

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜREKLİ VE AYRIK POPÜLASYON MODELLERİNDE ALLEE ETKİLERİ**

**DOKTORA TEZİ**  
**Pınar BAYDEMİR DAŞTAN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**

**Temmuz 2024**



## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Pınar BAYDEMİR DAŞTAN



## ÖZET

Doktora Tezi

### SÜREKLİ VE AYRIK POPÜLASYON MODELLERİNDE ALLEE ETKİLERİ

Pınar BAYDEMİR DAŞTAN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Temmuz 2024

Bu tezde, Allee etkisine sahip Leslie tipi bir ayırık av-avcı popülasyon modeli ile sürekli av-avcı popülasyon modelinin dinamik yapısı analiz edilmiştir. Analiz edilen modeller aynı çevreyi paylaşan ve birbirleriyle etkileşim içinde bulunan iki popülasyonu içermektedir. Lineer olmayan dinamik sistemler yaklaşımıyla modellenen bu popülasyonların zamana göre değişimi, ayırık sistem için fark denklemleri, sürekli sistem için adi diferensiyel denklemler ile ifade edilmiştir. İlk olarak ayırık av-avcı modeli ele alınarak modelin pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Ardından bu pozitif denge noktasının kararlı olabilmesi ve bu denge noktasında Flip çatalanma ve Neimark-Sacker çatalanmanın görülebilmesi için gerekli koşullar belirlenmiştir. Daha sonra merkez manifold teoremi ve çatalanma teorisi kullanılarak bu koşulların sağlandığı teorik olarak ispatlanmıştır. Elde edilen bu analitik çalışmaları desteklemek amacıyla bazı örnek parametre değerleri ele alınmış ve bu parametre değerleri için sistemin faz portreleri ve çatalanma diyagramı elde edilmiştir. Tezin diğer yarısı ayırık sistemin Euler metodu kullanılarak elde edildiği sürekli av-avcı sistemi için ayrılmıştır. Ayırık sistemdeki temel analizler sürekli sistemde de benzer sırada takip edilmiştir. Öncelikle, sistemin denge noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli koşullar belirlenmiştir. Daha sonra, bu pozitif denge noktasında görülen Hopf çatalanmanın varlık koşulları incelenmiştir. Bu çatalanmanın varlığı ise, çatalanma parametresi olarak Allee sabiti kullanılarak Hopf çatalanma teorisi ve normal form teorisi aracılığıyla gösterilmiştir. Yapılan analizlere göre, av popülasyonu üremek için eş bulmakta zorlandığından Allee etkisi av popülasyon yoğunluğunu azaltmıştır.

Ek olarak, av popülasyonu avcı popülasyonu için birincil ve tek besin kaynağı olduğundan, Allee etkisi avcı popülasyon yoğunluğunu da azaltmıştır. Öte taraftan, daha düşük popülasyon yoğunluğunda, artan Allee etkisinin süperkritik Hopf çatallanmasına, güçlü Allee etkisinin ise subkritik Hopf çatallanmasına yol açtığı gözlenmiştir. Başka bir deyişle, Allee etkisi arttıkça dinamik sistemin denge noktalarının kararlıdan kararsız ve kararsızdan kararlıya doğru bir geçişi söz konusudur. Dolayısıyla, Allee etkisi hem kararlı hem de kararsız limit döngüleri ortaya çıkarabildiğinden, sistemde farklı iki Hopf çatallanma görülmüştür. Çalışmanın devamında, Allee etkisinin hem av hem de avcı popülasyon dinamikleri üzerindeki etkisi nümerik örneklerle gözlenmiştir. Ayrıca, av-avcı sisteminin bu sistemi oluşturan tüm parametre değerlerine duyarlılığını incelemek için FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) yaklaşımı kullanılmıştır. Burada tek bir parametre değerindeki değişikliğin sistem dinamiği üzerindeki etkisine ek olarak, hangi parametrenin sistem çıktısı üzerinde etkili olduğu belirlenmiştir. Tez çalışması kapsamında ele aldığımız modellerin analizi, av ve avcı popülasyonları arasındaki dengenin korunmasında Allee etkisinin önemini vurgulamaktadır. Bunların yanı sıra, elde ettiğimiz sonuçlar hem sürekli hem de ayrık av-avcı sistemlerini gerçekçi bir şekilde modellemek ve anlamak için karmaşık ekolojik etkileşimleri dikkate almanın gerekliliğini vurgulamaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Adi diferensiyel denklemler, Fark denklemleri, Kararlılık analizi, Flip çatallanma, Neimark-Sacker çatallanma, Hopf çatallanma, Duyarlılık analizi.

## **ABSTRACT**

Doctor of Philosophy

### **ALLEE EFFECTS IN CONTINUOUS-TIME AND DISCRETE-TIME PREDATOR-PREY SYSTEM**

Pınar BAYDEMİR DAŞTAN

TOBB University of Economics and Technology  
Institute of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: July 2024

In this thesis, the dynamical behaviour of both discrete-time and continuous-time Leslie type predator-prey system with the Allee effect is investigated. These models have two populations which are prey and predator living in the same environment and interacting with each other. In these systems the change of populations, modeled by approximation of nonlinear dynamical systems, with respect to time is governed by difference equations in discrete system and by differential equations in continuous system. First, the discrete-time prey-predator system is considered and the existence and uniqueness of the positive equilibrium point of this system is determined. The required conditions are then found for the stability of this positive equilibrium point, as well as for the observation of Flip bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation at this equilibrium point. More specifically, these bifurcations are driven by using the center manifold theorem and the normal form theory by choosing the integral step size as a bifurcation parameter. In the following chapter, some numerical simulations are presented to support and extend the theoretical results. The other half of the thesis is devoted to the continuous-time predator-prey system, where the discrete system is obtained by using the Euler method. The continuous system follows the same sequence of basic analyses as the discrete system. Initially, the local stability conditions of the positive equilibrium point of this system are determined. Then, the conditions for the existence of a Hopf bifurcation at this equilibrium point of system are investigated. This bifurcation is demonstrated through Hopf bifurcation theory and normal form theory by using the Allee constant as a bifurcation parameter.

According to mathematical analysis, the Allee effect reduces prey population density due to difficulties in mate finding. In addition to this, since prey populations are the primary and only nutritional source for predator populations, the Allee effect diminishes predator population density. On the other hand, at the lower level of population density, we have observed that a gradually increasing Allee effect causes a supercritical Hopf bifurcation, while a strong Allee effect leads to a subcritical Hopf bifurcation. In other words, there is a stability switch from stable to unstable and from unstable to stable as the Allee effect increases. Therefore, the system exhibits multiple Hopf bifurcations since the Allee effect can bring out both stable and unstable limit cycles. Subsequently, we focus on a sensitivity analysis to ascertain the robustness of the model to the parameter values that are correlated with the critical bifurcation parameters directly related to the Allee constant. Finally, we discuss the impact of the Allee effect on the dynamics of both prey and predator populations via numerical simulations. Moreover, the FAST approach has been used to examine the sensitivity of the predator-prey system to all parameter values, and the most efficient factors among input parameters on the output variable have been determined in addition to the impact of a single parameter value change on the dynamic of the system. Our results highlight the need to consider complex ecological interactions to realistically model and understand the predator-prey system.

**Keywords:** Ordinary differential equation, Difference equation, Stability analysis, Flip bifurcation, Neimark-Sacker bifurcation, Hopf bifurcation, Sensitivity analysis.



## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca destek ve emeklerini esirgemeyen, yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve tecrübeleri ile bana ışıık tutan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a; yönlendirici sözleriyle bana akademik yolda ilerleme Őevki kazandıran, eleştirileriyle yol gösteren ve her konuda destek olan kıymetli hocam Doç. Dr. Meltem GÖLGELİ'ye; tezde dikkat etmem gereken noktalarla ilgili bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Oktay DUMAN'a, Doç. Dr. Elif DEMİRCİ'ye ve Dr. Öğr. Üyesi Esra KARAOĞLU'na; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım. Hayatımın her evresinde yanımda olan, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca yoğun ve stresli geçen çalışma hayatıma renk katan sevgili eŐim Saltuk Buğra DAŞTAN'a; destekleri ile her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>KISALTMALAR</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>RESİM LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Allee Etkisi Temel Tanım ve Notasyonlar . . . . .	4
1.1.1 Bileşen ve Demografik Allee Etkisi . . . . .	4
1.1.2 Güçlü Allee Etkisi ve Zayıf Allee Etkisi . . . . .	7
1.2 Literatür Araştırması . . . . .	14
<b>2. ÇATALLANMA TEORİSİ VE MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 Matematiksel Temel Tanım ve Teoremler . . . . .	17
2.1.1 Fark Denklemleri . . . . .	17
2.1.1.1 Fark Denklemlerinin Kararlılık Analizi . . . . .	19
2.1.2 Adi Diferensiyel Denklemler . . . . .	22
2.1.2.1 Diferensiyel Denklemlerin Kararlılık Analizi . . . . .	23
2.2 Dinamik Sistemlerde Çatallanma Teorisi . . . . .	27
2.2.1 Merkez Manifold Teorisi ve Normal Form Kavramı . . . . .	27
2.2.2 Flip Çatallanma Teorisi . . . . .	29
2.2.3 Neimark-Sacker Çatallanma Teorisi . . . . .	32
2.2.4 Hopf Çatallanma Teorisi . . . . .	37
<b>3. AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNDE ALLEE ETKİSİ</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1 Modelin Tanıtımı ve Temel Özellikleri . . . . .	43
3.2 Kararlılık Analizi . . . . .	44
3.3 Flip Çatallanma Analizi . . . . .	47
3.4 Neimark-Sacker Çatallanma Analizi . . . . .	60
3.5 Nümerik Örnekler . . . . .	70
<b>4. SÜREKLİ AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNDE ALLEE ETKİSİ</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1 Modelin Tanıtımı ve Temel Özellikleri . . . . .	79
4.2 Kararlılık Analizi . . . . .	79
4.3 Hopf Çatallanma Analizi . . . . .	81
4.4 Nümerik Örnekler . . . . .	100
<b>5. DUYARLILIK ANALİZİ</b> . . . . .	<b>105</b>
<b>6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>KAYNAKLAR</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>EKLER</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> . . . . .	<b>123</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: (a) $r = 0.2$ , $A = 20$ ve $K = 60$ için büyüme oranı (b) Aynı parametre değerleri için popülasyon yoğunluğu . . . . .	9
Şekil 1.2: (a) $r = 0.2$ ve $K = 60$ için büyüme oranı (b) Aynı parametre değerleri için popülasyon yoğunluğu. Kesikli grafikler $A = 0$ durumunu göstermektedir. . . . .	9
Şekil 1.3: $N(0) = 1 \times 10^8$ başlangıç değeri için (1.1) ve (1.9) dinamiklerinin farklı $C$ değerleri için karşılaştırılması. Burada $r = 0.12$ ve $K = 2.764 \times 10^9$ alınmıştır. . . . .	11
Şekil 2.1: İkinci iterasyon fonksiyonu (Kuznetsov, 1998) . . . . .	30
Şekil 2.2: Flip çatallanma (Kuznetsov, 1998) . . . . .	31
Şekil 2.3: Flip çatallanma diyagramı (Kuznetsov, 1998) . . . . .	31
Şekil 2.4: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998) . . . . .	36
Şekil 2.5: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998) . . . . .	36
Şekil 2.6: Süperkritik Hopf çatallanma (Kuznetsov, 1998) . . . . .	39
Şekil 2.7: Subkritik Hopf çatallanma (Kuznetsov, 1998) . . . . .	40
Şekil 3.1: $\delta = 0.25$ iken $N(0) = 5$ , $P(0) = 11$ başlangıç değerindeki farklı $\beta$ değerleri için av-zaman ilişkisi gösterilmektedir. $\beta$ değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a) $k = 0$ için $\beta = 0$ , $\bar{N} = 9.3750$ , (b) $k = 0.2$ için $\beta = 1.8750$ , $\bar{N} = 7.5$ , (c) $k = 0.5$ için $\beta = 4.6875$ , $\bar{N} = 4.6875$ , (d) $k = 0.8$ için $\beta = 7.5$ , $\bar{N} = 1.8750$ . . . . .	71
Şekil 3.2: $\delta = 0.25$ iken $N(0) = 5$ , $P(0) = 11$ başlangıç değerindeki farklı $\beta$ değerleri için avcı-zaman ilişkisi gösterilmektedir. $\beta$ değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a) $k = 0$ için $\beta = 0$ , $\bar{P} = 15$ , (b) $k = 0.2$ için $\beta = 1.8750$ , $\bar{P} = 12$ , (c) $k = 0.5$ için $\beta = 4.6875$ , $\bar{P} = 7.5$ , (d) $k = 0.8$ için $\beta = 7.5$ , $\bar{P} = 3$ . . . . .	72
Şekil 3.3: $N(0) = 9.38$ ve $P(0) = 15.01$ başlangıç değerleri ve $k = 0.2$ için Allee etkisi içermeyen (mavi) ve Allee etkisi içeren (kırmızı) av-avcı faz portresi gösterilmektedir. (a) $\delta = 0.35$ iken her iki modelde de 2 periyotlu çözüm (2-döngü) mevcuttur. (b) $\delta = 0.414$ için Allee etkisi içermeyen modelde 4-döngü gözükürken, Allee etkisi içeren model görünümü farklı olan çekiciye sahiptir. (c) $\delta = 0.45$ değerinde her iki model de görünümü farklı olan çekiciye sahiptir. . . . .	73
Şekil 3.4: $\delta$ parametresi $0.25 \leq \delta \leq 0.45$ aralığında değişirken av ve avcı popülasyonun çatallanma diyagramı sırasıyla şekil (a) ve (b) de verilmiştir. $k = 0$ iken popülasyon grafikleri mavi, $k = 0.2$ iken popülasyon grafikleri kırmızı renk ile gösterilmiştir. . . . .	74

