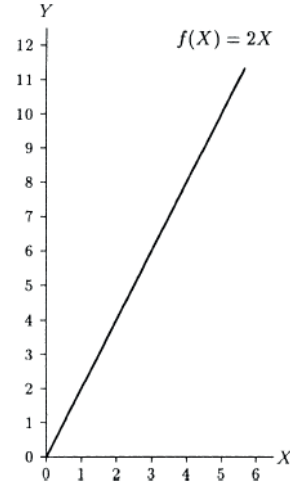
İntegral sembolü \int , toplamı (summation) temsil eden uzamış bir "S" simgesi, entegre edilecek $f(X)$ fonksiyonu integrand olarak adlandırılır, dX X 'de bir artış ve eşitlik (C.33)'deki a ve b sırasıyla integralin alt ve üst limitleri olarak adlandırılır.

Grafığı Şekil C.15' de $Y = f(X) = 2X$ verilen, fonksiyonunu düşünelim. Ayrıca $F_1(X) = X^2$ olsun. $F_1(X)$ ' in türevi $F(X)$ ' e eşittir ve dolayısıyla $F_1(X) = F(X) = 2X$ ' in integralidir. $F_2(X) = X^2 + c_0$ olsun, (c_0 sabit). $F_2(X)$ ' in türevi yine $f(X) = 2X$ çünkü sabit sayının türevi sıfırdır. $c_0 = 0$ olduğunda F_1, F_2 ' nin özel bir formudur. Bu sebeple $f(X) = 2X$ ' in belirli integrali;

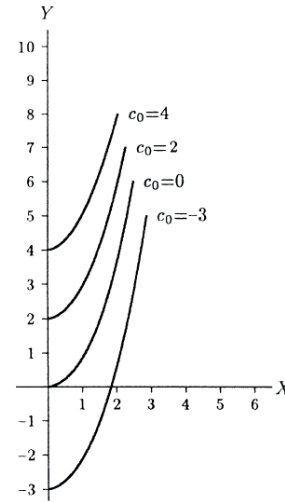
$$\int (2X)dX = X^2 + c_0$$

Burda, c_0 integral sabitidir. Bir fonksiyonun belirsiz integralinin, benzersiz olmayan bir başka fonksiyon olduğunu unutmayın. Farklı c_0 değerleri için farklı çözümler vardır. Bu farklı çözümler, hepsi $2X$ fonksiyonu

tarafından ifade edilen eğimlere sahip olan paralel grafiklere (Şekil C.16) sahiptir.



Şekil C.15 $Y = 2X$ fonksiyonu



Şekil C.16 Farklı c_0 değerleri için $Y = X^2 + c_0$ fonksiyonunun eğimi $2X$ 'e eşittir

Verilen bir fonksiyonun belirli integrali benzersizdir. $F(X)$ fonksiyonunun a ve b arasındaki belirli integralini değerlendirmek için, önce verilen fonksiyonun integrali alınır. Belirli integraller için, integral sabitleri, integral alınırken iptal olur. Bu nedenle, integral sabitinin sıfır olduğu varsayılabilir $F(X)$, $F(X)$ 'in integralini temsil ediyor olsun, $X = a$ ve $X = b$ değerlerinde $F(X)$ 'in değerlerini, $F(X)$ 'de X 'in iolduğu her yerde a ve b 'nin sayısal değerlerini değiştirerek değerlendirelim.

Başka bir deyişle $F(a)$ e ve $F(b)$ 'yi değerlendirelim. $F(X)$ 'in a ve b arasındaki belirli integrali $F(b)$ eksi $F(a)$ ' ya eşittir:

$$\int_a^b f(X)dX = F(b) - F(a).$$

Örneğin, $Y = f(X) = 2X$ fonksiyonunu düşünelim. $F(X)$ ' in $X = 0$ ve $X = 3$ arasındaki integrali değerlendirdiğimizi varsayalım. $a = 0$ ve $b = 3$ olsun. $f(X) = 2X$ ' in integrali $f(X) = X^2$ ($c_0 = 0$ için) olduğunu hatıralarsak; belirli integrali bulunurken izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir;

$$\text{Step 1: } \int_0^3 (2X)dX = [X^2]_0^3.$$

$$\text{Step 2 : } = [(3^2) - (0^2)].$$

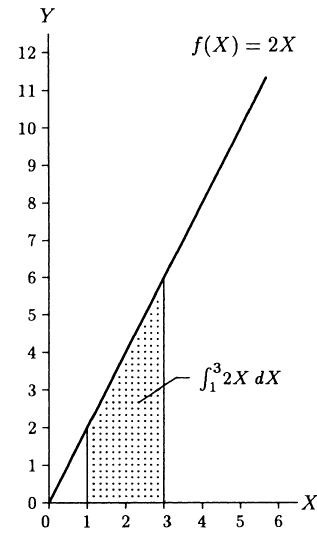
$$\text{Step 3: } = (9 - 0 = 9)$$

Verilen fonksiyonun integralini alarak (Aşama

1) $F(X)$ 'i belirleyiniz, $F(b)$ ve $F(a)$

değerlerini, integralin üst ve alt sınırlarını (Adım 2) değiştirerek bulunuz ve $F(b) - F(a)$ değerini bulun (Aşama 3).

Belirli integralin fiziksel anlamı; X eksen ve $X = (a), X = (b)$ 'den geçen dikey çizgiler ile sınırlanan alanı temsil eder. Örneğin, $f(X) = 2X$ fonksiyonunun $x = 1$ ve $x = 3$ arasındaki integrali Şekil C.17' de gösterilen taralı alana eşittir. Bu değer 8' dir.



