TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL YAPILANDIRILMIŞ MATRİSLER VE BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Didem ERSANLI

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emrah KILIÇ

TEMMUZ 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Didem ERSANLI

ÖZET

Doktora Tezi

ÖZEL YAPILANDIRILMIŞ MATRİSLER VE BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Didem ERSANLI

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emrah KILIÇ

Tarih: TEMMUZ 2024

Bu tezde, özel yapılandırılmış bazı kombinatoryal matris aileleri incelenmiştir. Bu matrislerin girdileri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının q-versiyonları olarak tanımlanmıştır. Bu yeni matrislerin bazı cebirsel özellikleri (determinant, özdeğer, ters, *LU* ayrışım, ters matrislerin ayrışımları vb. cebirsel özelliklerini) elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları ispatlamak için klasik ispat yöntemleri kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Filbert matrisi, Lilbert matrisi, q-versiyon, *LU* ayrışımı, Ters matrisi, Determinant.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

SPECIALLY STRUCTURED MATRICES AND SOME ALGEBRAIC PROPERTIES

Didem ERSANLI

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emrah KILIÇ

Date: July 2024

In this thesis, some specially structured combinatorial matrix families have been examined. The entries of these matrices are defined as q-versions of generalized Fibonacci and Lucas numbers. Some algebraic properties of these new matrices (algebraic properties such as determinant, eigenvalue, inverse, LU decomposition, decomposition of inverse matrices, etc.) have been obtained. Classical proof methods were used to prove the obtained results.

Keywords: Filbert matrix, Lilbert matrix, q-analogue, LU decomposition, Inverse matrix, Determinant.

TEŞEKKÜR

Doktora ve yüksek lisans eğitimim boyunca, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve ilgiyle elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım kıymetli danışmanım Prof. Dr. Emrah KILIÇ 'a; değerli jüri üyelerine ve tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi 'ne, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Bursu 'na ve Şeyh Saleh Abdullah Kamel 'e teşekkürlerimi sunarım.
Son olarak destekleri ile her zaman yanımda olan bu hayattaki en büyük şansım olan kıymetli aileme ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
$\{U_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\lfloor \cdot \rfloor$	Alta yuvarlama (Taban) fonksiyonu
$[P]$	Iverson notasyonu
$[n]_q$	n doğal sayısının q-versiyonu
$(x;q)_n$	q-Pochhammer sembolü
$\binom{k}{r}$	Binom katsayılar
$\left\{ {n \atop k} \right\}_{\lambda,r}$	Fibonomiyal katsayılar
$\sum$	Toplam notasyonu
$\prod$	Çarpım notasyonu
$\mathbf{i}$	Kompleks birim

1. GİRİŞ

Lineer cebirin temel konularından biri olan matrisler matematiğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. 2. bölümde matrislerin genel özelliklerinden, kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramlardan bahsedeceğiz.

Bir matris girdileri bir ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ya da özel olarak bir dizinin terimlerinden oluşması durumunda kombinatoryal matris olarak adlandırılır. Kombinatoryal matris aileleri genellikle Hankel, Toeplitz, Hessenberg, Tridiagonal, Circulant vb. matris ailelerinden seçilmektedir. Kombinatoryal matrislerin çeşitli cebirsel özellikleri literatürde araştırılmaktadır. 3. bölümde literatürdeki mevcut araştırmaları inceleyeceğiz.

Özel tipteki matrisler test matrisi olarak da kullanılmaktadır. Bazı yazılımlarda matrislerin her bir cebirsel özelliğinin hesaplanabilmesi için klasik fonksiyonlar (inverse( ), det( ), LU( ), Cholesky( ), Eigenvalues( ), v.b.) mevcuttur. Bu fonksiyonların doğruluğunun araştırılması için özel yapılara sahip ve cebirsel özellikleri bilinen çeşitli test matrislerine ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin Matlab yazılımında galeri işlevinde kapsamlı ve iyi hazırlanmış, parametrelere bağlı test matrislerini içeren bir koleksiyon bulunmaktadır. Bu matrislerin bilinen cebirsel özellikleri yazılımlardaki fonksiyonların kontrol edilmesi amacıyla test matrisleri elde etmek için kullanılabilir.

4. bölümde tez problemlerimizi tanıtacağız. Tezimizde amacımız özel yapılandırılmış ve parametrik girdilere sahip kombinatoryal matris ailelerinden olan Hankel türünde yeni genel matris ailelerinin çeşitli cebirsel özelliklerini elde etmektir.

5. bölümde ispat yöntemlerinden bahsedeceğiz. Kalan bölümlerde tezimiz kapsamında ele aldığımız özel matris aileleri için elde ettiğimiz sonuçları ve bunların ispatlarını ayrı ayrı sunacağız. Ayrıca matris ailelerimizin özel durumlarını inceleyerek çalışmalarımızın çeşitli uygulamasını sunacağız.

Tezimizde elde edilen sonuçlarımız saygın dergi ve konferanslarda kabul edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tezimiz boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları tanıtacağız.

2.1 Lineer İndirgeme Dizileri

Tanım kümesi doğal sayılardan oluşan fonksiyonlara dizi denir. Bir fonksiyon olarak dizilerin tanım kümeleri indis değerleri, görüntü kümeleri de dizinin terimleridir.
Her terimi kendinden önce gelen terimlerinin bir lineer kombinasyonu ile ifade edilen dizilere lineer indirgeme dizileri denir. Bu kombinasyonda bulunan terim sayısına o dizinin basamağı denir. Eğer dizinin basamağı k ise k tane de başlangıç koşulu vardır.
İkinci basamaktan genel Fibonacci ve Lucas sayı dizileri $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$;
$U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $V_0 = 2$ ve $V_1 = p$ başlangıç koşulları için

$$U_n = pU_{n-1} + U_{n-2} \quad \text{ve} \quad V_n = pV_{n-1} + V_{n-2} \tag{2.1}$$

kuralları ile tanımlanır.
Şimdi bazı özel sayı dizilerini aşağıdaki tabloda verelim:

Çizelge 2.1: Bazı Sayı Dizileri

Katsayısı	Başlangıç Değerleri	Dizinin Adı
$p = 1$	$U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$	Fibonacci $\{F_n\}$
$p = 1$	$V_0 = 2$ ve $V_1 = 1$	Lucas $\{L_n\}$
$p = 2$	$U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$	Pell $\{P_n\}$
$p = 2$	$U_0 = U_1 = 2$	Pell-Lucas $\{Q_n\}$

U_n ve V_n dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - px - 1 = 0$ 'dır. Bu karakteristik denklemin köklerini α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.2}$$

eşitlikleriyle elde edilir.
Burada $\Delta = p^2 + 4$ olarak gösterilir. Özel olarak Fibonacci ve Lucas sayıları için karakteristik denklemimiz $x^2 - x - 1 = 0$ ve kökleride $(1 \pm \sqrt{5})/2$ şeklinde olacaktır.
U_n ve V_n dizilerin n. terimini hesaplamak için Binet n 'e bağlı bir formül vermiştir. Bu formüller

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.3}$$

şeklindedir.

2.2 q-Versiyon

Herhangi bir n doğal sayısının q-versiyonu

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{q\to 1}[n]_q = n. \tag{2.5}$$

$(x;q)_0 = 1$ olmak üzere negatif olmayan n tam sayısı için q-Pochhammer sembolü

$$(x;q)_n = (1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{n-1}). \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda genel Fibonacci ve Lucas dizilerinin q-analogları $q = \beta/\alpha$ (ya da buna denk $\alpha = \mathbf{i}/\sqrt{q}$) seçilerek

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1}\frac{1-q^n}{1-q} \tag{2.7}$$

ve

$$V_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha^n(1+q^n) \tag{2.8}$$

elde edilir.

2.3 Matrisler ve Bazı Cebirsel Özellikleri

Matematikte lineer cebirin temel kavramı olan matrisler; dikdörtgen bir dizi oluşturacak şekilde satır ve sütunlar halinde düzenlenmiş bir sayı kümeleridir. Başka bir deyişle matrisler, bir veya birden fazla satır ve sütundan oluşan dizilerdir. Matrislerdeki sayılara matrisin elemanları veya girdileri denir. Buradaki elemanların yerlerini satırlar ve sütunlar aracılığı ile gösteririz.
Temel olarak matrisler bir bilgiyi ifade etme yoludur. 1. bölümde bahsettiğimiz üzere matrisler birçok alanda sıklıkla kullanılır. Bu nedenle matrislerin cebirsel özellikleri araştırılmaktadır. Literatürdeki bu örneklerden bazıları kombinatoryal matris ailelerinden olan Hankel, Band, Toeplitz ve Hessenberg matrisleridir.
Tezimiz kapsamında bizde özel matris ailelerinden Hankel türündeki Hilbert matrislerinin yeni bir ailesini çalışacağız. Bu tezin amacı daha önce çalışılmamış yeni kombinatoryal matris ailelerinin LU ayrışımları, determinantları, tersleri gibi bazı cebrisel özelliklerini incelemektir.
Şimdi matrislerin bazı cebirsel özelliklerini verelim:
Bu tezde bir A matrisinin (i,j) elemanını A_{ij} ile göstereceğiz.
A, $n\times n$ tipinde kare matris olsun. Eğer

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n \tag{2.9}$$

olacak şekilde n boyutlu B matrisi varsa bu durumda A matrisine ters çevrilebilirdir

(Yani A terse sahiptir) denir ve $A^{-1} = B$ 'dir.
Burada I_n sadece köşegen elemanları 1; diğer elemanları 0 dan oluşan birim matristir. Bir matrisin tersi mevcut ise tektir.
A ve B, $n \times n$ tipinde ters çevrilebilir iki matris ise $A \cdot B$ matrisi de ters çevrilebilirdir ve burada

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{2.10}$$

Eğer A matrisi ters çevrilebilirse A^{-1} ters çevrilebilirdir

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{2.11}$$

Reel sayılar üzerinde tanımlı bir kare matrisin determinantı reel bir sayı değeridir ve her matris için bu değer tektir. Determinant değeri matrislerin tersinin bulunmasında ve lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır. Bir matrisin determinantı $detA$ veya $|A|$ ile gösterilir. Çok değişkenli bir olguyu tek bir sayıyla özetlemek için determinant hesabı oldukça faydalıdır. Matrisin boyutuna bağlı olarak determinant hesaplarken birçok farklı yöntem kullanılır.
Genel bir örnek verecek olursak;
$i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matrisine üst üçgen U; $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise alt üçgen L ile gösterilir. $n \times n$ boyutlu bir matris alt veya üst üçgen formdayken matrisin köşegen elemanlarının çarpımı determinant değerine eşittir.
Herhangi bir A kare matrisi bir birim alt üçgen L matrisi ile bir üst üçgen U matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu ayrışım doğrusal denklemlerin kare sistemlerini çözerken, ters matrisi hesaplarken ve matrisin determinantını hesaplarken kolaylık sağlar.
Örneğin;

$$A = L \cdot U \tag{2.12}$$

ayrışımına sahip herhangi bir A kare matrisi için A^{-1} hesabını yaparken bu eşitliğin her iki tarafının tersini aldığımızda

$$A^{-1} = (L \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \tag{2.13}$$

eşitliğinden yararlanabiliriz.
Başka bir örnek olarak A herhangi bir kare matrisinin LU ayrışımınında bir birim alt üçgen matris L ve üst üçgen matris U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \dots & & \mathbf{0} \\ l_{21} & 1 & \dots & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \dots & & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

şeklinde olmak üzere A matrisinin determinantı kolaylıkla hesaplanabilir. Burada alt üçgen matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımı olduğundan $\det L = 1$ 'dir.

Benzer şekilde bir üst üçgen matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımı olduğundan

$$\det U = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn} \tag{2.15}$$

ile hesaplanır. Burada

$$A = L \cdot U \tag{2.16}$$

eşitliğinin her iki tarafında determinant alırsak

$$\det A = \det(LU) = \det(L)\cdot\det(U) = 1\cdot\det U = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn} \tag{2.17}$$

olacaktır. Dolayısıyla A matrisinin determinantını sadece U matrisinin köşegen elemanlarını çarparak hesaplarız.

Not. Herhangi bir A kare matrisi bir birim alt üçgen L matrisi ile bir üst üçgen U matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilmesi için ters çevrilebilir bir A matrisinin tüm alt matrislerinin sıfır olmayan determinantlara sahip olması gerekir.

3. LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde tezimiz kapsamında ele alacağımız temel kombinatoryal matris ailelerinin ve mevcut genelleştirilmiş hallerinin matematiksel detaylarını ve literatürdeki mevcut olan özelliklerini aşağıdaki gibi sunacağız:
Genel olarak $n \times n$ boyutlu Hankel matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

formuna sahiptir. Hankel matrisi A 'nın girdileri, $i \leq j$ olmak üzere $A_{i,j} = A_{i+k,j-k}$ $(k = 0,1,\dots,j-i)$ eşitliği ile tanımlanır. Hankel matrislerinin önemli özel durumlarından biri Hilbert matrisidir. Hilbert matrisi $H = [H_{ij}]$

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin tersi, öz değerleri, öz vektörleri ve köşegenleştirilebilir olup olmadığı gibi özellikleri literatürde verilmiştir ([2],[4],[5],[6],[7],[8],[24],[25],[26],[27],[28]). Hilbert matrisinin tersi ve determinantı açık formüllerle elde edilmiş ve matrisin terimleri birim kesirlerden oluşmasına rağmen tersinin bütün girdileri tam sayılardan oluşmuştur [4].
Richardson [24], Hilbert matrisinde tam sayı dizisi kullanmak yerine Fibonacci dizilerinin terimlerini kullanarak Filbert matrisi $F = [f_{ij}]$ 'yi

$$f_{ij} = \frac{1}{F_{i+j-1}} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlamıştır. Benzer şekilde bu matris Lucas sayıları ile tanımlandığında Lilbert matrisi olarak adlandırılmıştır. Hilbert ve Filbert matrislerinin terslerinin formülleri arasında büyük bir paralellik olduğu görülmüş, ters Filbert matrisinde, ters Hilbert matrisindeki binomial katsayıların yerine Fibonomial katsayıların alındığını ve ters Filbert matrisinin girdilerinin de tam sayı olduğu elde edilmiştir. Burada $0 < k < n$ olmak üzere genel Fibonomiyal katsayıları

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_{\lambda,r} = \frac{\prod\limits_{t=n-k+1}^{n} F_{\lambda t+r}}{\prod\limits_{t=1}^{k} F_{\lambda t+r}} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca q-Pochhammer sembolü kullanılarak $n \geq k$ için q-Binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_z = \frac{(q^z;q^z)_n}{(q^z;q^z)_k(q^z;q^z)_{n-k}} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.
Şimdi Hilbert ve Filbert matrislerinin literatürdeki genelleştirilmiş özel halleri üzerine yapılan çalışmaları inceleyelim:

- $r \geq -1$ tam sayısı için

$$a_{ij} = \frac{1}{F_{i+j+r}} \tag{3.6}$$

  şeklinde tanımlamış ve cebirsel özellikler incelenmiştir [13].

- Ardından Filbert ve Lilbert matrislerinin terslerine ait sonuçlar verilmiştir [22] .

- Filbert matrisinin başka bir genel durumu $\lambda \geq 1$, $r \geq -1$ herhangi tam sayılar ve x, y reel sayılar olmak üzere

$$a_{ij} = \frac{x^i y^j}{F_{\lambda(i+j)+r}} \tag{3.7}$$

  şeklinde alınarak incelenmiştir [23].

- Daha genel durumda; bir önceki çalışmadan farklı olarak yazarlar [15], matrisin elemanlarını pay kısmındaki reel sayılar yerine $s \neq r$, $\lambda \geq 1$, $s \geq -1$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayılarının oranlarını

$$\frac{F_{\lambda(i+j)+r}}{F_{\lambda(i+j)+s}} \quad \text{ve} \quad \frac{L_{\lambda(i+j)+r}}{L_{\lambda(i+j)+s}}$$

  şeklinde almış ve bu matrislerin özellikleri incelenmiştir.

  Bu çalışmaların üzerine:

- $r \geq -1$, $k \geq 1$ tam sayılar olmak üzere [14]

$$\frac{1}{F_{i+j+r}F_{i+j+r+1}\cdots F_{i+j+r+k-1}}$$

- λ, r, k tam sayıları için $r \geq -1$ ve $k, \lambda \geq 1$ olmak üzere [16]

$$\frac{1}{F_{\lambda(i+j)+r}F_{\lambda(i+j+1)+r}\cdots F_{\lambda(i+j+k-1)+r}}$$

- Yukarıdaki iki özel durumda Fibonacci sayıları yerine Lucas sayılarının incelendiği [18]
- λ, μ, r, s tam sayıları için $r, s \geq -1$, $s \neq r$ ve $\lambda, \mu \geq 1$ olmak üzere [17]

$$\frac{1}{F_{\lambda i+\mu j+r}}, \quad \frac{F_{\lambda i+\mu j+r}}{F_{\lambda i+\mu j+s}}, \quad \frac{1}{L_{\lambda i+\mu j+r}} \text{ ve } \frac{L_{\lambda i+\mu j+r}}{L_{\lambda i+\mu j+s}}$$

- [19] ve onun daha genel versiyonu olan [20]

$$\frac{1}{\left(F_{\lambda i+\mu j+r+1}\cdots F_{\lambda i+\mu j+r+k}\right)\left(L_{\lambda i-\mu j+s+1}\cdots L_{\lambda i-\mu j+s+k}\right)}$$

ve

$$\frac{1}{\left(L_{\lambda i+\mu j+r+1}\cdots L_{\lambda i+\mu j+r+k}\right)\left(L_{\lambda i-\mu j+s+1}\cdots L_{\lambda i-\mu j+s+k}\right)}$$

- $\lambda, \mu \neq 0$ ve r, s tam sayıları için [3]

$$\frac{F_{\lambda i+\mu j+r}}{L_{\lambda i+\mu j+s}} \text{ ve } \frac{L_{\lambda i+\mu j+r}}{F_{\lambda i+\mu j+s}}$$

olacak şekilde matris genelleştirmeleri yapılmış ve özellikleri ele alınmıştır.

- Daha önce çalışılan tüm yapılarda indisler lineer yapılara sahipken Kılıç ve Arıkan [9] ve Kılıç vd. [21] çalışmalarında, ilk kez genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren indisleri lineer olmayan Filbert ve Lilbert matrislerini tanımladılar:
  Burada λ, μ, k, m pozitif tam sayılar ve r, s, c tam sayıları için elemanlar

$$\frac{1}{U_{\lambda(i+r)^k+\mu(j+s)^m+c}} \text{ ve } \frac{1}{V_{\lambda(i+r)^k+\mu(j+s)^m+c}},$$

$$\frac{1}{U_{\lambda(i+r)^k+\mu(j+s)^m+c_1}V_{\lambda(i+r)^k-\mu(j+s)^m+c_2}},$$

$$\frac{1}{V_{\lambda(i+r)^k+\mu(j+s)^m+c_1}V_{\lambda(i+r)^k-\mu(j+s)^m+c_2}}$$

  olarak alınmıştır.

- Ayrıca yazarlar [1], λ ve μ pozitif tam sayılar ve tüm i, j için $x \neq q^{-\lambda i-\mu j}$ olacak şekilde x reel sayı olmak üzere $\mathscr{G} = [\mathscr{G}_{i,j}]_{i,j\geq 0}$ matrisini

$$\mathscr{G}_{i,j} = \frac{1-xq^{\lambda i-\mu j}}{1-xq^{\lambda i+\mu j}}, \tag{3.8}$$

  şeklinde tanımlayarak diğer çalışmaların aksine sonuçlarını matrisin q-versiyonundan yararlanarak hesaplamışlardır.

Yukarıda sunulan çalışmalarda tanımlanan matrislerin cebirsel özellikleri olarak tersleri, *LU* ve Cholesky ayrışımları ve bunların tersleri, determinantları gibi özellikleri incelenmiştir.

Burada bahsedilen bazı çalışmalar Fibonacci ve Lucas gibi dizilerin terimleriyle tanımlanmış olsa da bu matrisler genelleştirilerek rasyonel bir fonksiyon ile tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların özel bir durumunda elemanlar bu dizilerin terimlerini vermektedir.

Tezimiz kapsamında literatürde çalışılan özel yapılandırılmış matris ailelerinden Hankel türünde yeni genel matris ailelerini ve bunların bazı cebirsel özelliklerini ele alacağız.

4. TEZ PROBLEMİ VE ÇALIŞMA PLANI

Bu bölümde tezimiz kapsamında yapacaklarımızı kısaca özetleyeceğiz. Çalışmalarımızda ele alacağımız yeni matris ailelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

1. Herhangi a, b, x, y, q reel sayıları için $1+xq^{am+bn} \neq 0$ ve $1+yq^{am+bn} \neq 0$ olmak üzere $\mathscr{A} = [\mathscr{A}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{A} = [\mathscr{A}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xq^{am+bn}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1}{1+yq^{am+bn}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{4.1}$$

2. Herhangi $x, y, q, \lambda, \mu, a, b, p, r, v, w$ reel sayıları için $1+xq^{a+\lambda(m+p)^v+\mu(n+r)^w} \neq 0$ ve $1+yq^{b+\lambda(m+p)^v+\mu(n+r)^w} \neq 0$ sağlayan $\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Burada Φ ve Ψ index fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Phi_i := \lambda\,(i+p)^v \quad \text{ve} \quad \Psi_i := \mu\,(i+r)^w. \tag{4.3}$$

3. Herhangi $a, b, p, r, \lambda, \mu, v, w, q$ ve x reel sayıları için $1+xq^{\mu+a(p+m)^v+b(r+n)^w} \neq 0$ ve $1+yq^{\mu+a(p+m)^v+b(r+n)^w} \neq 0$, $(x, y \neq 0)$ olmak üzere $\mathscr{C} = [\mathscr{C}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{C} = [\mathscr{C}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1+xq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1+yq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Burada gösterimi sadeleştirmek amacıyla yukarıdakinden bağımsız olarak Φ ve Ψ index fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\Phi(i) := a\,(p+i)^v \text{ ve } \Psi(i) := b\,(r+i)^w. \tag{4.5}$$

4. Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w, q ve x reel sayıları için $1+yq^{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w} \neq 0$, $(y \neq 0)$ olmak üzere $\mathscr{D} = [\mathscr{D}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{D}_{m,n} = \frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m,n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}}. \tag{4.6}$$

Burada gösterimi sadeleştirmek amacıyla yukarıdakinden bağımsız olarak Φ index fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\Phi(m,n) =: a\,(p+m)^v + b\,(r+n)^w\,. \tag{4.7}$$

Bu tez boyunca yukarıda tanımlanan matrislerde aşağıda belirtilen özellikler incelenecektir:

- İlk olarak LU ayrışımlarından ve bunların terslerinden gelen L, U, L^{-1} ve U^{-1} matrisleri için ve matrisin boyutuna bağlı olarak matrisin tersinin ve determinantının genel formülünü elde edeceğiz.
- Girişler asimetrik olduğu için bu matris aileleri için Cholesky ayrışımını değerlendiremiyoruz.
- Elde ettiğimiz formüllerimizi klasik yöntemleri kullanarak ispatlayacağız.
- Son olarak matrislerin özel durumlarını inceleyerek uygulama alanına değineceğiz. Burada tüm özdeşliklerimiz genel q için geçerlidir. Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili sonuçlar, q 'nun özel seçimi için doğal sonuçlar olarak ortaya çıkacaktır.
- $\mathscr{A}$ matrisine ait elde ettiğimiz sonuçlar Mathematica Slovaca dergisinde "Harmony of asymmetric variants of the Filbert and Lilbert matrices in q-form" ismiyle basılmıştır [10].
- $\mathscr{B}$ matrisine ait elde ettiğimiz sonuçlar "Curious harmony in asymmetric & nonlinear variant of Filbert and Lilbert matrices" ismiyle SCI-Expanded kapsamlı Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics dergisinde basılmıştır [11].
- $\mathscr{D}$ matrisine ait elde ettiğimiz sonuçlar "A nonlinear Filbert-like matrix with three free parameters: From linearity to nonlinearity" ismiyle SCI-Expanded kapsamlı Mathematica Slovaca dergisinde basılmıştır [12].

5. YÖNTEM

Bu bölümde önceki bölümde tanımladığımız Hankel türü özel matris ailelerinde parametrelerine ve girdilerine göre kullanacağımız yöntemleri özetleyelim:

1. Her bir parametrik matris ailesi için düşük boyutlu (< 15) matrisler oluşturulacak ve bu matrislere karşı gelen cebirsel özellikler için girdilere bağlı olarak matematiksel ifadeler elde edilecektir.