Şekil 3.5: $0.25 \leq \delta \leq 0.45$ için Maksimum Lyapunov Eksponent. Allee etkisi içermeyen (3.3) sistem için ( $k = 0$ durumu ) mavi ile, Allee etkisi içeren sistem ( $k = 0.2$ durumu) kırmızı ile gösterilmiştir. . . . .	74
Şekil 3.6: $\delta = 0.9$ iken $N(0) = 7$ ve $P(0) = 14$ başlangıç değerindeki farklı $\beta$ değerleri için av-zaman ilişkisi gösterilmektedir. $\beta$ değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a) $k = 0$ için $\beta = 0, \bar{N} = 7.5$ , (b) $k = 0.05$ için $\beta = 0.3750, \bar{N} = 7.1250$ , (c) $k = 0.1$ için $\beta = 0.75, \bar{N} = 6.75$ , (d) $k = 0.2$ için $\beta = 1.5, \bar{N} = 6$ . . .	75
Şekil 3.7: $\delta = 0.9$ iken $N(0) = 7$ ve $P(0) = 14$ başlangıç değerindeki farklı $\beta$ değerleri için avcı-zaman ilişkisi gösterilmektedir. $\beta$ değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a) $k = 0$ için $\beta = 0, \bar{P} = 15$ , (b) $k = 0.05$ için $\beta = 0.3750, \bar{P} = 14.25$ , (c) $k = 0.1$ için $\beta = 0.75, \bar{P} = 13.50$ , (d) $k = 0.2$ için $\beta = 1.5, \bar{P} = 12$ . .	76
Şekil 3.8: $N(0) = 7.4, P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-avcı popülasyon diyagramı $\delta = 2.2111$ iken 1.şekil (mavi), $\delta = 2.2116$ iken 2.şekil (kırmızı) ve $\delta = 2.222$ iken 3.şekilde (pembe) gösterildiği gibidir. .	77
Şekil 4.1: (a) $k = 0.02$ , (b) $k = 0.2$ ve (c) $k = 0.3$ iken av popülasyonun zamana göre değişim grafiği solda, avcı popülasyonun zamana göre değişim grafiği ortada, sistemin faz portresi ise sağda gösterilmiştir. Burada av ve avcı popülasyonun başlangıç değeri sırasıyla $N(0) = 10$ ve $P(0) = 15$ dir. . . . .	102
Şekil 4.2: (a) ve (b) Allee sabiti $\beta$ değeri $\beta = 1$ 'den $\beta = 2.5$ 'e kadar artarken denge noktasındaki av ve avcı sayısını göstermektedir. Burada H noktası Hopf çatallanma noktasıdır. $(\beta, N, P)$ uzayında $\beta$ değeri artarken ortaya çıkan limit döngüleri şekil (c) de gösterildiği gibidir.	103
Şekil 4.3: (a) $k = 0.7$ , (b) $k = 0.8$ ve (c) $k = 0.9$ iken $N(0) = 10$ ve $P(0) = 15$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ve av-avcı faz portresi sırasıyla şekilde gösterildiği gibidir. . . . .	104
Şekil 5.1: $r_2 = 0.08, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$ ve $k = k_1$ iken $N(0) = 10$ başlangıç değerine sahip av popülasyonu çözüm grafiği $r_1 = 0.5$ (kare), $r_1 = 0.55$ (karo) ve $r_1 = 0.65$ (yıldız) değerleri için elde edilmiştir. . . . .	107
Şekil 5.2: $r_1 = 0.5, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$ ve $k = k_1$ iken $N(0) = 10$ başlangıç değerine sahip av popülasyonu çözüm grafiği $r_2 = 0.08$ (kare), $r_2 = 0.09$ (karo) ve $r_2 = 0.12$ (yıldız) değerleri için elde edilmiştir. . . . .	107
Şekil 5.3: $r_2 = 0.08, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$ ve $k = k_1$ iken $P(0) = 15$ başlangıç değerine sahip avcı popülasyonu çözüm grafiği $r_1 = 0.5$ (kare), $r_1 = 0.55$ (karo) ve $r_1 = 0.65$ (yıldız) değerleri için elde edilmiştir. . . . .	108
Şekil 5.4: $r_1 = 0.5, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$ ve $k = k_1$ iken $P(0) = 15$ başlangıç değerine sahip avcı popülasyonu çözüm grafiği $r_2 = 0.08$ (kare), $r_2 = 0.09$ (karo) ve $r_2 = 0.12$ (yıldız) değerleri için elde edilmiştir. . . . .	108
Şekil 5.5: (a) Çizelge 5.1'de yer alan parametre aralıkları için (4.1) sistemine ait her bir parametrenin zaman bağlı duyarlılık indeksi (b) Duyarlılık indeksi bar grafiği. . . . .	109
Şekil 5.6: (a) Çizelge 5.2'de yer alan parametre aralıkları için (4.1) sistemine ait her bir parametrenin zaman bağlı duyarlılık indeksi (b) Duyarlılık indeksi bar grafiği. . . . .	110

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1: Bileşen Allee etkisi mekanizmalarının özeti . . . . .	6
Çizelge 1.2: Literatürde yer alan bazı $F(D, E)$ fonksiyonları . . . . .	13
Çizelge 4.1: Seçilen $k$ değerlerine karşılık hesaplanan Allee sabiti ve (4.76) sisteminin denge noktası . . . . .	101
Çizelge 5.1: (4.1) sisteminde yer alan parametre değerleri için alt ve üst sınırlar	109
Çizelge 5.2: (4.1) sisteminde yer alan parametre değerleri için alt ve üst sınırlar	109







## KISALTMALAR

- YMT** : Yüksek mertebeden terimler  
**FAST** : Fourier Amplitude Sensitivity Test  
**diğ.** : Diğerleri





## SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$C^k$	k-kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı
$\dot{\mathbf{X}}$	$\mathbf{X}$ in $t$ ye göre türevi
$T^{-1}$	$T$ matris dönüşümünün tersi
$O$	Büyük-O notasyonu
$(x_1, \dots, x_2)^T$	$(x_1, \dots, x_2)$ vektörünün devriği/transpozu
$\lambda$	Özdeğer
$\text{Re}(\lambda)$	$\lambda$ kompleks özdeğerinin reel kısmı
$\text{Im}(\lambda)$	$\lambda$ kompleks özdeğerinin sanal kısmı
$J$	Sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi
$\text{iz}(J)$	Jakobiyen matrisin izi
$\det(J)$	Jakobiyen matrisin determinanı
$\approx$	Yaklaşık olarak eşit



## RESİM LİSTESİ

### Sayfa

- Resim 1.1: a) Güney Afrika çöl fareleri (rotifer) gruplar halinde yaşar. Bebek bakıcılığı, gençleri yetiştirme, yiyecek arama gibi sorumluluklar paylaşılır. b) Bildircinlar kış aylarında düşük sıcaklıklarla mücadele edebilmek için bir araya toplanır. c) Sahra Çölünde tek başına ayakta kalan Tenere ağacı. d) Dişilerini ve yavrularını çemberin içine alarak avcılardan koruyan geyikler. e) Yırtıcıların sürüden birini seçme ihtimalini azaltan sığırcık kuşu sürüsü. f) Birlikte hareket ederek besin arayan ton balıkları (Courchamp ve diğ., 1999). 2



## 1. GİRİŞ

Gökyüzünde kuşların adeta dans eder gibi kanat çırpıtığı anlar sık karşılaşılabilen bir doğa olayıdır. Peki kuşların bu hareketine neden olan itici güç<sup>1</sup> nedir? Balıkların suda senkronize bir şekilde yüzmesi de aynı itici güçten mi kaynaklanır? Her ne kadar bilim insanları türlerin bu davranışını biyolojik, ekolojik ve psikolojik açıdan değerlendirmiş olsalar da bu soruların ortak cevabı "hayatta kalma stratejisi" dir (Courchamp ve diğ., 2008).

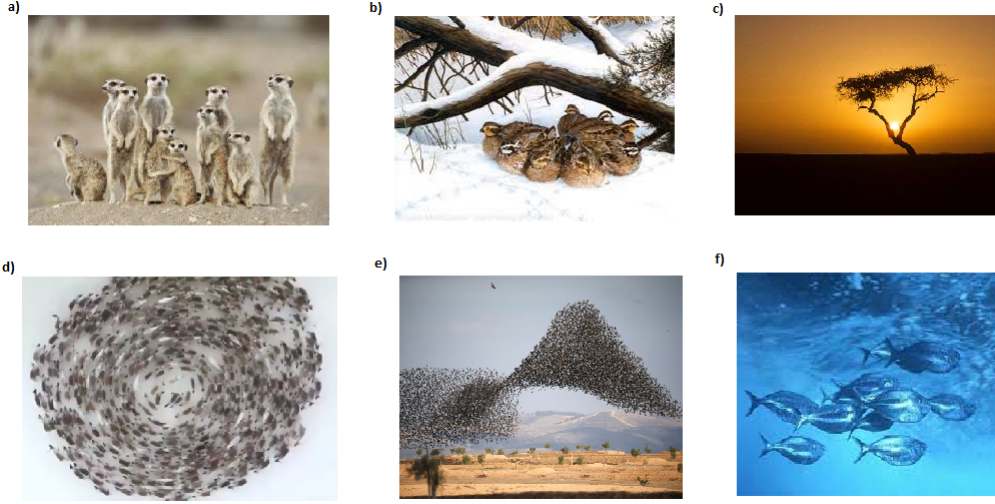
Türlerin grup halinde yaşaması ve belirli bir alanda kümeleşmesi, hayatta kalma mücadelesinin temel dinamiklerinden biridir. Bu kümeleşme sayesinde toplam yüzey alanı azalır ve türler kötü hava koşulları, avcılar gibi dışarıdan gelebilecek tehlikelere karşı hayatta kalma ihtimallerini artırırlar. Örneğin, soğuk hava koşullarında bildircinlar birbirlerine çok yakın durarak soğuk havayla temas eden yüzeylerini azaltırlar. Benzer şekilde Amerikan antilopları kümeleşerek, sığırcık kuşları ve bazı balıklar da senkronize hareket ederek avcılarına karşı koruma bandı oluştururlar. Erkek geyikler, dişi geyikleri ve yavru geyikleri yırtıcılardan korumak için bir çember oluşturarak onları çemberin ortasına alırlar ve etrafında dönmeye başlarlar. Bu sayede dişi ve yavru bireylerin ölüm oranı azalır. Eğer kümeleşen gruptaki birey sayısı azalırsa bireylerin olumsuz dış etkilerle temas eden yüzey alanı artar, sonuç olarak bireylerin ölüm oranı yükselir. Bunların yanı sıra, tek başına kalan bir ağaç tozlaşma yapamaz ve çoğalamaz. Benzer şekilde avlanmak için birlikte gezen ton balıkları, türdeşleri yeterli sayıda değilse avlanamazlar ve besin bulamadıkları için yaşamlarını devam ettiremezler (Bakınız Resim 1.1).

Literatürde türlerin yaşamlarına devam edebilmesi için türdeşlerin mevcut ve yeterli sayıda olması gerektiğini vurgulayan ve deneysel çalışmalar yürüten öncü kişi Warder Clyde Allee'dir. Allee'nin asıl çalışma alanı hayvan kümeleşmesi üzerinedir. Allee, suda yaşayan bazı türlerin suyun kimyasını olumlu etkilediğini gözlemlemiştir. Allee'ye göre belirli su canlıları suya kalsiyum tuzları gibi koruyucu madde bırakmakta ve bu maddeler sudaki türlerin yaşama şansını arttırmaktadır. Bu olayın gerçekleşmesi için ise kimyasal maddelerin çok seyreltik olmaması, yani türlerin bir arada olması, kümeleşmesi gerekmektedir (Allee, 1931). Allee, gözlemlerini gerçek verilere dökebilmek için 1932 yılında Japon balıklarını<sup>2</sup> kullanarak bir deney yapmıştır. Deney için 140 adet balık kullanmıştır. İlk olarak, 70 adet balığı bireysel olarak izole etmiş diğer 70 adet balığı ise 10'arlı 7 gruba ayırmıştır. Daha sonra, her iki gruptaki balıkların ölüm sürelerini hesaplamıştır. Allee, grup halinde yaşayan balıkların ortalama yaşam süresini 507 dakika olarak ölçerken, bu süreyi tek başına yaşayan balıklarda 182 dakika olarak hesaplamıştır.

<sup>1</sup>İtici güç, doğadaki gelişmenin ve değişimin hareket ettirici nedenini dile getiren bir kavramdır (Url-1).

<sup>2</sup>Japon balıkları 'Gold Fish' olarak bilinmektedir. Ortalama yaşam süresi 10 ile 30 yıl arasındadır (Url-2).

Bu deney sonucunda Allee, bir popülasyondaki bireylerin kendi türlerinden sağladıkları faydanın önemli olduğu, ve bu durumun doğal bir sonucu olarak da bireylerin popülasyon yoğunluğundaki düşüştü negatif etkilendiklerini tespit etmiştir. Allee'ye göre, eğer bir türe ait popülasyon yoğunluğu düşük seviyelerde ise, bireylerin üreme sayısı azalacak ve bireyler türdeşlerinden sağladıkları faydaya ulaşabilmek için sayıca yetersiz kalacaklardır (Allee, 1949).



Resim 1.1: a) Güney Afrika çöl fareleri (rotifer) gruplar halinde yaşar. Bebek bakıcılığı, gençleri yetiştirme, yiyecek arama gibi sorumluluklar paylaşılır. b) Bildircinlar kış aylarında düşük sıcaklıklarla mücadele edebilmek için bir araya toplanır. c) Sahra Çölünde tek başına ayakta kalan Tenere ağacı. d) Dişilerini ve yavrularını çemberin içine alarak avcılardan koruyan geyikler. e) Yırtıcıların sürüden birini seçme ihtimalini azaltan sığırcık kuşu sürüsü. f) Birlikte hareket ederek besin arayan ton balıkları (Courchamp ve diğ., 1999).

Allee ilerleyen çalışmalarında çöl (çeçe) sineğinin, belirli bir popülasyon yoğunluğun altında iken kendiliğinden ortadan kaybolduğunu, denizkestanesi, rotifer vb. gibi bazı türlerin yaşama şanslarını daha çok artırmak amacıyla grup halinde yaşadıklarını gözlemlemiştir. Allee, Japon balıkları ile yaptığı deneyin yanı sıra yeterli sayıdaki denizyıldızlarının UV ışını veya toksik kimyasallara maruz bırakıldıklarında hayatta kalma şanslarının yükseldiğini gösteren deneysel ve gözlemsel çalışmalar yürütmüştür (Allee, 1951). W.C. Allee'nin öncü çalışmasından bu yana "Allee etkisi", bir türün türdeş bireylerinin varlıklarından dolayı sağladıkları fayda olarak kabul edilmekte olup bu durum Odum (1953) tarafından Allee prensibi olarak adlandırılmıştır.

Devam eden çalışmalarında Allee (1958), buğday unundaki kın kanatlı böcekleri analiz ederek bu türün en yüksek doğum oranına popülasyon yoğunluğu orta seviyede iken ulaştığını gözlemlemiştir. Yüksek yoğunlukta yetişkin bireyler arasındaki rekabet sonucu yumurtalar zarar görürken, düşük yoğunlukta dişi bireyler eş bulma sorunu ile karşılaştığından daha az yumurta üretmektedir.



Allee, düşük popülasyon yoğunluğunun nüfus artış hızındaki negatif etkilerini dikkate alarak düşük popülasyon yoğunluğunun,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad r, K > 0 \quad (1.1)$$

ile verilen klasik lojistik modelin (Allen, 2007) varsayımlarını ihlal ettiğini gözlemlemiştir. (1.1) modelinde,  $N(t)$ ,  $t$  anındaki nüfus büyüklüğünü (devam eden ifadelerde  $N$  olarak gösterilmiştir),  $r$ , doğal büyüme oranını ve  $K$  taşıma kapasitesini göstermektedir. Allee, gözlemsel çalışmaların sonucunda, aşağıdaki model ile ((1.1) modelinin geliştirilmiş hali) Allee etkisinin basit bir matematiksel örneğini ortaya koymuştur:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{N}{A} - 1\right) \left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (1.2)$$

Burada  $r$ ,  $N$  ve  $K$  (1.1) modeli ile aynı olup  $0 < A < K$  olmak üzere  $A$ , 'Allee eşik değerini' göstermektedir.  $0 < N < A$  için popülasyon negatif büyüme oranına sahip iken  $A < N < K$  için büyüme oranı pozitifdir. Biyolojik açıdan açıklamak gerekirse, tek bir türü ele alan ve Allee etkisini içeren popülasyon modelinde, tür ya yok olacak ya da taşıma kapasitesine ulaşacaktır. Eğer popülasyon büyüklüğü Allee eşik değerinin,  $A$ 'nın, altında ise popülasyon ortadan kaybolacaktır.