Şekil C.17 İntegral alanı gösterir

C.3.1 Belirsiz İntegrallerin Özellikleri

Temel fonksiyonların integralleri,

$$\int c dX = cX + c_0 \text{ (constant } c), \quad (C.34)$$

$$\int X dX = \frac{X^2}{2} + c_0,$$

$$\int X^2 dX = \frac{X^3}{3} + c_0,$$

$$\int X^r dX = \frac{X^{r+1}}{r+1} + c_0 \text{ (} r \neq -1), \quad (C.35)$$

$$\int \sin X dX = -\cos X + c_0, \quad (C.36)$$

$$\int \cos X dX = \sin X + c_0, \quad (C.37)$$

$$\int \exp X dX = \exp X + c_0, \quad (C.38)$$

$$\int \frac{1}{X} dX = \ln X + c_0, \quad (C.39)$$

Katsayı ile çarpım ve toplam kuralları;

$$\int [cf(X) dX] = c \int f(X) dX, \quad (C.40)$$

$$\int [f_1(X) + f_2(X)] dX = \int f_1(X) dX + \int f_2(X) dX. \quad (C.41)$$

Örnekler;

$$\int 2\cos X dX = 2 \int \cos X dX = 2\sin X + c_0,$$

$$\begin{aligned} \int \left(5 - \frac{1}{2}X^3\right) dX &= 5 \int dX - \frac{1}{2} \int X^3 dX, \\ &= 5(X) - \frac{1}{2} \left(\frac{X^4}{4}\right) + c_0 \\ &= 5x - \frac{1}{8}x^4 + c_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{X^2} + \sin X\right) dX &= \int X^{-2} dX + \int \sin X dX, \\ &= \left(\frac{X^{-1}}{-1}\right) + (-\cos X) + c_0, \\ &= -\frac{1}{X} - \cos X + c_0. \end{aligned}$$

C.3.1 Belirli İntegrallerin Özellikleri

$F(X)$ ' in X ' e göre integralini $F(X)$ ile gösterelim;

$$F(X) = \int f(X) dX.$$

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ diğer iki fonksiyon;

$$\int_a^b f(X) dX = F(a) - F(b), \quad (C.42)$$

$$\int_a^b [cf(X)] dX = c \int_a^b f(X) dX = c[F(b) - F(a)], \quad (C.43)$$

$$\int_a^b [f_1(X) + f_2(X)] dX = \int_a^b f_1(X) dX + \int_a^b f_2(X) dX, \quad (C.44)$$

$$\int_a^b f(X) dX + \int_b^c f(X) dX = \int_a^c f(X) dX, \quad (C.45)$$

$$\int_a^b f(X) dX = - \int_b^a f(X) dX. \quad (C.46)$$

Temel fonksiyonların belirli integralleri,

$$\int_a^b dX = [X]_a^b = b - a,$$

$$\int_a^b X dX = \left[\frac{X^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

$$\int_a^b X^2 dX = \left[\frac{X^3}{3}\right]_a^b = \left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{1}{3}(b^3 - a^3),$$

$$\int_a^b \sin X dX = [-\cos X]_a^b = -\cos b + \cos a,$$

$$\int_a^b \cos X dX = [\sin X]_a^b = \sin b - \sin a.$$

$$\int_a^b \exp X dX = [\exp X]_a^b = \exp b - \exp a,$$

$$\int_a^b \frac{1}{X} dX = [\ln X]_a^b = \ln b - \ln a.$$

Örnekler;

$$\int_{45}^{90} \cos X dX = [\sin X]_{45}^{90} = \sin 90 - \sin 45 = 0.3,$$

$$\int_1^2 (4X + 9X^2) dX = \int_1^2 (4X) dX + \int_1^2 (9X^2) dX,$$

$$= 4\left[\frac{X^2}{2}\right]_1^2 + 9\left[\frac{X^3}{3}\right]_1^2,$$

$$= 2[X^2]_1^2 + 3[X^3]_1^2,$$

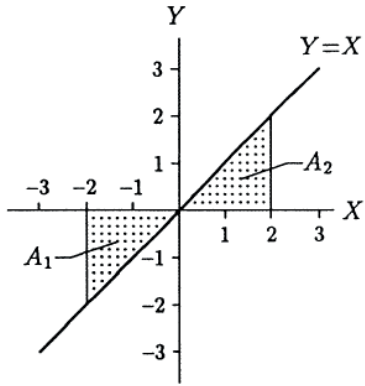
$$= 2(2^2 - 1^2) + 3(2^3 - 1^3),$$

$$= 2(4 - 1) + 3(8 - 1),$$

$$= 2(3) + 3(7) = 27.$$

Dikkat. $f(X) = X$ doğrusal fonksiyonunu düşünelim, bu fonksiyonun grafiği şekil C.18'de verilmiştir. Bu fonksiyonun sınırlı integralinin $X = -2$ ve $X = 2$ arasında çözüldüğünü düşünelim. Fonksiyon, x eksenini, alt ve üst limitlerden geçen dikey çizgiler arasında kalan alan integrali temsil ettiğinden, $f(X) = X$ ' in integrali $f(x), x = -2$ ve $x = 2$ arasında kalan Şekil C.18'de gösterilen taralı alan $(A1 + A2)$ ' dir. Geometriden, kolaylıkla $A1 = A2 = 2$ olduğuna karar verebiliyoruz. Toplam taralı alan=4. Şimdi integrali hesaplayalım;

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 X dX &= \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [(2^2) - (-2)^2] \\ &= \frac{1}{2} [4 - 4] = 0. \end{aligned}$$



Şekil C.18 Sınırlı integral değerlendirilirken dikkat edilmesi gerekenler

Bu beklenmedik sonuç, integralin alt ve üst sınırları arasındaki aralıkta, fonksiyonun X eksenini geçmesi ve ayrıca integral alma süreci sırasında Şekil C.18'de A1 olarak belirtilen alan için negatif bir değer hesaplanması gerçeğinden kaynaklanmaktadır.