- Bu kapsamda sembolik işlem yapılabilen ve matris girdileri olan dizi elemanlarını değişkenler olarak girebileceğimiz Mathematica ve Scientific WorkPlace gibi yazılımları kullanılacaktır.

- Teorik metotlarla hedeflenen sonuçların elde edilememesi veya çok karmaşık olması durumunda ise bu düşük boyutlu matrisler için girdiler sayısal değerler olarak alınacak ve bu değerlere karşı gelen her bir matrisin cebirsel özellikleri tahmin gücünden yararlanarak bulunacaktır. Elde edilen bu sayısal sonuçlardan matrisin girdilerine bağlı olarak matrisin her bir cebirsel özelliği için açık formüller veya indirgeme bağıntıları elde edilecektir. Bu amaçla bir veri havuzu oluşturulup ve benzer şekilde matris elemanları parametrelere ve indislere bağlı olarak ifade edilecektir. Bu durumlarda matrisin boyutuna bağlı bir formül elde edilebilmektedir.

- Her bir matris ailemiz için *LU* ayrışımları farklı parametreler için hesaplanacaktır. Bu ayrışım sayesinde alt veya üst üçgen şeklindeki bir matrisin determinantı köşegen elemanların çarpımı olduğundan dolayı

$$\det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) \tag{5.1}$$

  eşitliğini kullanarak yeni matris ailemizin determinantını da elde etmek mümkündür. Eğer üçgen matrislerden herhangi birinin bir köşegen elemanı 0 ise determinantı 0 olacak ve tersi olmadığı sonucuna varacağız. Determinantın 0 dan farklı olduğu durumlar için ise yapılarına bağlı olarak L ve U matrisleri araştırılacak ve

$$(L \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \tag{5.2}$$

  eşitliğinden matrislerin tersleri bulunacaktır. Burada önemli bir ayrıntı bir matrisin birden fazla *LU* ayrışımının olabilmesidir. Bu ayrışımın tek olabilmesi için L matrisinin birim alt üçgen (köşegeni 1 olan alt üçgen matris) veya U matrisinin birim üst üçgen matris (köşegeni 1 olan üst üçgen matris) olması şartı kullanılabilir. İşlem kolaylığı açısından bu durumda L matrisi birim alt üçgen matris olacak şekilde çalışmalar yürütülecektir. Bu sebeple yeni matrisimizin determinantı sadece U matrisinin köşegen üzerindeki elemanların çarpımı şeklindedir. Böylece determinant için matrisin boyutuna bağlı olarak daha net bir formül elde etmek mümkündür.

2. Her bir parametrik matris ailesi için tüm boyutlarda geçerli olacak şekilde bu matrislere karşı gelen cebirsel özellikler için girdilere bağlı olarak matematiksel ifadeler elde edilecektir. Burada elde edilen sonuçlar düşük boyutlu (< 15) matrisler için elde edilen sonuçların genellemeleridir. Bu genel sonuçların doğruluğu tüm boyutlar için ispatlanacaktır. Bu ispatlar sırasında klasik ispat yöntemlerini kullanacağız.

3. Elde edilen sonuçlar tümevarım ve geriye doğru tümevarım yöntemleri kullanılarak hesaplanacaktır.
   Burada kısaca tümevarım ve geriye dönük tümevarım yöntemini hatırlatalım:
   Her pozitif n tamsayısı için $P(n)$ bir önerme olsun.

   - $P(1)$ 'in doğru olduğunu gösterelim.
   - Kabul edelim ki $P(k)$ her k pozitif tam sayısı için doğru olsun.
   - Bu durumda eğer $P(k+1)$ de doğruysa, o zaman $P(n)$ her pozitif n tam sayısı için doğru olduğu duruma tümevarımla ispatlama denir.
   - $P(k+1)$ 'in doğru kabul edilip $P(k)$ 'nın doğruluğunun gösterildiği duruma ise geriye dönük tümevarımla ispatlama denir.

6. $\mathscr{A}$ MATRİSİ İÇİN SONUÇLAR

6.1 Tez Problemi ve Çalışma Planı

Bu bölümde tezimiz kapsamında ele alacağımız 4. bölümde tanımladığımız $\mathscr{A}$ matris ailesinine ait sonuçları ispatlarıyla birlikte vereceğiz.
Öncelikle $\mathscr{A}$ matrisini tekrar hatırlatalım:
Herhangi a, b, x, y ve q reel sayıları için $1+xq^{am+bn} \neq 0$ ve $1+yq^{am+bn} \neq 0$ olmak üzere $\mathscr{A} = [\mathscr{A}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{A} = [\mathscr{A}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xq^{am+bn}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1}{1+yq^{am+bn}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{6.1}$$

- İlk olarak LU ayrışımından ve bunların terslerinden gelen L, U, L^{-1} ve U^{-1} matrisleri için açık formüller sunacağız.
- Ardından matrisimizin boyutuna bağlı olarak matrisin tersinin ve determinantının genel formüllerini vereceğiz.
- Elde ettiğimiz formülleri gerekli yöntemleri kullanarak ispatlayacağız.
- Son olarak matrisin özel durumlarını inceleyerek uygulama alanına değineceğiz. Burada tüm özdeşliklerimiz genel q için geçerlidir. Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili sonuçlar, q 'nun özel seçimi için doğal sonuçlar olarak ortaya çıkacaktır.

6.2 Temel Sonuçlar

Şimdi $\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımını, L^{-1}, U^{-1} matrislerini ve $\mathscr{A}^{-1}$ matrisini aşağıdaki teoremlerde vereceğiz.

Teorem 6.1. *$1 \le d \le n$ ve n tek olmak üzere,*

$$L_{n,d} = \frac{1}{\left(-xq^{an+b};q^b\right)_d} \begin{bmatrix} (n-1)/2 \\ \lfloor (d-1)/2 \rfloor \end{bmatrix}_{2a} \times \begin{cases} \dfrac{\left(-xq^{ad+b};q^b\right)_d \left(xy^{-1}q^{a(n-d+1)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(d-1)/2}} & d \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{ad+b};q^b\right)_d \left(xy^{-1}q^{a(n-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{d/2}} & d \text{ çift ise} \end{cases} \tag{6.2}$$

ve n çift ise,

$$L_{n,d} = \frac{1}{\left(-yq^{an+b};q^b\right)_d} \begin{bmatrix} \lfloor (n-1)/2 \rfloor \\ \lfloor (d-1)/2 \rfloor \end{bmatrix}_{2a} \times \begin{cases} \dfrac{\left(-xq^{ad+b};q^b\right)_d \left(x^{-1}yq^{a(n-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(d-1)/2}} & d \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{ad+b};q^b\right)_d \left(x^{-1}yq^{a(n-d+1)};q^{2a}\right)_{d/2}}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{d/2}} & d \text{ çift ise} \end{cases} \tag{6.3}$$

ve

$$U_{d,n} = (-1)^d \frac{q^{(ad+2bn)(d-1)/2}\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{d-1}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{\lfloor d/2 \rfloor}} \times \begin{cases} -\dfrac{(xy)^{(d-1)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{\left(-xq^{ad+b};q^b\right)_{d-1}} & d \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{(xy^{-1})^{d/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{d/2}}{\left(-yq^{ad+b};q^b\right)_{d-1}} & d \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Aşağıdaki teoremde L^{-1} ve U^{-1} matrislerinin formüllerini vereceğiz.

Teorem 6.2. *$1 \le d \le n$ ve n tek olmak üzere,*

$$L^{-1}_{n,d} = (-1)^{n+d} q^{a\binom{n-d}{2}} \frac{1}{\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{n-1}} \begin{bmatrix} (n-1)/2 \\ \lfloor (d-1)/2 \rfloor \end{bmatrix}_{2a}$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{\left(-xq^{ad+b};q^{b}\right)_{n-1}\left(xy^{-1}q^{ad};q^{2a}\right)_{(n-d)/2}}{\left(x^{-1}y\right)^{(d-n)/2}\left(x^{-1}yq^{a};q^{2a}\right)_{(n-d)/2}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{ad+b};q^{b}\right)_{n-1}\left(xy^{-1}q^{a(n-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}}{\left(xy^{-1}\right)^{(d-n+1)/2}\left(x^{-1}yq^{a};q^{2a}\right)_{d/2}} & d \text{ çift ise}\end{cases} \tag{6.5}$$

ve n çift ise,

$$L^{-1}_{n,d}=(-1)^{n+d}q^{a\binom{n-d}{2}}\frac{1}{\left(-yq^{an+b};q^{b}\right)_{n-1}}\begin{bmatrix}\lfloor (n-1)/2\rfloor\\ \lfloor (d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2a}$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{\left(-xq^{ad+b};q^{b}\right)_{n-1}\left(x^{-1}yq^{a(n-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{\left(x^{-1}y\right)^{(d-n+1)/2}\left(xy^{-1}q^{a};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{ad+b};q^{b}\right)_{n-1}\left(x^{-1}yq^{a(d+1)};q^{2a}\right)_{(n-d)/2}}{\left(xy^{-1}\right)^{(d-n)/2}\left(xy^{-1}q^{a};q^{2a}\right)_{(n-d)/2}} & d \text{ çift ise}\end{cases} \tag{6.6}$$

ve

$$U^{-1}_{d,n}=(-1)^{(2d+n+1)/2}q^{bd(1+d-2n)/2-a\binom{n}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\ d-1\end{bmatrix}_{b}$$
$$\times\frac{\left(-xq^{a+db};q^{2a}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}\left(-yq^{2a+db};q^{2a}\right)_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(q^{b};q^{b}\right)_{n-1}}$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{\left(-xq^{an+b};q^{b}\right)_{n}}{(xy)^{(n-1)/2}\left(xy^{-1}q^{a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\mathbf{i}\left(-yq^{an+b};q^{b}\right)_{n}}{\left(xy^{-1}\right)^{n/2}\left(x^{-1}yq^{a};q^{2a}\right)_{n/2}} & d \text{ çift ise.}\end{cases} \tag{6.7}$$

Şimdi $\mathscr{A}$ matrisinin boyutuna bağlı olarak tersini aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 6.3. *$1\le m,n\le N$ olmak üzere,*

$$\left(\mathscr{A}_N\right)^{-1}_{m,n}=(-1)^{m+n+N+1}\frac{1}{q^{(an(2N-n-1)+bm(2N-m-1))/2}}$$
$$\times\frac{\left(-yq^{2a+bm};q^{2a}\right)_{\lfloor N/2\rfloor}\left(-xq^{a+bm};q^{2a}\right)_{\lfloor (N+1)/2\rfloor}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{\lfloor (N-1)/2\rfloor}\left(q^{b};q^{b}\right)_{N-1}}\begin{bmatrix}\lfloor (N-1)/2\rfloor\\ \lfloor (n-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2a}\begin{bmatrix}N-1\\ m-1\end{bmatrix}_{b}$$

$$
\times \begin{cases} \dfrac{\left(1+xq^{an+bm}\right)^{-1} x^{(1+n-2N)/2} y^{(1-n)/2} \left(-xq^{an+b};q^b\right)_N}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{\lfloor (N-n+1)/2 \rfloor} (xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}} & n \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{\left(1+yq^{an+bm}\right)^{-1} x^{-n/2} y^{(n-2N-2)/2} \left(-yq^{an+b};q^b\right)_N}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{\lfloor (N-n+1)/2 \rfloor} (x^{-1}yq^a;q^{2a})_{n/2}} & n \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{6.8}
$$

Son olarak, $\mathscr{A}$ matrisinin determinantını boyutuna bağlı olarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz. Daha önceden belirttiğimiz üzere U matrisinin köşegen girdilerinin çarpımını kullanarak $\mathscr{A}$ matrisinin determinantını kolayca elde edebiliriz.

Teorem 6.4. $N \geq 1$ *olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
\det \mathscr{A}_N = {} & (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} q^{(N-1)N(N+1)(a+b)/6} x^{\lfloor (N/2)^2 \rfloor} y^{\lfloor ((N-1)/2)^2 \rfloor} \\
& \times \prod_{t=1}^{N-1} \left(q^b;q^b\right)_t \prod_{t=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_t^2 \left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_t \left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_t}{\left(-xq^{a(2t-1)+b};q^b\right)_N \left(-yq^{2at+b};q^b\right)_N} \\
& \times \begin{cases} \left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(N-1)/2}^{-1} \left(-xq^{aN+b};q^b\right)_N^{-1} & N \text{ tek ise,} \\ \\ \left(q^{2a};q^{2a}\right)_{N/2}^{-2} \left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{N/2}^{-1} & N \text{ çift ise.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

6.3 İspat

Şimdi bulduğumuz bu sonuçların ispatını vereceğiz. İddialarımızı tümevarım ve geriye dönük tümevarım yöntemleriyle kanıtlayacağız. Bu yöntemlerde işlemler uzun ve zaman alıcı olduğundan sonuçlarımızın bir kısmının ispatını vereceğiz. Diğer sonuçların ispatları da benzer şekildedir.

6.3.1 *LU* Ayrışımının İspatı

$\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı için

$$
\sum_{1 \leq d \leq \min(m,n)} L_{m,d} U_{d,n} = \mathscr{A}_{m,n} \tag{6.10}
$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Benzer şekilde, U 'nun ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $\mathscr{A}$ 'nın LU ayrışımını kanıtlamak için dört durumu değerlendirmeliyiz.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \geq n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$
\sum_{K \leq d \leq n} L_{m,d} U_{d,n} \tag{6.11}
$$

toplamını dört alt durumla ele alalım. Bunun için aşağıdaki toplamları tanımlayalım:
(i) m ve K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} (-1)^{d-1} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{d-1} \left(xy^{-1}q^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{q^{(ad+2bn)(1-d)/2}(xy)^{(1-d)/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(1+xq^{d(a+b)}\right)}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{(d+1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d}. \tag{6.12}$$

(ii) m çift, K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} (-1)^{d-1} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{d-1} \left(x^{-1}yq^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{q^{(ad+2bn)(1-d)/2}(xy)^{(1-d)/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(1+xq^{d(a+b)}\right)}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{(d+1)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d}. \tag{6.13}$$

(iii) m tek, K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} (-1)^{d} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{d-1} \left(xy^{-1}q^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}}{q^{(ad+2bn)(1-d)/2}(xy^{-1})^{-d/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{d/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{d/2}\left(1+yq^{d(a+b)}\right)}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{d/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d}. \tag{6.14}$$

(iv) m ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} (-1)^{d} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{d-1} \left(x^{-1}yq^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{d/2}}{q^{(ad+2bn)(1-d)/2}(xy^{-1})^{-d/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{d/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}\left(1+yq^{d(a+b)}\right)}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{d/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d}. \tag{6.15}$$

O halde $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını kullanarak (6.11) toplamını

$$\sum_{K \leq d \leq n} L_{m,d} U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} & m \text{ ve } n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} & m \text{ çift, } n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} & m \text{ tek, } n \text{ çift ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} & m \text{ ve } n \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{6.16}$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz. Şimdi $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 6.1. *(i) m ve K tek ise,*

$$\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{K-1} \frac{\left(q^{b(1-n)}; q^b\right)_{K-1} \left(xy^{-1} q^{a(m-K+1)}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{q^{(aK+2bn)(1-K)/2} (xy)^{(1-K)/2} \left(-yq^{2a+bn}; q^{2a}\right)_{(K+1)/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-K+2)}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2} (1+xq^{am+Kb})(1+yq^{a(K+1)+bn})}{\left(-xq^{a+bn}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2} \left(-xq^{am+b}; q^b\right)_K (1+xq^{am+bn})}. \tag{6.17}$$

(ii) m çift, K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} = (-1)^{K-1} \frac{\left(q^{b(1-n)}; q^b\right)_{K-1} \left(x^{-1} y q^{a(m-K+2)}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{q^{(aK+2bn)(1-K)/2} (xy)^{(1-K)/2} \left(-yq^{2a+bn}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-K+1)}; q^{2a}\right)_{(K-1)/2} (1+yq^{am+Kb})(1+xq^{aK+bn})}{\left(-xq^{a+bn}; q^{2a}\right)_{(K+1)/2} \left(-yq^{am+b}; q^b\right)_K (1+yq^{am+bn})}. \tag{6.18}$$

(iii) m tek, K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} = (-1)^{K} \frac{\left(q^{b(1-n)}; q^b\right)_{K-1} \left(xy^{-1} q^{a(m-K+2)}; q^{2a}\right)_{(K-2)/2}}{q^{(aK+2bn)(1-K)/2} (xy^{-1})^{-K/2} \left(-xq^{a+bn}; q^{2a}\right)_{K/2}} \times \frac{\left(q^{a(m-K+1)}; q^{2a}\right)_{K/2} (1+xq^{am+Kb})(1+yq^{aK+bn})}{\left(-yq^{2a+bn}; q^{2a}\right)_{K/2} \left(-xq^{am+b}; q^b\right)_K (1+xq^{am+bn})}. \tag{6.19}$$

(iv) m ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\textbf{\textit{(4)}}} = (-1)^K \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{K-1}\left(x^{-1}yq^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{K/2}}{q^{(aK+2bn)(1-K)/2}(xy^{-1})^{-K/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{K/2}}$$
$$\times \frac{\left(q^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-2)/2}(1+yq^{am+Kb})(1+yq^{aK+bn})}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{K/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K(1+yq^{am+bn})}. \tag{6.20}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. m ve K tek olduğunda geriye dönük tümevarım yöntemi gereği (6.17) ve (6.19) 'da verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Bunun sebebi toplamın indisinde hem çift hem tek değerlerin bulunmasıdır. Benzer şekilde m çift olduğunda ise (6.18) ve (6.20) 'deki sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.

Şimdi m ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \le t \le 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{\mathbf{(3)}} = \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} + S_{K-1}^{(3)} \tag{6.21}$$

eşitliğini ispatlamalıyız.

Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \ge n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. $K-1$ 'in çift olduğunu düşündüğümüzde geriye doğru tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{\mathbf{(3)}} &= \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} + S_{K-1}^{(3)} \\
&= (-1)^{K-1} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{K-1}\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{q^{(aK+2bn)(1-K)/2}(xy)^{(1-K)/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{(K+1)/2}} \\
&\times \frac{\left(q^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}(1+xq^{am+Kb})(1+yq^{a(K+1)+bn})}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K(1+xq^{am+bn})} \\
&+ \frac{(-1)^{K-1}\left(q^{b(1-n)};q^b\right)_{K-2}\left(xy^{-1}q^{a(m-K+3)};q^{2a}\right)_{(K-3)/2}}{q^{(a(K-1)+2bn)(2-K)/2}(xy^{-1})^{(1-K)/2}\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}} \\
&\times \frac{\left(q^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}(1+yq^{(K-1)(a+b)})}{\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_{K-1}}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Gerekli sadeleştirmelerin ardından

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} = (-1)^{K-1} \frac{\left(q^{b(1-n)};q^{b}\right)_{K-2}\left(xy^{-1}q^{a(m-K+3)};q^{2a}\right)_{(K-3)/2}}{q^{(a(K-1)+2bn)(2-K)/2}(xy^{-1})^{(1-K)/2}\left(-xq^{a+bn};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(q^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}(1+xq^{am+(K-1)b})(1+yq^{a(K-1)+bn})}{\left(-yq^{2a+bn};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{am+b};q^{b}\right)_{K-1}(1+xq^{am+bn})} \tag{6.23}$$

elde ederiz. Buda ispatı tamamlar.
m 'nin çift olduğu durumda da ispat benzer şekilde tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{A}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K = 1$ ise (6.17)-(6.19) ve (6.18)-(6.20) eşitliklerinden sırasıyla

$$\frac{1}{1+xq^{am+bn}} = \sum_{1\le d\le \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} & n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} & n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{6.24}$$

ve

$$\frac{1}{1+yq^{am+bn}} = \sum_{1\le d\le \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} & n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} & n \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{6.25}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı tamamlanır.

6.3.2 L^{-1} Matrisine Dair Sonucun İspatı

Şimdi LL^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisi için verdiğimiz sonucun ispatını göstereceğiz. İspatı tamamlamak için

$$\sum_{n\le d\le m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1}$$

toplamını inceleyeceğiz. Bu toplamın değeri

$$\sum_{n\le d\le m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ ise,} \\ 0 & m \neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{6.26}$$

şeklinde olacaktır.
Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L ve L^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, LL^{-1} çarpımında sekiz durumu değerlendireceğiz.
Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan

ekstra bir K değişkenine bağlı olarak:

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} + L_{m,K+1}L^{-1}_{K+1,n} = \sum_{n\leq d\leq K+1} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{6.27}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

K tek ise,
(i) m ve n tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}^{(\mathbf{1})}_K := \sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{d+n} & \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(x^{-1}y)^{(n-d)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d (x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(d-n)/2}} \\ & \times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n)/2 \\ (m-d)/2\end{bmatrix}_{2a}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}^{(\mathbf{2})}_K := \sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{d+n} & \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(x^{-1}y)^{(n-d)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d (xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}} \\ & \times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(d-n)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-1)/2 \\ (d-n)/2\end{bmatrix}_{2a}.\end{aligned} \tag{6.29}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}^{(\mathbf{3})}_K := \sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{d+n} & \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(xy^{-1})^{(n-d+1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d (x^{-1}yq^a;q^{2a})_{n/2}} \\ & \times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{n/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(d-n+1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-1)/2 \\ (m-d)/2\end{bmatrix}_{2a}.\end{aligned} \tag{6.30}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} := \sum_{n \le d \le K} (-1)^{d+n} \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(xy^{-1})^{(n-d+1)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d (xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(d-n+1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{n/2}}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{n/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-d-1)/2\end{bmatrix}_{2a}. \quad (6.31)$$

K çift ise,
(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{5})} := \sum_{n \le d \le K} (-1)^{d+n} \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(x^{-1}y)^{(n-d+1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d (x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(d-n+1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{(n+1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-d-1)/2\end{bmatrix}_{2a}. \quad (6.32)$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{6})} := \sum_{n \le d \le K} (-1)^{d+n} \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(x^{-1}y)^{(n-d+1)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d (xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{d/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(d-n+1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-1)/2\\(m-d)/2\end{bmatrix}_{2a}. \quad (6.33)$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{7})} := \sum_{n \le d \le K} (-1)^{d+n} \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{(xy^{-1})^{(n-d)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_d (x^{-1}yq^a;q^{2a})_{n/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-d+2)};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{n/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(d-n)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-1)/2\\(d-n)/2\end{bmatrix}_{2a}. \quad (6.34)$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(8)}} := \sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{d+n} \frac{q^{a(d-n)(d-n-1)/2}\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{\left(xy^{-1}\right)^{(n-d)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_d \left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(d-n)/2}}$$
$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-d+1)};q^{2a}\right)_{d/2}\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n)/2\\(m-d)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.35}$$

O halde $1\leq i\leq 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını kullanarak (6.3.2) toplamını

$$I_{m,n} = \sum_{d=n}^{m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} = \left\{\begin{array}{llll} \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} & m \text{ tek ise,} & \multirow{2}{*}{n tek ise,} & \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} & m \text{ çift ise,} & & d \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} & m \text{ tek ise,} & n \text{ çift ise,} & \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} & m \text{ çift ise,} & & \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(5)}} & m \text{ tek ise,} & n \text{ tek ise,} & \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(6)}} & m \text{ çift ise,} & & d \text{ çift ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(7)}} & m \text{ tek ise,} & n \text{ çift ise,} & \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(8)}} & m \text{ çift ise,} & & \end{array}\right. \tag{6.36}$$

şeklinde sekiz alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1\leq i\leq 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 6.2. *K tek ise,*
(i) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathit{(1)}} = (-1)^{K+n} \frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(1-q^{a(m-n)}\right)\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K \left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{(n+1)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(K-n)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.37}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} = \frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(1-x^{-1}yq^{a(m-1)}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{(-1)^{K+n}\left(1-x^{-1}yq^{a(m-n)}\right)\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-1)/2\\(K-n)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.38}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} = \frac{(-1)^{K+n}q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+yq^{an+bK}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(xy^{-1}\right)^{(n-K+1)/2}\left(1-xy^{-1}q^{a(m-n)}\right)\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n-1)};q^{2a}\right)_{(n+2)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-3)/2\\(m-K-2)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.39}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} = \frac{(-1)^{K+n}q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+yq^{an+bK}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(xy^{-1}\right)^{(n-K-1)/2}\left(1-q^{a(m-n)}\right)\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K)};q^{2a}\right)_{(K+1)/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{n/2}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-K-1)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.40}$$

K çift ise,
(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(5)} = (-1)^{K+n}\frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K-1)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K)};q^{2a}\right)_{K/2}\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-K-1)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.41}$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(6)} = \frac{\left(x^{-1}y\right)^{(K-n+1)/2} q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{(-1)^{K+n}\left(1-x^{-1}yq^{a(m-n)}\right)\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{K/2}\left(q^{a(m-n-1)};q^{2a}\right)_{(n+1)/2}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-3)/2\\(m-K-2)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.42}$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(7)} = \frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1-q^{a(m-K+1)}\right)\left(1+yq^{an+bK}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{(-1)^{K+n}\left(1-xy^{-1}q^{a(m-n)}\right)\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}} \times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K)};q^{2a}\right)_{K/2}\left(q^{a(m-n+3)};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}}{\left(xy^{-1}\right)^{(n-K)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n+1)/2\\(K-n)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.43}$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(8)} = \frac{(-1)^{K+n} q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+yq^{an+bK}\right)\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(xy^{-1}\right)^{(n-K)/2}\left(1-q^{a(m-n)}\right)\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{K/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{n/2}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}} \begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(K-n)/2\end{bmatrix}_{2a}. \tag{6.44}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m, n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. Tümevarım yöntemi gereği m ve n tek olduğunda K 'nın hem çift hem de tek olduğu (6.37) ve (6.41) 'de verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Benzer şekilde (6.38)-(6.42), (6.39)-(6.43) ve (6.40)-(6.44) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde ispatımız tamamlanmış olacaktır.