Dikkat edilirse (1.1) modelinde eşitliğin sağ tarafı  $f(N)$  fonksiyonu olarak tanımlanırsa, bu fonksiyon aslında  $f(N) = a_0 + a_1N + a_2N^2$  polinomunun bir özel halidir. Bu modelde,  $a_0 = 0$  olmak üzere  $a_1 = r$  ve  $a_2 = -\frac{r}{K}$  dir. Öyleyse, düzgün<sup>1</sup>  $f$  fonksiyonunu aşağıdaki şekilde Taylor serisine açabiliriz:

$$f(N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n N^n = a_0 + a_1 N + a_2 N^2 + \dots \quad (1.3)$$

Burada  $a_0 = 0$  olmak üzere

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + \dots = N(a_1 + a_2 N + a_3 N^2 + \dots) = Ng(N) \quad (1.4)$$

olarak ifade edilebilir. Genellikle bir şey kaybetmeksizin kabul edelim ki  $g(N) = a_1 + a_2 N + a_3 N^2$  olsun. Dikkat edilirse  $a_2 > 0$  ve  $a_3 < 0$  ise Allee etkisinden bahsedilebilir. Özel olarak, kabul edelim ki  $a, b > 0$  olmak üzere  $a_1 = r - ab^2$ ,  $a_2 = 2ab$  ve  $a_3 = -a$  olsun. Öyleyse,

$$g(N) = r - ab^2 + 2abN - aN^2 = r - a(N^2 - 2ab + b^2) = r - a(N - b)^2 \quad (1.5)$$

olarak elde edilir. Burada  $N < b - \sqrt{\frac{r}{a}}$  ve  $N > b + \sqrt{\frac{r}{a}}$  iken kişi başı nüfus artış hızı, yani  $g(N)$  negatif olur.

Bir popülasyonun yaşadığı çevre küçük bir alan fakat bu alanda popülasyon yoğunsa

<sup>1</sup>Düzgün fonksiyon, tanım kümesindeki her noktada türevlenebilir (istenilen mertebede kısmi türevleri var ve sürekli) fonksiyondur (Munkres, 2014).

veya popülasyon birbirinden uzak bölgelerde yaşayan farklı gruplara ayrılmış ve her bir gruptaki birey sayısı fazla ise Allee etkisinden bahsedebiliriz. Bu kapsamda popülasyonun yaşam alanında ne kadar çok birey varsa (belirli bir taşıma kapasitesine kadar) popülasyonun devamlılığı o kadar başarılı olacaktır.

Allee etkisi kavramı iyi bilinmesine rağmen bu kavramın birden fazla anlamı mevcuttur. W. C. Allee açıkça bir tanım yapmasa da bir popülasyondaki bireylerin hayatta kalabilmesi için gerekli unsurların ne olduğunu belirlemiştir. Bu yüzden Allee etkisi genel olarak bireysel uyumun herhangi bir bileşeni ile türdeşlerin sayısı veya yoğunluğu arasındaki pozitif bir ilişki olarak tanımlanır. Uyum, bireyin tüm yaşamı boyunca ya da belirli bir yaşam periyodunun tamamında dikkate alınması gereken bir unsurdur. Tek bir zaman diliminde bireysel uyumun herhangi bir bileşenini tek başına ele almak yanıltıcı olabilir. Örneğin; bir popülasyondaki birey sayısında bir yıl boyunca artış gözlemlenebilir. Fakat besin kaynakları kısıtlı ise bireylerin üreme veya hayatta kalma süresi azalabilir. Sonuç olarak da birey sayısı dengede kalabilir. Popülasyonların büyük ya da küçük olması yaşanan ortam koşullarına bağlıdır. Büyük veya yoğun popülasyonlar kaliteli ortam koşullarında yaşayabilirken, ortam koşulları elverişli olmayan popülasyonlar küçük veya seyrek olabilir. Dolayısıyla büyük popülasyondaki bireylerin popülasyona ya da topluluğa bireysel uyumu yüksek olabilir ve bu durum Allee etkisine bağlı olmayabilir.

## 1.1 Allee Etkisi Temel Tanım ve Notasyonlar

Allee etkisi ile ilgili bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

**Kritik Allee Değeri (Allee Eşik Değeri) :** Eğer popülasyon büyüklüğü/ yoğunluğu bu değer altında ise kişi başı nüfus artış hızı negatif olur.

**Bileşen Allee Etkisi:** Bireysel uyum bileşeni ile popülasyon büyüklüğü/yoğunluğu arasındaki pozitif ilişkidir.

**Demografik Allee Etkisi:** Genellikle kişi başı büyüme oranı ile ilişkilendirilen, bireysel uyumun tüm bileşenleri ile popülasyon büyüklüğü/yoğunluğu arasındaki pozitif ilişkidir.

**Güçlü Allee Etkisi:** Allee kritik değerine sahip bir demografik Allee etkisidir.

**Zayıf Allee Etkisi:** Allee kritik değerine sahip olmayan bir demografik Allee etkisidir.

Aşağıda, literatürde kullanılan Allee etkisinin birkaç önemli alt kategorisine yer verilmiştir.

### 1.1.1 Bileşen ve Demografik Allee Etkisi

Bileşen Allee etkisi, bireysel uyum bileşeninin popülasyon büyüklüğü/yoğunluğu (Devam eden açıklamalarda popülasyon yoğunluğu kelimesi kullanılacaktır.) ile olan pozitif ilişkisidir. Uyum genel olarak bir bireyin bir sonraki nesile genetik katkısı olarak tanımlanır. Bir sonraki nesile katkıda bulunmak için bir bireyin önce hayatta

kalması, sonra üremesi ve daha fazla üremek için hayatta kalmaya devam etmesi gerekir. Bireysel uyum bileşeni, üreme veya hayatta kalabilme mücadelesi ile popülasyon yoğunluğunu etkileyebilir. Örneğin, popülasyondaki bir birey, eş bulamayıp çoğalamaz ise bireysel olarak uyumu düşer ve normal üreme sayısından daha az bir sayı ile popülasyonu etkiler. Bileşen Allee etkisi bireysel uyumda düşüş yaratabilir, fakat popülasyonun tamamında büyük bir düşüş yaratmayabilir. Popülasyonda çok sayıda birey mevcut ise avcılara karşı tetikte olmak daha kolay olabilir ve bu durum bireysel uyumu yükseltebilir. Ancak popülasyondaki birey sayısı aşırı fazla ise bireyler arası rekabet başlayabilir, her bir birey için besin veya eş bulmak zorlaşabilir, dolayısıyla bireysel uyum azalabilir.

Hayatta kalma ve üreme çok sayıda alt bileşene sahiptir. Bitki üremesini ele alırsak, bitki üremesi çiçek sayısı, tozlaşma oranı, tohum açma gibi bileşenlere ayrılabilir. Kuşlar için ise parlak tüyler gibi bir özelliğin hem üreme hem de hayatta kalma üzerinde etkileri olabilir. Tüm bu etkiler göz önüne alınarak Allee etkisinin genel mekanizması Çizelge 1.1'de özetlenmiştir. İlk olarak üreme etkisini ele alalım. Üreme için bilinen mekanizmalar, durağan canlı/organizmalarda dölleme etkinliğini, hareketli canlı/organizmalarda eş bulmayı ve işbirliğine dayalı üremeyi içerir. Durağan organizmalar kalıcı olarak karaya veya deniz tabanına bağlı olarak yaşarlar (Örneğin: bitkiler). Bunun yanı sıra, birçok hayvan türü de üreme sırasında durağandır. (Özellikle deniz omurgasızları: süngerler, mercanlar, anemonlar, istiridyeler vb). Çift kabuklular, derisidikenliler ve kum kurtları gibi durağan olmayan fakat çok az hareket eden organizmalar da vardır. Tüm bu organizmalar türdeşleriyle doğrudan temas kurmadan yaşadıkları ortam (su veya hava) yoluyla üremelerini gerçekleştirirler. Dolayısıyla seyrek popülasyondaki bireyler daha az gamet alarak verimli bir dölleme/başarılı bir üreme gerçekleştiremeyebilirler (Courchamp ve diğ., 2008).

Eş bulma bir diğer üreme Allee etkisi mekanizmasıdır. Düşük yoğunluktaki popülasyonlarda bireyler her zaman uygun bir eş bulamayabilir ve üreme sayıları buna bağlı olarak azalabilir.

Hareketli organizmalarda bazı dişi türleri, üreme verimliliklerini en üst düzeye çıkarabilmek için tüm yumurtalarının döllemesini ister. Bu amaçla, gerekli spermi verebilecek yeterli sayıda erkek veya yeterince büyük bir erkek ile karşılaşmak ister. Seyrek popülasyonlarda, dişiler herhangi bir erkekle veya yeterli sayıda erkekle karşılaşamayabilir ya da optimum boyutta erkek seçemeyebilir. Balıkçılıkta mavi yengeç, karayip dikenli ıstakozu ve yeni zelanda kaya ıstakozu türlerinin özellikle büyük erkekleri hedef alınmaktadır. Sonuç olarak, bu türlerin dişi bireyleri sınırlı sperm yüzünden üremelerini azaltmaktadır. Bu da üreme Allee etkisinin bir başka mekanizmasıdır (Courchamp ve diğ., 2008).

Un kurdu türünde olduğu gibi bazı türler doğrudan eş bulamadıkları için değil yeterli sayıda türdeşleri ile karşılaşamadıkları için üreyemezler. Çünkü üremek için gerekli fizyolojik duruma türdeşlerinin varlığı ile ulaşabilirler. Bazı dişi bireyler de çekici erkeklerle çiftleşmelerinden elde ettikleri faydayı (örneğin genetik olarak daha çekici erkek yavrular meydana getirmek) baz alarak eş seçiminde bulunurlar. Dişilerin erkekler arasında seçim yapmadığı veya seçimin özellikle çekici olmayan erkeklerle sınırlı olduğu küçük veya düşük yoğunluklu popülasyonlarda, dişiler çiftleşmemeyi

Çizelge 1.1: Bileşen Allee etkisi mekanizmalarının özeti

Mekanizma	Çalışma Şekli	Örnekler
<b>Üreme</b>		
Yayılmış yumurtlama	Düşük popülasyon yoğunluğunda düşük sperm ve yumurta buluşma olasılığı	Mercan gibi derisidikenliler
Polen kısıtı	Düşük bitki popülasyon yoğunluğunda daha az polen taşınması	Bazı böceklerle tozlaşan bitkiler
Eş bulma	Düşük popülasyon yoğunluğunda uyumlu ve alımlı eş bulma zorluğu	Mezgitgiller İparhan Kelebeği
Üreme kolaylığı	Düşük popülasyon yoğunluğunda daha az türdeş faydası ile daha az üreme	Kertenkele Deniz kuşu, Lemur
Sperm kısıtı	Erkek bireylerin sayıca az olması sonucu dişilerin döllenme için sperm bulamaması	Mavi yengeç Dikenli ıstakoz
Toplu yaşama	Genç bireylerin üreme ve/veya yavru yetiştirme konusundaki başarısızlıkları	Afrikalı vahşi köpek
<b>Hayatta Kalma</b>		
Çevre koşullaması	Daha iyi mikrobiyolojik ortam için çevresel koşullarının iyileştirilmesi	Dağ şıcanı Meyve sineği Parazitler
Seyretme etkisi	Av popülasyonu azaldıkça avın avlanma riskinin artması	Kara kurbağa Ren geyiği
Avcılara karşı işbirliği	Düşük av popülasyon yoğunluğunda avcılara karşı savunma zorluğu	Kanada koyunu Kız kuşu, Mirket
<b>Üreme ve/veya</b>		
Besin arayışı	<b>Hayatta Kalma</b> Düşük popülasyon yoğunluğunda birlikte yiyecek bulma zorluğu	Kara kaşlı albatros, Gezgin güvercin
Yetiştiricilik	Yetişkin bireylerin gençleri yetiştirmek için yeterli sayıda olmaması	Morina balığı Kızıl deniz kirpisi
Genetik	Düşük popülasyon yoğunluğunda genetik çeşitlilik azalmasına bağlı bireysel uyumun azalması	Bazı bitki çeşitleri

tercih edebilir veya üremeye ya da yavrulara daha az önem verebilirler (Courchamp ve diğ., 2008).

Şimdi de bireylerin hayatta kalması ile ilgili Allee etkisi mekanizmalarını ele alalım. Türlerin hayatta kalabilmesi için yaşadıkları çevre koşulları önemlidir. Çevre denilince fiziksel (sıcaklık, rüzgar vb.), kimyasal (oksijen, hormonlar vb.) ve biyolojik (avcılar) etkenler akla gelebilir. Allee, ilk çalışmalarında kimyasal etkeni göz önünde bulundurmuştur. Ayrıca Allee, bildircin gibi bazı türlerin soğuk hava koşullarından korunmak için gruplar halinde yaşadıklarını gözlemleyerek fiziksel çevrenin önemini vurgulamıştır (Allee, 1951).

Avlanma, genellikle av popülasyonunda Allee etkisi yaratabilir. Avcılar, av popülasyonlarının büyüklüğüne ve yoğunluğuna göre farklı şekilde davranış sergileyebilirler. Örneğin, avcılar, daha yoğun besin bulunan alanlar aramak için hareket ederler. Eğer ortamda fazla av mevcutsa, avcılar belirli bir sınıra kadar av tüketebilirler. Ayrıca avcılar, kendi popülasyon büyüklükleri ve büyüme oranlarındaki değişiklikler yoluyla da av popülasyon yoğunluğundaki değişikliklere tepki verebilirler. Basit bir şekilde ifade etmek gerekirse, av popülasyon yoğunluğundaki bir azalma hem avcı sayısında hem de avcının tüketim oranında bir azalmaya neden olabilir. Fakat bu azalış av sayısındaki azalmayı dengelemek için yeterli değildir. Çünkü avcının av tüketimindeki azalış avın azalma hızından daha yavaş olabilir. Dolayısıyla, av popülasyon yoğunluğu azaldıkça her bir avcının avlanacağı av sayısı azalır, bunun sonucunda da her bir av popülasyonunun avlanma olasılığı artar. Bu mekanizmaya ren geyiklerini örnek verebiliriz. Avlanma, ren geyikleri için temel ölüm sebebidir. Dolayısıyla düşük popülasyon yoğunluğuna sahip ren geyiklerinde azalan yoğunlukla birlikte kişi başı nüfus artış hızı da azalır (Allee, 1958).

Bileşen Allee etkisi, sadece bireysel uyumu negatif etkilemekle kalmayıp aynı zamanda tüm popülasyonu da olumsuz etkiliyorsa demografik Allee etkisinden bahsetmek mümkündür. Demografik Allee etkisi, bireysel uyumun tüm bileşenleri ile popülasyon yoğunluğu arasındaki pozitif ilişkidir. Bir başka ifade ile, demografik Allee etkisi, bileşen Allee etkilerinin toplamıdır.

Yukarıda da yer verildiği gibi çeşitli bileşen Allee etkisi mekanizmaları mevcuttur. Bu mekanizmaların yanı sıra besin, eş ve yaşam alanı için rekabet etme gibi negatif yoğunluğa bağlı mekanizmalar da mevcuttur. Bir bileşen Allee etkisi mekanizması tek başına mevcut olsa bile, popülasyon büyüklüğü veya yoğunluğunun genel uyum üzerindeki net etkisini tahmin etmek kolay değildir. Dolayısıyla, bir demografik Allee etkisinin var olduğunu sadece bir tek mekanizmanın varlığından yola çıkarak belirlemek doğru değildir.