Böyle bir hatayı önlemek için, sınırlı integralin doğru çözümü için aşağıdaki adımları takip etmelidir:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 X dX &= \left| \int_{-2}^0 X dX \right| + \left| \int_0^2 X dX \right|, \\ &= \left| \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^2 \right| \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} |(0^2) - (-2)^2| + \frac{1}{2} |(2)^2 - (0^2)|,$$

$$\frac{1}{2} |-4| + \frac{1}{2} |4| = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4.$$

Bu nedenle, $f(X)$ fonksiyonunun X' e göre sınırlı integralini hesaplamadan önce fonksiyonun grafiğinin, integralin alt ve üst sınırları arasındaki aralıkta X eksenini kesip kesmediğini kontrol etmek için integrali alınacak fonksiyonun basit bir grafiğini çizmelidir. Örneğin, $f(X)$ fonksiyonu, a ve b arasında X'e göre integral alınacaksa ve fonksiyonun eğrisi, c ve d noktalarında X eksenini kesiyorsa, öyle ki $a < c < d < b$, integral şu şekilde ifade edilir:

$$\int_a^b f(X) dX = \left| \int_a^c f(X) dX \right| + \left| \int_c^d f(X) dX \right| + \left| \int_d^b f(X) dX \right|.$$

C.3.3 İntegral Alma Yöntemleri

İntegralleri bilinen diğer fonksiyonların çarpım ya da bölümleri şeklindeki fonksiyonların integrali için standart bir kural yoktur. Böyle fonksiyonlar için, integral

tabloları ve aşağıdakiler dahil olmak üzere bazı integral yöntemleri vardır:

- Yerine koyma yöntemi ile integral
- Kısmi integral
- Trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak integral
- Kısmi fraksiyon ayrışması ile integral
- Sayısal integral

Örneğin aşağıda verilen integralin çözümü için;

$$\int 2X \sin(X^2) dX.$$

$2X \sin(X^2)$ fonksiyonu için; $2X$, X^2 ' nin türevinden yola çıkılabilir. $Z = X^2$ diyelim, $dZ = 2XdX$ olur. Z ve dZ ' nin verilen integral ile değiştirilmesiyle şu ifadeleri yazabiliriz;

Yerine koyma:

$$\int 2X \sin(X^2) dX = \int \sin Z dZ,$$

$$\text{İntegral: } = -\cos Z + c_0,$$

$$\text{Tekrar yerine koyma: } = -\cos(X^2) + c_0.$$

Burada kullanılan yöntem “Yerine koyma yöntemi ile integral” olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemlerin ayrıntılı açıklamaları bu metnin kapsamı dışındadır. Daha fazla bilgi için, ilgili okuyucu kalkülüs ders kitaplarına başvurmalıdır.

C.4 Trigonometrik Özdeşlikler

Negatif Açılı Formüller:

$$\sin(-X) = -\sin(X)$$

$$\cos(-X) = \cos(X)$$

Toplam Formülleri:

$$\sin(X + Y) = \sin(X) \cos(Y) + \cos(X) \sin(Y)$$

$$\sin(X - Y) = \sin(X) \cos(Y) - \cos(X) \sin(Y)$$

$$\cos(X + Y) = \cos(X) \cos(Y) - \sin(X) \sin(Y)$$

$$\cos(X - Y) = \cos(X) \cos(Y) + \sin(X) \sin(Y)$$

Çarpım Formülleri:

$$2 \sin(X) \cos(Y) = \sin(X + Y) + \sin(X - Y)$$

$$2 \cos(X) \sin(Y) = \sin(X + Y) - \sin(X - Y)$$

$$2 \cos(X) \cos(Y) = \cos(X + Y) + \cos(X - Y)$$

$$2 \sin(X) \sin(Y) = \cos(X - Y) - \cos(X + Y)$$

Çarpanlara Ayırma Formülleri:

$$\sin(X) + \sin(Y) = 2 \cos\left(\frac{X - Y}{2}\right) \sin\left(\frac{X + Y}{2}\right)$$

$$\sin(X) - \sin(Y) = 2 \cos\left(\frac{X + Y}{2}\right) \sin\left(\frac{X - Y}{2}\right)$$

$$\cos(X) + \cos(Y) = 2 \cos\left(\frac{X + Y}{2}\right) \cos\left(\frac{X - Y}{2}\right)$$

$$\cos(X) - \cos(Y) = 2 \cos\left(\frac{X + Y}{2}\right) \sin\left(\frac{X - Y}{2}\right)$$

Çift Açılı Formülleri:

$$\sin(2X) = 2 \sin(X) \cos(X)$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X)$$

Yarım Açılı Formülleri:

$$2 \sin^2\left(\frac{X}{2}\right) = 1 - \cos(X)$$

$$2 \cos^2\left(\frac{X}{2}\right) = 1 + \cos(X)$$

Pisagor Özdeşliği:

$$\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$$

Redüksiyon Formülleri:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right) = \sin(X) \quad \cos(\pi-X) = -\cos(X)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-X\right) = \cos(X) \quad \sin(\pi-X) = \sin(X)$$

Sinüs ve kosinüs ana trigonometrik fonksiyonlardır. Tanjant (tan), kotanjant (cot), sekant (sec), kosekant (csc) olarak adlandırılan diğer trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki tanımlar kullanılarak sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından elde edilebilir.

$$\tan(X) = \frac{\sin(X)}{\cos(X)} \quad \cot(X) = \frac{\cos(X)}{\sin(X)} = \frac{1}{\tan(X)}$$

$$\sec(X) = \frac{1}{\cos(X)} \quad \csc(X) = \frac{1}{\sin(X)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -8$$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

C.5 İkinci Dereceden (Kuadratik) Formül

Bir cebirsel denklem örneğin $3x = 7$ lineer bir denklemdir çünkü bilinmeyen x birinci dereceden kuvvete sahiptir. Bu denklem $x = 7/3$ olduğunu belirlemek için çözülebilir. Bir denklem örneğin $x^2 + 3x = 5$ ikinci dereceden bir denklemdir. Bu durumda, x 'in en büyük kuvveti 2'dir. $x^2 + 3x^{0,5} = 5$ denkleminin içerdiği $x^{0,5}$ teriminden dolayı ikinci dereceden bir denklem olmadığı unutulmamalıdır. İkinci dereceden denklemler aşağıdaki gibi genel biçimde yazılabilir.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (C.47)$$

Denklem C.47'de verilen a,b ve c bazı bilinen sayılardır ve x bilinmeyen bir parametredir. Denklem C.47'de verilen bilinmeyen x için genel çözüm aşağıdaki gibidir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (C.48)$$

\pm işareti x için iki çözüm olduğunu göstermektedir.