(i) Şimdi m, n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \le t \le 8)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{5})} + S_K^{(\mathbf{1})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} \tag{6.45}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \ge n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. $K-1$ 'in çift olduğunu düşündüğümüzde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{(5)}+S_K^{(1)} = & \frac{q^{a(K-n-1)(K-n)/2}\left(1+xq^{an+b(K-1)}\right)\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(-1)^{K+n-1}(x^{-1}y)^{(n-K)/2}(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(K-n)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_{K-1}} \\
& \times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-K)/2\end{bmatrix}_{2a} \\
& +(-1)^{K+n}\frac{q^{a(K-n)(K-n-1)/2}\left(1+xq^{aK+bK}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{(x^{-1}y)^{(n-K)/2}(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(K-n)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K} \\
& \times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}}\begin{bmatrix}(m-n)/2\\(m-K)/2\end{bmatrix}_{2a}.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$\begin{aligned}
= & \left((-1)^{K+n}\frac{q^{a(K-n)(K-n-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-2}\left(q^{a(m-n+2)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(x^{-1}y)^{(n-K)/2}\left(-xq^{am+b};q^b\right)_{K-1}(x^{-1}yq^a;q^{2a})_{(K-n)/2}}\right. \\
& \left.\times \frac{\left(1+xq^{an+b(K-1)}\right)\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{(xy^{-1}q^a;q^{2a})_{(n-1)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}}\begin{bmatrix}(m-n-2)/2\\(m-K)/2\end{bmatrix}_{2a}\right) \\
& \times\left(\frac{\left(1+xq^{aK+bK}\right)\left(1-q^{a(m-n)}\right)}{\left(1+xq^{am+bK}\right)\left(1-q^{a(K-n)}\right)}-1\right)
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (6.37); yani $\mathtt{SUM}_K^{(1)}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$\begin{aligned}
& q^{a(K-n)}\frac{\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(1-q^{a(m-n)}\right)}{\left(1-q^{a(m-n)}\right)\left(1+xq^{am+bK}\right)\left(1-q^{a(K-n)}\right)} \\
= & \frac{1}{1-q^{a(m-K)}}\left(\frac{\left(1+xq^{aK+bK}\right)\left(1-q^{a(m-n)}\right)}{\left(1+xq^{am+bK}\right)\left(1-q^{a(K-n)}\right)}-1\right)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir.

O halde

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} = (-1)^{K+n} \frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(1-q^{a(m-n)}\right)\left(-xq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}}$$
$$\times \frac{\left(xy^{-1}q^{a(m-K+1)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n)};q^{2a}\right)_{(n+1)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix} (m-n-2)/2 \\ (K-n)/2 \end{bmatrix}_{2a} \tag{6.49}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır.

(ii) Şimdi m 'nin çift, n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım. Bu koşullar altında (6.38) ve $K-1$ çift olduğundan (6.42) eşitliklerini birlikte düşünerek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{6})} + S_K^{(\mathbf{2})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} \tag{6.50}$$

eşitliğini göstermeliyiz. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{6})} + S_K^{(\mathbf{2})} &= (-1)^{K+n-1} \frac{q^{a(K-n-1)(K-n)/2}\left(1+xq^{an+b(K-1)}\right)}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(1-x^{-1}yq^{a(m-n)}\right)} \\
&\quad\times \frac{\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-2}\left(x^{-1}yq^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_{K-1}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\
&\quad\times \frac{\left(q^{a(m-n-1)};q^{2a}\right)_{(n+1)/2}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \begin{bmatrix} (m-n-3)/2 \\ (m-K-1)/2 \end{bmatrix}_{2a} \\
&\quad+(-1)^{K+n} \frac{q^{a(K-n)(K-n-1)/2}\left(1+xq^{aK+bK}\right)}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\
&\quad\times \frac{\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}\left(x^{-1}yq^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \\
&\quad\times \frac{\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix} (m-n-1)/2 \\ (K-n)/2 \end{bmatrix}_{2a}
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$= \left((-1)^{K+n} \frac{q^{a(K-n)(K-n-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{\left(x^{-1}y\right)^{(n-K)/2}\left(-yq^{am+b};q^b\right)_K\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}}\right.$$

$$\times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K+2)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{(xy^{-1}q^{a};q^{2a})_{(n-1)/2}\,(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix} (m-n-1)/2 \\ (K-n)/2 \end{bmatrix}_{2a} \Bigg)$$

$$\times \left(\left(1+xq^{aK+bK}\right) - \frac{\left(1-q^{a(K-n)}\right)\left(1+yq^{am+bK}\right)}{1-x^{-1}yq^{a(m-n)}} \right) \tag{6.52}$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (6.38); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$\begin{aligned} & q^{a(K-n)} \frac{\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(1-x^{-1}yq^{a(m-K)}\right)}{1-x^{-1}yq^{a(m-n)}} \\ = & \left(1+xq^{aK+bK}\right) - \frac{\left(1-q^{a(K-n)}\right)\left(1+yq^{am+bK}\right)}{1-x^{-1}yq^{a(m-n)}} \end{aligned} \tag{6.53}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir. O halde

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} = & \frac{q^{a(K-n)(K-n+1)/2}\left(1+xq^{an+bK}\right)\left(1-x^{-1}yq^{a(m-1)}\right)\left(-xq^{an+b};q^{b}\right)_{K-1}}{(-1)^{K+n}\left(1-x^{-1}yq^{a(m-n)}\right)\left(-yq^{am+b};q^{b}\right)_{K}(xy^{-1}q^{a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \\ & \times \frac{\left(x^{-1}yq^{a(m-K)};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(q^{a(m-n+1)};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}{(x^{-1}y)^{(n-K)/2}(x^{-1}yq^{a};q^{2a})_{(K-n)/2}(q^{2a};q^{2a})_{(n-1)/2}} \begin{bmatrix} (m-n-1)/2 \\ (K-n)/2 \end{bmatrix}_{2a}. \end{aligned} \tag{6.54}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır.
Diğer durumların ispatları da benzer şekilde yapılır. □

Sonuç olarak $\mathscr{A}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K = 1$ ise (6.37)-(6.41), (6.38)-(6.42), (6.39)-(6.43) ve (6.40)-(6.44) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$\mathtt{SUM}_K = \sum_{n\le d\le m} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} 1 & m=n \text{ ise,} \\ 0 & m\neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{6.55}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisinin ispatı tamamlanır.
Benzer şekilde UU^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{A}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz U matrisinin tersi olan U^{-1} matrisine ait sonuçların ispatı için

$$I_{m,n} = \sum_{m\le d\le n} U_{m,d}U^{-1}_{d,n} \tag{6.56}$$

toplamı incelenir. Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; U ve U^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun iki farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, $\mathscr{A}$ 'nın UU^{-1} çarpımında dört durumu ele almalıyız.

6.3.3 $\mathscr{A}^{-1}$ Matrisine Dair Sonucun İspatı

$U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{A}$ matrisinin tersinin ispatını göstereceğiz.

İspatı tamamlamak için

$$\sum_{\max(m,n)\leq d\leq N} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} = (\mathscr{A}_N)^{-1}_{m,n} \tag{6.57}$$

toplamını inceleyeceğiz.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L^{-1} matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Benzer şekilde, U^{-1} 'in ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $(\mathscr{A}_N)^{-1}_{m,n}$ 'i kanıtlamak için dört durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \geq n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$\sum_{m\leq d\leq K} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{6.58}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{m\leq d\leq K} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} + U^{-1}_{m,K+1}L^{-1}_{K+1,n} = \sum_{m\leq d\leq K+1} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{6.59}$$

eşitliğini inceleyeceğiz.

O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

(i) n ve K tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}^{(\mathbf{1})}_K := \sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} & (-1)^{d+m+n+1} \frac{q^{an((n-2d+1)/2)+bm((m-2d+1)/2)}}{x^{(2d-n-1)/2}y^{(n-1)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}} \\
& \times \frac{\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{d-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(d-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\
& \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(d-n)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} := \sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} & (-1)^{d+m+n+1} \frac{q^{an((n-2d+1)/2)+bm((m-2d+1)/2)}}{x^{n/2}y^{(2d-n-2)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}} \\
& \times \frac{\left(1+xq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{d-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(d-n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}} \\
& \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(d-1)/2}\left(-yq^{an+b};q^b\right)_{d-1}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(d-n+1)/2}}. \qquad (6.61)
\end{aligned}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} := \sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} & (-1)^{m+n+d+1} \frac{q^{an((n-2d+1)/2)+bm((m-2d+1)/2)}}{x^{(2d-n-1)/2}y^{(n-1)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}} \\
& \times \frac{\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{d-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(d-n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\
& \times \frac{\left(-xq^{na+b};q^b\right)_{d-1}\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{d/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(d-n+1)/2}}. \qquad (6.62)
\end{aligned}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} := \sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} & (-1)^{m+n+d+1} \frac{q^{an((n-2d+1)/2)+bm((m-2d+1)/2)}}{x^{n/2}y^{(2d-n-2)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}} \\
& \times \frac{\left(1+yq^{ad+bd}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(d-2)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{d-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(d-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}} \\
& \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{d/2}\left(-yq^{na+b};q^b\right)_{d-1}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(d-n)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}}. \qquad (6.63)
\end{aligned}$$

O halde $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını kullanarak (6.58) toplamını

$$\sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} U_{m,d}^{-1}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} & n \text{ ve } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} & n \text{ çift, } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} & n \text{ tek, } K \text{ çift ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} & n \text{ ve } K \text{ çift ise,} \end{cases}$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 6.3. *(i) n ve K tek ise,*

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{K+m+n+1} & \frac{x^{(n-2K+1)/2} q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{y^{(n-1)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}\left(1+xq^{an+bm}\right)} \\ & \times \frac{\left(1+xq^{aK+bm}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{K-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\ & \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_K}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}\end{aligned} \tag{6.64}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(2)} = (-1)^{K+m+n+1} & \frac{y^{(n-2K+2)/2} q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{x^{\frac{n}{2}}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}\left(q^b;q^b\right)_{K-m}} \\ & \times \frac{\left(1+xq^{aK+bm}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}\left(1+yq^{an+bm}\right)} \\ & \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-yq^{an+b};q^b\right)_K}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}}.\end{aligned} \tag{6.65}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(3)} = (-1)^{m+n+K+1} & \frac{x^{(n-2K+1)/2} q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{y^{(n-1)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}\left(q^b;q^b\right)_{K-m}} \\ & \times \frac{\left(1+yq^{aK+bm}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-2)/2}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(1+xq^{an+bm}\right)} \\ & \times \frac{\left(-xq^{na+b};q^b\right)_K\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{K/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n+1)/2}}.\end{aligned} \tag{6.66}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(4)} = (-1)^{m+n+K+1} & \frac{q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}\left(1+yq^{aK+bm}\right)}{x^{n/2}y^{(2K-n-2)/2}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}\left(q^b;q^b\right)_{K-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \\ \times & \frac{\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-2)/2}\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{K/2}\left(-yq^{na+b};q^b\right)_K}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-2)/2}\left(1+yq^{an+bm}\right)\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{n/2}}.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. n ve K tek olduğunda tümevarım yöntemi gereği (6.64) ve (6.66) 'da verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Bunun sebebi toplamın indisinde hem çift hem tek değerlerin bulunmasıdır. Benzer şekilde n çift olduğunda ise (6.65) ve (6.67) 'deki

sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.
(i) Şimdi n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.
$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} + S_K^{(\mathbf{1})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $m > n$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $n \geq m$ alacağız. $K = m$ ise ispat açıktır. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} + S_K^{(\mathbf{1})} = (-1)^{m+n+K} & \frac{x^{(n-2K+3)/2} q^{an((n-2K+3)/2)+bm((m-2K+3)/2)}}{y^{(n-1)/2} \left(q^b;q^b\right)_{m-1} \left(q^b;q^b\right)_{K-m-1}} \\
\times & \frac{\left(1+yq^{a(K-1)+bm}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-3)/2}}{\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n-2)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(1+xq^{an+bm}\right)} \\
\times & \frac{\left(-xq^{na+b};q^b\right)_{K-1}\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \\
+ (-1)^{K+m+n+1} & \frac{q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{x^{(2K-n-1)/2} y^{(n-1)/2} \left(q^b;q^b\right)_{m-1}} \\
\times & \frac{\left(1+xq^{aK+bK}\right)\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{K-m}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \\
\times & \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{an+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}}
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$\begin{aligned}
= & \left((-1)^{K+m+n+1} \frac{x^{(n-2K+1)/2} q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{y^{(n-1)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n)/2}\left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \right. \\
& \left. \times \frac{\left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}\left(-xq^{na+b};q^b\right)_{K-1}}{\left(q^b;q^b\right)_{K-m}\left(q^b;q^b\right)_{m-1}\left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2}} \right) \\
& \times \left(\left(1+xq^{aK+bK}\right) - \frac{xq^{an+bm}\left(1-q^{b(K-m)}\right)\left(1-q^{a(K-n)}\right)}{1+xq^{an+bm}} \right)
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (6.64); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(1+xq^{aK+bm}\right)\left(1+xq^{an+bK}\right)}{1+xq^{an+bm}} \\
& = \left(1+xq^{aK+bK}\right) - \frac{xq^{an+bm}\left(1-q^{b(K-m)}\right)\left(1-q^{a(K-n)}\right)}{1+xq^{an+bm}}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Son eşitlik değerler dağıtıldığında kolayca görülebilir. O halde

$$\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{K+m+n+1} \frac{x^{(n-2K+1)/2} q^{an((n-2K+1)/2)+bm((m-2K+1)/2)}}{y^{(n-1)/2} \left(q^b;q^b\right)_{m-1} \left(1+xq^{an+bm}\right)} \times \frac{\left(1+xq^{aK+bm}\right) \left(-yq^{2a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2}}{\left(q^b;q^b\right)_{K-m} \left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(K-n)/2} \left(q^{2a};q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \times \frac{\left(-xq^{a+mb};q^{2a}\right)_{(K-1)/2} \left(-xq^{an+b};q^b\right)_K}{\left(x^{-1}yq^a;q^{2a}\right)_{(K-n)/2} \left(xy^{-1}q^a;q^{2a}\right)_{(n-1)/2}} \tag{6.71}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{A}^{-1}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim: $K = N$ ise (6.64)-(6.66) ve (6.65)-(6.67) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$(\mathscr{A}_N)^{-1}_{m,n} = \sum_{\max(m,n)\le d\le K} U^{-1}_{m,d} L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(1)} & n \text{ ve } K \text{ tek ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(2)} & n \text{ çift}, K \text{ tek ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(3)} & n \text{ tek}, K \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(4)} & n \text{ ve } K \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{6.72}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{A}^{-1}$ matrisinin ispatı tamamlanır.

7. $\mathscr{B}$ MATRİSİ İÇİN SONUÇLAR

7.1 Tez Problemi ve Çalışma Planı

Bu bölümde önceki çalışmamızdaki $\mathscr{A}$ matrisinden [10] ve literatürdeki lineer olmayan örneklerden [9, 21] esinlenerek 4. bölümde tanımladığımız $\mathscr{B}$ matris ailesinine ait sonuçları ispatlarıyla birlikte vereceğiz.
Öncelikle $\mathscr{B}$ matrisini tekrar hatırlatalım:
$1+xq^{a+\lambda(m+p)^v+\mu(n+r)^w} \neq 0$, $1+yq^{b+\lambda(m+p)^v+\mu(n+r)^w} \neq 0$ sağlayan herhangi x, y, q, λ, μ, a, b, p, r, v, w reel sayıları için $\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{m,n}]_{m,n>0}$ matrisimizin elemanlarını

$$\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ çift ise} \end{cases} \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlayalım.
Burada gösterimi sadeleştirmek amacıyla Φ ve Ψ index fonksiyonlarını

$$\Phi_i := \lambda\,(i+p)^v \quad \text{ve} \quad \Psi_i := \mu\,(i+r)^w \tag{7.2}$$

şeklinde tanımlayacağız.
Böylece $\mathscr{B}$ 'nin ardışık satır elemanları x ve y seçimine göre lineer olmayan Filbert ve Lilbert matrislerinin eleman formlarına sahip olacak. Bu açıdan, $\mathscr{B}$ matrisi çok özel ve ilginç bir uyum sergiler. Bu uyumu matrisin cebirsel özelliklerini elde ederken de göreceğiz.
Şimdi bu çalışmamızda yapacaklarımızı kısaca özetleyelim:

- İlk olarak LU ayrışımlarından ve bunların terslerinden gelen L, U, L^{-1} ve U^{-1} matrisleri için açık formüller sunacağız.
- Ardından matrisimizin boyutuna bağlı olarak matrisin tersinin ve determinantının genel formüllerini vereceğiz.
- Elde ettiğimiz formülleri gerekli yöntemleri kullanarak ispatlayacağız.
- Son olarak matrisin özel durumlarını inceleyerek uygulama alanına değineceğiz. Burada tüm özdeşliklerimiz genel q için geçerlidir. Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili sonuçlar, q 'nun özel seçimi için doğal sonuçlar olarak ortaya çıkacaktır.

7.2 Temel Sonuçlar

Şimdi $\mathscr{B}$ matrisinin LU ayrışımını ve determinantını, L^{-1}, U^{-1} matrislerini ve $\mathscr{B}^{-1}$ matrisini aşağıdaki teoremlerde vereceğiz.

Teorem 7.1. *Kabul edelim ki $1 \le d \le n$ olsun.*
n tek ise;
(i) d tek ise,

$$L_{n,d} = \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}\right)}, \tag{7.3}$$

(ii) d çift ise,

$$L_{n,d} = \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.4}$$

n çift ise;
(iii) d tek ise,

$$L_{n,d} = \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}\right)}, \tag{7.5}$$

(iv) d çift ise,

$$L_{n,d} = \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}}. \tag{7.6}$$

Teorem 7.2. *Kabul edelim ki $1 \le d \le n$ olsun.*
(i) d tek ise,

$$\begin{aligned} U_{d,n} &= \frac{\left(xq^{a+\Phi_d}\right)^{d-1}}{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_n}} \prod_{t=1}^{d-1} q^{\Psi_t} \frac{1-q^{\Psi_n-\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_t}} \\ &\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_d}\right)\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_d}\right)}{\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

(ii) d çift ise,

$$\begin{aligned} U_{d,n} &= \left(yq^{b+\Phi_d}\right)^{d-1} \prod_{t=1}^{d-1} q^{\Psi_t} \frac{1-q^{\Psi_n-\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_t}} \\ &\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_d}}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \left(1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_d}\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Aşağıdaki teoremlerde L^{-1} ve U^{-1} matrislerinin formüllerini vereceğiz.

Öncesinde Iverson notasyonunu hatırlatalım:

$$[P] = \begin{cases} 1 & P \text{ doğruysa,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{7.9}$$

Teorem 7.3. *Kabul edelim ki $n < d$ ise $L^{-1}_{n,d} = 0$ olmak üzere $1 \leq d \leq n$ olsun.*
n tek ise;
(i) d tek ise,

$$L^{-1}_{n,d} = (-1)^{[n\neq d]} \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{1 - xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1 - xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(d+1)/2}}^{(n-1)/2} \frac{1 - q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1 - q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1 + xq^{a+\Phi_d+\Psi_t}}{1 + xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}, \tag{7.10}$$

(ii) d çift ise,

$$L^{-1}_{n,d} = - \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{1 - q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1 - x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq d/2}}^{(n-1)/2} \frac{1 - q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}}{1 - xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_d}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1 + yq^{b+\Phi_d+\Psi_t}}{1 + xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}. \tag{7.11}$$

n çift ise;
(iii) d tek ise,

$$L^{-1}_{n,d} = - \prod_{t=1}^{(n-2)/2} \frac{1 - q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1 - xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(d+1)/2}}^{n/2} \frac{1 - x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1 - q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1 + xq^{a+\Phi_d+\Psi_t}}{1 + yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}, \tag{7.12}$$

(iv) d çift ise,

$$L^{-1}_{n,d} = (-1)^{[n\neq d]} \prod_{t=1}^{n/2} \frac{1 - x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}{1 - x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq d/2}}^{(n-2)/2} \frac{1 - q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1 - q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1 + yq^{b+\Phi_d+\Psi_t}}{1 + yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}. \tag{7.13}$$

Teorem 7.4. *Kabul edelim ki $d < n$ ise $U^{-1}_{d,n} = 0$ olmak üzere $1 \leq d \leq n$ olsun.*
(i) n tek ise,

$$\begin{aligned} U^{-1}_{d,n} = (-1)^{d+1} &\frac{q^{\Psi_d(d-n)}}{(xq^{a+\Phi_n})^{n-1}} \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{\left(1 + xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_d}\right)\left(1 + yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_d}\right)}{(1 - q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_n})(1 - x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_n})} \\ &\times \prod_{t=1}^{n-d} \frac{1}{1 - q^{\Psi_{t+d}-\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1 - q^{\Psi_d-\Psi_t}} \prod_{t=1}^{n} (1 + xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}), \end{aligned} \tag{7.14}$$

(ii) n çift ise,

$$U_{d,n}^{-1}=(-1)^d\frac{q^{(d-n)\Psi_d}}{\left(yq^{b+\Phi_n}\right)^{n-1}}\prod_{t=1}^{(n-2)/2}\frac{1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_d}}{1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_n}}\prod_{t=1}^{n/2}\frac{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_d}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_n}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{n-d}\frac{1}{1-q^{\Psi_{t+d}-\Psi_d}}\prod_{t=1}^{d-1}\frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_d-\Psi_t}}\prod_{t=1}^{n}(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}). \tag{7.15}$$

Şimdi $\mathscr{B}$ matrisinin boyutuna bağlı olarak bu matrisin tersini aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 7.5. $1\leq m,n\leq N$ *olmak üzere;*
(i) n tek ise,

$$(\mathscr{B}_N)_{m,n}^{-1}=\frac{(-1)^{N+1}}{\left(xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)^{N-1}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq m}}^{N}\frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1-q^{\Psi_t-\Psi_m}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq(n+1)/2}}^{\lfloor(N+1)/2\rfloor}\frac{1}{1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_n}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{\lfloor N/2\rfloor}\frac{1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_n}}\prod_{t=1}^{\lfloor(N+1)/2\rfloor}\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right), \tag{7.16}$$

(ii) n çift ise,

$$(\mathscr{B}_N)_{m,n}^{-1}=\frac{(-1)^{N+1}}{\left(yq^{b+\Phi_n+\Psi_m}\right)^{N-1}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq m}}^{N}\frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1-q^{\Psi_t-\Psi_m}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq n/2}}^{\lfloor N/2\rfloor}\frac{1}{1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_n}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{\lfloor(N+1)/2\rfloor}\frac{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_n}}\prod_{t=1}^{\lfloor N/2\rfloor}\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right). \tag{7.17}$$

Son olarak, $\mathscr{B}$ matrisinin determinantını boyutuna bağlı olarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz Daha önceden belirttiğimiz üzere U matrisinin köşegen girdilerinin çarpımını kullanarak $\mathscr{B}$ matrisinin determinantını kolayca elde edebiliriz.