### **1.1.2 Güçlü Allee Etkisi ve Zayıf Allee Etkisi**

Güçlü Allee etkisi ve zayıf Allee etkisi birer demografik Allee etkisidir. Güçlü Allee etkisinde, nüfus yoğunluğu belirli bir kritik değerin, Allee eşik değerinin, altına düştüğünde, bireylerin kişi başına düşen büyüme oranı negatif olur. Dolayısıyla, eğer popülasyonlar kritik değere ulaşamazsa yok olmaya başlar. Zayıf Allee etkisinde ise düşük popülasyon yoğunluğundaki bireylerin kişi başına düşen büyüme oranı

düşüktür fakat hiçbir zaman negatif değildir. Bu yüzden zayıf Allee etkisinde bir kritik değer mevcut değildir.

Bir popülasyonun yaşadığı çevredeki demografik Allee etkilerini belirlemek zor olabilir. Popülasyonlar genellikle büyüme hızlarının düşük olduğu bölgelerde yaşamak istemezler. Bazıları bu bölgelerden kaçıp kendilerine yeni yaşam alanı yaratabilirken bazıları da bu bölgelerden kaçamayıp nesillerinin tükenme tehlikesi ile karşı karşıya kalabilirler. Bu nedenle, Allee etkilerinin nüfus ve topluluk dinamiklerindeki potansiyel önemini değerlendirebilmek için matematiksel modeller önemli bir araç olarak karşımıza çıkar.

Matematiksel modeller, genellikle zamana bağlı olarak değişen sistemlerin yapısını anlamak için kullanılır. Elde edilen bu modeller, zaman veya zaman ve konum etkenlerine bağlı olduğundan adi diferensiyel denklemler, fark denklemleri ya da kısmi diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulur. Bu denklemlerin tanımladığı dinamik sistemler zamana göre kesikli (ayrık) ve sürekli sistemler olarak ikiye ayrılır. Kesikli sistemlerin mevcut olduğu doğa olayları fark denklemleriyle modellenirken, sürekli sistemler için diferensiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılır. Örneğin, böcek, kelebek ve bitki gibi ardışık jenerasyonları örtüşmeyen popülasyonların dinamik yapısı fark denklemleri modelleri ile analiz edilir. Diferensiyel denklemler ise nesillerin aynı anda yaşadığı popülasyonları modellemek için kullanılır (Elaydi, 2006).

Hem sürekli hem de ayrık sistemlerde, bir popülasyon dinamiği, kişi başı nüfus artış oranını temsil eden bir  $g(N, X)$  fonksiyonu ile ele alınır. Burada  $N$ , nüfus büyüklüğü veya yoğunluğunu,  $X$  ise yiyecek, doğal düşmanlar, hava durumu vb. gibi nüfus artışını etkileyen diğer tüm değişkenleri temsil eder.  $X$  sabit olmak üzere, en basit sürekli ve ayrık popülasyon modeli sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

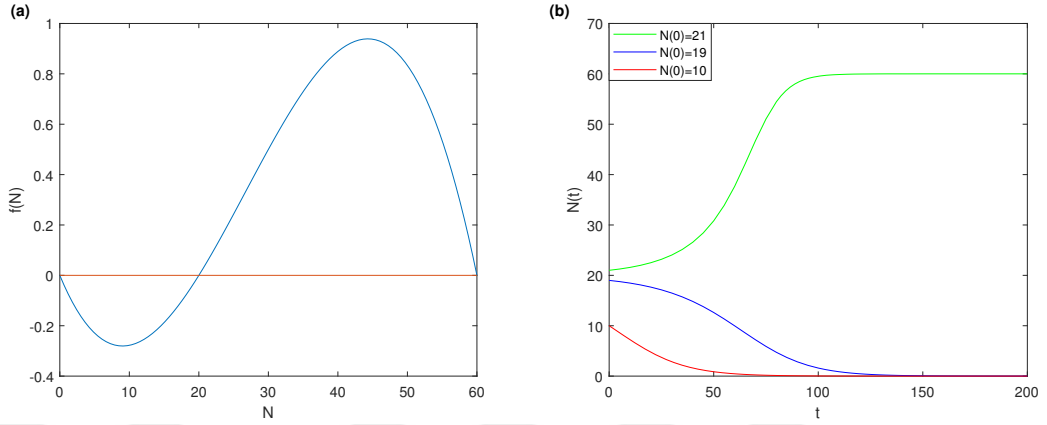
$$\frac{dN}{dt} = Ng(N) \quad (1.6)$$

$$N_{t+1} = N_t g(N_t). \quad (1.7)$$

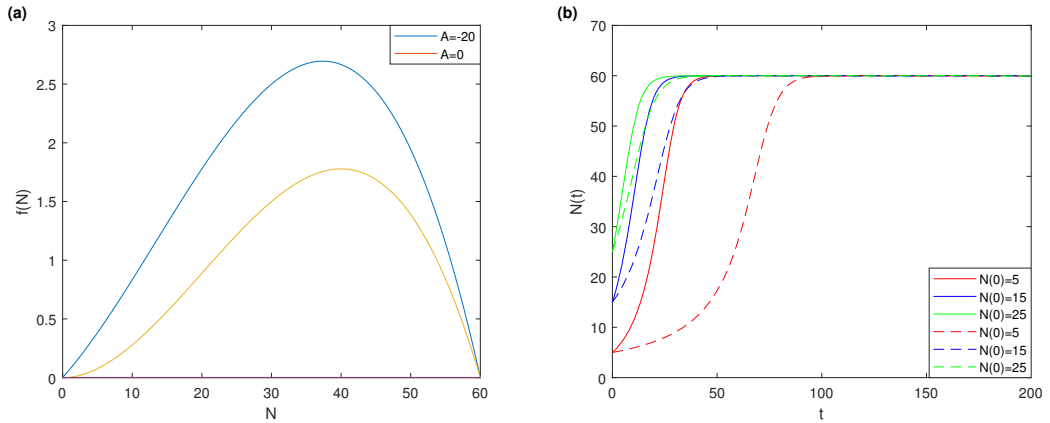
Her iki denklemde de  $t$  zamanı temsil etmektedir.  $g(N)$  fonksiyonu için tercih edilen bir form yoktur. Dolayısıyla ele alınan farklı  $g(N)$  fonksiyonları için zayıf Allee etkisi, güçlü Allee etkisi veya her iki etki birden mevcut olabilir. Aşağıda tek türü ele alan sürekli popülasyon modelleri için bazı  $g(N)$  fonksiyonları ele alınmış ve bu fonksiyonların analizlerine yer verilmiştir.

İlk olarak,  $g(N) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{K} - \frac{A}{K}\right)$  fonksiyonunu ele alalım.  $0 < A < K$  olmak üzere  $0 < N < A$  için,  $g(N) < 0$ , yani kişi başı nüfus artış hızı negatiftir. Şekil 1.1'nin ilk kısmında popülasyonun büyüme oranına,  $f(N) = Ng(N)$ , yer verilmiştir. Şekil 1.1'de  $0 < N < A$  için büyüme oranının negatif olduğu açıkça görülmektedir. Grafiğin ikinci kısmında ise farklı  $N(0)$  başlangıç değerleri için popülasyon yoğunluğunun zamana göre değişimi gösterilmiştir. Burada, Allee kritik değerinden düşük sayıda bireye sahip popülasyonlar yok olmaktadır. Sonuç olarak, ele alınan popülasyon modeli için güçlü Allee etkisi mevcuttur.

Aynı  $g(N)$  fonksiyonu,  $A \leq 0$  için pozitifdir. Bir başka ifadeyle, kişi başına düşen büyüme oranı pozitifdir. Şekil 1.2'de  $A = 0$  ve  $A < 0$  durumları ele alınarak popülasyonun büyüme oranı ve zamana göre değişimine yer verilmiştir. Dikkat edilirse, düşük popülasyon büyüklüğünde popülasyonun artış hızı daha düşüktür. Bu da zayıf Allee etkisinin bir göstergesidir.



Şekil 1.1: (a)  $r = 0.2$ ,  $A = 20$  ve  $K = 60$  için büyüme oranı (b) Aynı parametre değerleri için popülasyon yoğunluğu



Şekil 1.2: (a)  $r = 0.2$  ve  $K = 60$  için büyüme oranı (b) Aynı parametre değerleri için popülasyon yoğunluğu. Kesikli grafikler  $A = 0$  durumunu göstermektedir.

Araştırılmak istenen konuya göre  $g(N)$  fonksiyonu değişebilir. Örneğin, Delitala ve Ferraro (2020) tarafından ele alınan ve aşağıda ifade edilen

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{A+C}{N+C}\right) \quad (1.8)$$

Allee etkisine sahip kanser hücresi modelini inceleyelim. Burada  $N$ ,  $t$  anında insan vücudunda yer alan kanser hücresi sayısını,  $r$ , Allee etkisinin olmadığı durumda kanser hücresinin kendini yenileme hızını ve  $K$  taşıma kapasitesini gösterir.  $A$  parametresi, Allee kritik değerini ifade eder. Eğer  $A > 0$  ise güçlü Allee etkisi,  $A \leq 0$  ise zayıf Allee etkisi mevcuttur.  $C$  parametresi ise, kanser hücresinin üremek için kendi türlerinden elde ettikleri fayda miktarını temsil eder.  $A = -C$ , demografik Allee etkisinin olmadığı durumu ifade eder.

Kabul edelim ki  $A = 0$  olsun. Yani, zayıf Allee etkisi mevcut olsun. Bu durumda, (1.8) denklemi

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{C}{N+C}\right) \quad (1.9)$$

olarak yazılır. Analitik olarak incelemek gerekirse,  $C$  parametresi  $g(N)$  fonksiyonunun genel şeklini etkiler.  $C$  arttıkça  $g(N)$  fonksiyonunun grafiği daha düz hale gelir ve daha düşük maksimum değerlere ulaşır. Dolayısıyla, çok yüksek  $C$  parametre değerinde, sadece yüksek kanser hücresi miktarında kayda değer bir büyüme meydana gelebilir (Bakınız Şekil 1.3). Eğer  $C = 0$  ise, tür içi dayanışma sözcüğü değilse, kanser hücresi kendiliğinden de artabilir. Bu gözlemi (1.9) denkleminin çözümü ile açıklayalım.  $C = 0$  ise (1.9) denklemi üstel büyüme modeli olan ( $K$ , lojistik terimi ile sınırlı) (1.1) denkleminin ingirgenir. (1.1) ve (1.9) denklemlerinin her ikisi de  $N = 0$  (kararsız) ve  $N = K$  (kararlı) denge noktasına sahiptir. Dolayısıyla, Allee etkisi içermeyen (1.1) modeli ile zayıf Allee etkisini ele alan (1.9) modeli daha çok kanser hücresinin büyüme hızına göre farklılık gösterir ve bu fark  $N$  küçüldükçe artar. Kabul edelim ki  $N \ll K$  olsun. Bir başka ifade ile,  $N$  çok küçük olsun. Öyleyse, her iki modelde de  $N/K$  terimi ihmal edilip elde edilen denklemlerin çözümü sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{dN}{dt} = rN \Rightarrow \frac{dN}{N} = rdt \Rightarrow \ln N \Big|_{N_0}^N = rt \Rightarrow t = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{N}{N_0} \right) \quad (1.10)$$

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{C}{N+C}\right) \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{N+C}{N^2} dN = \int_0^t rdt \Rightarrow t = \frac{1}{r} \left[ \ln \left( \frac{N}{N_0} \right) + \frac{C}{N_0} - \frac{C}{N} \right]. \quad (1.11)$$

Burada  $N_0$ ,  $t = 0$  anındaki hücre sayısını gösterir ve  $N > N_0$  kabul edilir. Yukarıdaki denklemlerden açıkça görülüyor ki, zayıf Allee etkisini içeren model belirli bir  $N \ll K$  değerine ulaşabilmek için lojistik modele göre  $C$ 'ye bağlı ek bir süreye ihtiyaç duymaktadır. Ayrıca bu süre  $C$  arttıkça artmaktadır. Şekil 1.3'te (1.1) ve (1.9) dinamikleri farklı  $C$  değerleri için karşılaştırılmıştır. Grafikten açıkça görülüyor ki zayıf Allee etkisini içeren (1.9) modelinde  $C$  arttıkça büyüme oranı azalmaktadır.

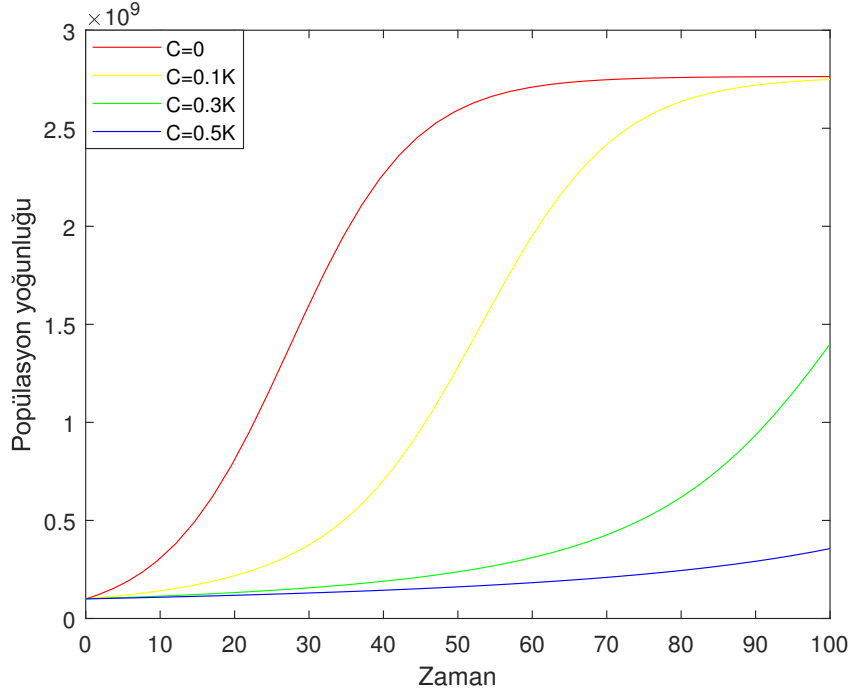
Şimdi de kanser tedavisi yöntemini ele alalım. Tedavi yöntemi, kansere neden olan hücrede azalma meydana getireceğinden (1.1) ve (1.9) modeline  $-gN$  terimi eklenerek modellenebilir. Burada  $g$ , sabit bir değer ya da zamanın bir fonksiyonu olarak ele alınabilir.

Kabul edelim ki  $g$  sabit bir katsayı olsun. O halde (1.1) denklemi

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - gN \quad (1.12)$$

ile ifade edilir.





Şekil 1.3:  $N(0) = 1 \times 10^8$  başlangıç değeri için (1.1) ve (1.9) dinamiklerinin farklı  $C$  değerleri için karşılaştırılması. Burada  $r = 0.12$  ve  $K = 2.764 \times 10^9$  alınmıştır.

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \text{ ve } \bar{N} = 0 \text{ denge noktası olmak üzere}$$

$$f'(\bar{N}) = r - g < 0 \Leftrightarrow r < g \quad (1.13)$$

şartı altında  $\bar{N} = 0$  denge noktası lokal kararlı<sup>1</sup> olur. Biyolojik açıdan açıklamak gerekirse, eğer kanser tedavisinin hızı  $g$ , büyüme hızı  $r$  den büyük olursa, uygulanan tedavi ile kanserli yapı yok olur.