Dikkat. Denklem C.48’de verilen b^2 teriminin $4ac$ teriminden büyük veya $4ac$ terimine eşit olması gerektiği unutulmamalıdır böylece $b^2 - 4ac$ terimi pozitif değere sahip olur. Aksi takdirde $b^2 - 4ac$ terimi negatif değere sahip olur. Negatif sayıların karekökü gerçel sayıların aksine ‘‘imajiner’’ (sanal) sayılardır.

Örneğin, aşağıdaki kuadratik denklemin x için çözüleceğini varsayırsa;

$$x^2 + 2x = 8$$

Öncelikle her iki taraftan 8 çıkararak bu denklem, C.47’de verilen şekilde yazılır;

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Aşağıdaki verileri gözlemlemek için yukarıdaki denklem ile denklem C.47 karşılaştırılır;

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -8$$

a, b ve c denklem C.48’de yerlerine konulduğunda;

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2^2) - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

Artı işaretine göre:

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Eksi işaretine göre:

$$x = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 <$$

İkinci dereceden denklemin kökleri $x = 2$ ve $x = -4$ ’tür. Şimdi asıl denklem şu şekilde yazılabilir:

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

C.6 Çalışma Problemleri

Problem C.1 $X = -2, X = 0$ ve $X = 2$ noktalarında $Y = 1 - X^2$ fonksiyonunun grafiğinin eğimlerinin sırasıyla 4, 0 ve -4 olduğunu gösteriniz.

Problem C.2 Aşağıdaki fonksiyonların X ’e göre türevlerini alınız.

Fonksiyonlar	Cevaplar
$Y = 5x^2$	$10x$
$Y = -4,5x^{-2}$	$\frac{9}{x^3}$
$Y = 3 \sin x$	$3 \cos x$
$Y = (2 + 8 \sin x)$	$8 \cos x$
$Y = X^2 \sin X$	$2X \sin X + X^2 \cos X$
$Y = \frac{X}{\cos X}$	$\frac{\cos X + X \sin X}{\cos^2 X}$
$Y = \frac{\cos X}{X}$	$\frac{-X \sin X - \cos X}{X^2}$
$Y = \sqrt{X - X^3}$	$\frac{1 - 3X^2}{2\sqrt{X - X^3}}$
$Y = \sqrt{2x - 5x^2}$	$\frac{2 - 10x}{2\sqrt{2x - 5x^2}}$

Problem C.3 $X = 0^\circ$ ve $X = 180^\circ$ arasında $Y = \cos X$ fonksiyonunun X ’e göre integralinin 2 olduğunu gösteriniz. (İntegrali çözümlenmeden önce fonksiyonun grafiğini inceleyiniz.)

Problem C.4 Aşağıdaki integralleri çözümleniz.

<i>İntegraller</i>	<i>Cevaplar</i>
$\int 5dx$	$5x + c_0$
$\int 8xdx$	$4x^2 + c_0$
$\int 6 \sin x dx$	$-6 \cos x + c_0$
$\int (X - \sin X) dX$	$\frac{X^2}{2} + \cos X + c_0$
$\int \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) dX$	$X + \frac{1}{X} + c_0$
$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) dX$	0,5
$\int_{0^\circ}^{45^\circ} (\cos X + \sin X) dX$	1
$\int_2^4 6x^2 dx$	112
$\int_0^2 2x^2 dx + \int_2^6 2x^2 dx$	114

Problem C.5 $x^2 - 7,5x = 4$ ikinci dereceden denkleminin köklerinin $x = 8$ ve $x = -0,5$ olduğunu gösteriniz.

- A**
- Abduktor yürüyüşü, 133
- Açısal hareket, 63
- Açısal ivme, 63, 207-208, 239-240, 239ş ,240ş
- Açısal ivme, 9t, 64
- Açısal kinematik**
- Bağlantı sistemleri**
- Birim vektör, 226-228, 227ş
- Çift sarkaç, 224, 224ş
- Dairesel hareket, 225, 227
- Düzgün dairesel hareket, 220, 225ş
- Sarkaç, 223, 224ş
- Teğet hız ve normal ivme, 226ş, 226, 227
- Büyükölük ve birimler, 208
- Fleksiyon-ekstansiyon testi, 215, 215ş
- Frekans, 210
- Genlik, 209
- Hava direnci, 209,212ş
- İvme, 208
- Koordinatların dönüştürülmesi, 217
- Lineer ve açısal büyükölükler, 219, 220
- Sönümlü salınım, 211
- Ters sarkaç, 215
- Yer değiştirme, hız ve ivme- zaman, 214ş, 217
- Açısal kinetik**
- Dairesel uç bölgesi, kayak pisti, 237, 237ş
- Hız-açısal momentum, 235, 235ş
- Hız ve yer değiştirme, 243
- İki boyutlu (düzlemsel) hareket analizi, 242-243
- Jimnastikçi, yüksek çubukta, 233, 233ş
- Jirasyon yarıçapı, 242
- Kollar, jimnastikçi-açısal konum, 236-237, 237ş
- Kütle atalet momenti hareketi, 240, 241
- Net kuvvet, 232
- Paralel eksen teorisi, 241, 241ş
- Rotasyonel hareket, 232, 233ş
- Rotasyonel kinetik enerji, 246-247, 247ş
- Segmental hareket analizi**
- Açısal yer değiştirme ve zaman, 242
- Dinamik model, 242
- Diz ekstansiyonu, 243-247, 244ş
- Serbest cisim diyagramı, 195-196, 195ş
- Alan, 9t
- Alan eylemsizlik momenti, 351
- Ağırlık, 24
- Ağırlık Merkezi**
- bacak, 93-94, 93ş, 94ş
- belirleme, 89-94, 90ş, 91ş, 92ş, 93ş, 94ş, 94t
- Ağırlık Merkezi**
- belirleme, 89-100
- sistemi, 92
- Ağırlık merkezi, 25, 89
- Akromioklavikular eklem, 115
- Aktin ve miyozin, 105, 387
- Ankastre kiriş, 80
- Antagonist kas, 106
- Artikuler kartilaj, 104, 388-389, 389ş, 390ş
- Atlantoaksiyol eklem, 119
- Atlantoksipital eklem, 119
- Ayak bileği, 139-140
- B**
- Basınç, 9t
- Basit Destekli Yapılar, 71-78, 72ş-78ş
- Basma kuvveti, 22
- Bileşke moment, 40-46
- Birimler**
- Dönüşümü, 10
- Kuvvetin, 21
- Sistemi, 8-9