Teorem 7.6. $N\geq 1$ *olmak üzere,*

$$\det\mathscr{B}_N=(-1)^{\lfloor N/4\rfloor}\left(yq^b\right)^{\binom{\lfloor N/2\rfloor}{2}}\prod_{t=1}^{\lfloor(N-1)/2\rfloor}\prod_{k=t}^{\lfloor(N-1)/2\rfloor}q^{\Phi_{2t-1}}\left(1-q^{\Phi_{2k+1}-\Phi_{2t-1}}\right)$$
$$\times\prod_{t=1}^{N-1}\prod_{k=t}^{N-1}q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_{k+1}-\Psi_t}\right)\prod_{t=1}^{\lfloor(N-2)/2\rfloor}\prod_{k=t}^{\lfloor(N-2)/2\rfloor}q^{\Phi_{2t}}\left(1-q^{\Phi_{2k+2}-\Phi_{2t}}\right)$$
$$\times\prod_{t=1}^{\lfloor(N+1)/2\rfloor}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_k}}\prod_{t=1}^{\lfloor N/2\rfloor}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_k}}$$

$$\times \prod_{t=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} q^{\Phi_{2k-1}} \left(1 - x^{-1} y q^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_{2k-1}}\right)$$

$$\times \begin{cases} (xq^a)^{3\binom{(N+1)/2}{2}} & N \textit{ tek ise,} \\ (-1)^{N/2} (xq^a)^{\binom{3N/2}{2}/3} & N \textit{ çift ise.} \end{cases} \tag{7.18}$$

7.3 İspat

Şimdi bulduğumuz bu sonuçların ispatını vereceğiz. İddialarımızı tümevarım ve geriye dönük tümevarım yöntemleriyle kanıtlayacağız. Bu yöntemlerde işlemler uzun ve zaman alıcı olduğundan sonuçlarımızın bir kısmının ispatını vereceğiz. Diğer sonuçların ispatları da benzer şekildedir.

7.3.1 *LU* Ayrışımının İspatı

$\mathscr{B}$ matrisinin *LU* ayrışımının ispatı için

$$\sum_{1 \le d \le \min(m,n)} L_{m,d} U_{d,n} = \mathscr{B}_{m,n} \tag{7.19}$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Benzer şekilde, U 'nun ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $\mathscr{B}$ 'nin *LU* ayrışımını kanıtlamak için dört durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$\sum_{K \le d \le n} L_{m,d} U_{d,n} \tag{7.20}$$

toplamını dört alt durumla ele alalım. Bunun için aşağıdaki toplamları tanımlayalım:
(i) m ve K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{d-1} \left(1 + xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(1 + xq^{a+\Phi_d+\Psi_n}\right)\left(1 + xq^{a+\Phi_m+\Psi_d}\right)}$$

$$\times \prod_{t=1}^{d-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1 - q^{\Psi_n - \Psi_t}\right)}{1 + xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} \frac{\left(1 - q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1 - x^{-1} y q^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1 + xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1 + yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}, \tag{7.21}$$

(ii) m çift, K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\left(yq^{b+\Phi_m}\right)^{d-1}\left(1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_d}\right)} \times \prod_{t=1}^{d-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{\lfloor d/2\rfloor} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}, \quad (7.22)$$

(iii) m tek, K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{d-1}\left(1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_d}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_m}\right)} \times \prod_{t=1}^{d-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{t=1}^{\lfloor d/2\rfloor} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}, \quad (7.23)$$

(iv) m ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} := \sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\left(yq^{b+\Phi_m}\right)^{d-1}\left(1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \times \prod_{t=1}^{\lfloor d/2\rfloor} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_m}}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \prod_{t=1}^{\lfloor (d-1)/2\rfloor} \left(1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_m}\right). \quad (7.24)$$

O halde $1 \le i \le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını kullanarak (7.20) toplamını

$$\sum_{K\le d\le n} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} & m \text{ ve } n \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(2)}} & m \text{ çift, } n \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(3)}} & m \text{ tek, } n \text{ çift ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(4)}} & m \text{ ve } n \text{ çift ise,} \end{cases} \quad (7.25)$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1 \le i \le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(i)}}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 7.1. *(i) m ve K tek ise,*

$$\mathtt{SUM}_K^{(1)} = \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-1}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}. \tag{7.26}$$

(ii) m çift, K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} = \frac{\left(yq^{b+\Phi_m}\right)^{K-1}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}. \tag{7.27}$$

(iii) m tek, K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} = \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-1}\left(1+yq^{b+\Phi_K+\Psi_n}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_m}\right)} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}. \tag{7.28}$$

(iv) m ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} = \frac{\left(yq^{b+\Phi_m}\right)^{K-1}\left(1+yq^{b+\Phi_K+\Psi_n}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_{2t-1}-\Phi_m}}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \prod_{t=1}^{(K-2)/2}\left(1-q^{\Phi_{2t}-\Phi_m}\right). \tag{7.29}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m ve K ’nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. m tek olduğunda K tek ise (7.26) ve $K-1$ çift olacağından (7.28) ’de verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Benzer şekilde m çift olduğunda ise (7.27) ve (7.29) ’daki sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.

Öncelikle m ’nin tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ ’nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} + S_{K-1}^{(3)} \tag{7.30}$$

eşitliğini ispatlamalıyız.

Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \geq n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. $K-1$ ’in çift olduğunu düşündüğümüzde geriye doğru tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{SUM}^{\mathbf{(3)}}_{K-1} &= \mathtt{SUM}^{\mathbf{(1)}}_{K} + S^{(3)}_{K-1} \\
&= \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-1}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \\
&+ \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-2}\left(1+yq^{b+\Phi_{K-1}+\Psi_{K-1}}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_{K-1}}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}\right)} \prod_{t=1}^{K-2} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \\
&= \frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-2}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_{K-1}}} \prod_{t=1}^{K-2} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)} \\
&\times \left(\frac{xq^{a+\Phi_m+\Psi_{K-1}}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_{K-1}}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} + \frac{1+yq^{b+\Phi_{K-1}+\Psi_{K-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}} \right). \qquad (7.31)
\end{aligned}
$$

Gerekli sadeleştirmelerin ardından

$$
\begin{aligned}
\mathtt{SUM}^{\mathbf{(3)}}_{K-1} = &\frac{\left(xq^{a+\Phi_m}\right)^{K-2}\left(1+yq^{b+\Phi_{K-1}+\Psi_n}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}\right)} \prod_{t=1}^{K-2} \frac{q^{\Psi_t}\left(1-q^{\Psi_n-\Psi_t}\right)}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi_{2t-1}-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_m}\right)}{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_n}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_n}\right)}, \qquad (7.32)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Buda ispatı tamamlar.
m 'nin çift olduğu durumda da ispat benzer şekilde tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{B}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K = 1$ ise (7.26)-(7.28) ve (7.27)-(7.29) eşitliklerinden sırasıyla

$$
\frac{1}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} = \sum_{1\le d\le \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}^{\mathbf{(1)}}_{1} & n \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}^{\mathbf{(3)}}_{1} & n \text{ çift ise} \end{cases} \qquad (7.33)
$$

ve

$$
\frac{1}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} = \sum_{1\le d\le \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}^{\mathbf{(2)}}_{1} & n \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}^{\mathbf{(4)}}_{1} & n \text{ çift ise,} \end{cases} \qquad (7.34)
$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{B}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı tamamlanır.

7.3.2 L^{-1} Matrisine Dair Sonucun İspatı

LL^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{B}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisi için verdiğimiz sonucun ispatını göstereceğiz. İspatı tamamlamak için

$$\sum_{n\leq d\leq m} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{7.35}$$

toplamını inceleyeceğiz. Dikkat edileceği üzere bu toplamın değeri

$$\sum_{n\leq d\leq m} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} 1 & m=n \text{ ise,} \\ 0 & m\neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{7.36}$$

şeklinde olacaktır.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L ve L^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, $\mathscr{B}$ 'nin LL^{-1} çarpımında sekiz durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m\geq n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak:

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{7.37}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} + L_{m,K+1}L^{-1}_{K+1,n} = \sum_{n\leq d\leq K+1} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{7.38}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

K tek ise,
(i) m ve n tek ise,

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}^{(\mathbf{1})}_K := & \sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{[n\neq d]} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \\ & \times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}\right)} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(d-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}. \end{aligned} \tag{7.39}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} := \sum_{n\le d\le K} (-1)^{[n\neq d]} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(d-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t-1}}\right)}. \tag{7.40}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} := -\sum_{n\le d\le K} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_n}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)}. \tag{7.41}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} := -\sum_{n\le d\le K} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_n}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_{2t}}\right)}. \tag{7.42}$$

K çift ise,
(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(5)} := -\sum_{n\le d\le K} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{d/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.43}$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(6)} := -\sum_{n\le d\le K} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{d/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.44}$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{7})} := \sum_{n\le d\le K} (-1)^{[n\neq d]} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.45}$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{8})} := \sum_{n\le d\le K} (-1)^{[n\neq d]} \frac{1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}}{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_d}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_d-\Phi_{2t}}}. \tag{7.46}$$

Burada $d < n$ ise $L_{d,n}^{-1} = 0$ olduğundan toplanan terim de bu koşulda 0 olmalıdır. O halde $1 \le i \le 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını kullanarak (7.37) toplamını

$$I_{m,n} = \sum_{d=n}^{m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} & m \text{ tek ise}, \quad n \text{ tek ise}, \quad d \text{ tek ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} & m \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} & m \text{ tek ise}, \quad n \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} & m \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{5})} & m \text{ tek ise}, \quad n \text{ tek ise}, \quad d \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{6})} & m \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{7})} & m \text{ tek ise}, \quad n \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{8})} & m \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{7.47}$$

şeklinde sekiz alt duruma bölebiliriz.
Şimdi $1 \le i \le 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 7.2. *K tek ise,*
(i) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{[n\neq K]} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}\right)}. \tag{7.48}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} = (-1)^{[n\neq K]}\, \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_m}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}\right)}. \tag{7.49}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} = -\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_n}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_{2t}}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)}. \tag{7.50}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} = -\frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_n}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_{2t}}\right)}. \tag{7.51}$$

K çift ise,
(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(5)} = -\frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{K/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.52}$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(6)} = -\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{K/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.53}$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(7)} = (-1)^{[n\neq K]} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_m}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}. \tag{7.54}$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(8)} = (-1)^{[n\neq K]} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_t}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t}}}. \tag{7.55}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m, n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. Tümevarım yönteminden dolayı m ve n tek olduğunda K 'nın hem çift hem de tek olduğu (7.48) ve (7.52) 'de verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Benzer şekilde (7.49)-(7.53), (7.50)-(7.54) ve (7.51)-(7.55) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde ispatımız tamamlanmış olacaktır.

(i) Şimdi m, n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 8)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{5})} + S_K^{(\mathbf{1})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} \tag{7.56}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \geq n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. $K-1$ 'in çift olduğunu düşündüğümüzde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{5})} + S_K^{(\mathbf{1})} = -\frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-3)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\tag{7.57}$$

$$+(-1)^{[n\neq K]}\frac{1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_K}}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}\right)}\prod_{\substack{t=1\\t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}. \quad (7.58)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$=\frac{1}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_K}}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times\left(-\frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_K}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_n}\right)\left(1-q^{\Phi_n-\Phi_m}\right)}\right.$$
$$\left.\times\frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{K-1}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{K-1}}}+(-1)^{[n\neq K]}\frac{1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}}{1-q^{\Phi_K-\Phi_n}}\right). \quad (7.59)$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (7.48); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$(-1)^{[n\neq K]}\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{\left(1-q^{\Phi_n-\Phi_m}\right)\left(1-q^{\Phi_K-\Phi_n}\right)}$$
$$=\frac{1}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_K}}\left(-\frac{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_m}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_K}\right)}{\left(1-q^{\Phi_n-\Phi_m}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_n}\right)}\right.$$
$$\left.\times\frac{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{K-1}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{K-1}}}+(-1)^{[n\neq K]}\frac{1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}}{1-q^{\Phi_K-\Phi_n}}\right) \quad (7.60)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir. O halde

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}=(-1)^{[n\neq K]}\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_m}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_m}}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_t}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}}$$
$$\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_m-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_m-\Phi_{2t-1}}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)\left(1-q^{\Phi_K-\Phi_{2t-1}}\right)}. \quad (7.61)$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır.
Diğer durumların ispatları da benzer şekilde yapılır. □

Sonuç olarak $\mathscr{B}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=1$ ise (7.48)-(7.52), (7.49)-(7.53), (7.50)-(7.54) ve (7.51)-(7.55) eşitlikleri birlikte

değerlendirildiğinde

$$\mathtt{SUM}_K = \sum_{n\le d\le m} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ ise,} \\ 0 & m \ne n \text{ ise} \end{cases} \tag{7.62}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{B}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisinin ispatı tamamlanır.

Benzer şekilde UU^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{B}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz U matrisinin tersi olan U^{-1} matrisine ait sonuçların ispatı için

$$I_{m,n} = \sum_{m\le d\le n} U_{m,d}U^{-1}_{d,n} \tag{7.63}$$

toplamı incelenir. Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; U ve U^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun iki farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, $\mathscr{B}$ 'nin UU^{-1} çarpımında dört durumu ele almalıyız.

7.3.3 $\mathscr{B}^{-1}$ Matrisine Dair Sonucun İspatı

$U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{B}$ matrisinin tersinin ispatını göstereceğiz.

İspatı tamamlamak için

$$\sum_{\max(m,n)\le d\le N} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} = (\mathscr{B}_N)^{-1}_{m,n} \tag{7.64}$$

toplamını inceleyeceğiz.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L^{-1} matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Benzer şekilde, U^{-1} 'in ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $(\mathscr{B}_N)^{-1}_{m,n}$ 'i kanıtlamak için dört durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$\sum_{m\le d\le K} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{7.65}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{m\le d\le K} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} + U^{-1}_{m,K+1}L^{-1}_{K+1,n} = \sum_{m\le d\le K+1} U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{7.66}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

(i) n ve K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(1)} := \sum_{\max(m,n)\le d\le K} (-1)^{m+1} \frac{q^{\Psi_m(m-d)}\left(1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(xyq^{a+b}\right)^{(d-1)/2}\left(-1+[n\neq d]\,q^{\Phi_d-\Phi_n}\right)} \\ \times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{q^{\Phi_{2t}+\Phi_{2t-1}}\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}} \\ \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{d-1}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \prod_{t=1}^{d-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}}.\end{aligned} \tag{7.67}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(2)} := \sum_{\max(m,n)\le d\le K} (-1)^{m+(d-1)/2} \frac{1+xq^{a+\Phi_d+\Psi_d}}{\left(xq^a\right)^{d-1} q^{\Psi_m(d-m)} q^{\Phi_d(d-1)/2}} \\ \times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{q^{-\Phi_{2t-1}}\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_d}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)} \\ \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_d-\Phi_n}} \prod_{t=1}^{d-1}\left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}\right) \\ \times \prod_{t=1}^{d-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}.\end{aligned} \tag{7.68}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(3)} := \sum_{\max(m,n)\le d\le K} (-1)^{m+d} \frac{\left(xq^a\right)^{-d/2} q^{\Psi_m(m-d)}\left(1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(yq^b\right)^{(d-2)/2}\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_d-\Phi_n}\right)} \\ \times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}}{q^{\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{q^{-\Phi_{2t}}\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \\ \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{d/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{d-1}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \\ \times \prod_{t=1}^{d-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}.\end{aligned} \tag{7.69}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} := \sum_{\max(m,n)\le d\le K} (-1)^{m+d+1} \frac{\left(xq^a\right)^{-d/2} q^{\Psi_m(m-d)}\left(1+yq^{b+\Phi_d+\Psi_d}\right)}{\left(yq^b\right)^{(d-2)/2}\left(-1+[n\neq d]\,q^{\Phi_n-\Phi_d}\right)}$$

$$\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{q^{-\Phi_{2t-1}} \left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}}{q^{\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{d-1} \left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{d-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}. \tag{7.70}$$

O halde $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını kullanarak (7.65) toplamını

$$\sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} & n \text{ ve } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} & n \text{ çift, } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} & n \text{ tek, } K \text{ çift ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} & n \text{ ve } K \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{7.71}$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 7.3. *(i) n ve K tek ise,*

$$\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{m+1} \frac{\left(xyq^{a+b}\right)^{(1-K)/2} q^{\Psi_m(m-K)} \left(1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_m}\right)}{\left(-1+[n\neq K]\, q^{\Phi_K-\Phi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{q^{\Phi_{2t}+\Phi_{2t-1}}\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K} \left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}. \tag{7.72}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(2)} = (-1)^{m+(K-1)/2} \frac{\left(xq^{a}\right)^{1-K}\left(1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_m}\right)}{q^{\Psi_m(K-m)} q^{\Phi_K(K-1)/2}\left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_m}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{q^{-\Phi_{2t-1}}\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{2t}-\Phi_K}\right)\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}\right)}$$

$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq n/2}}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_K-\Phi_n}} \prod_{t=1}^{K}\left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}. \tag{7.73}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(3)} = (-1)^{m+K} \frac{(xq^a)^{-K/2}\left(yq^b\right)^{(2-K)/2} q^{\Psi_m(m-K)}\left(1+yq^{b+\Phi_K+\Psi_m}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_K-\Phi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}}{q^{\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{q^{-\Phi_{2t}}\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq (n+1)/2}}^{K/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}. \tag{7.74}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(4)} = (-1)^{m+K+1} \frac{(xq^a)^{-K/2}\left(yq^b\right)^{(2-K)/2} q^{\Psi_m(m-K)}\left(1+yq^{b+\Phi_K+\Psi_m}\right)}{\left(-1+[n\neq K]\,q^{\Phi_n-\Phi_K}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_m}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{q^{-\Phi_{2t-1}}\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)}{1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}}{q^{\Phi_{2t}}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t}}} \prod_{t=1}^{K}\left(1+yq^{b+\Phi_n+\Psi_t}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}. \tag{7.75}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. n ve K tek olduğunda tümevarım yöntemi gereği (7.72) ve (7.74) 'te verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Bunun sebebi toplamın indisinde hem çift hem tek değerlerin bulunmasıdır. Benzer şekilde n çift olduğunda ise (7.73) ve (7.75) 'teki sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.

(i) Şimdi n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(3)} + S_K^{(1)} = \mathtt{SUM}_K^{(1)}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $m > n$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $n \geq m$ alacağız. $K = m$ ise ispat açıktır. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})}+S_K^{(\mathbf{1})} &= (-1)^m \frac{\left(xq^a\right)^{(1-K)/2} q^{\Psi_m(m-K+1)}\left(1+yq^{b+\Phi_{K-1}+\Psi_m}\right)}{\left(yq^b\right)^{(K-3)/2}\left(1-x^{-1}yq^{b-a+\Phi_{K-1}-\Phi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}}{q^{\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{(K-3)/2} \frac{q^{-\Phi_{2t}}\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}} \\
&\times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K-1}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \\
&\times \prod_{t=1}^{K-m-1} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}} \\
&+ (-1)^{m+1} \frac{q^{\Psi_m(m-K)}\left(1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}\right)}{\left(xyq^{a+b}\right)^{(K-1)/2}\left(-1+[n\neq K]\, q^{\Phi_K-\Phi_n}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{q^{\Phi_{2t}+\Phi_{2t-1}}\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}} \\
&\times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K-1}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}}
\end{aligned} \tag{7.76}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(-1)^{m+1} q^{\Psi_m(m-K)}}{\left(xyq^{a+b}\right)^{(K-1)/2}} \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{q^{\Phi_{2t-1}} q^{\Phi_{2t}}\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)} \right. \\
&\times \prod_{t=1}^{K-1}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \\
&\left. \times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}} \right) \left(\frac{xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\left(1-q^{\Psi_K-\Psi_m}\right)}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}} + \frac{1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}}{-1+[n\neq K]\, q^{\Phi_K-\Phi_n}} \right)
\end{aligned} \tag{7.77}$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (7.72); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_m}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_K}\right)}{\left(-1+[n\neq K]\, q^{\Phi_K-\Phi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)} \\
&= \left(\frac{xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\left(1-q^{\Psi_K-\Psi_m}\right)}{1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}} + \frac{1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_K}}{-1+[n\neq K]\, q^{\Phi_K-\Phi_n}} \right)
\end{aligned} \tag{7.78}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir.

O halde

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(1)} = (-1)^{m+1} & \frac{\left(xyq^{a+b}\right)^{(1-K)/2} q^{\Psi_m(m-K)} \left(1+xq^{a+\Phi_K+\Psi_m}\right)}{\left(-1+[n\neq K]\,q^{\Phi_K-\Phi_n}\right)\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_m}\right)} \\
& \times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{a+\Phi_{2t-1}+\Psi_m}\right)\left(1+yq^{b+\Phi_{2t}+\Psi_m}\right)}{q^{\Phi_{2t}+\Phi_{2t-1}}\left(1-xy^{-1}q^{a-b+\Phi_n-\Phi_{2t}}\right)} \\
& \times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi_n-\Phi_{2t-1}}} \prod_{t=1}^{K}\left(1+xq^{a+\Phi_n+\Psi_t}\right) \\
& \times \prod_{t=1}^{K-m} \frac{1}{1-q^{\Psi_{t+m}-\Psi_m}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-\Psi_t}}{1-q^{\Psi_m-\Psi_t}}.
\end{aligned} \tag{7.79}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{B}^{-1}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=N$ ise (7.72)-(7.74) ve (7.73)-(7.75) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$(\mathscr{B}_N)^{-1}_{m,n} = \sum_{\max(m,n)\leq d\leq K} U^{-1}_{m,d} L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(1)} & n \text{ ve } K \text{ tek ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(2)} & n \text{ çift, } K \text{ tek ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(3)} & n \text{ tek, } K \text{ çift ise}, \\ \mathtt{SUM}_K^{(4)} & n \text{ ve } K \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{7.80}$$

elde ederiz. Bu durumda $U^{-1}_{m,d} L^{-1}_{d,n}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{B}$ matrisinin tersinin ispatı da tamamlanır.

7.4 Uygulama

Şimdi bulduğumuz genel sonuçlarımızın bir uygulaması olarak q 'nun özel seçimiyle genel Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki sonuçları verelim:
Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w tam sayıları için $a+\lambda(p+m)^v+\mu(r+n)^w \neq 0$ olmak üzere $\mathscr{H}=[\mathscr{H}_{mn}]$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{U_{a+\lambda(p+m)^v+\mu(r+n)^w}} & m \text{ tek ise}, \\[2ex] \dfrac{1}{V_{b+\lambda(p+m)^v+\mu(r+n)^w}} & m \text{ çift ise} \end{cases} \tag{7.81}$$

ya da

$$\Phi_i := \lambda(i+p)^v \quad \text{ve} \quad \Psi_i := \mu(i+r)^w \tag{7.82}$$

olmak üzere

$$\mathscr{H}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{U_{a+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ tek ise}, \\ \\ \dfrac{1}{V_{b+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{7.83}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\mathscr{H}$ matrisinin tek numaralı satırları genel Fibonacci sayılarından, diğer satırları ise genel Lucas sayılarından oluşmaktadır.
Örneğin boyutu 4 alınan $\mathscr{H}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{U_{a+\Phi_1+\Psi_1}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_1+\Psi_2}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_1+\Psi_3}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_1+\Psi_4}} \\ \\ \dfrac{1}{V_{b+\Phi_2+\Psi_1}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_2+\Psi_2}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_2+\Psi_3}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_2+\Psi_4}} \\ \\ \dfrac{1}{U_{a+\Phi_3+\Psi_1}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_3+\Psi_2}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_3+\Psi_3}} & \dfrac{1}{U_{a+\Phi_3+\Psi_4}} \\ \\ \dfrac{1}{V_{b+\Phi_4+\Psi_1}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_4+\Psi_2}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_4+\Psi_3}} & \dfrac{1}{V_{b+\Phi_4+\Psi_4}} \end{bmatrix}. \tag{7.84}$$

$x = -q^k$, $y = q^k$ ve $q = \beta/\alpha$ olmak üzere U_n ve V_n için tanımlanan Binet formülleriyle $\mathscr{H}$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n} = \frac{1}{\alpha^{\Phi_m+\Psi_n}} \times \begin{cases} \dfrac{1-q}{\alpha^{a-1}} \times \dfrac{1}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ tek ise}, \\ \\ \alpha^{-b} \times \dfrac{1}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{7.85}$$

şeklinde de tanımlayabiliriz.
Şimdi $\mathscr{B}$ matrisini

$$\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xq^{a+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ tek ise}, \\ \\ \dfrac{1}{1+yq^{b+\Phi_m+\Psi_n}} & m \text{ çift ise}, \end{cases} \tag{7.86}$$

şeklinde tanımlayalım.
Burada x,y ve q 'nun $x = -1$, $y = 1$ ve $q = \beta/\alpha$ gibi özel değerlerini seçerek, $\mathscr{H}$ matrisinin $\mathscr{B}$ matrisinin özel bir hali olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $\mathscr{H}$ matrisinin özelliklerini (LU ayrışımı, L^{-1}, U^{-1}, $\mathscr{B}^{-1}$ gibi) $\mathscr{B}$ matrisi için verilen ana sonuçlarından türetebiliriz.