Benzer şekilde zayıf Allee etkisi içeren (1.9) modelinde tedavi yöntemini ele alalım.  $g$  sabit bir katsayı olmak üzere

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{C}{N+C}\right) - gN \quad (1.14)$$

denkleminin bir denge noktası  $\bar{N} = 0$  dir. Denklemin sağ tarafını  $f(N)$  fonksiyonu ile gösterelim. Eğer

$$f'(\bar{N}) = -g < 0 \Leftrightarrow g > 0 \quad (1.15)$$

gerçeklenirse  $\bar{N} = 0$  denge noktası lokal kararlıdır. Sonuç olarak, her iki modelde de uygulanan tedavi sürecinde kanser hücresi sayısı farklı oranlarda da olsa azalacaktır.

<sup>1</sup>Bir diferensiyel denklemin denge noktasının kararlılığı Bölüm 4'te tanımlanmıştır.

Eğer tedaviye son verilirse, yani  $g = 0$  durumunda, kanser hücreleri yeniden çoğalacaktır.

Peki güçlü Allee etkisinde dinamik yapı nasıl değişecektir? Pozitif  $A$  değeri için,  $N < A$  olmak üzere

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{A+C}{N+C}\right) < 0 \quad (1.16)$$

olup güçlü Allee etkisi mevcuttur.  $\bar{N} = 0$  (1.16) denkleminin bir denge noktası olup  $f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{A+C}{N+C}\right)$  olarak tanımlayalım. Burada

$$f'(\bar{N}) = -\frac{rA}{C} < 0 \quad (1.17)$$

elde edilir ve herhangi bir koşula bağlı kalmaksızın  $\bar{N} = 0$  denge noktası lokal karardır. Bu demek oluyor ki, güçlü Allee etkisi altında kanser hücresi yok olacaktır.

Aynı model için tedavi yöntemini göz önüne alırsak:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{A+C}{N+C}\right) - gN \quad (1.18)$$

modeli için  $\bar{N} = 0$  denge noktası

$$f'(\bar{N}) = -\frac{rA}{C} - g < 0 \quad (1.19)$$

şartı altında lokal kararlı olacaktır. Dolayısıyla, güçlü Allee etkisi içeren modelde tedavi sona erse bile kanser hücresi sayısı azalacaktır. Sonuç olarak, güçlü Allee etkisinin kanser tedavisinde önemli bir yere sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Allee etkisini içeren modellerde, kişi başı nüfus artış hızının yanı sıra bileşen Allee etkisi mekanizmaları için de genel bir matematiksel form yoktur. Fakat ele alınan mekanizmalar, bazı genel özellikleri sağlayan farklı fonksiyonlarla temsil edilebilir. Örnek olarak eş bulma mekanizmasını ele alalım. Kabul edelim ki  $F(D, E)$  fonksiyonu bu mekanizmayı temsil etsin. Burada  $D$  dişi popülasyon büyüklüğünü,  $E$  ise erkek popülasyon büyüklüğünü göstermektedir.  $F(D, E)$  fonksiyonu, sürekli popülasyon modellerinde dişi popülasyonun eş bulma oranı, ayrık popülasyon modellerinde ise belirli bir zaman aralığında dişi popülasyonun eş bulma olasılığı olarak yorumlanabilir. O halde  $F$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar:

- Eğer popülasyonda erkekler mevcut değilse veya dişi popülasyonun karşılaşabileceği erkek popülasyonu ortamda bulunmuyorsa, dişi popülasyonu üremek için eş bulamaz, yani keyfi  $D$  değeri için  $F(D, 0) = 0$  olur.

Çizelge 1.2: Literatürde yer alan bazı  $F(D, E)$  fonksiyonları

Fonksiyon	Hipotez	Referanslar
$1 - e^{-(E/A)}$	$E$ sabit olmak üzere dişilerin eş bulma oranı aynıdır. Burada $A$ , Allee etkisini göstermektedir. $A$ arttıkça eş bulma Allee etkisi artacaktır.	Boukal ve Berec, 2009 Lutscher ve diğ., 2023
$\frac{E}{E+A}$	Çok eşlilik mevcuttur. Tüm dişiler eşlerini aynı oranda arar.	Duman ve Merdan, 2009 Chen ve diğ., 2024
$1 - \left(1 - \frac{E}{B}\right)^n$	$B$ popülasyonların yaşadığı bölge ve $n$ bölge sayısı olmak üzere dişi bireylerin birim zamanda (üreme döneminde) eşlerini bulma olasılığı rastgele dağılmıştır.	McCarthy, 1997 Fisher ve diğ., 2020

- Eğer dişi popülasyonu sabit bir değerde iken erkek popülasyonu artarsa, dişi bireylerin eş bulma oranı/olasılığı artar. Dolayısıyla  $F(D, E)$  fonksiyonu, sabit  $D$  değeri için  $E$  nin azalmayan bir fonksiyondur. Benzer şekilde, sabit erkek popülasyon değeri için dişi popülasyonun artması erkek popülasyonunun eş bulma oranı/olasılığını artıracığından  $F(D, E)$  fonksiyonu sabit  $E$  değeri için  $F$  nin azalmayan bir fonksiyondur.
- Eğer erkek popülasyonu dişi popülasyonundan sayıca çok fazla ise bireylerin eş bulma ihtimalleri oldukça yüksektir. Bir başka ifadeyle, yeterince büyük  $E/D$  oranı için  $F(D, E)$  fonksiyonu 1'e yaklaşır.

Literatürde yukarıdaki şartları sağlayan farklı  $F(D, E)$  fonksiyonları ile eş bulma Allee etkisine yer verilmiştir. Bu fonksiyonların en basit halleri Çizelge 1.2'de gösterilmiştir.

Tek türü ele alan popülasyon modelleri Allee etkisini anlamada oldukça faydalıdır (Bakınız: Çelik ve diğ. 2008; Karaoğlu, 2011; Merdan ve Gümüş 2012; ve referansları). Tür içi etkileşimleri göz önüne alırsak avlanma, rekabet, parazit veya mutualist yaşama gibi karşılıklı etkileşimlerden herhangi biri de Allee etkisinden etkilenebilir ve popülasyon modelinde farklı dinamikler gözlemlenebilir (Bakınız: Çelik ve Duman, 2009; Kang ve diğ., 2015; Liang ve diğ., 2024; Merdan ve Duman, 2009; Merdan, 2010 ve bu makalelerde atıf yapılan kaynaklar).

Teorik ekolojistlerin av-avcı dinamiklerini anlamak için kullandıkları en yaygın model aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= Ng(N) - f(N, P)P \\ \frac{dP}{dt} &= ef(N, P) - mP.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Burada  $g(N)$  avın büyüme oranını,  $f(N, P)$  tepki fonksiyonunu temsil eder.  $m$ , avcılarının yoğunluğundan bağımsız kişi başı ölüm oranıdır ve  $e$ , avın tüketilmesinden

elde edilen enerjinin avcı yavrulara dönüştürülme verimliliğini belirten pozitif bir sabittir. Bu av-avcı modelinin başka varyantları da mevcuttur (Guckenheimer and Holmes, 1983; Murray, 2002; Strogatz, 1994).

Literatürde Allee etkisi farklı formlarda gösterilmiş olup yalnızca av popülasyonu veya yalnızca avcı popülasyonu ya da her iki popülasyonda Allee etkisi görülebilir. Allee etkisini kişi başı büyüme oranı olan  $g(N)$  fonksiyonunda açık bir şekilde ya da  $Ng(N)$  terimini Çizelge 1.2'deki gibi bir fonksiyon ile çarpılmış şekilde görebiliriz.

## 1.2 Literatür Araştırması

Warder Cycle Allee'nin 1931 yılındaki deneysel çalışmaları ile literatüre giren Allee etkisi, Allee ve öğrencileri tarafından elli yıla yakın bir süre boyunca çalışılmıştır. Ekoloji alanında araştırma yapan bilim insanları ise popülasyon dinamiği üzerinde Allee etkisini incelemek için toplu bir veri ve uzun bir süreç gerektiğini öne sürerek bu etkiye araştırmalarında yer vermemiştir. Ancak çevre dengelerinin bozulmaya başlaması ve biyoçeşitliliğin azalması ile birlikte Allee etkisi yeniden bilim adamlarının araştırma alanına girmiştir. Dennis'in (1989) Allee etkisi üzerine yaptığı araştırma ve Caughley'in (1994) küçük popülasyonlar ile azalan popülasyonların neden yok olduğuna dair yaptığı çalışma, Allee ve öğrencileri dışında yapılan ilk çalışmalardır. Bu çalışmalardan sonra Allee etkisi üzerine yapılan araştırmalar hızlanmış ve araştırmalar balıkçılık, biyolojik türlerin kontrolü/korunması mekanizlarında yol gösterici olmuştur.

Biyolojik ve ekolojik modellerin yanı sıra nüfus dinamiklerinde de Allee etkisi görülebilir. Örneğin bir yerleşim yerinde (daha çok köy ve kırsal kesimlerde) nüfus belirli bir kritik değere kadar azalırsa, sosyal, ekonomik ve kültürel yaşamın devamı için insan gücü yetersiz kalır. Bu durumda bölgeden göç artar, üretim faaliyetleri durur veya okul gibi kurumlar kapanır (Day, 1975).

Sosyal bilimlerden de örnek vermek gerekirse kültürel/ırk çeşitliliğinin yok olması ile kullanılan dillerin yok olması arasında benzerlik bulunmaktadır. Genellikle sözlü veya yazılı olarak daha az kullanılan diller insanları bu dilleri kullanmaya veya öğrenmeye teşvik etmemektedir (Sutherland, 2003).

Allee etkisi popülasyon ve topluluk dinamikleri, davranışsal ekoloji, biyolojik çeşitliliğin korunması, epidemiyoloji, evrim ve nüfus yönetimi gibi ekolojinin farklı dallarında şaşırtıcı sonuçlar sunmaktadır. Walter Clycle Allee'nin deney ve gözlemleri ile başlayan "Allee etkisi" uzun yıllardır çalışılan ve günümüzde çalışılmakta olan aktif bir araştırma konusudur. Güncel bazı çalışmalara yer vermek

gerekirse, Yuan ve diğ. (2024) balıkçılığın sürdürülebilir gelişimi için ele aldıkları av-avcı sisteminde avcının büyümesinde; Su ve diğ. (2024), Pal ve diğ. (2024) popülasyon dinamiklerinin analizinde; Bouin ve diğ. (2024) ise reaksiyon-difüzyon denkleminde Allee etkisini ele almışlardır. Ma ve Meng (2024) zayıf Allee etkisi altında üç türlü bir besin zinciri sisteminin dinamikleri üzerine bir çalışma sunmuştur. Hernández-López ve diğ. (2023) bağışıklık sistemi ve kanser hücreleri arasındaki dinamikte; Yang ve Fan (2023) bir plankton modelinin dinamiğinde Allee etkisine yer vermiştir. Bu çalışmaların yanı sıra, Sardar ve Khanjanchi (2022) Allee etkisine sahip bir tümör hücresinin evrimini incelemiştir.

Bu tezde yukarıdaki çalışmalardan farklı olarak Allee etkisi altında böcek, bitki ve kelebek gibi ardışık popülasyonları çakışmayan türler ile bir önceki popülasyonun bir sonraki popülasyona katkı sağladığı, yani memeliler ve bazı deniz canlıları gibi ardışık nesillerin bir arada yaşadığı türlerin analizine yer verilecektir. Bunun için Leslie tipi sürekli av-avcı popülasyon modeli ile bu modelin Euler metodu ile ayrıklaştırılmasıyla elde edilen ayrık av-avcı popülasyon modeli ele alınacaktır. Her iki modelin kararlılık ve çatallanma analizi gerçekleştirilecek, Allee prensibinin sürekli ve ayrık av-avcı sisteminin dinamiğindeki etkileri karşılaştırılacaktır. Daha sonra, av-avcı sistemini oluşturan parametre değerleri ile Allee parametresindeki değişikliğin av ve avcı popülasyonun ileri zamandaki davranışına etkisi araştırılacak, hangi parametrenin sistem dinamiği üzerinde en çok etkisi olduğunu belirlemek adına duyarlılık analizine yer verilecektir.



## 2. ÇATALLANMA TEORİSİ VE MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ

### 2.1 Matematiksel Temel Tanım ve Teoremler

Biyolojik sistemlerin matematiksel modeli oluşturulurken ilk olarak, incelenen sisteme ait bağımlı ve bağımsız değişkenler belirlenir. Ardından bu değişkenlere bağlı matematiksel model elde edilir. Daha sonra, matematiksel tanım, teori ve teknikler kullanılarak modelin analizi yapılır. Matematiksel modeller, zaman ve konum etkenlerine bağlı olduğundan adi diferensiyel denklemler, fark denklemleri ya da kısmi diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulur. Bu denklemlerin tanımladığı dinamik sistemler zamana göre kesikli (ayrık) ve sürekli sistemler olarak ikiye ayrılır. Kesikli sistemlerin mevcut olduğu doğa olayları fark denklemleriyle modellenirken, sürekli sistemler için diferensiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılır. Bu tezde, lineer olmayan 2–boyutlu fark denklem sistemi ile diferensiyel denklem sistemi ele alınacaktır. Bunun için ilk bu bölümde fark denklemlerini ve adi diferensiyel denklemleri tanıtılacaktır.

#### 2.1.1 Fark Denklemleri

Fark denklemleri, biyoloji, ekonomi, mühendislik gibi alanlarda kullanılan matematiksel modeller için bir araçtır. Bu denklemlerde bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Dolayısıyla, fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemleri tanımlar. Bu problemlere örnek olarak bir ekonomideki yıllık, aylık veya günlük fiyat değişimlerinin hesaplanması, işsizlik oranının hesaplanması ve genetikte nesiller arası değişimler verilebilir.

**Tanım 2.1.** *f reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyon olmak üzere*

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_t, t) = 0 \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

*denklemine k.mertebeden bir fark denklemi denir (Allen, 2007).*

Burada  $x$ ,  $t$  nin (zamanın) bir fonksiyonu olup  $x_t$ , sistemin  $t$  zamanındaki durumunu göstermektedir. Denklem mertebesinin  $k$  olabilmesi için denklemde  $x_{t+k}$  ve  $x_t$  terimlerinin bulunması gerekmektedir. Literatürdeki mevcut çalışmalarda  $x_{t+k}$  yerine bazen  $x(t+k)$  da kullanılmaktadır.

Şayet  $f$  fonksiyonu,  $t$  ye açıkça bağlı değil ise denkleme **otonom**, aksi halde **otonom olmayan** denklem adı verilir.

**Tanım 2.2.**  $x_{t+k} + a_1x_{t+k-1} + \dots + a_kx_t = b_t$  denklemini ele alalım.  $j = 1, \dots, k$  olmak üzere  $a_j$  ve  $b_t$  sabit veya  $t$  nin bir fonksiyonu ve  $x_t$  nin bir fonksiyonu değilse bu denkleme  $k$ . mertebeden lineer fark denklemi denir ( $a_k \neq 0$ ). Eğer  $b_t = 0$  ise denklem **homojen**, aksi halde **homojen olmayan** denklem adını alır (Allen, 2007).

**Tanım 2.3.**

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \end{cases} \quad (2.2)$$

1. mertebeden  $n$  tane fark denkleminde oluşan bu ifadeye 1. mertebeden bir fark denklem sistemi denir.

Özel olarak,  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_{ij}$  ve  $b_j$  katsayıları  $x_i$  ye bağlı olmadığından

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + b_j(t)$$

sistemine lineer sistem denir ve

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}_{nx1}, \quad A(t) := [a_{ij}(t)]_{n \times n}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}_{nx1}$$

notasyonları altında

$$X(t+1) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{veya} \quad X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)$$

olarak ifade edilir (Allen, 2007).