birim sistemi, 9, 10

Boyun Verme, 298, 298ş

Boyutsal analiz, 7-8

Burulma,

Dairesel şaftın, 341, 341ş

Dönme açısı, 340, 340ş

Enine ve boyuna düzlemler, 342

Formül ve gerilmeler, 340-341, 340ş

gerilme yörüngeleri, 347, 347ş

içi dolu silindir, 346, 346ş

kesme gerilmesi, 340, 341ş

Kırılan kemik, 344, 344ş

kutupsal atalet momenti, 341

malzeme elemanı, 346

sarkaç, 343-344

spiral kırılma modeli, 343, 343ş

Standart burulma testi, 343, 343ş

Tanımı, 339

tork – açısız yer değiştirme, 344, 344ş

Tork – dönme açısı, 344-345, 344ş

C

Coulomb teorisi, 332

Ç

Çekiçle vurma, 63ş

Çekme kuvveti, 22

Çift, 46-47, 47ş

Çift-kuvvet sistemleri, 69

Çift moment, 46

Çok Eksenli Deformasyonlar ve Gerilme Analizleri

Birleşik Yükleme, 358-360

Burulma

dairesele şaft, 341, 341ş

dönme açısı, 340, 340ş

enine ve boyuna gerilmeler, 342, 342ş

formüller ve gerilmeler, 339, 340, 341ş

gerilme yörüngeleri, 347, 347ş

içi dolu silindir, 346, 346ş

kesme gerilmesi, 340, 341ş

kırık kemik, 344, 344ş

kutupsal atalet momenti, 341

malzeme elemanı, 346, 346ş

sarkaç, 343-344

spiral kırılma modeli, 343, 343ş

Standart burulma testi, 343, 343ş

tanım, 339

tork – açısız yer değiştirme, 344, 344ş

tork – dönme açısı, 344-345, 344ş

Coulomb-Tresca teorisi, 332

Eğme,

bileşenlerine ayırma metodu, 348

çekme ve basma, 350, 350ş

destekli kiriş, 348, 348ş

düz kiriş, 347, 347ş

eğme formülü, 351

eğme gerilme dağılımı, 351, 351ş

Ele alınan parametrelerin tanımları, 352, 352ş

eleman analizleri, 356-357, 357ş

femur, 357

gerilme dağılımı, 355, 355ş

kesme gerilmesi dağılımı, 352-353, 353ş

kesme ve moment diyagramı, 348, 348ş

kütle merkezleri ve nötr eksenler, 350, 350ş

negatif kesme kuvvetleri, 349, 349t

normal ve kesme gerilmeleri, 353, 353ş

Pozitif kesme kuvvetleri, 349, 349ş

serbest cisim diyagramı, 354, 354ş

tezgah testi, 357, 357ş

üç-nokta eğme aparatı, 353-354, 354ş

Gerilme Dönüşümleri, 325-326, 325ş, 326ş

Gerilme Konsantrasyonu, 337-339, 337ş, 338ş

Güvenlik ve güvenilirlik, 331

İki ve üç eksenli gerilmeler

- birinci dereceden tensorler, 322
- bloğun yüklenmesi, 324, 324ş
- düzlem gerilme bileşenleri, 322, 322ş
- gerilme-gerinim ilişkileri, 321, 321ş
- ikinci dereceden tensorler, 322
- normal ve kesme bileşenleri, 321, 322ş
- süperpozisyon yöntemi, 320, 320ş

Kabul Edilebilir Gerilme ve Emniyet Faktörü, 334

Maksimum şekil değiştirme enerjisi teorisi, 333

Maksimum normal gerilme teorisi, 333

Maksimum kesme gerilmesi teorisi, 332

Malzeme Mukavemeti, 334-335

Mohr çemberi

- asal gerilme, 327
- düzlemsel gerilme elemanı, 327, 327ş
- maksimum kayma gerilmesi, 327
- malzeme elemanı, 329-330, 330ş
- pozitif ve negatif gerilmeler, 328