$\{U_n, V_n\}$ dizilerinin q-formlarına göre herhangi x ve y reel değerinin seçimine bağlı olarak, $\mathscr{B}$ matrisi Filbert ve Lilbert matrislerinin formlarına sahip olacaktır.
Daha açıkça;

i. Eğer $x = y = -1$ ise, $\mathscr{B}$ matrisinin elemanları Filbert matrisinin elemanları şeklinde olacaktır.

ii. Eğer $x = y = 1$ ise, $\mathscr{B}$ matrisinin elemanları Lilbert matrisinin elemanları şeklinde olacaktır.

iii. Eğer $x = -y = -1$ ise, $\mathscr{B}$ matrisinin ardışık satırları sırasıyla Filbert-Lilbert şeklinde olacaktır.

iv. Eğer $x = -y = 1$ ise, $\mathscr{B}$ matrisinin ardışık satırları sırasıyla Lilbert-Filbert şeklinde olacaktır.

8. $\mathscr{C}$ MATRİSİ İÇİN SONUÇLAR

8.1 Tez Problemi ve Çalışma Planı

Bu bölümde $\mathscr{D}$ matrisinden [12], literatürdeki lineer olmayan örneklerden ve [10, 11] çalışmalarımızdan esinlenerek 4. bölümde tanımladığımız $\mathscr{C}$ matris ailesinine ait sonuçları ispatlarıyla birlikte vereceğiz.
Öncelikle $\mathscr{C}$ matrisini tekrar hatırlatalım:
Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w, q, x ve y reel sayıları için $1+xq^{\mu+a(p+m)^v+b(r+n)^w} \neq 0$, $1+yq^{\mu+a(p+m)^v+b(r+n)^w} \neq 0$, $(x,y \neq 0)$ olmak üzere $\mathscr{C} = [\mathscr{C}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{C} = [\mathscr{C}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1+xq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1+yq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{8.1}$$

Burada gösterimi sadeleştirmek amacıyla daha önce tanımlananlardan bağımsız olarak Φ ve Ψ index fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayacağız:

$$\Phi(i) := a(p+i)^v \text{ ve } \Psi(i) := b(r+i)^w. \tag{8.2}$$

Böylece $\mathscr{C}$ 'nin ardışık satır elemanları x ve y seçimine göre lineer olmayan Filbert ve Lilbert matrislerinin eleman formlarına sahip olacak. Bu açıdan, $\mathscr{C}$ matrisi çok özel ve ilginç bir uyum sergiler. Bu uyumu matrisin cebirsel özelliklerini elde ederken de göreceğiz.
Ayrıca $x=y$ ise sonuçlarımız [12] 'te yani $\mathscr{D}$ matrisi için vereceğimiz sonuçları da kapsayacaktır.
Şimdi bu çalışmamızda yapacaklarımızı kısaca özetleyelim:

- İlk olarak LU ayrışımlarından ve bunların terslerinden gelen L, U, L^{-1} ve U^{-1} matrisleri için açık formüller sunacağız.
- Ardından matrisimizin boyutuna bağlı olarak matrisin tersinin ve determinantının genel formüllerini vereceğiz.
- Elde ettiğimiz formüllerimizi gerekli yöntemleri kullanarak ispatlayacağız.
- Son olarak matrisin özel durumlarını inceleyerek uygulama alanına değineceğiz. Burada tüm özdeşliklerimiz genel q için geçerlidir. Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili sonuçlar, q 'nun özel seçimi için doğal sonuçlar olarak ortaya çıkacaktır.

8.2 Temel Sonuçlar

Şimdi $\mathscr{C}$ matrisinin LU ayrışımını ve determinantını, L^{-1}, U^{-1} matrislerini ve $\mathscr{C}^{-1}$ matrisini aşağıdaki teoremlerde vereceğiz.

Öncelikle gösterimi sadeleştirmek amacıyla aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\Omega(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3,\mathbf{z}_4,\mathbf{z}_5,\mathbf{z}_6;\mathbf{k}) := 1+(-1)^{\delta+\mathbf{z}_1} x^{\left\lfloor \frac{\delta+\mathbf{z}_2}{2} \right\rfloor} y^{\left\lfloor \frac{\delta+\mathbf{z}_3}{2} \right\rfloor} \times q^{\lambda+\mu(\delta+\mathbf{z}_1-2)+\mathbf{k}(\Phi(\mathbf{z}_4)+\Psi(\mathbf{z}_5))+\sum_{t=1}^{\delta-\mathbf{z}_6}(\Phi(t)+\Psi(t))}. \tag{8.3}$$

Özel olarak $\mathbf{k}=0$ durumunda; $\Omega(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3,\mathbf{z}_4,\mathbf{z}_5,\mathbf{z}_6;\mathbf{0})$ yerine $\psi(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3,\mathbf{z}_6)$ fonksiyonunu kullanacağız.

Teorem 8.1. *Kabul edelim ki $1 \le n \le m$ ve $\delta = n$ olsun.*
m tek ise;
(i) n tek ise,

$$L_{m,n} = q^{(n-1)(\Phi(m)-\Phi(n))} \frac{\Omega(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \prod_{t=1}^{n} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \times \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(n)}\right)}, \tag{8.4}$$

(ii) n çift ise,

$$L_{m,n} = \left(\frac{xy^{-1}}{q^{\Phi(n)-\Phi(m)}}\right)^{n-1} \frac{\Omega(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})} \prod_{t=1}^{n} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \times \prod_{t=1}^{n/2} \frac{1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}} \prod_{t=1}^{(n-2)/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(n)}}. \tag{8.5}$$

m çift ise;
(iii) n tek ise,

$$L_{m,n} = \left(\frac{x^{-1}y}{q^{\Phi(n)-\Phi(m)}}\right)^{n-1} \frac{\Omega(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \prod_{t=1}^{n} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \times \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(n)}\right)}, \tag{8.6}$$

(iv) n çift ise,

$$L_{m,n} = q^{(n-1)(\Phi(m)-\Phi(n))} \frac{\Omega(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})} \prod_{t=1}^{n} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(n-2)/2} \frac{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(n)}} \prod_{t=1}^{n/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}}. \tag{8.7}$$

Teorem 8.2. *Kabul edelim ki $1 \leq n \leq m$ ve $\delta = n$ olsun.*
(i) n tek ise,

$$U_{n,m} = \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{-xq^{\mu}}{q^{-(\Phi(n)+\Psi(m))}}\right)^{n-1} \frac{\Omega(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})}$$
$$\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}} \prod_{t=1}^{(n+1)/2} \frac{1}{1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(n-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(n)}\right)}{1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}}, \tag{8.8}$$

(ii) n çift ise,

$$U_{n,m} = \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{-yq^{\mu}}{q^{-(\Phi(n)+\Psi(m))}}\right)^{n-1} \frac{\Omega(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{1};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1})}$$
$$\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}} \prod_{t=1}^{(n-2)/2} \left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(n)}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{n/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)}. \tag{8.9}$$

Aşağıdaki teoremlerde önceden tanımladığımız Iverson notasyonunu kullanarak L^{-1} ve U^{-1} matrislerinin formüllerini vereceğiz.

Teorem 8.3. *$m < n$ ise $L^{-1}_{m,n} = 0$ olmak üzere $1 \leq n \leq m$ ve $\delta = m$ olsun.*
m tek ise;
(i) n tek ise,

$$L^{-1}_{m,n} = (-1)^{[m\neq n]} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq(n+1)/2}}^{(m-1)/2} \frac{1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(m-1)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}}{1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}, \tag{8.10}$$

(ii) n çift ise,

$$L_{m,n}^{-1} = -\frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(m-1)/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(m-1)/2} \frac{1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}}{1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.11}$$

m çift ise;
(iii) n tek ise,

$$L_{m,n}^{-1} = -\frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{m/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(m-2)/2} \frac{1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}}{1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}, \tag{8.12}$$

(iv) n çift ise,

$$L_{m,n}^{-1} = (-1)^{[m\neq n]} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(m-2)/2} \frac{1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}}{1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.13}$$

Teorem 8.4. *$m<n$ ise $U_{n,m}^{-1}=0$ olmak üzere $1\leq n\leq m$ ve $\delta=m$ olsun.*
(i) m tek ise,

$$U_{n,m}^{-1} = \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)^{-1} \left(\frac{q^{-(\Phi(m)+\Psi(n))}}{xq^{\mu}}\right)^{m-1} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(m-1)/2} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}}{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n}}^{m} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}} \prod_{t=1}^{(m+1)/2} \left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right), \tag{8.14}$$

(ii) m çift ise,

$$U_{n,m}^{-1} = -\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)^{-1} \left(\frac{q^{-(\Phi(m)+\Psi(n))}}{yq^{\mu}}\right)^{m-1} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}$$

$$\times \prod_{t=1}^{m/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)}{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq n}}^{m} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}} \prod_{t=1}^{(m-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}. \tag{8.15}$$

Şimdi $\mathscr{C}$ matrisinin boyutuna bağlı olarak bu matrisin tersini aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 8.5. *$1 \leq m,n \leq N$ ve $\delta = N$ olmak üzere;*
(i) n tek ise,

$$(\mathscr{C}_N)^{-1}_{m,n} = \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)^{-1}\left(\frac{q^{-(\Phi(n)+\Psi(m))}}{-xq^{\mu}}\right)^{N-1}\frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{\lfloor N/2\rfloor}\frac{1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}}{1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(n)}}\prod_{t=1}^{N}\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}\right)$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq m}}^{N}\frac{1}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq (n+1)/2}}^{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}}{1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}}, \tag{8.16}$$

(ii) n çift ise,

$$(\mathscr{C}_N)^{-1}_{m,n} = \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)^{-1}\left(\frac{q^{-(\Phi(n)+\Psi(m))}}{-yq^{\mu}}\right)^{N-1}\frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}}{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(n)}}\prod_{t=1}^{N}\left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}\right)$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\t\neq m}}^{N}\frac{1}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}\prod_{\substack{t=1\\t\neq n/2}}^{\lfloor N/2\rfloor}\frac{1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}}{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(n)}}. \tag{8.17}$$

Son olarak, $\mathscr{C}$ matrisinin determinantını boyutuna bağlı olarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz Daha önceden belirttiğimiz üzere U matrisinin köşegen girdilerinin çarpımını kullanarak $\mathscr{C}$ matrisinin determinantını kolayca elde edebiliriz.

Teorem 8.6. *$N \geq 1$ ve $\delta = N$ olmak üzere,*

$$\det\mathscr{C}_N = y^{\binom{\lfloor N/2\rfloor}{2}}q^{\mu\binom{N}{2}}\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)^{N-1}\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)$$
$$\times \prod_{t=1}^{\lfloor (N-2)/2\rfloor}\prod_{k=t}^{\lfloor (N-2)/2\rfloor} q^{\Phi(2t)}\left(1-q^{\Phi(2k+2)-\Phi(2t)}\right)\prod_{t=1}^{N-1}\prod_{k=t}^{N-1} q^{\Psi(t)}\left(1-q^{\Psi(k+1)-\Psi(t)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{t=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(k)}} \prod_{t=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(k)}} \\
&\times \prod_{t=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} q^{\Phi(2k-1)} \left(1 - x^{-1} y q^{\Phi(2t)-\Phi(2k-1)}\right) \\
&\times \prod_{t=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \prod_{k=t}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} q^{\Phi(2t-1)} \left(1 - q^{\Phi(2k+1)-\Phi(2t-1)}\right) \\
&\times \begin{cases} (-1)^{\lfloor N/4 \rfloor} x^{3\binom{(N+1)/2}{2}} & N \textit{ tek ise,} \\ \\ (-1)^{\lfloor (N+2)/4 \rfloor} x^{\binom{3\lfloor (N+1)/2 \rfloor}{2}/3} & N \textit{ çift ise.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.18}
$$

8.3 İspat

Şimdi bulduğumuz bu sonuçların ispatını vereceğiz. İddialarımızı tümevarım ve geriye dönük tümevarım yöntemleriyle kanıtlayacağız. Bu yöntemlerde işlemler uzun ve zaman alıcı olduğundan sonuçlarımızın bir kısmının ispatını vereceğiz. Diğer sonuçların ispatları da benzer şekildedir.

8.3.1 *LU* Ayrışımının İspatı

$\mathscr{C}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı için

$$
\sum_{1 \le d \le \min(m,n)} L_{m,d} U_{d,n} = \mathscr{C}_{m,n} \tag{8.19}
$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Burada L matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle; benzer şekilde U 'nun ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $\mathscr{C}$ 'nin LU ayrışımını kanıtlamak için dört durumu değerlendirmeliyiz.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$
\sum_{K \le d \le n} L_{m,d} U_{d,n} \tag{8.20}
$$

toplamını dört alt durumla ele alalım. Bunun için aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

$\delta = d$ olmak üzere;

(i) m ve K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(1)} &:= \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \\ &\times \frac{\left(-xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{d-1}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(d)}\right)} \prod_{t=1}^{d-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)},\end{aligned} \tag{8.21}$$

(ii) m çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(2)} &:= \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \\ &\times \frac{\left(yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{d-1}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(d)}\right)} \prod_{t=1}^{d-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)},\end{aligned} \tag{8.22}$$

(iii) m tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(3)} &:= \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \\ &\times \frac{x^{d/2}\left(-q^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{d-1}\left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{q^{\Phi(m)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(d)-\Phi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(d)}\right)} \prod_{t=1}^{d-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)},\end{aligned} \tag{8.23}$$

(iv) m ve K çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(4)} &:= \left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\sum_{d=K}^{\min(m,n)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \frac{\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \\ &\times \frac{\left(-yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{d-1}\left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{q^{-\Phi(m)/2}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(d)}\right)} \prod_{t=1}^{d-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}\end{aligned}$$

$$\times\prod_{t=1}^{d/2}\frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)}\prod_{t=1}^{(d-1)/2}\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right). \tag{8.24}$$

O halde $1 \le i \le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını kullanarak (8.20) toplamını

$$\sum_{K\le d\le n} L_{m,d}U_{d,n} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} & m \text{ ve } n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} & m \text{ çift, } n \text{ tek ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} & m \text{ tek, } n \text{ çift ise,} \\ \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} & m \text{ ve } n \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{8.25}$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1 \le i \le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 8.1. *$\delta = K$ olmak üzere;*
(i) m ve K tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(\mathit{1})} &= \left(\frac{-xq^{\mu}}{q^{-(\Phi(m)+\Psi(n))}}\right)^{K-1}\frac{1-q^{\lambda-\mu}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} \\ &\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)} \\ &\times\frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\prod_{t=1}^{K-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}},\end{aligned} \tag{8.26}$$

(ii) m çift, K tek ise

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{(\mathit{2})} &= \left(\frac{yq^{\mu}}{q^{-(\Phi(m)+\Psi(n))}}\right)^{K-1}\frac{1-q^{\lambda-\mu}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} \\ &\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)} \\ &\times\frac{\Omega\left(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\prod_{t=1}^{K-1}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}},\end{aligned} \tag{8.27}$$

(iii) m tek, K çift ise

$$\mathtt{SUM}_K^{\textbf{\textit{(3)}}} = \frac{\left(-q^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{K-1}}{x^{(2-K)/2}} \frac{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(n)}\right)}{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}, \tag{8.28}$$

(iv) m ve K çift ise

$$\mathtt{SUM}_K^{\textbf{\textit{(4)}}} = \left(\frac{-yq^{\mu}}{q^{\Phi(m)+\Psi(n)}}\right)^{K-1} \frac{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(n)}\right)}{q^{-\Phi(m)/2}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)} \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.29}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m ve K ’nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. m tek olduğunda K tek ise (8.26) ve $K-1$ çift olacağından (8.28) ’de verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Benzer şekilde m çift olduğunda ise (8.27) ve (8.29) ’daki sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.

Öncelikle m ’nin tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ ’nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{\mathbf{(3)}} = \mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} + S_{K-1}^{(3)} \tag{8.30}$$

eşitliğini ispatlamalıyız.

Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \geq n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. $K-1$ ’in çift olduğunu düşündüğümüzde geriye doğru tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(1)}} + S_{K-1}^{(3)} = \left(\frac{-xq^{\mu}}{q^{-(\Phi(m)+\Psi(n))}}\right)^{K-1} \frac{1-q^{\lambda-\mu}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{K}-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{2};\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})}\frac{\Omega(\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{m},\mathbf{K}-\mathbf{1},\mathbf{2};\mathbf{1})}{\psi(-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{2})}\\
&\times\frac{x^{(K-1)/2}\left(-q^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{K-2}\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K-1)+\Psi(K-1)}\right)}{q^{\Phi(m)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(K-1)-\Phi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(K-1)}\right)}\\
&\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)}\prod_{t=1}^{K-2}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}.
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

Gerekli sadeleştirmelerin ardından

$$
\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1}^{(3)}=&\frac{x^{(K-3)/2}\left(-q^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)^{K-2}\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K-1)+\Psi(n)}\right)}{q^{\Phi(m)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(K-1)-\Phi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}\right)}\\
&\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(n)}\right)}\\
&\times\frac{\Omega(\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{2};\mathbf{1})}{\psi(-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{2})}\prod_{t=1}^{K-2}\frac{1-q^{\Psi(t)-\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

elde ederiz. Buda ispatı tamamlar.
m ’nin çift olduğu durumda da ispat benzer şekilde tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{C}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=1$ ise (8.26)-(8.28) ve (8.27)-(8.29) eşitliklerinden sırasıyla

$$
\frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}}=\sum_{1\le d\le\min(m,n)}L_{m,d}U_{d,n}=\begin{cases}\mathtt{SUM}_1^{(1)} & n \text{ tek ise,}\\ \mathtt{SUM}_1^{(3)} & n \text{ çift ise}\end{cases}
\tag{8.33}
$$

ve

$$
\frac{1+yq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}}=\sum_{1\le d\le\min(m,n)}L_{m,d}U_{d,n}=\begin{cases}\mathtt{SUM}_1^{(2)} & n \text{ tek ise,}\\ \mathtt{SUM}_1^{(4)} & n \text{ çift ise.}\end{cases}
\tag{8.34}
$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{C}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı tamamlanır.

8.3.2 L^{-1} Matrisine Dair Sonucun İspatı

LL^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{C}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisi için verdiğimiz sonuçların ispatını göstereceğiz. İspatı tamamlamak için

$$
\sum_{n\le d\le m}L_{m,d}L_{d,n}^{-1}
\tag{8.35}
$$

toplamını inceleyeceğiz. Dikkat edileceği üzere bu toplamın değeri

$$\sum_{n\le d\le m} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} = \begin{cases} 1 & m=n \text{ ise}, \\ 0 & m\neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{8.36}$$

şeklinde olacaktır.

Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L ve L^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, $\mathscr{C}$ 'nin LL^{-1} çarpımında sekiz durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m\ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak:

$$\sum_{n\le d\le K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{8.37}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{n\le d\le K} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} + L_{m,K+1}L^{-1}_{K+1,n} = \sum_{n\le d\le K+1} L_{m,d}L^{-1}_{d,n} \tag{8.38}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:
$\delta = d$ olmak üzere;
K tek ise,
(i) m ve n tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}^{(\mathbf{1})}_K := \sum_{n\le d\le K} & \frac{\left(-xy^{-1}q^{\Phi(m)}\right)^{(d-1)/2}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(-1+[d\neq n]\,q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)} \\ &\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \\ &\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}\right)}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\ &\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(d-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}\prod_{t=1}^{d}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \end{aligned} \tag{8.39}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}^{(\mathbf{2})}_K := \sum_{n\le d\le K} & \frac{\left(-x^{-1}yq^{\Phi(m)}\right)^{(d-1)/2}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(-1+[d\neq n]\,q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)} \\ &\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\end{aligned}$$

$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}\right)}{q^{\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.40}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} := -\sum_{n\leq d\leq K} \frac{\left(xy^{-1}\right)^{(d-1)/2} q^{(d-1)\Phi(m)}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-[d\neq n]\,xy^{-1}q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.41}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} := -\sum_{n\leq d\leq K} \frac{\left(x^{-1}y\right)^{(d-1)/2} q^{(d-1)\Phi(m)}\left(1+xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-[d\neq n]\,xy^{-1}q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t-1)+\Phi(2t)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.42}$$

K çift ise,
(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{5})} := \sum_{n\leq d\leq K} \frac{\left(xy^{-1}\right)^{(d-2)/2} q^{(d-1)\Phi(m)}\left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-[d\neq n]\,x^{-1}yq^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}}$$

$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{d/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \tag{8.43}$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(6)}} := \sum_{n\leq d\leq K} & \frac{\left(x^{-1}y\right)^{d/2} q^{(d-1)\Phi(m)} \left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-[d\neq n]\,x^{-1}yq^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)} \\ & \times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \\ & \times \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{q^{-\Phi(2t)}\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}} \\ & \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{d/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(7)}} := -\sum_{n\leq d\leq K} & \frac{\left(xy^{-1}\right)^{(d-2)/2} \left(q^{\Phi(m)}\right)^{d-1} \left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(-1+[d\neq n]\,q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)} \\ & \times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \\ & \times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{q^{-\Phi(2t-1)}\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}} \\ & \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \end{aligned} \tag{8.45}$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K^{\mathbf{(8)}} := -\sum_{n\leq d\leq K} & \frac{\left(x^{-1}y\right)^{d/2} q^{(d-1)\Phi(m)} \left(1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(-1+[d\neq n]\,q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(d)}\right)} \\ & \times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{d},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \\ & \times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \prod_{t=1}^{(d-2)/2} \frac{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}} \\ & \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Burada dikkat etmemiz gereken nokta $d < n$ ise $L_{d,n}^{-1} = 0$ olduğundan toplanan terim de bu koşulda 0 olmalıdır. O halde $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını kullanarak (8.37) toplamını

$$I_{m,n} = \sum_{d=n}^{m} L_{m,d} L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(1)} & m \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(2)} & m \text{ çift ise,} \end{cases} n \text{ tek ise,} \\ \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(3)} & m \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(4)} & m \text{ çift ise,} \end{cases} n \text{ çift ise,} \end{cases} d \text{ tek ise,} \\ \begin{cases} \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(5)} & m \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(6)} & m \text{ çift ise,} \end{cases} n \text{ tek ise,} \\ \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(7)} & m \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(8)} & m \text{ çift ise,} \end{cases} n \text{ çift ise,} \end{cases} d \text{ çift ise,} \tag{8.47}$$

şeklinde sekiz alt duruma bölebiliriz.

Şimdi $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Burada gösterimi sadeleştirmek adına

$$\begin{aligned} \Omega^*(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6; \mathbf{k}) := 1 + (-1)^{\delta + \mathbf{z}_1} x^{\left\lfloor \frac{\delta + \mathbf{z}_2}{2} \right\rfloor} y^{\left\lfloor \frac{\delta + \mathbf{z}_3}{2} \right\rfloor} \\ \times q^{\lambda + \mu(\delta + \mathbf{z}_1 - 2) + \mathbf{k}(\Phi(\mathbf{z}_4) - \Phi(\mathbf{z}_5)) + \sum_{t=1}^{\delta - \mathbf{z}_6} (\Phi(t) + \Psi(t))}. \end{aligned} \tag{8.48}$$

fonksiyonunu kullanalım.