**Sistemin çözümü:** Eğer sabit katsayılı lineer bir fark denklem sistemi için çözüm aranıyor ise çözüm adayını  $X(t) = \lambda^t V$  tipindedir. O halde,

$$X(t+1) = AX(t) \Rightarrow \lambda^{t+1}V = A\lambda^tV \Rightarrow \lambda^t(\lambda I - A)V = 0 \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$$

olarak hesaplanır. Burada  $P(\lambda)$  **karakteristik polinom**,  $\lambda$  karakteristik polinomun kökü, yani **özdeğeri** olup  $V$  ise  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen **özvektördür**. Sonuç olarak sistemin lineer bağımsız çözümler kümesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$i = 1, \dots, n$  ve  $X_i(t) = \lambda_i^t V_i$  olmak üzere şayet  $\exists t > 0$  için  $C[X_1(t), \dots, X_n(t)] \neq 0$  ise  $X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_nX_n(t)$  dir.

**Not:** Cosaration Matrix

$$C[x_1(t), x_2(t)] = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(t+1) & x_2(t+1) \end{bmatrix} \neq 0$$



eşitsizliği  $\exists t > 0$  için sağlanıyor ise  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  çözümleri lineer bağımsızdır.

### 2.1.1.1 Fark Denklemlerinin Kararlılık Analizi

**Tanım 2.4.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  birinci mertebeden otonom lineer olmayan fark denklemini ele alalım.  $\bar{x} = f(\bar{x})$  eşitliğini sağlayan sabit çözümüne fark denkleminin denge noktası (denge çözümü) veya  $f$  fonksiyonunun sabit noktası denir.

Birinci mertebeden  $X_{t+1} = F(X_t)$  sistemi için denge çözümü ise  $\bar{X} = F(\bar{X})$  sisteminin çözümü olan  $\bar{X}$  sabit değerli vektörüdür (Allen, 2007). Örneğin, 
$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases}$$
 sisteminin denge çözümü  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y})$  eşitliklerini sağlayan  $(\bar{x}, \bar{y})$  çözümleridir. Genel olarak,  $f(x_{t+k}, \dots, x_t) = 0$  k. mertebeden fark denkleminin denge çözümü ise  $f(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = 0$  eşitliğini sağlayan  $\bar{x}$  sabit çözümüdür.

**Not.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  olmak üzere  $x_0$  biliniyor ise,

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow x_1 = f(x_0) \\ t = 1 &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ &: \\ t = t &\Rightarrow x_t = f^t(x_0) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

**Tanım 2.5.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  birinci mertebeden fark denklemini için periyodu  $m$  olan bir periyodik çözüm

$$f^m(\bar{x}) = \bar{x} \quad \ni f^i(\bar{x}) \neq \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad m > 1$$

şartını sağlayan reel değerli bir çözümdür.

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$  ( $\ni j = 1, 2, \dots, m-1$  için  $\bar{x}_j$ 'lerin her biri periyodu  $m$  olan periyodik çözümler) cümlesine **m-döngü** adı verilir.

$\{\bar{x}_1, f(\bar{x}_1), \dots, f^{m-1}(\bar{x}_1)\}$  cümlesine ise  $\bar{x}_1$  in **periyodik yörüngesi** adı verilir.

Benzer tanımlar  $X_{t+1} = F(X_t)$  sistemi için de yapılabilir (Allen, 2007).

**Tanım 2.6.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  ve  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  olsun.

- Eğer  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \quad \text{iken} \quad |x_t - \bar{x}| < \varepsilon, \quad (\forall t \geq 0)$$

olacak şekilde  $\exists \delta > 0$  mevcut ise  $\bar{x}$  sabit çözümüne lokal kararlı denir.

- Eğer  $|x_0 - \bar{x}| < \gamma$  koşulunu sağlayan  $\exists \gamma > 0$  mevcut ve  $\forall x_0$  için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_t = \lim_{x \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \bar{x}$$

ise  $\bar{x}$  denge noktası lokal çekici adını alır.

- Eğer  $\bar{x}$  hem lokal kararlı hem de lokal çekici ise  $\bar{x}$  denge çözümüne lokal asimptotik kararlı denir.

Benzer tanımlar  $X_{t+1} = F(X_t)$  sistemi için de yapılabilir. Burada  $|\cdot|$  yerine  $\|\cdot\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  alınmalıdır (Allen, 2007).

Şimdi de  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  sağlansın. Öyleyse,  $f(x_t)$  fonksiyonunu  $\bar{x}$  civarında Taylor serisine açalım:

$$f(x_t) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \bar{x})^2 + YMT.$$

Burada YMT ifadesi  $(x_t - \bar{x})$ 'a göre yüksek mertebeden terimleri simgelemektedir. O halde,

$$x_{t+1} \approx \bar{x} + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \bar{x})^2$$

yazılabilir. Buradan  $\bar{x}$  ifadesini eşitliğin sol tarafına atıp  $u_t = x_t - \bar{x}$  alınırsa

$$u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_t + \frac{f''(\xi)}{2}u_t^2$$

olup  $u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_t$  bulunur. Burada denge çözümü  $\bar{u} = 0$  olup sonuç olarak

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow u_1 = f'(\bar{x})u_0 \\ t = 1 &\Rightarrow u_2 = f'(\bar{x})u_1 = [f'(\bar{x})]^2 u_0 \\ &\vdots \\ t = t &\Rightarrow u_t = [f'(\bar{x})]^t u_0 \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

**Tanım 2.7.** Eğer  $|f'(\bar{x})| \neq 1$  ise  $\bar{x}$  denge noktasına **hiperbolik denge noktası** denir. Bu durumda lineerleştirilmiş denklem, lineer olmayan denkleme lokal topolojik olarak denktir<sup>1</sup> (Allen, 2007).

**Teorem 2.1.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  birinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Kabul edelim ki  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in I = (a, b)$  ve  $f \in C(I)$  olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1.  $|f'(\bar{x})| < 1$  ise  $\bar{x}$  lokal asimptotik kararlıdır.
2.  $|f'(\bar{x})| > 1$  ise  $\bar{x}$  kararsızdır.
3.  $|f'(\bar{x})| = 1$  ise  $\bar{x}$  hiperbolik denge noktası değildir (Allen, 2007).

<sup>1</sup>Bu kavram EK 1'de tanımlanmıştır.

Şimdi de

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad (2.3)$$

sisteminin  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli şartları belirleyelim. Kabul edelim ki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının ikinci mertebeden kısmi türevleri,  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olsun.  $f$  fonksiyonunu bu denge noktası civarında Taylor serisine açarsak

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} (y - \bar{y}) \\ & + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^2} \frac{(y - \bar{y})^2}{2!} + YMT \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada  $u = x - \bar{x}$  ve  $v = y - \bar{y}$  dönüşümü ele alınırsa  $f$  fonksiyonu yaklaşık olarak

$$f(x, y) \approx \bar{x} + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} u + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} v$$

ile ifade edilir. Benzer adımları  $g$  fonksiyonu için de ele alırsak

$$g(x, y) \approx \bar{y} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} u + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} v$$

olarak bulunur. Öyleyse (2.3) sistemi

$$X_{t+1} = JX_t \quad (2.4)$$

sistemi olarak elde edilir. Burada  $J$  matrisi

$$J = J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

olup (2.3) sisteminin denge noktasındaki **Jakobiyen matrisi** olarak adlandırılır.

**Teorem 2.2.** (2.3) sistemi

$$\begin{cases} N_{t+1} = f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = g(N_t, P_t) \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilsin. Kabul edelim ki lineer olmayan sistemin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasını içeren bir açık bölgede  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının birinci kısmi türevleri var ve sürekli olsun. Ayrıca, kabul edelim ki  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  (2.5) sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen ve  $\lambda^2 - izJ\lambda + detJ$  ile tanımlanan karakteristik polinomunun kökleri olsun. Öyleyse, lineer olmayan sistemin denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P})$ 'ın lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart  $|\lambda_1| < 1$  ve  $|\lambda_2| < 1$  olmasıdır (Allen, 2007).

## 2.1.2 Adi Diferensiyel Denklemler

Doğum ve ölüm gibi biyolojik olayların sürekli gerçekleştiği durumda ardışık nesiller aynı anda yaşayabilmektedir. Nesillerin örtüştüğü modeller için diferensiyel denklemler ile oluşturulan sürekli zamanlı modeller, fark denklemleri ile oluşturulan ayrık zamanlı modellere göre daha çok tercih edilir. Fark denklemlerinde zaman aralığı  $t = 0, 1, 2, \dots$  gibi ayrık iken diferensiyel denklemlerde zaman aralığı sürekli olup  $[t_0, T)$  gibi sonlu ya da  $[t_0, \infty)$  sonsuz uzunlukta olabilir.

Fark denklemlerinde olduğu gibi diferensiyel denklemler de lineer ya da lineer olmayan ve otonom ya da otonom olmayan şeklinde sınıflandırılır.

**Tanım 2.8.** *n. mertebeden bir diferensiyel denklem*

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0 \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. Eğer (2.6) diferensiyel denklemi açıkça  $t$ 'nin bir fonksiyonu değil ise **otonom**, eğer  $f$  fonksiyonu  $t$ 'yi içeriyor ise **otonom olmayan** diferensiyel denklem olarak adlandırılır.

Örneğin,  $\frac{dx}{dt} = kx$  otonom,  $\frac{dx}{dt} = kx + t^2$  otonom olmayan diferensiyel denklemdir.

**Tanım 2.9.**

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t) \quad (2.7)$$

denkleminde  $i = 1, 2, \dots, n-1$  olmak üzere  $a_i$  katsayıları sabit veya yalnızca  $t$ 'nin fonksiyonu ise **lineer**, aksi halde **lineer olmayan** diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer lineer (2.7) denkleminde  $g(t) = 0$  ise denkleme **homogen** denklem;  $g(t) \neq 0$  ise **homogen olmayan** denklem adı verilir.

**Tanım 2.10.**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (2.8)$$

ifadesine 1. mertebeden  $n$  tane lineer diferensiyel denklemin oluşturduğu bir diferensiyel denklem sistemi adı verilir.

Özel olarak,  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  ve  $f_i = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$  notasyonları altında

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t), t) \quad (2.9)$$

olarak ifade edilir (Allen, 2007).

**Tanım 2.11.** (2.9) sisteminde  $F$ ,  $t$ 'ye açıkça bağlı değil ise sisteme "Otonom Sistem"  $F$ ,  $t$ 'yi açıkça içeriyor ise sisteme "Otonom Olmayan Sistem" adı verilir.

**Tanım 2.12.** Kabul edelim ki (2.9) sistemi

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilsin. Öyleyse (2.10) sistemine "Lineer", aksi halde "Lineer Olmayan Sistem" adı verilir. Şayet  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $g_i(t) = 0$  ise (2.10) sistemine "Lineer Homogen Diferensiyel Denklem Sistemi" denir. Eğer  $\exists i$  için  $g_i(t) \neq 0$  ise sisteme "Lineer Homogen Olmayan Diferensiyel Denklem Sistemi" adı verilir.

### 2.1.2.1 Diferensiyel Denklemlerin Kararlılık Analizi

**Tanım 2.13.**  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$   $n$ -boyutlu vektör ve  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  olarak tanımlansın.  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T$  çok değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (2.11)$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. (2.11) sisteminde  $\mathbf{X}$ 'in üzerindeki nokta zamana göre türevi temsil ederken  $\mathbf{X}_0$  başlangıç değeridir. (2.11) sisteminin denge noktası  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}$  eşitliğini sağlayan  $\bar{\mathbf{X}}$  vektörüdür.

Denge noktası sistemin zaman içinde değişmediği durağan durumunu temsil eder. Örneğin popülasyon modelinde av-avcı sisteminin sıfır denge noktası iki türün yok olduğunu gösterirken, denge noktasının pozitif olması av ve avcı popülasyonunun bir arada yaşadığı gösterir. Denge noktasının kararlı olup olmaması sistemin kısa veya uzun vadeli davranışları hakkında bilgi verdiği için, ele alınan sistemin analizi için kararlılık analizi önemli bir matematiksel araçtır. Aşağıda bir diferensiyel denklem sisteminin denge noktasının kararlılık türleri tanımlanmıştır.

**Tanım 2.14.** (2.11) sisteminin bir denge noktasının  $\bar{\mathbf{X}}$  olduğunu kabul edelim. Öyleyse,

- Eğer  $\|\mathbf{X}(0) - \bar{\mathbf{X}}\| < \delta$  iken  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \bar{\mathbf{X}}$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  mevcut ise  $\bar{\mathbf{X}}$  denge noktası **lokal çekicidir**. Bu ifade bize şunu söyler: Denge noktasına yakın başlayan her çözüm zaman ilerledikçe denge noktasından uzaklaşsa bile  $t \rightarrow \infty$  iken denge noktasına ulaşacaktır.
- $\forall \varepsilon > 0$  için  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  ve  $\|\mathbf{X}_0 - \bar{\mathbf{X}}\| < \delta$  iken  $t \geq t_0$  için  $\|\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  var ise  $\bar{\mathbf{X}}$  denge noktasına **lokal kararlıdır** denir. Bir başka ifadeyle, denge noktasına yakın başlayan çözümler yine denge noktasına yakın kalır. Bu kararlılık şekline literatürde "Start Close Stay Close" olarak da karşılaşabiliriz.

- Bir denge noktası hem lokal çekici hem de lokal kararlı ise **lokal asimptotik kararlı** olarak adlandırılır.
- Eğer bir denge noktası kararlı değil ise bu durumda **kararsız denge noktası** adı verilir.

Bir sistemin dinamik yapısını araştırmak için denge noktasının lokal kararlılığın analiz edilmesi önemlidir. Öyleyse, sırasıyla lineer ve lineer olmayan dinamik sistemler için lokal kararlılık analizine dair yöntemleri ifade edelim.

İlk olarak,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  ve  $\mathbf{A}$  ise  $n \times n$  boyutunda reel bir matris olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.12)$$

lineer sistemini ele alalım. Bu sistem için  $\mathbf{v}$ ,  $n \times 1$  boyutunda sıfırdan farklı skalar bir vektör ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere (2.12) sisteminin çözüm adayı

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (2.13)$$

formunda olsun. Öyleyse (2.13) çözümü (2.12) eşitliğini sağlaması gerektiğinden

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (2.14)$$

elde edilir.  $e^{\lambda t} \neq 0$  olup bu terimin sadeleştirilmesiyle

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

eşitliği elde edilir. Burada  $\lambda$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin bir özdeğeri ve  $\mathbf{v}$  vektörü ise bu özdeğere karşılık gelen özvektördür.  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerleri ise  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  eşitliği çözülerek bulunur.  $i = 1, \dots, n$  için  $a_i$  reel katsayılar olmak üzere  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  eşitliğinden elde edilen

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.15)$$

denkleminin kökleri  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerlerini verir. Burada  $P(\lambda)$  polinomu  $\mathbf{A}$  matrisinin **karakteristik polinomu** ve  $P(\lambda) = 0$  denklemi  $\mathbf{A}$  matrisinin **karakteristik denklemi** olarak tanımlanır. Dikkat edilirse lineer ve homojen (2.12) diferensiyel denklem sistemi için orijin her zaman bir denge noktasıdır. Bu sistem için çözümler  $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  formunda olduğundan, sıfır denge noktasının kararlılığı  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerlerinin durumuna bağlıdır. Bununla ilgili teoremin ifadesi aşağıda yer almaktadır.