Normal ve kesme gerilmesi, 332, 332ş

Poisson Oranı, 318-319, 318ş

von Mises/Mises-Hencky teorisi, 333

Yorulma ve Dayanıklılık, 335-337, 336ş, 337ş

D

Darbe testi, 261, 261ş

Dayanıklılık sınırı, 335-337

Denge, 6

koşulları, 64-67

rotasyon, 64

statik, 64

tanım, 64

translasyonel, 64

Denge denklemleri, 69-70

ağırlık merkezi tanımlama, 89-102

analiz yöntemleri, 68-69

ankastre yapılar

ankastre kiriş, 80-81, 81ş

L şeklindeki kiriş, 83-85,83ş,84ş

basit destekli yapılar, 71-78, 72ş,74ş,75ş,76ş,77ş

Denge sistemleri

denklemler, 69-70

kablo-makara sistemleri, 78-80

kısıtlar ve tepkiler, 70,71t

koşulları, 64-67

serbest çizim diyagramları, 67-68, 68ş

sürtünme, 87-89, 87ş, 89ş

tanım, 62

traksiyon cihazları, 78-80, 79ş

Denklem(ler)

denge, 69-70

hareket, 62

Dış kuvvetler, 21-22

Dikdörtgen/kartezyen koordinat sistemi, 152

Dikey düzlem, 94

Dirsek

brakialis ve brakioradialis kasları, 112

dönme ve sabitleyici/kayma bileşenleri, 111, 111ş

eklem tepki kuvveti, 110-112, 112ş, 141

hareketli eklem, 112

humeroradial ve humeroulnar eklem, 108

kaslar, 109, 109ş

kemik, 108, 108ş

kol, 109-110, 110ş

ön kol, 109, 109ş

paralel kuvvet sistemi, 110

proksimal radioulnar eklem, 108

pronasyon ve spinasyon hareketleri, 109

sakatlıkları, 109

üç kaslı sistem, 112, 113ş

Dinamik, 3

atalet ve momentum, 151

diferansiyel ve integral hesaplama,152
doğrusal, açısal ve genel hareketler, 148-150, 149ş
ivme, 151
kinematik ve kinetik, 148
parçacık kavramı, 151-152
referans düzlemleri ve koordinat sistemleri, 152, 152ş
sürat ve hız, 151
sürtünme, 26
tanım, 148
uzaklık ve yer değiştime, 150, 150ş
vektör matematiği, 152

Dinamometre 215, 215ş

Diz

dönme ve translasyonel bileşenleri, 137, 137ş
egzersiz, 135, 135ş
etki eden kuvvetler, alt bacak, 135, 135ş
kaslar, 134, 135ş
kuvvet kolları, 136, 136ş
patella, 137-138, 137ş, 138ş
patellafemoral eklem, 133, 134ş, 137
tibial plato, 135
tibiofemoral eklem, 134ş, 137

Döndürme etkisi, 36, 36ş

D' Alembert's ilkesi, 246

E

Eksen

Merkez, 240
Nötr, 342, 351
Rotasyonel hareket, 218-219, 218ş, 219ş
Elastik deformasyon, 294-296, 294ş, 295ş, 296ş
Elastoplastik çarpışma, 266-268, 267ş, 268ş
Enerji, 10t
Eşdoğrultulu kuvvet, 25
Eşdoğrultulu kuvvetler, 23
Eşdüzlem sistemleri, 23

oluşturduğu momentler, 66ş

net moment, 40-41, 41ş

skaler metot, 48

Eylemsizlik (Atalet)

alan momenti

kütle momenti, 63

F

Fleksiyon-ekstansiyon testi,215-218, 215ş

Frontal düzlem, 94

G

Gerilme ve gerinim ortalama kesme

Boyun Verme, 298, 298ş

çekme gerinimi ve ortalama gerilme, 303, 303ş

elastik deformasyon, 294-296, 294ş-296ş

Gerilme-Gerinim Diyagramı, 293-294, 293ş, 294ş, 300-301, 300ş

Gerinim Sertleşmesi, 299, 299ş

histerezis döngüsü, 300, 300ş

Hooke Kanunu, 296, 297ş

İnsan kortikal kemiği, 305, 307ş

kemik numunesi, 305, 305ş

Malzeme Davranışı, 301, 302ş

Malzemelerin Mekanik Özellikleri, 302, 302ş, 303t

Plastik Deformasyon, 297, 297ş

sabitlenme aleti, 306, 306ş

sehim, 309, 309ş

serbest cisim diyagramı, 309, 309ş

Statik olarak kararsız sistem, 308, 308ş

tek eksenli çekme testi, 304, 304ş

yapılan iş, 299, 299ş

Yüklemeye Koşulları, 286, 286ş

Yük-Uzama Diyagramı, 287-288, 287ş

Gerilim, 9t

basit, 288-290, 289ş, 290t

çekme, 302-306, 304ş, 305ş
 gerçek/kesin, 298
 kesme, 289, 290, 290ş
 konvansiyonel gerilme, 298, 298ş
 normal gerilme, 289, 289ş
 ortalama normal gerilme, 289
 tanım, 301

Gerinim, 291-292 (Bknz: Gerilme, gerinim)

Basit, 288-290, 290ş
 Çekme, 302
 Eksenel, 291, 291ş
 Elastik, 299, 299ş
 Glenohumeral eklem, 114
 Golfçü dirseği sendromu, 109
 Görünür akma dayanımı, 294
 Kesme, 292, 292ş
 Normal, 291, 291ş
 Plastik, 297, 297ş
 Tanımlar, 295
 Gösterim, 13
 Güç, 9t

H

Hacim, 9t
 Hamstring kası, 125

Hareket,

Açısal, 63
 Doğrusal, 63
 Eşitlik, 62
 Eş düzlemde hareket, 66ş
 Hareketli eklemler, 29, 104, 105ş,
 Hız, 9t
 Histerezis döngüsü, 300, 300ş
 Hooke kanunu, 296, 297ş
 Humeroradial eklem, 108
 Humeroulnar eklem, 108, 108ş

i

İç kuvvetler, 21-22
 İkinci yasa, Netwon, 62
 İkincil boyutlar, 7
 İskelet kası, 386-388, 387ş
 İş, 9t
 İş-enerji teoremi, 193, 248