Önerme 8.2. *$\delta = K$ olmak üzere;*
K tek ise,
(i) m ve n tek ise,

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}_K^{(1)} = & \frac{\left(-xy^{-1} q^{\Phi(m)}\right)^{(K-1)/2} \left(1 - q^{a(p+K)^v - a(p+m)^v}\right)}{\left(-1 + [K \neq n] q^{\Phi(K) - \Phi(n)}\right) \left(1 - q^{a(p+n)^v - a(p+m)^v}\right)} \\ & \times \frac{\Omega^*(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{0}; \mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})} \prod_{t=1}^{K} \frac{1 + xq^{\mu + \Phi(n) + \Psi(t)}}{1 + xq^{\mu + \Phi(m) + \Psi(t)}} \\ & \times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1 - x^{-1} y q^{\Phi(2t) - \Phi(m)}\right) \left(1 - q^{\Phi(m) - \Phi(2t-1)}\right)}{q^{\Phi(2t)} \left(1 - xy^{-1} q^{\Phi(n) - \Phi(2t)}\right)} \\ & \times \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1 - q^{\Phi(n) - \Phi(2t-1)}}. \end{aligned} \tag{8.49}$$

(ii) m çift, n tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(2)} &= \frac{\left(-x^{-1}yq^{\Phi(m)}\right)^{(K-1)/2}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t)}\right)}{q^{\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \qquad (8.50)
\end{aligned}$$

(iii) m tek, n çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(3)} &= -\frac{q^{(K-1)\Phi(m)}\left(xy^{-1}\right)^{(K-1)/2}\left(1-q^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(1-[K\neq n]\,xy^{-1}q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{3},-\mathbf{3},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \qquad (8.51)
\end{aligned}$$

(iv) m ve n çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(4)} &= -\frac{\left(x^{-1}y\right)^{(K-1)/2}q^{(K-1)\Phi(m)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(1-[K\neq n]\,xy^{-1}q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t-1)+\Phi(2t)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \qquad (8.52)
\end{aligned}$$

K çift ise,

(v) m ve n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(5)} = \frac{\left(xy^{-1}\right)^{(K-2)/2} q^{(K-1)\Phi(m)} \left(1 - x^{-1}yq^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(1 - [K \neq n]\, x^{-1}yq^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1 - q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \prod_{t=1}^{K} \frac{1 + xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1 + xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1 - x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}\left(1 - xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1 - q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq (n+1)/2}}^{K/2} \frac{1}{1 - q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \tag{8.53}$$

(vi) m çift, n tek ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(6)} = \frac{\left(x^{-1}y\right)^{K/2} q^{(K-1)\Phi(m)} \left(1 - q^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(1 - [K \neq n]\, x^{-1}yq^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1 - xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},-\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \prod_{t=1}^{K} \frac{1 + xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1 + yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{q^{-\Phi(2t)}\left(1 - q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)}{1 - xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}} \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1 - xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq (n+1)/2}}^{K/2} \frac{1}{1 - q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \tag{8.54}$$

(vii) m tek, n çift ise,

$$\mathtt{SUM}_K^{(7)} = -\frac{\left(xy^{-1}\right)^{(K-2)/2} q^{\Phi(m)K-1} \left(1 - x^{-1}yq^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(-1 + [K \neq n]\, q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1 - x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{2},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \prod_{t=1}^{K} \frac{1 + yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1 + xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{q^{-\Phi(2t-1)}\left(1 - q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}\right)}{1 - x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1 - x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1}{1 - q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \tag{8.55}$$

(viii) m ve n çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(8)} &= -\frac{\left(x^{-1}y\right)^{K/2} q^{(K-1)\Phi(m)}\left(1-q^{\Phi(K)-\Phi(m)}\right)}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)} \\
&\quad\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\quad\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{1-xy^{-1}q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\quad\times \prod_{t=1}^{(K-2)/2} \frac{1-q^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \qquad (8.56)
\end{aligned}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken m, n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. Tümevarım yönteminden dolayı m ve n tek olduğunda K 'nın hem çift hem de tek olduğu (8.49) ve (8.53) 'te verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Benzer şekilde (8.50)-(8.54), (8.51)-(8.55) ve (8.52)-(8.56) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde ispatımız tamamlanmış olacaktır.

Şimdi m, n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1\leq t\leq 8)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{5})} + S_K^{(\mathbf{1})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} \qquad (8.57)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $n>m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m\geq n$ alacağız. $K=n$ ise ispat açıktır. $K-1$ 'in çift olduğunu düşündüğümüzde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{(K-1)}^{(\mathbf{5})} + S_K^{(\mathbf{1})} &= \frac{\left(xy^{-1}\right)^{(K-3)/2} q^{(K-2)\Phi(m)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(K-1)-\Phi(m)}\right)}{\left(1-[K-1\neq n]x^{-1}yq^{\Phi(K-1)-\Phi(n)}\right)\left(1-q^{\Phi(n)-\Phi(m)}\right)} \\
&\quad\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\quad\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{1-q^{\Phi(2t-1)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t-1)}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \\
&\quad\times \prod_{t=1}^{(K-3)/2} \frac{1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\left(-xy^{-1}q^{\Phi(m)}\right)^{(K-1)/2}\left(1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}\right)}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(K)}\right)}\\
&\times\frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{K},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\\
&\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}\right)}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}\\
&\times\prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}
\end{aligned}
\tag{8.58}
$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{\left(-xy^{-1}q^{\Phi(m)}\right)^{(K-1)/2}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(K)}}\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}\right)}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}\right.\\
&\left.\times\prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}}\right)\\
&\times\left(\frac{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(K)}}{1-q^{\Phi(m)-\Phi(n)}}\frac{\Omega^{*}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}\right.\\
&\left.+\frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{K},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{8.59}
$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (8.49); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(K)}\right)\left(1-q^{a(K+p)^{\nu}-a(m+p)^{\nu}}\right)}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-q^{a(n+p)^{\nu}-a(m+p)^{\nu}}\right)}\frac{\Omega^{*}\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\\
&=\frac{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(K)}}{\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(n)}\right)}\frac{\Omega^{*}\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}\\
&+\frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}\frac{\Omega\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{K},\mathbf{1};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}
\end{aligned}
\tag{8.60}
$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} = &\frac{\left(-xy^{-1}q^{\Phi(m)}\right)^{(K-1)/2}\left(1-q^{a(K+p)^v-a(m+p)^v}\right)}{\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)\left(1-q^{a(n+p)^v-a(m+p)^v}\right)} \\
&\times \frac{\Omega^*\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{0};\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)}\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(t)}} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(2t)-\Phi(m)}\right)\left(1-q^{\Phi(m)-\Phi(2t-1)}\right)}{q^{\Phi(2t)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}.
\end{aligned} \tag{8.61}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=1$ ise (8.49)-(8.53), (8.50)-(8.54), (8.51)-(8.55) ve (8.52)-(8.56) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$\mathtt{SUM}_K = \sum_{n\leq d\leq m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} 1 & m=n \text{ ise,} \\ 0 & m\neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{8.62}$$

elde ederiz. Bu durumda L^{-1} matrisinin ispatı tamamlanır.
Benzer şekilde UU^{-1} çarpımından yararlanarak U^{-1} matrisine ait sonuçların ispatı için

$$I_{m,n} = \sum_{m\leq d\leq n} U_{m,d}U_{d,n}^{-1} \tag{8.63}$$

toplamı incelenir. Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; U ve U^{-1} matrislerinin ardışık iki satır ve sütununun iki farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Bu nedenle, $\mathscr{C}$ 'nin UU^{-1} çarpımında dört durumu ele almalıyız.

8.3.3 $\mathscr{C}^{-1}$ Matrisine Dair Sonucun İspatı

$U_{m,d}^{-1}L_{d,n}^{-1}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{C}$ matrisinin tersinin ispatını göstereceğiz.
İspatı tamamlamak için

$$\sum_{\max(m,n)\leq d\leq N} U_{m,d}^{-1}L_{d,n}^{-1} = (\mathscr{C}_N)_{m,n}^{-1} \tag{8.64}$$

toplamını inceleyeceğiz.
Burada eşitliği ispatlarken dikkat etmemiz gereken nokta; L^{-1} matrisinin ardışık iki satır ve sütununun dört farklı formülle tanımlanmış olmasıdır. Benzer şekilde, U^{-1} 'in ardışık satırlarını da iki farklı formülle tanımlamıştık. Bu nedenle, $(\mathscr{C}_N)_{m,n}^{-1}$ 'i kanıtlamak için dört durumu ele almalıyız.

Bundan önce, daha genel durumu ele alacağız. $m \geq n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$\sum_{m \leq d \leq K} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} \tag{8.65}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{m \leq d \leq K} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} + U_{m,K+1}^{-1} L_{K+1,n}^{-1} = \sum_{m \leq d \leq K+1} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} \tag{8.66}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamları tanımlayalım:

(i) n ve K tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} := &\sum_{\max(m,n) \leq d \leq K} \frac{(xy)^{(1-d)/2} q^{(\mu+\Psi(m))(1-d)} \left(1 + xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+[d \neq n]\, q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{d},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq m}}^{d} \frac{1}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq (n+1)/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{d-1} \left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}\right).
\end{aligned} \tag{8.67}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} := -&\sum_{\max(m,n) \leq d \leq K} \frac{(xy)^{(1-d)/2} q^{(\mu+\Psi(m))(1-d)} \left(1 + xq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(d)}\right)}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1-[d \neq n]\, xy^{-1} q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{d},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{(d-1)/2} \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq m}}^{d} \frac{1}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{t=1}^{d-1} \left(1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}\right) \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq n/2}}^{(d-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}.
\end{aligned} \tag{8.68}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} &:= -\sum_{\max(m,n)\le d\le K} \frac{xq^{\Phi(n)}\left(-q\right)^{(\mu+\Psi(m))(1-d)}}{(xy)^{d/2}\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)} \\
&\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{d},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq m}}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(t)}}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{t=1}^{d-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(t)}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{d/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}.
\end{aligned} \tag{8.69}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} &:= -\sum_{\max(m,n)\le d\le K} \frac{y\left(xy\right)^{-d/2}q^{\Phi(d)}\left(-q\right)^{(\mu+\Psi(m))(1-d)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+[d\neq n]\,q^{\Phi(d)-\Phi(n)}\right)} \\
&\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{d},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{d},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{1}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{d/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq m}}^{d} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(t)}}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{t=1}^{d-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(d)+\Psi(t)}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(d-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}.
\end{aligned} \tag{8.70}$$

O halde $1\le i\le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını kullanarak (8.65) toplamını

$$\sum_{\max(m,n)\le d\le K} U_{m,d}^{-1}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} & n \text{ ve } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{2})} & n \text{ çift, } K \text{ tek ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{3})} & n \text{ tek, } K \text{ çift ise,} \\ \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{4})} & n \text{ ve } K \text{ çift ise,} \end{cases}$$

şeklinde dört alt duruma bölebiliriz. Şimdi $1\le i\le 4$ olmak üzere $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{i})}$ toplamlarını hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 8.3. *(i) n ve K tek ise,*

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(1)} &= \frac{(xy)^{(1-K)/2}\, q^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+[K\neq n]\, q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)} \\
&\times \frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(m)}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}} \frac{\Omega\,(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi\,(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\, q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \qquad (8.71)
\end{aligned}$$

(ii) n çift, K tek ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(2)} &= -\frac{(xy)^{(1-K)/2}\, q^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1-[K\neq n]\, xy^{-1}q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)} \\
&\times \frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(m)}}{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}} \frac{\Omega\,(\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi\,(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\, q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq n/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \qquad (8.72)
\end{aligned}$$

(iii) n tek, K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(3)} &= -\frac{x\,(xy)^{-K/2}\, q^{\Phi(n)}\,(-q)^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}\right)} \frac{\Omega\,(\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi\,(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})} \\
&\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)} \\
&\times \prod_{t=1}^{K} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\, q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq (n+1)/2}}^{K/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \qquad (8.73)
\end{aligned}$$

(iv) n ve K çift ise,

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(4)} &= -\frac{y\,(xy)^{-K/2}\, q^{\Phi(K)}\,(-q)^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)^{[K\neq n]}} \\
&\times \frac{1}{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}} \frac{\Omega\,(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{2},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi\,(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})}
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{t=1}^{K/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-x^{-1}yq^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\,q^{\Psi(t)-\Psi(m)}} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq n/2}}^{(K-2)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}}. \tag{8.74}$$

Kanıt. İddiamızı kanıtlarken n ve K 'nın tek veya çift olması durumunu ayrı ayrı inceleyeceğiz. n ve K tek olduğunda tümevarım yöntemi gereği (8.71) ve (8.73) 'te verilen sonuçları birlikte düşüneceğiz. Bunun sebebi toplamın indisinde hem çift hem tek değerlerin bulunmasıdır. Benzer şekilde n çift olduğunda ise (8.72) ve (8.74) 'teki sonuçlar birlikte değerlendirilecektir.

Şimdi n ve K 'nın tek olduğu durumu ele alalım.

$\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}^{(\mathbf{t})}$ 'nın toplanan terimini $S_d^{(t)}$ $(1 \leq t \leq 4)$ olarak işaret edersek

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} + S_K^{(\mathbf{1})} = \mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} \tag{8.75}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $m > n$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $n \geq m$ alacağız. $K = m$ ise ispat açıktır. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\mathtt{SUM}_{K-1}^{(\mathbf{3})} + S_K^{(\mathbf{1})} = -\frac{x\,(xy)^{(1-K)/2}\,q^{\Phi(n)}\,(-q)^{(\mu+\Psi(m))(2-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\,q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}$$
$$+\frac{(xy)^{(1-K)/2}\,q^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}\left(1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}\right)}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}$$
$$\times \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{K},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\right)} \frac{\Omega\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1}\right)}{\psi\left(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-1}\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}\right) \prod_{\substack{t=1\\ t\neq m}}^{K} \frac{1}{1-q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}$$
$$\times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq (n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \tag{8.76}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{q^{(\mu+\Psi(m))(2-K)}}{(xy)^{(K-1)/2}\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)} \prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2} \frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}} \right.\\
&\times \prod_{t=1}^{(K-1)/2} \frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}\\
&\times \left.\prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\,q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}\right)\\
&\times \left((-1)^{K+1} \frac{xq^{\Phi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})} \right.\\
&+ \frac{q^{-(\mu+\Psi(m))}\left(1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}\right)}{\left(1-q^{\Psi(K)-\Psi(m)}\right)\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}\\
&\times \left. \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{K},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})} \right)
\end{aligned} \tag{8.77}
$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (8.71); yani $\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})}$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$
\begin{aligned}
&\frac{q^{-(\mu+\Psi(m))}}{-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}} \frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(m)}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}}\\
&\times \frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(K)}}{1-[K\neq m]\,q^{\Psi(K)-\Psi(m)}} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})}\\
&= \left(\frac{(-1)^{K+1}xq^{\Phi(n)}}{\left(1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}\right)} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})} \right.\\
&+ \frac{q^{-(\mu+\Psi(m))}\left(1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(K)}\right)}{\left(1-q^{\Psi(K)-\Psi(m)}\right)\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}\\
&\times \left. \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{K},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{K},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})} \right)
\end{aligned} \tag{8.78}
$$

eşitliğini göstermeliyiz.
Bu son eşitlik değerler dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir. O halde

$$
\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K^{(\mathbf{1})} &= \frac{(xy)^{(1-K)/2}\,q^{(\mu+\Psi(m))(1-K)}}{\left(1-q^{\lambda-\mu}\right)\left(-1+[K\neq n]\,q^{\Phi(K)-\Phi(n)}\right)}\\
&\times \frac{1+xq^{\mu+\Phi(K)+\Psi(m)}}{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(m)}} \frac{\Omega(\mathbf{0},-\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{0};-\mathbf{1})}{\psi(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})}
\end{aligned}
$$

$$\times\prod_{t=1}^{(K-1)/2}\frac{\left(1+xq^{\mu+\Phi(2t-1)+\Psi(m)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(2t)+\Psi(m)}\right)}{q^{\Phi(2t)+\Phi(2t-1)}\left(1-xy^{-1}q^{\Phi(n)-\Phi(2t)}\right)}$$
$$\times\prod_{t=1}^{K}\frac{1+xq^{\mu+\Phi(n)+\Psi(t)}}{1-[t\neq m]\,q^{\Psi(t)-\Psi(m)}}\prod_{\substack{t=1\\ t\neq(n+1)/2}}^{(K-1)/2}\frac{1}{1-q^{\Phi(n)-\Phi(2t-1)}}. \tag{8.79}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{C}^{-1}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=N$ ise (8.71)-(8.73) ve (8.72)-(8.74) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$(\mathscr{C}_N)^{-1}_{m,n}=\sum_{\max(m,n)\leq d\leq K}U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}=\begin{cases}\mathtt{SUM}^{(1)}_K & n \text{ ve } K \text{ tek ise,}\\ \mathtt{SUM}^{(2)}_K & n \text{ çift, } K \text{ tek ise,}\\ \mathtt{SUM}^{(3)}_K & n \text{ tek, } K \text{ çift ise,}\\ \mathtt{SUM}^{(4)}_K & n \text{ ve } K \text{ çift ise,}\end{cases} \tag{8.80}$$

elde ederiz. Bu durumda $U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{C}$ matrisinin tersinin ispatı da tamamlanır.

8.4 Uygulama

Şimdi bulduğumuz genel sonuçlarımızın bir uygulaması olarak q 'nun özel seçimiyle genel Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki sonuçları verelim:
Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w reel sayıları için $a+\lambda\,(p+m)^v+\mu\,(r+n)^w\neq 0$ olmak üzere $\mathscr{H}=[\mathscr{H}_{mn}]$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{U_{\lambda+a(m+p)^v+b(n+r)^w}}{U_{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w}} & m \text{ tek ise,}\\[3ex] \dfrac{V_{\lambda+a(m+p)^v+b(n+r)^w}}{V_{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w}} & m \text{ çift ise}\end{cases} \tag{8.81}$$

ya da

$$\Phi(i):=a\,(i+p)^v \text{ ve } \Psi(i):=b\,(i+r)^w \tag{8.82}$$

olmak üzere

$$\mathscr{H}_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{U_{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{U_{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ tek ise,}\\[3ex] \dfrac{V_{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{V_{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ çift ise,}\end{cases} \tag{8.83}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\mathscr{H}$ matrisinin tek numaralı satırları genel Fibonacci sayılarının, diğer satırları ise genel Lucas sayılarının oranından oluşmaktadır.

Örneğin boyutu 4 alınan $\mathscr{H}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathscr{H}=\begin{bmatrix} \frac{U_{\lambda+\Phi(1)+\Psi(1)}}{U_{\mu+\Phi(1)+\Psi(1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1)+\Psi(2)}}{U_{\mu+\Phi(1)+\Psi(2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1)+\Psi(3)}}{U_{\mu+\Phi(1)+\Psi(3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1)+\Psi(4)}}{U_{\mu+\Phi(1)+\Psi(4)}} \\ \frac{V_{\lambda+\Phi(2)+\Psi(1)}}{V_{\mu+\Phi(2)+\Psi(1)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(2)+\Psi(2)}}{V_{\mu+\Phi(2)+\Psi(2)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(2)+\Psi(3)}}{V_{\mu+\Phi(2)+\Psi(3)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(2)+\Psi(4)}}{V_{\mu+\Phi(2)+\Psi(4)}} \\ \frac{U_{\lambda+\Phi(3)+\Psi(1)}}{U_{\mu+\Phi(3)+\Psi(1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3)+\Psi(2)}}{U_{\mu+\Phi(3)+\Psi(2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3)+\Psi(3)}}{U_{\mu+\Phi(3)+\Psi(3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3)+\Psi(4)}}{U_{\mu+\Phi(3)+\Psi(4)}} \\ \frac{V_{\lambda+\Phi(4)+\Psi(1)}}{V_{\mu+\Phi(4)+\Psi(1)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(4)+\Psi(2)}}{V_{\mu+\Phi(4)+\Psi(2)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(4)+\Psi(3)}}{V_{\mu+\Phi(4)+\Psi(3)}} & \frac{V_{\lambda+\Phi(4)+\Psi(4)}}{V_{\mu+\Phi(4)+\Psi(4)}} \end{bmatrix}. \tag{8.84}$$

U_n ve V_n için tanımlanan Binet formülleriyle $\mathscr{H}$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n}=\alpha^{\lambda-\mu}\begin{cases} \dfrac{1+xq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+xq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1+yq^{\lambda+\Phi(m)+\Psi(n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m)+\Psi(n)}} & m \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{8.85}$$

şeklinde de tanımlayabiliriz.
Şimdi $\mathscr{C}$ matrisini

$$\mathscr{C}=\mathscr{C}_{m,n}=\begin{cases} \dfrac{1+xq^{\lambda+a(m+p)^v+b(n+r)^w}}{1+xq^{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{1+yq^{\lambda+a(m+p)^v+b(n+r)^w}}{1+yq^{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w}} & m \text{ çift ise,} \end{cases} \tag{8.86}$$

şeklinde tanımlayalım.
Burada x,y ve q 'nun $x=-1$, $y=1$ ve $q=\beta/\alpha$ gibi özel değerlerini seçerek, $\mathscr{H}$ matrisinin $\mathscr{C}$ matrisinin özel bir hali olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $\mathscr{H}$ matrisinin özelliklerini (LU ayrışımı, L^{-1}, U^{-1}, $\mathscr{C}^{-1}$ gibi) $\mathscr{C}$ matrisi için verilen ana sonuçlarından türetebiliriz.
$\{U_n,V_n\}$ dizilerinin q-formlarına göre herhangi x ve y reel değerinin seçimine bağlı olarak, $\mathscr{C}$ matrisi Filbert ve Lilbert matrislerinin formlarına sahip olacaktır.
Daha açıkça;

i. Eğer $x=y=-1$ ise, $\mathscr{C}$ matrisinin elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının oranından oluşur.

ii. Eğer $x=y=1$ ise, $\mathscr{C}$ matrisinin elemanları genelleştirilmiş Lucas sayılarının oranından oluşur.

iii. Eğer $x=-y=-1$ ise, $\mathscr{C}$ matrisinin ardışık satırları sırasıyla genelleştirilmiş

Fibonacci-Lucas sayılarının oranı şeklindedir.

iv. Eğer $x = -y = 1$ ise, $\mathscr{C}$ matrisinin ardışık satırları sırasıyla genelleştirilmiş Lucas-Fibonacci sayılarının oranı şeklindedir.

8.5 $\mathscr{C}$ Matrisinin Lineer Bir Alt Durumu: $\mathscr{C}^*$ Matrisi

Bu bölümde $\mathscr{C}$ matrisinin özel bir durumunu inceleyeceğiz:

Herhangi a, b, λ, μ, q, x ve y reel sayıları için $1+xq^{\lambda m+\mu n+b} \neq 0$, $1+yq^{\lambda m+\mu n+b} \neq 0$, $(x, y \neq 0)$ olmak üzere $\mathscr{C}^* = [\mathscr{C}^*{}_{m,n}]_{m,n>0}$;

$$\mathscr{C}^* = [\mathscr{C}^*{}_{m,n}] = \begin{cases} \dfrac{1+xq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+xq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{1+yq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+yq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{8.87}$$

Burada $\mathscr{C}^*$ matrisinin ardışık satır elemanları x ve y seçimine göre lineer olan Filbert ve Lilbert matrislerinin eleman formlarına sahip olacak.

8.5.1 $\mathscr{C}^*$ Matrisi İçin Temel Sonuçlar

Şimdi $\mathscr{C}^*$ matrisinin LU ayrışımını ve determinantını, L^{-1}, U^{-1} matrislerini ve $\mathscr{C}^{*-1}$ matrisini aşağıdaki teoremlerde vereceğiz.

Öncelikle gösterimi sadeleştirmek amacıyla yukarıdakinden bağımsız aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \Omega(g,h,i,j,k,u,v) :=& (-1)^{\delta+g} + x^{\left\lfloor \frac{\delta+h}{2} \right\rfloor} y^{\left\lfloor \frac{\delta+i}{2} \right\rfloor} \\ & \times q^{a+b(\delta+g-2)+\lambda\left(j+\binom{\delta+k}{2}\right)+\mu\left(u+\binom{\delta+v}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{8.88}$$

Özel olarak $j = u = 0$ ve $k = v$ durumunda $\Omega(g,h,i,j,k,u,v)$ yerine $\psi(g,h,i,k)$ fonksiyonunu kullanacağız.

Teorem 8.7. *Kabul edelim ki $1 \leq d \leq n$ ve $\delta = d$ olsun.*

(i) n tek ise,

$$L_{n,d} = \frac{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}}{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (n-d+1)/2\rfloor}\left(-xq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}\begin{bmatrix}(n-1)/2\\ \lfloor (d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\Omega(1,2,-1,n,0,0,1)}{\psi(1,1,0,1)}\begin{cases}\dfrac{\left(-xq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{d/2}} & d \text{ çift ise.}\end{cases} \tag{8.89}$$

(ii) n çift ise,

$$L_{n,d} = \frac{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{n/2}}{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (n-d+1)/2\rfloor}\left(-yq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}\begin{bmatrix}\lfloor (n-1)/2\rfloor\\ \lfloor (d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\Omega(1,0,1,n,0,0,1)}{\psi(1,1,0,1)}\begin{cases}\dfrac{\left(-xq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\left(-yq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_d}{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{d/2}} & d \text{ çift ise}\end{cases} \tag{8.90}$$

ve

$$U_{d,n} = (-1)^{d+1}x^{\lfloor d/2\rfloor}q^{(\lambda+\mu)\binom{d}{2}+(d-2)b+a}$$
$$\times\frac{\left(1-q^{b-a}\right)\left(q^{2\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (d-1)/2\rfloor}\left(q^{\mu};q^{\mu}\right)_{d-1}}{\left(-xq^{\lambda+\mu n+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (d+1)/2\rfloor}\left(-yq^{2\lambda+\mu n+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}}\begin{bmatrix}n-1\\ d-1\end{bmatrix}_{\mu}$$
$$\times\frac{\Omega(1,1,0,0,1,n,0)}{\psi(0,0,-1,0)}\begin{cases}\dfrac{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}y^{\lfloor d/2\rfloor}}{\left(-xq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{d-1}} & d \text{ tek ise,}\\[2ex] \dfrac{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{d/2}y^{\lfloor (d-1)/2\rfloor}}{\left(-yq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{d-1}} & d \text{ çift ise.}\end{cases} \tag{8.91}$$

Aşağıdaki teoremlerde L^{-1} ve U^{-1} matrislerinin formüllerini vereceğiz.