**Teorem 2.3.** (2.12) diferensiyel denklem sistemini ele alalım.

- $\mathbf{A}$  matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı sıfırdan küçük, yani  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , ise orijin lokal asimptotik kararlıdır.
- $\mathbf{A}$  matrisinin en az bir özdeğerinin reel kısmı sıfırdan büyük, yani  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , ise orijin kararsızdır.

- Eğer  $\mathbf{A}$  matrisinin en az bir çift özdeğerinin reel kısmı sıfır, yani  $\text{Re}(\lambda) = 0$ , ve geri kalan özdeğerlerinin reel kısmı sıfırdan küçük, yani  $\text{Re}(\lambda) < 0$  ise denge noktası karardır.

Öyleyse; karakteristik polinomun tüm kökleri negatif reel kısma sahipse (2.12) ile verilen lineer ve homojen diferensiyel denklem sisteminin denge noktasına yeterince yakın başlayan herhangi bir çözümü denge noktasına yakınsar. Dolayısıyla, karakteristik polinomun köklerinin işareti denge noktasının kararlılığını belirler. Aşağıda ifade edilen Routh-Hurwitz kriteri bir karakteristik polinomun tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şartı ifade eder.

**Teorem 2.4** (Routh-Hurwitz Kriteri).  $i = 1, \dots, n$  için  $a_i$  sabitleri reel olmak üzere

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

polinomu verilsin.  $P(\lambda)$  polinomunun  $n$ . Hurwitz matrisi

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

ve  $j > n$  ise  $a_j = 0$  olmak üzere

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.  $P(\lambda)$  polinomunun tüm kökleri negatif veya negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şart tüm Hurwitz matrislerinin determinantının pozitif olmasıdır, yani  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$\det(H_j) > 0$$

olmasıdır. Özel olarak  $n = 2, 3, 4$  için Routh-Hurwitz kriteri:

$$\begin{aligned} n = 2 & : a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \\ n = 3 & : a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{ve} \quad a_1 a_2 > a_3. \\ n = 4 & : a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0 \quad \text{ve} \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4. \end{aligned}$$

şeklindedir (Allen, 2007).

Ayrık sistemlerden de bilindiği üzere lineer olmayan sistemlerin analizi için sistem

denge noktası civarında lineerleştirilir. Öyleyse, özel olarak 2–boyutlu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) \\ \dot{y}(t) = g(x, y) \end{cases} \quad (2.16)$$

sistemini ele alalım. Bu sistemin denge noktası  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ve  $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  eşitliklerini sağlayan  $(\bar{x}, \bar{y})$  çözümüdür. Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarını denge noktası civarında Taylor serisine açarsak ve  $u = x - \bar{x}$  ve  $v = y - \bar{y}$  dönüşümünü kullanırsak (2.16) sistemi

$$\frac{dZ}{dt} = JZ \quad (2.17)$$

sistemine indirgenir. Burada  $Z = (u, v)^T$  ve  $J$  matrisi

$$J = J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_x(\bar{x}, \bar{y}) & f_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

olup (2.16) sisteminin denge noktasındaki Jakobiyen matrisidir.

Bilindiği üzere bir lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeğerleri negatif reel kısma sahip ise o sistemin çözümleri sifra yaklaşır. Ayrıca Routh-Hurwitz kriterinden biliyoruz ki karakteristik polinomun katsayılarının pozitif olması durumunda sisteminin özdeğerleri negatif reel kısma sahiptir. Öyleyse, (2.18) Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$\lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \quad (2.19)$$

olup bu polinomun köklerinin negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şart  $iz(J) < 0$  ve  $\det(J) > 0$  olmasıdır. Çünkü  $a_1 = -iz(J)$  olup  $a_1 > 0 \Rightarrow iz(J) < 0$ ,  $a_2 = \det(J)$  olup  $a_2 > 0 \Rightarrow \det(J) > 0$  olur. Aşağıdaki teoremden tüm bu kararlılık koşulları özetlenmiştir. Tez problemi kapsamında ele alınan sürekli zamanlı av-avcı popülasyon modelinin kararlılık analizinde de bu teorem kullanılacaktır.

**Teorem 2.5.** (2.16) sistemi

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = f(N(t), P(t)) \\ \dot{P}(t) = g(N(t), P(t)) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilsin. Kabul edelim ki lineer olmayan sistemin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasını içeren bir açık bölgede  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının birinci kısmi türevleri var ve sürekli olsun. Öyleyse, lineer olmayan sistemin denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P})$  in lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart  $iz(J) < 0$  ve  $\det(J) > 0$  olmasıdır (Allen, 2007).



## 2.2 Dinamik Sistemlerde Çatallanma Teorisi

Bir dinamik sistemin bağlı olduğu parametre değerindeki ufak değişiklikler sistem dinamiğinde niteliksel değişikliklere neden olabilir. Niteliksel değişikliklerden kastımız parametre değişirken var olan denge noktalarının kaybolması veya yeni denge noktaların ortaya çıkması, denge noktalarının kararlılık yapısının değişmesi ve kaotik yapıların ortaya çıkması gibi durumlardır.

**Tanım 2.15.** *Parametredeki değişim altında topolojik olarak denk olmayan (Bakınız EK 1) faz portrelerinin meydana gelmesine **çatallanma** denir. Değişen parametre değerine de **çatallanma parametresi** denir (Kuznetsov, 1998).*

### 2.2.1 Merkez Manifold Teorisi ve Normal Form Kavramı

Dinamik sistemlerin lokal kararlılık analizinde kullanılan önemli yöntemlerden biri olan merkez manifold teorisi, bir dinamik sistemin boyutunu, çatallanma analizini gerçekleştirebildiğimiz diferensiyel veya fark denklem sistemine indirmek için kullanılır (Wiggins, 2003).

Bu kısımda ayırık sistemlerin denge noktasında ortaya çıkan flip çatallanma için merkez manifold teorisi anlatılacaktır. Diğer çatallanma türleri için de benzer analizler yapılmakta olup detaylar için Wiggins (2003) kaynağı incelenebilir.

İlk olarak,  $X_t \in \mathbb{R}^n$  ve  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$X_{t+1} = F(X_t) \quad (2.20)$$

sistemini ele alalım. Sistemin denge noktasının  $\bar{X} = 0$  olduğunu kabul edelim.  $J$  matrisi, sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi olmak üzere

$$X_{t+1} = JX_t \quad (2.21)$$

sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen özdeğerleri ise  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  olsun. Burada özdeğerler mutlak değerce birden küçük, mutlak değerce birden büyük veya mutlak değerce bire eşit olabilir.

Jakobiyen matrisin mutlak değeri birden küçük olan, bir başka ifadeyle birim çemberin içinde kalan özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği altuzayı  $M^s$  ile gösterelim. Bu altuzaya (2.21) sistemin *Kararlı Altuzayı* adı verilir. Benzer şekilde, mutlak değeri birden büyük olan, yani birim çemberin dışında kalan özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği altuzayı  $M^u$  ile gösterelim. Bu altuzaya (2.21) sistemin *Kararsız Altuzayı* denir. Birim çember üzerinde yer alan, mutlak değeri bire eşit olan özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği altuzay  $M^c$  ile gösterilmek üzere *Merkez Altuzayı* olarak tanımlanır (Wiggins, 2003). Burada  $M^s$  altuzayında başlayan çözümler ileriki iterasyonlarda denge noktasına yaklaşırken,  $M^u$  altuzayında başlayan çözümler bir sonraki iterasyonda denge noktasından uzaklaşır. Başlangıçta  $M^c$  altuzayında yer alan çözümler ise  $t$  artarken ne denge noktasına yaklaşır ne de

denge noktasından uzaklaşır.

Dikkat edilirse (2.21) sisteminin Jakobiyen matrisinin  $m$  tane özdeğerinin mevcut olduğu kabul edilmiştir. Şimdi de kabul edelim ki bu özdeğerlerden  $m_c$  tanesi mutlak değerce bire eşit olsun. Ayrıca kabul edelim ki ödeğerlerden mutlak değeri birden küçük olanların sayısı  $m_s$ , mutlak değeri birden büyük olanların sayısı ise  $m_u$  ile gösterilsin. Burada  $m = m_c + m_s + m_u$  eşitliği sağlanmaktadır.

$m_u = 0$  olması durumunda  $(X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$  için (6.2) sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{cases} X_{t+1} = J_c X_t + f_c(X_t, Y_t) \\ Y_{t+1} = J_s Y_t + f_s(X_t, Y_t). \end{cases} \quad (2.22)$$

Burada  $f_c, f_s \in \mathbb{C}^k$  olup  $J_c$  matrisi özdeğerleri mutlak değerce bire eşit olan  $c \times c$  boyutlu matris iken  $J_s$  matrisi özdeğerleri mutlak değerce birden küçük olan  $s \times s$  boyutlu matristir. Ayrıca burada

$$\begin{aligned} \dot{f}_c(X, Y) &= \left( \frac{\partial f_{ci}}{\partial X_j}, \frac{\partial f_{ci}}{\partial Y_k} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, m_c; \quad k = 1, 2, \dots, m_s \\ \dot{f}_s(X, Y) &= \left( \frac{\partial f_{sk}}{\partial X_i}, \frac{\partial f_{sk}}{\partial Y_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m_c; \quad j, k = 1, 2, \dots, m_s \end{aligned}$$

için  $f_c(0, 0) = f_s(0, 0) = \dot{f}_c(0, 0) = \dot{f}_s(0, 0) = 0$  dir. Dolayısıyla (2.22) sistemin denge noktası  $(\bar{X}, \bar{Y}) = (0, 0)$  civarındaki lineerleştirme kararlılık analizi için yeterli değildir. Öyleyse kararlılık analizini aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

**Teorem 2.6.**  $m_u = 0$  ve  $m_c \neq 0$  olsun. Öyleyse yeterince küçük  $\delta$  değerleri için (2.22) sistemin

$$W^c(0) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid Y = h(X), |X| < \delta, h(0) = 0, \dot{h}(0) = 0\},$$

$m_c -$  boyutlu bir merkez manifoldu mevcuttur. Ayrıca, yeterince küçük  $U$  değerleri için (2.22) sistemi

$$U_{t+1} \mapsto JU_t + f(U_t, h(U_t)), \quad U_t \in \mathbb{R}^c \quad (2.23)$$

sistemine lokal topolojik olarak denktir. Bir başka ifadeyle, (2.21) sistemin denge noktası  $(0, 0)$  komşuluğundaki nitel yapısı, aynı sistemin merkez altuzayına teğet olan merkez manifoldu üzerindeki davranışı tarafından belirlenir (Wiggins, 2003).

**İspat.** Bakınız (Carr, 1981).

Dikkat edilirse teoremden yer alan  $h(0) = 0$  ve  $\dot{h}(0) = 0$  koşulları  $W^c(0)$  merkez manifoldunun  $M^c$  merkez altuzayına teğet olduğunu söyler.

Şimdi de aşağıdaki teorem ile (2.22) sisteminin denge noktasının kararlılık yapısı ile (2.23) sistemin  $\bar{U} = 0$  denge noktasının kararlılık yapısı arasındaki ilişkiyi ifade edelim.

**Teorem 2.7.** Eğer (2.23) sistemin denge çözümü  $\bar{U} = 0$  lokal asimptotik kararlı

(kararsız) ise (2.22) sistemin sıfır denge çözümü  $(\bar{X}, \bar{Y}) = (0, 0)$  da lokal asimptotik kararlı (kararsız) dır.

Kabul edelim ki (2.23) sistemin sıfır çözümü kararlı olsun. Ayrıca kabul edelim ki yeterince küçük  $(\bar{X}, \bar{Y})$  değerleri için  $(X_t, Y_t)$  (2.22) sisteminin bir çözümü olsun. Öyleyse,  $k$  ve  $\beta$  katsayıları pozitif ve  $\beta < 1$  olmak üzere her  $t$  değeri için (2.23) sisteminin bir  $U_t$  çözümü vardır ve bu çözüm için

$$|X_t - U_t| \leq k\beta^t \quad \text{ve} \quad |Y_t - h(U_t)| \leq k\beta^t \quad (2.24)$$

sağlanır.

**İspat.** Bakınız (Carr, 1981).

Şimdi de (2.22) sistemin merkez manifoldunu hesaplayalım. Bu sistemde  $Y_t = h(X_t)$  olarak alınırsa

$$\begin{cases} X_{t+1} = J_c X_t + f_c(X_t, h(X_t)) \\ Y_{t+1} = h(X_{t+1}) = J_s h(X_t) + f_s(X_t, h(X_t)) \end{cases} \quad (2.25)$$

sistemi elde edilir. Burada ikinci deklemden,

$$h(X_{t+1}) = h(J_c X_t + f_c(X_t, h(X_t))) = J_s h(X_t) + f_s(X_t, h(X_t)) \quad (2.26)$$

olduğundan

$$N(h(X_t)) = h(J_c X_t + f_c(X_t, h(X_t))) - J_s h(X_t) - f_s(X_t, h(X_t)) = 0 \quad (2.27)$$

denklemini elde edilir. (2.27) denklemini (2.22) sistemin merkez manifoldunun katsayılarını hesaplamak için kullanılır. Elde edilen yeni katsayılar ise Flip çatallanma analizinde kullanılır.

Ayrık ve sürekli sistemlerde **normal form**, sistemin daha basit bir forma indirgenmiş halidir. Bu sistem, analizi gerçekleştirilecek sistemin nitel yapısı korunacak şekilde uygun dönüşümlerle elde edilir. Dolayısıyla, diferensiyel ve fark denklem sistemlerinde çatallanma tiplerinin genel formunu veren bir normal form mevcuttur.

## 2.2.2 Flip Çatallanma Teorisi

Kabul edelim ki (2.20) sistemi  $\delta$  parametresine bağlı olsun. Yani,  $X_t \in \mathbb{R}^n$  ve  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilsin

$$X_{t+1} = f(X_t, \delta). \quad (2.28)$$

Biliyoruz ki sıfırdan farklı herhangi bir denge noktası değişken değiştirme yöntemi ile orijine taşınabilir. Öyleyse, (2.28) sisteminin denge noktasının sıfır olduğunu kabul edelim ve  $\delta$  parametresi değişirken denge noktasının kararlılık yapısındaki değişiklikleri analiz edelim. Burada sistem dinamiğini değiştiren  $\delta$  değeri, ele alınan sistemin çatallanma parametresidir.

Bu tezde, (2.28) sisteminde görülmesi muhtemel olan çatallanma türlerinden iki tip ele alınacaktır. Ele alınacak birinci tip çatallanma, kararlı denge noktasının  $\delta$  parametresi değişirken kararsız olduğu ve kararlı 2-döngülerin ortaya çıktığı Flip çatallanmadır.

İlk olarak Flip çatallanmanın normal formunu tanıtalım. Bunun için  $\delta$  parametresine bağlı 1-boyutlu

$$X_{t+1} = -(1 + \delta)X_t + X_t^3 \equiv f(X_t, \delta) \quad (2.29)$$

sistemini ele alalım (Kuznetsov, 1998). Ayrıca  $f$  fonksiyonunun, orijinin bir komşuluğunda yeterince küçük  $|\delta|$  değeri için tersinin mevcut olduğunu kabul edelim. Devam eden analizlerde gösterim kolaylığı açısından  $X_t$  yerine  $X$  alalım. Burada  $\forall \delta$  değeri ve  $|\delta|$  nın küçük değeri için  $\bar{X} = 0$  noktası (2.29) sisteminin denge noktasıdır.