İmpuls ve momentum

açısal, 271-272
 çarpma ve çarpışmalar, 263-264, 263ş, 264ş

doğrusal

ortalama kuvvet ve ortalama

birimler, 256, 256t
 İmpuls kuvveti ve İmpuls hareketleri, 254
 İmpuls-momentum teorisi, 255
 kuvvet-zaman eğrisi, 255, 255ş
 skaler ve vektörel bileşenler, 256, 256ş
 tanım, 254
 vektörel büyüklük, 255
 zaman, 255, 255ş

doğrusal momentumun korunumu, 262

iki boyutlu çarpışmalar

eğik merkezli çarpışma, havuz
 esnek çarpışma, 271, 271ş
 hedef ve beyaz top, 269-271
 momentumun korunumu, 269
 topları, 269, 269ş

tek boyutlu çarpışma

düzlemsel harekette rijit cisimler, 273-274, 273ş
 elastoplastik çarpışma, 266-268, 267ş
 tamamen esnek çarpışma, 265-266, 266ş
 tamamen esnek olmayan çarpışmalar, 264-265,
 265ş
 temel formüller, 272, 272t, 273

uygulama alanları

darbe testi, 261, 261ş

futbolcu, 258, 258ş
geri sıçrama, 257-258,257ş
kuvvet platformu, 259, 259ş
kuvvet-zaman, atlet, 260-261, 260ş
topun çarpması, yer ve

İmpuls ve momentum teoremi, 255

J

Jirasyon yarıçapı, 242

K

Kablo makara sistemleri, 78-80

Kalça

femoral baş, 124
kemik yapısı, 124
kuvvetler, 124, 129ş
pelvis, 125, 125ş
serbest çizim diyagramı
abduktor yürüyüşü, 133
ağırlık merkezi, 131-132, 131ş
ayak, 126-127, 126ş
bileşke ağırlık, 131
kas ve eklem tepki kuvveti, 129, 129ş
kesişen kuvvet sistemi, 129, 129ş
pelvis, 128, 128ş
translasyonel dengesi, 129-130
üçlü kuvvet sistemi, 129, 131ş
yük taşıma, el, 130, 130ş

Kelvin-Voight modeli, 369-370, 363ş

Kesişen kuvvetler, 23, 23ş

Kinematik, 3

Kinetik

açısız (açısal kinetiğe bakınız)
doğrusal, 184-203 (ayrıca doğrusal kinetiğe bakınız)
rijit cisimler, düzlemsel hareket, 273-274, 273ş
tanım, 3-4

Kinetik sürtünme, 28

Kuvvet vektör(leri)

eşdoğrultu, 23
tanım, 20
kuvvetin boyut ve birimleri, 21
yayıllı kuvvet sistemleri ve basınç, 24-26, 25ş, 26ş, 26t
eş, 24
dış, 21-22
sürtünme, 26-29, 27ş, 28ş, 28t
yerçekimi/ağırlık, 24, 24ş, 24t
iç, 21-22
özellikler, 20-21, 20ş, 21ş
tepki, 70
bileşke, 20-21, 21ş
ötelenme, 47-48, 47ş
teğet, 20, 20ş
basma, 22, 22ş
çekme, 22, 22ş
eşdeğer,23, 23ş
kesişen, 23, 23ş
normal, 23, 23ş
paralel, 23, 23ş

Kuvvet, 9t, 13

L

L şeklinde giriş

Skaler yöntem, 83-85, 83ş, 84ş
Vektörel yöntem, 85-86, 85ş, 86ş
Le Systeme International d'Unite's, 8
Ligament kapsülü, 104, 105ş

M

Maksimum şekil değiştirme enerjisi teorisi, 333
Matematik, 11
Maxwell modeli, 370-371, 370ş

Mekanik iş

- Değişken kuvvet, 191-192, 191ş
- Sabit kuvvet, 190-191, 190ş, 191ş
- Skaler çarpım, 192-193
- Tanım, 190

Mekanik, 3-5

Mises-Hencky teorisi, 333

Mohr çemberi

- Asal gerilme, 327
- Düzlemsel gerilme elemanı, 327
- Maksimum kayma gerilmesi, 327
- Malzeme elemanı, 329, 330, 329ş
- Pozitif ve negatif gerilmeler, 328

Moment kolu, 36

Moment, 9t

- Bileşenleri, 39, 40ş
- Boyutu, 38
- büyüklüğü, 36-37
- Çift, 46-47
- İngiliz anahtarı ve civata, 38
- ile Alakalı Bazı Önemli Noktalar, 38-40, 39ş, 40ş
- Kayan kuvvetler, 38-39, 39ş
- Net veya Bileşke, 40-46
- Tanım, 36
- Vektör çarpımı, 48-53, 48ş, 49ş
- Yönü, 37-38
- Zıt, 39, 39ş

N

- Net moment, 40-46, 41ş
- Newton'nun ikinci hareket yasası, 181
- Newton'un ikinci yasa, 7
- Newton'un birinci yasa, 6, 62
- Newton'un Mekanik Yasaları, 62-64
- Newton'un üçüncü yasa, 7
- Normal kuvvet, 22, 22ş