Teorem 8.8. *Kabul edelim ki $1 \le d \le n$ ve $\delta = n$ olsun.*
n tek ise;

(i) d tek ise,

$$L_{n,d}^{-1}=(-1)^{n+d}\frac{q^{\lambda\binom{n-d}{2}}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}}{\left(-xq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\psi(0,0,-1,0)}\begin{bmatrix}(n-1)/2\\ \lfloor(d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\left(-xq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\Omega(0,-1,0,-d,1,0,0)}{(xy^{-1})^{(n-d)/2}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(n-d)/2}},\tag{8.92}$$

(ii) d çift ise,

$$L_{n,d}^{-1}=(-1)^{n+d}\frac{q^{\lambda\binom{n-d}{2}}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}}{\left(-xq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\psi(0,0,-1,0)}\begin{bmatrix}(n-1)/2\\ \lfloor(d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\left(-yq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\Omega(0,1,-2,-d,1,0,0)}{(x^{-1}y)^{\lfloor(n-d)/2\rfloor}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{d/2}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(n-d+1)/2}}.\tag{8.93}$$

n çift ise;
(iii) d tek ise,

$$L_{n,d}^{-1}=(-1)^{n+d}\frac{q^{\lambda\binom{n-d}{2}}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{n/2}}{\left(-yq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\psi(0,0,-1,0)}\begin{bmatrix}\lfloor(n-1)/2\rfloor\\ \lfloor(d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\left(-xq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\Omega(0,-1,0,-d,1,0,0)}{(xy^{-1})^{\lfloor(n-d)/2\rfloor}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor d/2\rfloor}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(n-d+1)/2}},\tag{8.94}$$

(iv) d çift ise,

$$L_{n,d}^{-1}=(-1)^{n+d}\frac{q^{\lambda\binom{n-d}{2}}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{n/2}}{\left(-yq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\psi(0,0,-1,0)}\begin{bmatrix}\lfloor(n-1)/2\rfloor\\ \lfloor(d-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}$$
$$\times\frac{\left(-yq^{\lambda d+\mu+b};q^{\mu}\right)_{n-1}\Omega(0,1,-2,-d,1,0,0)}{(x^{-1}y)^{(n-d)/2}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{d/2}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(n-d)/2}}.\tag{8.95}$$

Teorem 8.9. *Kabul edelim ki $1\le d\le n$ ve $\delta=n$ olsun.*

$$U_{d,n}^{-1}=(-1)^{d+1}\frac{\left(-xq^{\lambda+\mu d+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}\left(-yq^{2\lambda+\mu d+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor(n-1)/2\rfloor}}{q^{a+b(n-2)+\lambda\binom{n}{2}+\mu\left(dn-\binom{d+1}{2}\right)}\left(1-q^{b-a}\right)}$$
$$\times\frac{\Omega(0,0,-1,0,0,n-d,0)}{(q^{\mu};q^{\mu})_{n-1}\left(q^{2\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor(n-1)/2\rfloor}\psi(1,1,0,1)}\begin{bmatrix}n-1\\ d-1\end{bmatrix}_{\mu}$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\left(-xq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_n}{(xy)^{\lfloor n/2\rfloor}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor n/2\rfloor}} & n \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{\left(-yq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_n}{x^{\lfloor n/2\rfloor}y^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{n/2}} & n \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{8.96}$$

Şimdi $\mathscr{C}^*$ matrisinin boyutuna bağlı olarak bu matrisin tersini vereceğiz.

Teorem 8.10. *$1 \leq m,n \leq N$ ve $\delta = N$ olmak üzere;*
(i) n tek ise,

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{C}^*{}_N\right)^{-1}_{mn} &= \frac{q^{(\mu m(m-2N+1)+\lambda n(n-2N+1))/2-b(N-2)-a}}{x^{N-1-\lfloor n/2\rfloor}y^{\lfloor n/2\rfloor}\left(1-q^{b-a}\right)\left(1+xq^{\lambda n+\mu m+b}\right)} \\ &\times \frac{\left(-xq^{\lambda+\mu m+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\left(-xq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_N}{\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(N-n+1)/2}\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(n-1)/2}} \\ &\times \frac{\left(-yq^{2\lambda+\mu m+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor N/2\rfloor}\Omega(0,-1,0,-n,1,-m,1)}{\left(q^{\mu};q^{\mu}\right)_{N-1}\left(q^{2\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (N-1)/2\rfloor}\psi(1,1,0,1)} \\ &\times \begin{bmatrix}\lfloor (N-1)/2\rfloor \\ (n-1)/2\end{bmatrix}_{2\lambda}\begin{bmatrix}N-1 \\ m-1\end{bmatrix}_{\mu} \end{aligned} \tag{8.97}$$

(ii) n çift ise,

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{C}^*{}_N\right)^{-1}_{mn} &= \frac{q^{(\mu m(m-2N+1)+\lambda n(n-2N+1))/2-b(N-2)-a}}{x^{\lfloor n/2\rfloor}y^{N-1-\lfloor n/2\rfloor}\left(1-q^{b-a}\right)\left(1+yq^{\lambda n+\mu m+b}\right)} \\ &\times \frac{\left(-xq^{\lambda+\mu m+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\left(-yq^{\lambda n+\mu+b};q^{\mu}\right)_N}{\left(xy^{-1}q^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{(N-n+1)/2}\left(x^{-1}yq^{\lambda};q^{2\lambda}\right)_{n/2}} \\ &\times \frac{\left(-yq^{2\lambda+\mu m+b};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor N/2\rfloor}\Omega(0,1,-2,-n,1,-m,1)}{\left(q^{\mu};q^{\mu}\right)_{N-1}\left(q^{2\lambda};q^{2\lambda}\right)_{\lfloor (N-1)/2\rfloor}\psi(1,1,0,1)} \\ &\times \begin{bmatrix}\lfloor (N-1)/2\rfloor \\ \lfloor (n-1)/2\rfloor\end{bmatrix}_{2\lambda}\begin{bmatrix}N-1 \\ m-1\end{bmatrix}_{\mu}. \end{aligned} \tag{8.98}$$

Son olarak, $\mathscr{C}^*$ matrisinin determinantını boyutuna bağlı olarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz Daha önceden belirttiğimiz üzere U matrisinin köşegen girdilerinin çarpımını kullanarak $\mathscr{C}^*$ matrisinin determinantını kolayca elde edebiliriz.

Teorem 8.11. *$N \geq 1$ ve $\delta = N$ olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
\det \mathscr{C}^*_N = & \frac{(-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} x^{\lfloor (N/2)^2 \rfloor} y^{\lfloor ((N-1)/2)^2 \rfloor}}{q^{-(N-1)N(N+1)(\lambda+\mu)/6 + a(N-1) + \binom{N-1}{2} b}} \\
& \times \prod_{r=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\left(q^{2\lambda}; q^{2\lambda}\right)_r^2 \left(xy^{-1} q^{\lambda}; q^{2\lambda}\right)_r \left(x^{-1} y q^{\lambda}; q^{2\lambda}\right)_r}{\left(-x q^{\lambda(2r-1)+\mu+b}; q^{\mu}\right)_N \left(-y q^{2\lambda r+\mu+b}; q^{\mu}\right)_N} \\
& \times \frac{\left(1 - q^{b-a}\right)^{N-1} \psi(1,1,0,1)}{\left(xy^{-1} q^{\lambda}; q^{2\lambda}\right)_{\lfloor N/2 \rfloor}^2} \prod_{r=1}^{N-1} \left(q^{\mu}; q^{\mu}\right)_r \\
& \times \begin{cases} \dfrac{\left(q^{2\lambda}; q^{2\lambda}\right)_{(N-1)/2}}{\left(-x q^{\lambda N+\mu+b}; q^{\mu}\right)_N} & N \text{ tek ise,} \\ \\ \left(xy^{-1} q^{\lambda}; q^{2\lambda}\right)_{N/2}^{-1} & N \text{ çift ise.} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{8.99}
$$

8.5.2 $\mathscr{C}^*$ Matrisinin Uygulaması

q 'nun özel seçimiyle genel Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Herhangi a, b, λ ve μ, reel sayıları için $\mathscr{H} = [\mathscr{H}_{mn}]$ matrisini

$$
\mathscr{H}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{U_{\lambda m+\mu n+a}}{U_{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \dfrac{V_{\lambda m+\mu n+a}}{V_{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ çift ise} \end{cases}
\tag{8.100}
$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\mathscr{H}$ matrisinin tek numaralı satırlarının genel Fibonacci sayılarının, diğer satırlarının ise genel Lucas sayılarının oranından oluşmaktadır.

Örneğin boyutu 4 alınan $\mathscr{H}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$
\mathscr{H} = \begin{bmatrix}
\frac{U_{\lambda+\mu+a}}{U_{\lambda+\mu+b}} & \frac{U_{\lambda+2\mu+a}}{U_{\lambda+2\mu+b}} & \frac{U_{\lambda+3\mu+a}}{U_{\lambda+3\mu+b}} & \frac{U_{\lambda+4\mu+a}}{U_{\lambda+4\mu+b}} \\[2ex]
\frac{V_{2\lambda+\mu+a}}{V_{2\lambda+\mu+b}} & \frac{V_{2\lambda+2\mu+a}}{V_{2\lambda+2\mu+b}} & \frac{V_{2\lambda+3\mu+a}}{V_{2\lambda+3\mu+b}} & \frac{V_{2\lambda+4\mu+a}}{V_{2\lambda+4\mu+b}} \\[2ex]
\frac{U_{3\lambda+\mu+a}}{U_{3\lambda+\mu+b}} & \frac{U_{3\lambda+2\mu+a}}{U_{3\lambda+2\mu+b}} & \frac{U_{3\lambda+3\mu+a}}{U_{3\lambda+3\mu+b}} & \frac{U_{3\lambda+4\mu+a}}{U_{3\lambda+4\mu+b}} \\[2ex]
\frac{V_{4\lambda+\mu+a}}{V_{4\lambda+\mu+b}} & \frac{V_{4\lambda+2\mu+a}}{V_{4\lambda+2\mu+b}} & \frac{V_{4\lambda+3\mu+a}}{V_{4\lambda+3\mu+b}} & \frac{V_{4\lambda+4\mu+a}}{V_{4\lambda+4\mu+b}}
\end{bmatrix}.
\tag{8.101}
$$

$x=-1$, $y=1$, $q=\beta/\alpha$ olmak üzere U_n ve V_n için tanımlanan Binet formülleriyle $\mathscr{H}$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n}=\alpha^{a-b}\begin{cases}\dfrac{1+xq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+xq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ tek ise},\\[2ex] \dfrac{1+yq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+yq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ çift ise},\end{cases} \tag{8.102}$$

şeklinde de tanımlayabiliriz.
Şimdi $\mathscr{C}^*$ matrisini

$$\mathscr{C}^*=[\mathscr{C}^*{}_{m,n}]=\begin{cases}\dfrac{1+xq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+xq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ tek ise},\\[2ex] \dfrac{1+yq^{\lambda m+\mu n+a}}{1+yq^{\lambda m+\mu n+b}} & m \text{ çift ise}.\end{cases} \tag{8.103}$$

şeklinde tanımlayalım.
Burada x,y ve q 'nun $x=-1$, $y=1$ ve $q=\beta/\alpha$ gibi özel değerlerini seçerek, $\mathscr{H}$ matrisinin $\mathscr{C}^*$ matrisinin özel bir hali olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $\mathscr{H}$ matrisinin özelliklerini (LU ayrışımı, L^{-1}, U^{-1}, $\mathscr{C}^{*-1}$ gibi) $\mathscr{C}^*$ matrisi için verilen ana sonuçlarından türetebiliriz.

9. $\mathscr{D}$ MATRİSİ İÇİN SONUÇLAR

9.1 Tez Problemi ve Çalışma Planı

Bu bölümde [1, 9, 10] çalışmalarından esinlenerek tezimiz kapsamında ele alacağımız 4. bölümde tanımladığımız $\mathscr{D}$ matris ailesinine ait sonuçları ispatlarıyla birlikte vereceğiz. Bu matrisleri; elemanları lineer olmayan indislere sahip Filbert ve Lilbert matrislerinin q-versiyonlarının oranlarıyla kuracağız. Çalışmamız hem asimetrik hem lineer olmayan durumda tanımlanan ilk örnek olacaktır.
Öncelikle $\mathscr{D}$ matrisini tekrar hatırlatalım:
Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w, q ve x reel sayıları için $1+yq^{\mu+a(m+p)^v+b(n+r)^w} \neq 0$, $(y \neq 0)$ olmak üzere $\mathscr{D} = [\mathscr{D}_{m,n}]_{m,n>0}$ matris ailesini

$$\mathscr{D}_{m,n} = \frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m,n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} \tag{9.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada gösterimi sadeleştirmek amacıyla Φ index fonksiyonu

$$\Phi(m,n) =: a\,(p+m)^v + b\,(r+n)^w. \tag{9.2}$$

Şimdi bu çalışmamızı kısaca özetleyelim:

- İlk olarak LU ayrışımlarından ve bunların terslerinden gelen L, U, L^{-1} ve U^{-1} matrisleri için açık formüller sunacağız.
- Ardından matrisimizin boyutuna bağlı olarak matrisin tersinin ve determinantının genel formüllerini elde vereceğiz.
- Elde ettiğimiz formüllerimizi gerekli yöntemleri kullanarak ispatlayacağız.
- Son olarak matrislerin özel durumlarını inceleyerek uygulama alanına değineceğiz. Burada tüm özdeşliklerimiz genel q için geçerlidir. Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili sonuçlar, q ’nun özel seçimi için doğal sonuçlar olarak ortaya çıkacaktır.

9.2 Temel Sonuçlar

Şimdi $\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımını ve determinantını, L^{-1}, U^{-1} matrislerini ve $\mathscr{D}^{-1}$ matrisini aşağıdaki teoremlerde vereceğiz.

Teorem 9.1. *$1 \leq n \leq m$ olmak üzere*

$$L_{m,n} = \frac{1+(-1)^{n+1} xy^{n-1} q^{\Psi(n,1,1)+\Phi(m,n)}}{1+(-1)^{n+1} xy^{n-1} q^{\Psi(n,1,0)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=1}^{n} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \tag{9.3}$$

ve

$$\begin{aligned} U_{n,m} &= (-1)^{n+1} \frac{(yq^{\mu})^{n-1}\left(1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}\right)}{1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}} \frac{1+(-1)^{n+1} xy^{n-1} q^{\Psi(n,1,1)+\Phi(n,m)}}{1+(-1)^{n} xy^{n-2} q^{\Psi(n,2,1)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{n-1} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,m)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Burada sade görünüm için Ψ fonksiyonunu

$$\Psi(i,j,k) =: \lambda + \mu\,(i-j) + \sum_{t=1}^{i-k} \Phi(t,t) \tag{9.5}$$

şeklinde tanımladık.

Aşağıdaki teoremlerde L^{-1} ve U^{-1} matrislerinin formüllerini vereceğiz.

Teorem 9.2. *$1 \leq n \leq m$ olsun.*
(i) $m < n$ ise $L^{-1}_{m,n} = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L^{-1}_{m,n} &= (-1)^{m+n} \frac{1+(-1)^{m} xy^{m-2} q^{\Psi(m,2,1)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^{m} xy^{m-2} q^{\Psi(m,2,1)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{m-1} q^{a(p+t)^{v}} \frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^{v}}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{m} \frac{q^{-a(p+n)^{v}}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

(ii) $m < n$ ise $U^{-1}_{n,m} = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U^{-1}_{n,m} &= (-1)^{n+1} \frac{(yq^{\mu})^{1-m}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,m)}\right)}{1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}} \\ &\times \frac{1+(-1)^{m} xy^{m-2} q^{\Psi(m,2,1)+\Phi(n,m)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^{m+1} xy^{m-1} q^{\Psi(m,1,0)}} \end{aligned}$$

$$\times \prod_{t=1}^{m-1} q^{-a(p+t)^v} \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)}{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{m} \frac{q^{-b(r+n)^w}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(n,n)}}. \tag{9.7}$$

Şimdi $\mathscr{D}$ matrisinin boyutuna bağlı olarak bu matrisin tersini aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 9.3. *$1 \leq m,n \leq N$ olmak üzere;*

$$(\mathscr{D}_N)^{-1}_{m,n} = (-1)^{N+m+n+1} \frac{(yq^\mu)^{1-N}\left(1+(-1)^N xy^{N-2} q^{\Psi(N,2,0)-\Phi(n,m)}\right)}{\left(1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}\right)\left(1+(-1)^{N+1}xy^{N-1}q^{\Psi(N,1,0)}\right)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{N} \frac{q^{-a(p+n)^v}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}} \prod_{t=1}^{N} 1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m-1} q^{-b(r+t)^w} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{1-q^{\Phi(t,m)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=m+1}^{N} q^{-b(r+m)^w} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(m,m)}}. \tag{9.8}$$

Son olarak, $\mathscr{D}$ matrisinin determinantını boyutuna bağlı olarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz Daha önceden belirttiğimiz üzere U matrisinin köşegen girdilerinin çarpımını kullanarak $\mathscr{D}$ matrisinin determinantını kolayca elde edebiliriz.

Teorem 9.4. *$N \geq 1$ olmak üzere,*

$$\det \mathscr{D}_N = (-1)^{\lfloor \binom{N}{2} \rfloor} \frac{(yq^\mu)^{\binom{N}{2}}\left(1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}\right)^{N-1}}{\prod_{k=1}^{N}\prod_{t=1}^{N} 1+yq^{\mu+\Phi(t,k)}}$$
$$\times \left(1+(-1)^{N+1}xy^{N-1}q^{\Psi(N,1,0)}\right)$$
$$\times \prod_{k=1}^{N-1}\prod_{t=1}^{k} q^{\Phi(t,t)}\left(1-q^{\Phi(k+1,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1-q^{\Phi(t,k+1)-\Phi(t,t)}\right). \tag{9.9}$$

9.3 İspat

Şimdi bulduğumuz bu sonuçların ispatını vereceğiz. İddialarımızı tümevarım ve geriye dönük tümevarım yöntemleriyle kanıtlayacağız. Bu yöntemlerde işlemler uzun ve zaman alıcı olduğundan sonuçlarımızın bir kısmının ispatını vereceğiz. Diğer sonuçların ispatları da benzer şekildedir.

9.3.1 *LU* Ayrışımının İspatı

$\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı için

$$\sum_{1\le d\le \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = \mathscr{D}_{m,n} \tag{9.10}$$

eşitliğini göstermeliyiz.
İspatı yaparken öncelikle daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak

$$\sum_{K\le d\le n} L_{m,d}U_{d,n} \tag{9.11}$$

toplamını ele alalım. Böylece toplamımız herhangi bir K tam sayı değerinden başladığında toplamın değeri nasıl değişir onu inceleyeceğiz. Burada geriye dönük tümevarımdan

$$\sum_{K\le d\le n} L_{m,d}U_{d,n} = L_{m,K}U_{K,n} + \sum_{K+1\le d\le n} L_{m,d}U_{d,n} \tag{9.12}$$

eşitliğini göstereceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamı tanımlayalım:

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K := \sum_{d=K}^{n} (-1)^d & \frac{(yq^{\mu})^d \left(1+yq^{\mu+\Phi(d,d)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,d)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(d,n)}\right)} \\ & \times \prod_{t=1}^{d-1} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}} \\ & \times \frac{1+(-1)^{d+1}xy^{d-1}q^{\Psi(d,1,1)+\Phi(m,d)}}{1+(-1)^{d+1}xy^{d-1}q^{\Psi(d,1,0)}} \\ & \times \frac{1+(-1)^{d+1}xy^{d-1}q^{\Psi(d,1,1)+\Phi(d,n)}}{1+(-1)^{d}xy^{d-2}q^{\Psi(d,2,1)}}.\end{aligned} \tag{9.13}$$

Şimdi toplamı hesaplamak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 9.1.

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K = (-1)^K & \frac{(yq^{\mu})^K}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} \frac{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,n)}}{1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}} \\ & \times \prod_{t=1}^{K-1} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}}.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Kanıt. (9.13) eşitliğinde verilen $\mathtt{SUM}_\mathbf{K}$ 'nın toplanan terimini S_d olarak işaret edelim.

Geriye dönük tümevarım yönteminin gereği olarak (9.14) eşitliğinden

$$\mathtt{SUM}_{K-1} = \mathtt{SUM}_K + S_{K-1} \tag{9.15}$$

eşitliğini göstermeliyiz.
Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \geq n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. O halde geriye doğru tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K + S_{K-1} = (-1)^K & \frac{(yq^\mu)^K}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} \frac{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,n)}}{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}} \\
& \times \prod_{t=1}^{K-1} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}} \\
& + (-1)^{K-1} \frac{(yq^\mu)^{K-1}\left(1+yq^{\mu+\Phi(K-1,K-1)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,K-1)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K-1,n)}\right)} \\
& \times \prod_{t=1}^{K-2} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}} \\
& \times \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,2)+\Phi(m,K-1)}}{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}} \\
& \times \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,2)+\Phi(K-1,n)}}{1+(-1)^{K-1} xy^{K-3}q^{\Psi(K,3,2)}}.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Gerekli sadeleştirmelerin ardından

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1} = (-1)^{K-1} & \frac{(yq^\mu)^{K-1}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,2)+\Phi(m,n)}}{1+(-1)^{K-1} xy^{K-3}q^{\Psi(K,3,2)}} \\
& \times \prod_{t=1}^{K-2} q^{\Phi(t,t)} \frac{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}} \frac{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{1+yq^{\mu+\Phi(t,n)}},
\end{aligned} \tag{9.17}$$

elde ederiz. Buda ispatı tamamlar. □

Sonuç olarak $\mathscr{D}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K = 1$ ise (9.14) eşitliğinden:

$$\frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m,n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} = \sum_{1 \leq d \leq \min(m,n)} L_{m,d}U_{d,n} = -\frac{1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}}{q^\mu y}\mathtt{SUM}_K, \tag{9.18}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımının ispatı tamamlanır.

9.3.2 L^{-1} Matrisine Dair Sonucun İspatı

LL^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisinin tersi olan L^{-1} matrisi için verdiğimiz sonucun ispatını göstereceğiz. İspatı tamamlamak için

$$\sum_{n\leq d\leq m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} \tag{9.19}$$

toplamını inceleyeceğiz. Dikkat edileceği üzere bu toplamın değeri

$$\sum_{n\leq d\leq m} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} 1 & m=n \text{ ise,} \\ 0 & m\neq n \text{ ise} \end{cases} \tag{9.20}$$

şeklinde olacaktır. Öncelikle genel durumu ele alacağız. $m\geq n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak:

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} \tag{9.21}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{n\leq d\leq K} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} + L_{m,K+1}L_{K+1,n}^{-1} = \sum_{n\leq d\leq K+1} L_{m,d}L_{d,n}^{-1} \tag{9.22}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamı tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}_K := &\sum_{n\leq d\leq K} (-1)^{d-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(d,d)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,d)}} \frac{1+(-1)^{d+1}xy^{d-1}q^{\Psi(d,1,1)+\Phi(m,d)}}{1+(-1)^{d+1}xy^{d-1}q^{\Psi(d,1,0)}} \\ &\times \frac{1+(-1)^{d}xy^{d-2}q^{\Psi(d,2,1)+\Phi(d,d)-\Phi(n,d)}}{1+(-1)^{d}xy^{d-2}q^{\Psi(d,2,1)}} \prod_{\substack{t=1\\t\neq n}}^{d} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{d-1} \frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^v}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)}. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Şimdi bu toplamı hesaplamak için aşağıdaki Lemmayı vereceğiz.

Önerme 9.2.

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}_K = &(-1)^{K-1} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}} \\ &\times \frac{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}} \\ &\times \prod_{t=1}^{K} \frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^v}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)} \prod_{\substack{t=1\\t\neq n}}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Kanıt. (9.23) eşitliğinde verilen $\mathtt{SUM}_{\mathbf{K}}$ 'nın toplanan terimini S_d olarak işaret edelim.

Tümevarım yönteminin gereği olarak (9.24) eşitliğinden

$$\mathtt{SUM}_K = \mathtt{SUM}_{K-1} + S_K \tag{9.25}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $n > m$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $m \geq n$ alacağız. $K = n$ ise ispat açıktır. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_{K-1} + S_K = {} & \frac{(-1)^{K-2} q^{-a(n+p)^\nu}}{1-q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}} \frac{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)}} \\
& \times \prod_{t=1}^{K-1} \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^\nu}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq n}}^{K-1} \frac{q^{-a(n+p)^\nu}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}} \\
& + (-1)^{K-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,K)}} \frac{1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,K)}}{1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,0)}} \\
& \times \frac{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq n}}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^\nu}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}} \\
& \times \prod_{t=1}^{K-1} \frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^\nu}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)}.
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$\begin{aligned}
& = (-1)^{K-1} \frac{q^{-a(K+p)^\nu}\left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)}\right)^{-1}}{\left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(K,K)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,K)}\right)} \\
& \times \prod_{t=1}^{K} \frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^\nu}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq n}}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^\nu}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}} \\
& \times \left[\frac{\left(1-q^{\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,K)}\right)\left(q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}-1\right)^{-1}}{\left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)^{-1}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right)^{-1}} \frac{1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,K)}}{1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,0)}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz (9.24); yani $\mathtt{SUM}_K$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$\begin{aligned}
&\frac{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}\\
&=\frac{q^{a(K+p)^{v}}\left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(K,K)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,K)}\right)}{\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}\right)^{-1}}\\
&\times\left[\frac{q^{a(K+p)^{v}}\left(1-q^{\Phi(n,K)-\Phi(K,K)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,K)}\right)}{\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)^{-1}}\right.\\
&+\left(\frac{q^{a(n+p)^{v}}\left(1-q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right)}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}\right.\\
&\left.\left.\times\frac{1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}}{\left(1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,K)}\right)^{-1}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{9.28}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Şimdi düzenleyelim ve sağdaki ortak parantezde bulunan ifadeyi sol tarafa atalım:

$$\frac{q^{a(K+p)^{v}}\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,K)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}\right)}{\left[\left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(K,K)}\right)\left(1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)\right]^{-1}} \tag{9.29}$$

$$=\left[\frac{q^{a(K+p)^{v}}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,K)}\right)\left(1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}\right)}{\left[\left(1-q^{\Phi(n,K)-\Phi(K,K)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)\right]^{-1}}\right. \tag{9.30}$$

$$\left.+\frac{q^{a(n+p)^{v}}\left(1-q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}\right)\left(1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,1)+\Phi(m,K)}\right)}{\left[\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}\right)\right]^{-1}}\right] \tag{9.31}$$

Bu son eşitlik (9.29), (9.30), (9.31) değerleri dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathtt{SUM}_K &= (-1)^{K-1}\frac{q^{-a(n+p)^{v}}}{1-q^{\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}\times\frac{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)+\Phi(m,n)-\Phi(n,n)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}\\
&\times\prod_{t=1}^{K}\frac{\left(1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}\right)\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}\right)}{q^{-a(p+t)^{v}}\left(1+yq^{\mu+\Phi(m,t)}\right)}\prod_{\substack{t=1\\t\neq n}}^{K}\frac{q^{-a(n+p)^{v}}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}
\end{aligned} \tag{9.32}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{D}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:

$K = m$ ise (9.24) eşitliğinden:

$$\mathtt{SUM}_K = \sum_{n \le d \le m} L_{m,d} L_{d,n}^{-1} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ ise}, \\ 0 & m \ne n \text{ ise} \end{cases} \tag{9.33}$$

elde ederiz. Bu durumda $\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz L matrisi ve onun tersi olan L^{-1} matrisi için verdiğimiz sonuçların ispatı da tamamlanır.

Benzer şekilde UU^{-1} çarpımından yararlanarak $\mathscr{D}$ matrisinin LU ayrışımından elde ettiğimiz U matrisinin tersi olan U^{-1} matrisine ait sonuçların ispatı için

$$\sum_{m \le d \le n} U_{m,d} U_{d,n}^{-1} \tag{9.34}$$

toplamı incelenir.

9.3.3 $\mathscr{D}^{-1}$ Matrisine Dair Sonucun İspatı

$U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{D}$ matrisinin tersinin ispatını göstereceğiz. İspatı tamamlamak için

$$\sum_{\max(m,n) \le d \le N} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} = (\mathscr{D}_N)_{m,n}^{-1} \tag{9.35}$$

toplamını inceleyeceğiz. Öncelikle daha genel durumu ele alacağız. $m \ge n$ olmak üzere genelliği bozmadan ekstra bir K değişkenine bağlı olarak:

$$\sum_{m \le d \le K} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1}. \tag{9.36}$$

toplamını ele alalım. Burada tümevarım yöntemi gereği

$$\sum_{m \le d \le K} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} + U_{m,K+1}^{-1} L_{K+1,n}^{-1} = \sum_{m \le d \le K+1} U_{m,d}^{-1} L_{d,n}^{-1} \tag{9.37}$$

eşitliğini inceleyeceğiz. O halde şimdi aşağıdaki toplamı tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \mathtt{SUM}_K := \sum_{d=m}^{K} (-1)^{m+n+d+1} & \frac{1 + yq^{\mu+\Phi(d,d)}}{(yq^{\mu})^{d-1}} \\ & \times \frac{1 + (-1)^d xy^{d-2} q^{\Psi(d,2,1)+\Phi(d,d)-\Phi(n,d)}}{1 + (-1)^d xy^{d-2} q^{\Psi(d,2,1)}} \\ & \times \frac{1 + (-1)^d xy^{d-2} q^{\Psi(d,2,1)+\Phi(d,d)-\Phi(d,m)}}{1 + (-1)^{d+1} xy^{d-1} q^{\Psi(d,1,0)}} \end{aligned}$$

$$\times \prod_{t=1}^{d-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}\right)^{-1}} \prod_{t=m+1}^{d} \frac{q^{-b(m+r)^w}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(t,m)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(t,m)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{d} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}}. \tag{9.38}$$

Şimdi bu toplamı hesaplamak için aşağıdaki Lemmayı vereceğiz.

Önerme 9.3.

$$\texttt{SUM}_K := \frac{(-1)^{m+n+K+1}}{(yq^{\mu})^{K-1}\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right)} \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,0)-\Phi(n,m)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(m,m)-\Phi(m,t)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}\right)^{-1}} \prod_{t=m+1}^{K} \frac{q^{-b(m+r)^w}}{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(m,m)}}. \tag{9.39}$$

Kanıt. (9.38) eşitliğinde verilen $\texttt{SUM}_{\mathbf{K}}$ 'nın toplanan terimini S_d olarak işaret edelim. Tümevarım yönteminin gereği olarak (9.39) eşitliğinden

$$\texttt{SUM}_K = \texttt{SUM}_{K-1} + S_K \tag{9.40}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Burada $m > n$ durumuda benzer şekilde olduğundan genel olarak $n \geq m$ alacağız. $K = m$ ise ispat açıktır. O halde tümevarımı aşağıdaki adımlarla uygulayacağız:

$$\texttt{SUM}_{K-1} + S_K = \frac{(-1)^{m+n+K}}{(yq^{\mu})^{K-2}\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right)} \frac{1+(-1)^{K-1}xy^{K-3}q^{\Psi(K,3,1)-\Phi(n,m)}}{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(m,m)-\Phi(m,t)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{K-1} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}$$
$$+(-1)^{m+n+K+1} \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(n,K)}}{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}}$$
$$\times \frac{1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}}{(yq^{\mu})^{K-1}} \frac{1+(-1)^K xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(K,m)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}\right)^{-1}} \prod_{t=m+1}^{K} \frac{q^{-b(m+r)^w}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(t,m)}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(m,m)-\Phi(m,t)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \prod_{t=n+1}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}}. \tag{9.41}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında aynı olan terimleri ortak paranteze alalım:

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{m+n+K+1} \frac{(yq^{\mu})^{1-K}}{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)}} \prod_{t=1}^{K-1} \frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}\right)^{-1}} \\
&\times \prod_{t=1}^{m-1} \frac{q^{-b(r+t)^w}}{1-q^{\Phi(m,m)-\Phi(m,t)}} \prod_{t=1}^{n-1} \frac{q^{-a(p+t)^v}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}} \\
&\times \prod_{t=m+1}^{K} \frac{q^{-b(m+r)^w}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(t,m)}} \prod_{t=n+1}^{K} \frac{q^{-a(n+p)^v}}{1-q^{\Phi(t,t)-\Phi(n,t)}} \\
&\times \left[-\frac{yq^{\mu+\Phi(n,m)} \left(1-q^{\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}\right) \left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(m,m)}\right)}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right) \left(1+(-1)^{K-1} xy^{K-3} q^{\Psi(K,3,1)-\Phi(n,m)}\right)^{-1}} \right. \\
&\left. + \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right) \left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(K,m)}\right)}{\left(1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,0)}\right) \left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(n,K)}\right)^{-1}} \right].
\end{aligned}
\tag{9.42}
$$

Burada ortak parantezdeki terimlerle ulaşmak istediğimiz $\mathtt{SUM}_K$ değerinde bulunan terimleri sadeleştirdiğimizde ispatı tamamlamak için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,0)-\Phi(n,m)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right) \left(1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,0)}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,K)}\right) \left(1+yq^{\mu+\Phi(K,m)}\right) \left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)}\right)} \\
&\times \left[-\frac{yq^{\mu+\Phi(n,m)} \left(1-q^{\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}\right) \left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(m,m)}\right) \left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right)^{-1}}{\left(1+(-1)^{K-1} xy^{K-3} q^{\Psi(K,3,1)-\Phi(n,m)}\right)^{-1}} \right. \\
&\left. + \frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right) \left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(K,m)}\right)}{\left(1+(-1)^{K+1} xy^{K-1} q^{\Psi(K,1,0)}\right) \left(1+(-1)^K xy^{K-2} q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(n,K)}\right)^{-1}} \right]
\end{aligned}
\tag{9.43}
$$

eşitliğini göstermeliyiz. Şimdi düzenleyelim ve sağdaki ortak parantezde bulunan ifadeyi sol tarafa atalım:

$$\frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,K)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,0)-\Phi(n,m)}\right)}{\left[\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,m)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)}\right)\right]^{-1}} \tag{9.44}$$

$$=\left[-\frac{yq^{\mu+\Phi(n,m)}\left(1-q^{\Phi(K,n)-\Phi(n,n)}\right)\left(1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}\right)}{\left[\left(1-q^{\Phi(m,K)-\Phi(m,m)}\right)\left(1+(-1)^{K-1}xy^{K-3}q^{\Psi(K,3,1)-\Phi(n,m)}\right)\right]^{-1}}\right. \tag{9.45}$$

$$\left.+\frac{\left(1+yq^{\mu+\Phi(K,K)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(K,m)}\right)}{\left[\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right)\left(1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,1)+\Phi(K,K)-\Phi(n,K)}\right)\right]^{-1}}\right]. \tag{9.46}$$

Bu son eşitlik (9.44), (9.45), (9.46) ifadeleri dağıtıldığında kolaylıkla görülebilir.
O halde

$$\begin{aligned}\mathtt{SUM}_K = & \frac{(-1)^{m+n+K+1}}{(yq^{\mu})^{K-1}\left(1+yq^{\mu+\Phi(n,m)}\right)}\frac{1+(-1)^{K}xy^{K-2}q^{\Psi(K,2,0)-\Phi(n,m)}}{1+(-1)^{K+1}xy^{K-1}q^{\Psi(K,1,0)}}\\ & \times\prod_{t=1}^{m-1}\frac{q^{-b(r+t)^{w}}}{1-q^{\Phi(m,m)-\Phi(m,t)}}\prod_{t=1}^{n-1}\frac{q^{-a(p+t)^{v}}}{1-q^{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}}\prod_{t=n+1}^{K}\frac{q^{-a(n+p)^{v}}}{1-q^{\Phi(t,n)-\Phi(n,n)}}\\ & \times\prod_{t=1}^{K}\frac{1+yq^{\mu+\Phi(n,t)}}{\left(1+yq^{\mu+\Phi(t,m)}\right)^{-1}}\prod_{t=m+1}^{K}\frac{q^{-b(m+r)^{w}}}{1-q^{\Phi(m,t)-\Phi(m,m)}}.\end{aligned} \tag{9.47}$$

eşitliğini elde ettiğimize göre ispat tamamlanır. □

Sonuç olarak $\mathscr{D}$ matrisi için iddia ettiğimiz sonuçlara tekrar dönelim:
$K=N$ ise (9.39) eşitliğinden:

$$(\mathscr{D}_N)^{-1}_{m,n}=\sum_{\max(m,n)\le d\le N}U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}=\frac{1}{1-xy^{-1}q^{\lambda-\mu}}\mathtt{SUM}_K \tag{9.48}$$

elde ederiz. Bu durumda $U^{-1}_{m,d}L^{-1}_{d,n}$ çarpımından yararlanarak $\mathscr{D}$ matrisinin tersinin ispatı da tamamlanır.

9.4 Uygulama

Şimdi çalışmalarımızı daha açık anlatabilmek için bulduğumuz genel sonuçlarımızın bir uygulamasını verelim. Burada q 'nun özel seçimiyle genel Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki sonuçları verebiliriz:
Herhangi a, b, p, r, λ, μ, v, w tam sayıları için $\mathscr{H}=[\mathscr{H}_{mn}]$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n}=\frac{U_{\lambda+a(p+m)^{v}+b(r+n)^{w}}}{V_{\mu+a(p+m)^{v}+b(r+n)^{w}}} \tag{9.49}$$

ya da Φ index fonksiyonu yardımıyla

$$\mathscr{H}_{m,n} = \frac{U_{\lambda+\Phi(m,n)}}{V_{\mu+\Phi(m,n)}} \tag{9.50}$$

şeklinde tanımlayalım.
$x=-1$, $y=1$ ve $q=\beta/\alpha$ özel değerlerini alarak $\mathscr{H}$ matrisinin özelliklerini $\mathscr{D}$ matrisi için verilen ana sonuçlarından türetebiliriz.
Örneğin boyutu 4 alınan $\mathscr{H}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} \frac{U_{\lambda+\Phi(1,1)}}{V_{\mu+\Phi(1,1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1,2)}}{V_{\mu+\Phi(1,2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1,3)}}{V_{\mu+\Phi(1,3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(1,4)}}{V_{\mu+\Phi(1,4)}} \\ \frac{U_{\lambda+\Phi(2,1)}}{V_{\mu+\Phi(2,1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(2,2)}}{V_{\mu+\Phi(2,2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(2,3)}}{V_{\mu+\Phi(2,3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(2,4)}}{V_{\mu+\Phi(2,4)}} \\ \frac{U_{\lambda+\Phi(3,1)}}{V_{\mu+\Phi(3,1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3,2)}}{V_{\mu+\Phi(3,2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3,3)}}{V_{\mu+\Phi(3,3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(3,4)}}{V_{\mu+\Phi(3,4)}} \\ \frac{U_{\lambda+\Phi(4,1)}}{V_{\mu+\Phi(4,1)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(4,2)}}{V_{\mu+\Phi(4,2)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(4,3)}}{V_{\mu+\Phi(4,3)}} & \frac{U_{\lambda+\Phi(4,4)}}{V_{\mu+\Phi(4,4)}} \end{bmatrix}. \tag{9.51}$$

$x=-1$, $y=1$ ve $q=\beta/\alpha$ olmak üzere U_n ve V_n için tanımlanan Binet formülleriyle $\mathscr{H}$ matrisini

$$\mathscr{H}_{m,n} = \frac{\alpha^{\lambda-\mu-1}}{1-q}\frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m,n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}}, \tag{9.52}$$

şeklinde de tanımlayabiliriz.
Şimdi $\mathscr{D}$ matrisini

$$\mathscr{D}_{m,n} = \frac{1+xq^{\lambda+\Phi(m,n)}}{1+yq^{\mu+\Phi(m,n)}} \tag{9.53}$$

şeklinde tanımlayalım.
Burada x, y ve q 'nun $x=-1$, $y=1$ ve $q=\beta/\alpha$ gibi özel değerlerini seçerek, $\mathscr{H}$ matrisinin $\mathscr{D}$ matrisinin özel bir hali olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $\mathscr{H}$ matrisinin özelliklerini (LU ayrışımı, L^{-1}, U^{-1}, $\mathscr{D}^{-1}$ gibi) $\mathscr{D}$ matrisi için verilen ana sonuçlarından türetebiliriz.
Örnek olarak (9.1) 'de verdiğimiz LU ayrışımına ait sonuçlarımızı $1 \leq n \leq m$ olmak üzere $\mathscr{H}$ matrisi için verelim:

$$L_{m,n} = \prod_{t=1}^{n-1}\frac{U_{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)}}{U_{\Phi(n,t)-\Phi(t,t)}}\prod_{t=1}^{n}\frac{V_{\mu+\Phi(n,t)}}{V_{\mu+\Phi(m,t)}} \times \begin{cases} \dfrac{U_{\Psi(n,1,1)+\Phi(m,n)}}{U_{\Psi(n,1,0)}} & n \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{V_{\Psi(n,1,1)+\Phi(m,n)}}{V_{\Psi(n,1,0)}} & n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{9.54}$$

ve $\lambda > \mu$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U_{m,n} = (-1)^m \frac{V_{\mu-\lambda}}{V_{\mu+\Phi(m,n)}} \prod_{t=1}^{m-1} \frac{U_{\Phi(m,t)-\Phi(t,t)} U_{\Phi(t,n)-\Phi(t,t)}}{V_{\mu+\Phi(m,t)} V_{\mu+\Phi(t,n)}} \\ \times \begin{cases} \Delta^{\frac{m+1}{2}} (-1)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor (a+b)+1} \dfrac{U_{\Psi(m,1,1)+\Phi(m,n)}}{V_{\Psi(m,2,1)}} & m \text{ tek ise,} \\ \\ \Delta^{m-2} (-1)^{a+\frac{(m+2)\left(1+(-1)^{a+b+1}\right)-2\left((-1)^p+(-1)^\mu\right)}{4}} \\ \times \dfrac{V_{\Psi(m,1,1)+\Phi(m,n)}}{U_{\Psi(m,2,1)}} & m \text{ çift ise,} \end{cases} \end{aligned} \tag{9.55}$$

ve burada Δ giriş bölümünde tanımlanmıştır.
$\{U_n, V_n\}$ dizilerinin q-formlarına göre herhangi x ve y reel değerinin seçimine bağlı olarak, $\mathscr{D}$ matrisi Filbert ve Lilbert matrislerinin

$$\frac{U_{\lambda+\Phi(m,n)}}{U_{\mu+\Phi(m,n)}}, \frac{V_{\lambda+\Phi(m,n)}}{V_{\mu+\Phi(m,n)}} \text{ ve } \frac{V_{\lambda+\Phi(m,n)}}{U_{\mu+\Phi(m,n)}} \tag{9.56}$$

şeklindeki formlarına da sahip olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] **T. Arıkan, E. Kılıç and H. Prodinger**, A nonsymmetrical matrix and its factorizations, Mathematica Slovaca 69(4) (2019), 753-762.

[2] **A. Berman and S. Gueron**, On the inverse of the Hilbert matrix, The Mathematical Gazette 86(506) (2002), 274-277.

[3] **H. Bozdağ, E. Kılıç and İ. Akkuş**, New Filbert and Lilbert matrices with asymmetric entries, Mathematica Slovaca 70(2) (2020), 289-296.

[4] **M. D. Choi**, Tricks or treats with the Hilbert matrix, The American Mathematical Monthly 90(5) (1983), 301-312.

[5] **A. R. Collar**, XIX.-On the reciprocation of certain matrices, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 59 (1940), 195-206.

[6] **A. R. Collar**, On the reciprocal of a segment of a generalized Hilbert matrix, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 47(1) (1951), 11-17.

[7] **D. Hilbert**, A contribution to the theory of Legendre's polynomial, Acta Mathematica (Djursholm) 18(1) (1894), 155-159.

[8] **T. Kato**, On positive eigenvectors of positive infinite matrices, Communications on Pure and Applied Mathematics, 11(4) (1958), 573-586.

[9] **E. Kılıç and T. Arıkan**, A nonlinear generalization of the Filbert matrix and its Lucas analogue, Linear and Multilinear Algebra 67(1) (2019), 141-157.

[10] **E. Kılıç and D. Ersanlı**, Harmony of asymmetric variants of the Filbert and Lilbert matrices in q-form, Mathematica Slovaca 73(3) (2023), 633-642.

[11] **E. Kılıç and D. Ersanlı**, Curious harmony in asymmetric & nonlinear variant of Filbert and Lilbert matrices, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 53(3) (2024), 724-734.

[12] **E. Kılıç and D. Ersanlı**, A nonlinear Filbert-like matrix with three free parameters: From linearity to nonlinearity, Mathematica Slovaca 74(3) (2024), 587-594.

[13] **E. Kılıç and H. Prodinger**, A generalized Filbert Matrix, Fibonacci Quarterly 48(1) (2010), 29-33.

[14] **E. Kılıç and H. Prodinger**, The q-Pilbert matrix, International Journal of Computer Mathematics, 89(10) (2012), 1370-1377.

[15] **E. Kılıç and H. Prodinger**, Variants of the Filbert matrix, Fibonacci Quarterly 51(2) (2013), 153-162.

[16] **E. Kılıç and H. Prodinger**, The generalized q-Pilbert matrix, Mathematica Slovaca 64(5) (2014), 1083-1092.

[17] **E. Kılıç and H. Prodinger**, Asymmetric generalizations of the Filbert matrix and variants, Publications de l'Institut Mathematique 95(109) (2014), 267-280.

[18] **E. Kılıç and H. Prodinger**, The generalized Lilbert matrix, Periodica Mathematica Hungarica 73 (2016), 62-72.

[19] **E. Kılıç, S. Koparal and N. Ömür**, New asymmetric generalizations of the Filbert and Lilbert matrices, Periodica Mathematica Hungarica 78(2) (2019), 231-241.

[20] **E. Kılıç, S. Koparal and N. Ömür**, New analogues of the Filbert and Lilbert matrices via products of two k-tuples asymmetric entries, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 49(2) (2020), 684-694.

[21] **E. Kılıç, S. Koparal and N. Ömür**, Nonlinear variants of the generalized Filbert and Lilbert matrices, Turkish Journal of Mathematics 44(3) (2020), 622-642.

[22] **K. Oliver and H. Prodinger**, The inverse Filbert matrix, Afrika Matematika, 26(5) (2015), 663-671.

[23] **H. Prodinger**, A generalization of a Filbert matrix with 3 additional parameters, Transactions of the Royal Society of South Africa 65 (2010), 169-172.

[24] **T. M. Richardson**, The Filbert matrix, Fibonacci Quarterly 39(3) (2001), 268-275.

[25] **M. Rosenblum**, On the Hilbert matrix, Proceedings of the American Mathematical Society 9(1) (1958), 137-140.

[26] **R. Savage and E. Lukacs**, Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix, In Contributions to the solution of systems of linear equations and the determination of eigenvalues. Washington, DC: US Government Printing Office (1954), 105-108.

[27] **R. B. Smith**, Two theorems on inverses of finite segments of the generalized Hilbert matrix, Mathematical Tables and Other Aids to Computation 13(65) (1959), 41-43.

[28] **J. Todd**, Computational problems concerning the Hilbert matrix, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology 65(1) (1960), 19-22.

EKLER

TÜRKÇE-İNGİLİZCE MATEMATİK TERİMLERİ SÖZLÜĞÜ

Türkçe terim	**İngilizce Terim**
Ayrışım	Decomposition
Basamak	Order
Boyut	Dimension
Çarpım	Product
Çembersel	Circulant
Dizi	Sequence
İndirgeme	Recurrence
Karakteristik	Characteristic
Kısmi	Partial
Lineer	Linear
Seri	Series
Sonlu	Finite
Sonsuz	Infinite
Taban değer fonksiyonu	Floor function
Terim	Term
Ters matris	Inverse Matrix
Toplam	Sum
Toplanan terim	Summand term
Üç bantlı köşegen matris	Tridiagonal matrix