Normal, 219

Nötr eksen, 342, 343, 350

Nötr/denge konumu, 208

Bağıl hareket, 221- 223, 221ş

Basit harmonik hareket, 209ş, 210-211

Düzgün doğrusal hareket, 220

Hareket açıklığı, 209

Hız, 207, 211, 211ş, 212, 212ş

İş ve güç

Açısal yer değiştirme, 247-248

Diz ekstansiyonu, 248-249, 249ş

İş-enerji, 248

Tanım, 247

Konum ve yer değiştirme, 206-207, 206ş, 207t

Konum-zaman, 214, 214ş, 215ş

Kutupsal koordinatlar, 206, 206ş

Omuz abduksiyonu, 212-213, 213ş

Rotasyon hareketi

Sabit eksen etrafında, 218-219, 218ş, 219ş

Sabit ivme, 220-221

Sarkaç, 208, 209ş

Tork ve açısal ivme, 238-239, 239ş, 240ş

O

Ofset metodu, 294, 294ş

Omurga

Atlantoaksiyal eklem, 119

Atlantokspital eklem, 119

Baş ve boyun, 119, 120ş

eklem tepki kuvvetleri, 122, 122ş

Halterci, 122, 122ş

ligament ve kaslar, 119

Sakatlıklar, 120

sakrum, 123

Serbest cisim diyagramı, 123

Sporcu vücudu, 122-123, 122ş

Üç kuvvetli sistem, 121, 121ş

Vertebral kolon, 118, 119ş

Omuz

Akromioklavikular eklem, 115
eklem tepki kuvvetleri, 116
Glenohumeral eklem, 114, 114ş
Kaslar, 115
kemikli yapı, 115
Kol, 115-116, 115ş
Mekanik model, 115, 116ş
Sakatlıklar, 118
skapular hareket, 115
Sternoklavikular eklem, 115
Ortalama ivme, 157
Osteoporoz, 383

P

Paralel Eksen Teorisi, 241, 241ş
Patellofemoral eklemler, 133-134, 134ş
Plastik Deformasyon, 297, 297ş
Poisson Oranı, 318-319, 318ş
Paralel Kuvvet, 23, 23ş

R

Radioulnar eklem, 108
Reaksiyon tahtası yöntemi, 91-92, 92ş
Rotasyonel denge, 41, 64

S

Sabit ivme, 160, 160ş
sagital düzlem, 94
Sağ el kuralı, 37, 37ş
Kartezyen koordinat yönünde, 49, 49ş
Çift moment, 47, 83

Segmental Hareket Analizi

Açısal yer değiştirme ve zaman, 242, 243
Dinamik model, 242
Diz Ekstansiyonu, 243-245, 244ş

Hız ve yer değiştirme, 243
İki boyutlu (düzlemsel) hareket analizi, 243
Serbest çizim diyagramları, 67-68, 67ş
Serbestlik derecesi, 224
SI Birimleri, 9t
Sinoviyal sıvı, 29, 104
Sinoviyal zar, 104
Skaler, 11
Sönümlü salınım, 211
Standart Katı Modeli, 371-372, 371ş
statik denge, 64
Statik olarak belirli, 70
statik olarak belirsiz, 70
statik sürtünme, 27
statik, 3-4

Çizgili kaslar, 105-106
Eklemler, 104-105

Mekanik

Ayak bileği, 139-140
Diz (Bknz: Diz)
El bileği (bknz: El bileği)
Kalça (bknz: Kalça)
Omurga (Bknz: Omurga)
Omuz (Bknz: Omuz)

Temel Hususlar, 106
Varsayımlar ve Kısıtlamalar, 107-108
Sternoklavikular eklem, 115

Sürtünme

katsayı, 27-28, 28t
kinetik ve statik, 27-28
sistemler, 87-89, 87ş, 88ş, 89ş
Sürtünme kuvvetleri, 26-29, 27ş, 28ş, 28t

Ş

Şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniği

uygulanan kuvvetler ve şekil değiştirme, 278-279

iç kuvvetler ve momentler, 279-280
 matematik, 283
 prosedür, 282-283
 katı cisimler mekaniği, 278
 statik açıdan belirli ve belirsiz sistemler, 278
 gerilme ve gerinim, 280-282, 281ş, 282ş

T

Tamamen Esnek Çarpışma, 265-266, 266ş
 Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar, 264-265, 264ş, 265ş
 Tamamlayıcı birimler, 9
 Tanımı, 6
 Teğet Kuvvetler, 22
 Teğet, 218

Tek boyutlu çarpışmalar

Elastoplastik Çarpışma, 266-268, 267ş, 268ş
 Tamamen Esnek Çarpışma, 265-266, 266ş
 Tamamen Esnek Olmayan Çarpışmalar, 264-265, 264ş, 265ş

Tek Eksenli Hareket, 156

çarpma hızı, 168
 Düzgün olarak ivmeli hareket, 167, 167ş
 kayakçı sürati, 166, 166ş
 konum-zaman grafiği, 161, 161ş
 Otomobil sürati, 162, 162ş
 Sabit İvme ile Tek Eksenli Hareket, 160-161
 sabit ivme, 165-166
 Serbest düşme, 167, 167ş
 sürat-zaman grafiği, 162, 162ş
 yer değiştirme zaman ve ivme zaman grafikleri, 165, 165ş

Tekil kuvvet, 25

Tek-makara traksiyonu, 79

Temel denklemler, 296

Tepkiler, 70, 71t

Tibiofemoral eklem, 133, 134, 133ş

Top mermisi, 172

Tork, 9t

Boyutu ve Birimleri, 38, 38t

Tanımı, 36

Traksiyon Cihazları, 78-79

translasyonel denge, 64

transvers düzlem, 94

Tresca teorisi, 332

U

Uluslararası birimler sistemi (SI), 9t
 dönüştürülmesi, 10t

Ü

Üç-kuvvet sistemleri, 69

Üçüncü kanun, Newton, 63, 64

V

Vektör

Radyal/merkezcil, 219

Teğet ve normal bileşen, 218, 219ş

Vektörel çarpım konsepti, 48

Vektörler, 11

Viskoelastisite

Deneysel Modelleri, 369

doğrusal elastic olan malzeme, 366, 366ş

Gerilme ve gerinim, 366

Kelvin-Voight Modeli, 369-370, 369ş

Maxwell Modeli, 370-371, 370ş

Standart Katı Modeli, 371-372, 371ş

Tanımı, 366

Y

Yağlayıcı, 29

Yerçekimi çizgisi, 90

Yerçekimi ivmesi, 24t

Yerçekimi kuvveti, 24, 24t

Young modülü, 295

Yunan alfabesi, 11t

Yükün şiddeti, 25