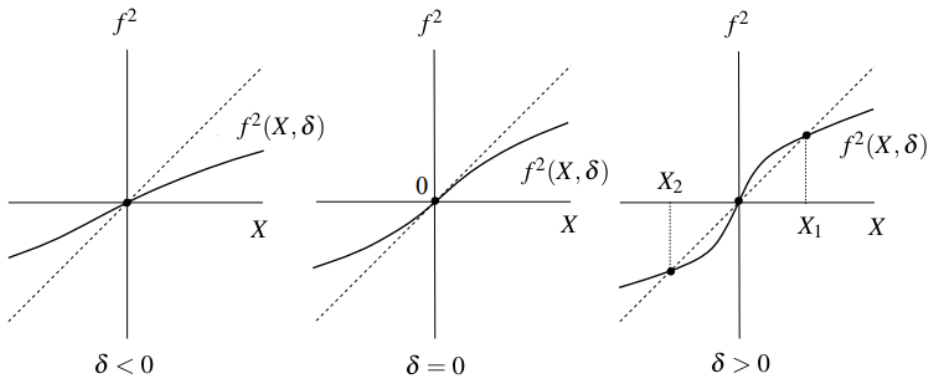
$$f_X(X, \delta) = -(1 + \delta) + 3X^2 \Rightarrow f_X(0, \delta) = -(1 + \delta)$$

olup  $\delta = 0$  için  $f_X(0, \delta) = -1$  olduğundan denge noktası hiperbolik değildir. Eğer  $\delta > 0$  ise  $f_X(0, \delta) < -1$  olacağından denge noktası kararsızdır. Çünkü bu durumda  $|f'(\bar{X})| > 1$  olup Teorem 2.1 gereğince denge noktası kararsız olur. Eğer  $\delta < 0$  ise  $|f_X(0, \delta)| < 1$  olması  $-2 < \delta < 0$  olmasını gerektirir. Öyleyse bu aralıktaki  $\delta$  değerleri için denge noktası kararlıdır.

Şimdi de  $f^2(X, \delta)$  fonksiyonunu ele alalım.

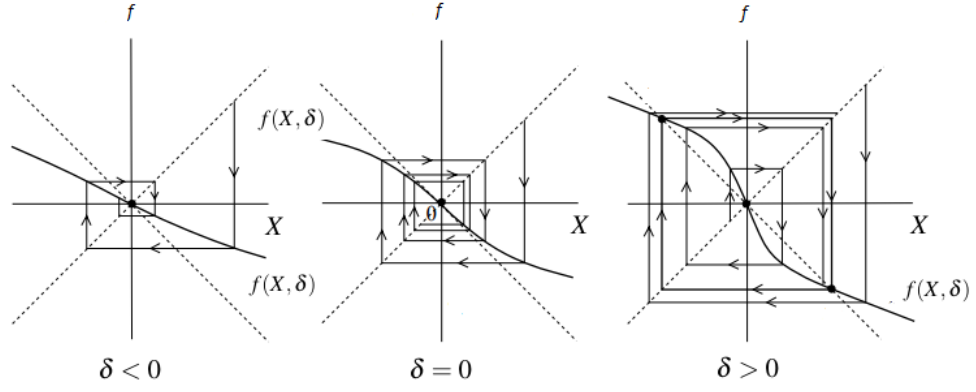
$$\begin{aligned} f^2(X, \delta) &= f(f(X, \delta)) = -1(1 + \delta)[-1(1 + \delta)X + X^3] + [-1(1 + \delta)X + X^3]^3 \\ &= (1 + \delta)^2 X - [(1 + \delta)(2 + 2\delta + \delta^2)]X^3 + O(X^5) \end{aligned}$$

olup  $f^2(X, \delta)$  fonksiyonunun aşıkâr çözümü  $\bar{X} = 0$  dır. Bunun haricinde yeterince küçük  $|\delta|$  değeri için yukarıdaki eşitliği sağlayan iki denge çözümü daha mevcuttur. Bu çözümler  $\bar{X}_{1,2} = \pm(\sqrt{\delta} + O(\delta))$ ,  $\delta > 0$  olarak hesaplanır (Bakınız Şekil 2.1). Bu

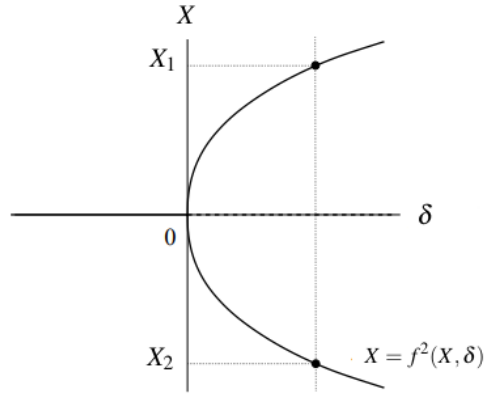


Şekil 2.1: İkinci iterasyon fonksiyonu (Kuznetsov, 1998)

iki denge çözümü kararlı olup  $\bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$  iken  $\bar{X}_2 = f(\bar{X}_1)$  ve  $\bar{X}_1 = f(\bar{X}_2)$  sağlandığından 2-döngü gerçekleşir. (2.29) sisteminin dinamiği Şekil 2.2'de verilmektedir. Burada pozitif  $\delta$  değeri sıfıra yaklaştıkça iki döngü küçülür ve kaybolur. Bu ise Flip çatallanma olarak adlandırılır.



Şekil 2.2: Flip çatallanma (Kuznetsov, 1998)



Şekil 2.3: Flip çatallanma diyagramı (Kuznetsov, 1998)

Flip çatallanma diyagramı ise Şekil 2.3'te  $(X, \delta)$  düzleminde gösterilmiştir. Bu diyagramda dikey eksen (2.29) sistemin denge noktalarını ( $\delta < 0$  iken sıfır denge noktası kararlı ve  $\delta > 0$  iken sıfır denge noktası kararsız) gösterirken parabol,  $\delta > 0$  iken iki periyotlu  $\{X_1, X_2\}$  kararlı döngüsünü gösterir.

$X_{t+1} = -(1 + \delta)X_t - X_t^3$  durumu da benzer şekilde analiz edebiliriz. Burada  $\delta \neq 0$  için  $\bar{X} = 0$  denge noktası (2.29) sisteminde olduğu gibi aynı kararlılık yapısına sahiptir. Ayrıca  $\delta = 0$  iken bu denge noktası kararsızdır. İkinci iterasyon analiz edildiğinde  $\delta < 0$  iken oluşan iki periyotlu kararsız döngünün  $\delta = 0$  iken kaybolduğu gözlemlenir. Ayrıca yüksek mertebeden terimlerin çatallanma diyagramını etkilemediği görülür (Kuznetsov, 1998).

**Lemma 2.1.**

$$X_{t+1} = -(1 + \delta)X_t + X_t^3 + O(X_t^4)$$

*sistemi orijinin komşuluğunda lokal topolojik olarak*

$$X_{t+1} = -(1 + \delta)X_t + X_t^3$$

*sistemine denktir (Kuznetsov, 1998).*

Merkez Manifold Teoreminden biliyoruz ki orijin denge noktası civarında analiz edilen bir sistem, her bir çatallanma türüne ait en temel özelliklere sahip ve davranışları her bir

çatallanma türünün nitel özelliklerini belirleyen fark/diferensiyel denklem sistemine indirgenebilir. Aşağıdaki teorem (2.28) sisteminde Flip çatallanmanın görülebilmesi için bu sistemi (2.29) normal formuna indirgeyen hipotezlere yer vermektedir.

**Teorem 2.8.** *Birinci mertebeden bir fark denklem sistemi olan*

$$X_{t+1} = f(X_t, \delta), \quad X_t, \delta \in \mathbb{R},$$

*sistemini ele alalım. Kabul edelim ki  $\delta = 0$  iken  $X(0) = 0$ ,  $f(X_t, \delta)$  fonksiyonunun sabit noktası olsun. Ayrıca  $f$  fonksiyonu analitik olup  $f_X(0,0) = -1$  sağlansın. Öyleyse,*

$$F1) \frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) \neq 0$$

$$F2) f_{X\delta}(0,0) \neq 0$$

*şartlarının sağlanması durumunda  $X_{t+1} = f(X_t, \delta)$  denklemini*

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t \mp \eta_t^3 + O(\eta_t^4)$$

*denklemine dönüştüren düzgün koordinat ve parametre dönüşümleri vardır ve bu dönüşümlerin tersi mevcuttur (Kuznetsov, 1998).*

### 2.2.3 Neimark-Sacker Çatallanma Teorisi

Ayrık sistemlerde  $\delta$  parametresi değişirken kapalı eğri çözümlerinin, bir başka ifadeyle, periyodik çözümlerin ortaya çıktığı çatallanma Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır. Burada kapalı eğriler denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği anda ortaya çıkmaktadır. Bu çatallanma genellikle popülasyon dinamikleri, elektrik devreleri ve mekanik sistemler gibi ayrık sistemlerde gözlemlenir. Örneğin kontrol teorisinde, Neimark-Sacker çatallanma lineer olmayan sistemler için kontrol şemaları tasarlamak, analiz etmek, sistemi stabilize edebilecek ve istenmeyen salınım davranışlarını önleyebilecek kontrolörler tasarlamak için kullanılır. Popülasyon dinamiklerinde, av-avcı sistemini ele aldığımızı düşünürsek, periyodik çözümler iki türün birbirini yok etmeden bir arada yaşadığının bir göstergesidir.

Farklı dinamikler için farklı anlamlar taşıyan periyodik çözümlerin varlığı, araştırılmak istenilen sistemin analizi için önemli bir araçtır. Öyleyse, aşağıda ifade edilen  $\delta$  parametresine bağlı 2-boyutlu fark denklem sistemini ele alalım ve Neimark-Sacker çatallanmanın normal formunu tanıtalım.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} &= (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\ &+ (X_t^2 + Y_t^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

sisteminde  $\theta = \theta(\delta)$ ,  $a = a(\delta)$  ve  $b = b(\delta) \in C^k$  olup  $0 < \theta(0) < \pi$ ,  $a(0) \neq 0$  olduğunu

kabul edelim.

Sistemin denge noktası tüm  $\delta$  değerleri için  $(\bar{X}, \bar{Y}) = (0, 0)$  dir. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisi ise

$$J(0,0) = (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dir. Burada  $iz(J) = 2(1 + \delta)\cos\theta$  ve  $\det(J) = (1 + \delta)^2$  olup Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 - 2((1 + \delta)\cos\theta)\lambda + (1 + \delta)^2$$

olarak hesaplanır. Bu polinom

$$\lambda_{1,2} = (1 + \delta) \left[ \cos\theta \mp \sqrt{\cos^2\theta - 1} \right] = (1 + \delta)e^{i\theta} \quad (2.31)$$

şeklinde kompleks eşlenik köke sahiptir.  $\delta = 0$  ve  $0 < \theta(0) < \pi$  iken  $\lambda_{1,2} = e^{i\theta(0)}$  ise  $|\lambda_{1,2}(0)| = 1$  gerçekleşir. Dolayısıyla,  $(0, 0)$  denge noktası  $\delta = 0$  iken hiperbolik olmayan bir denge noktasıdır.

Şimdi  $\delta = 0$  iken çatallanma analizi yapabilmek adına

$$Z_t = X_t + iY_t \quad (2.32)$$

kompleks değişkenini tanımlayalım. Burada  $\bar{Z}_t = X_t - iY_t$  ve  $|Z_t|^2 = X_t^2 + Y_t^2$  olarak hesaplanır. Öyleyse  $d(\delta) = a(\delta) + ib(\delta)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} Z_{t+1} &= X_t + iY_t \\ &= (1 + \delta)(X_t \cos\theta - iY_t \sin\theta) + \cos\theta(X_t^2 + Y_t^2)(aX_t - bY_t) - \sin\theta(X_t^2 + Y_t^2)(bX_t + aY_t) \\ &\quad + i \left[ (1 + \delta)(X_t \sin\theta + Y_t \cos\theta) + \sin\theta(X_t^2 + Y_t^2)(aX_t - bY_t) + \cos\theta(X_t^2 + Y_t^2)(bX_t + aY_t) \right] \\ &= (1 + \delta)(X_t + iY_t)(\cos\theta + i\sin\theta) + (X_t^2 + Y_t^2)(\cos\theta + i\sin\theta) [a(X_t + iY_t) + ib(X_t + iY_t)] \\ &= (1 + \delta)Z_t e^{i\theta} + |Z_t|^2 e^{i\theta} (aZ_t + ibZ_t) \\ &= [Z_t ((1 + \delta) + d|Z_t|^2)] e^{i\theta} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (2.30) sistemi

$$Z_{t+1} = e^{i\theta(\delta)} Z_t (1 + \delta + d(\delta)|Z_t|^2) \quad (2.33)$$

denkleminde indirgenir. Dikkat edilirse  $(1 + \delta)e^{i\theta(\delta)} = \lambda(\delta)$  olup  $|\lambda(0)| = 1$  dir.

Eğer  $\rho = |Z_t|$  olmak üzere  $Z_t = \rho_t e^{i\varphi_t}$  dönüşümü ele alınırsa

$$Z_{t+1} = \rho_{t+1} e^{i\varphi_{t+1}} = e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)} \rho_t (1 + \delta + (a(\delta) + ib(\delta))\rho_t^2)$$

kutupsal formu elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |\rho_{t+1}| &= |\rho_t| |1 + \delta + (a(\delta) + ib(\delta))\rho_t^2| \\ \rho_{t+1} &= \rho_t \left[ (1 + \delta + a(\delta)\rho_t^2 + b(\delta)\rho_t^2)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

olup

$$\rho_{t+1} = (1 + \delta)\rho_t \left( 1 + \frac{2a(\delta)}{1 + \delta}\rho_t^2 + \frac{a^2(\delta)}{(1 + \delta)^2}\rho_t^4 + \frac{b^2(\delta)}{(1 + \delta)^2}\rho_t^4 \right)^{1/2}$$

olarak bulunur. Eğer  $u := \frac{2a(\delta)}{1 + \delta}\rho_t^2 + \frac{a^2(\delta)}{(1 + \delta)^2}\rho_t^4 + \frac{b^2(\delta)}{(1 + \delta)^2}\rho_t^4$  olarak tanımlanır ve  $\sqrt{1 + u}$  fonksiyonun  $u = 0$  da Taylor Serisi açılımı kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \rho_{t+1} &= \rho_t \left[ (1 + \delta) + a(\delta)\rho_t^2 + \frac{|d(\delta)|^2}{1 + \delta}\rho_t^4 + O(u) \right] \\ &= \rho_t \left[ (1 + \delta) + a(\delta)\rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \delta) \right], \quad R \in C^k \end{aligned}$$

şeklinde (2.30) sisteminin kutupsal formu elde edilir. Burada

$$\rho_{t+1} = \rho_t e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)} y = \rho_t e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)} |y| e^{iQ(\rho_t, \delta)}$$

ve  $\varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\delta) + Q(\rho_t, \delta)$  olmak üzere

$$\begin{cases} \rho_{t+1} = \rho_t (1 + \delta + a(\delta)\rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \delta)) \\ \varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\delta) + Q(\rho_t, \delta) \end{cases} \quad (2.34)$$

sistemi elde edilir. Öyleyse (2.34) sistemini kullanılarak  $\delta$  değeri değişirken ve  $\delta = 0$  kritik değerinden geçerken çatallanma analizini yapabiliriz. Çünkü  $\rho$  için yapılan dönüşüm  $\varphi$  açısından bağımsız olup (2.34) sistemi bağımsız iki fark denkleminde oluşmaktadır. Bu sistemler literatürde 'uncoupled' olarak tanımlanmaktadır. Kutupsal denklemlerde denge noktası  $\rho_t$  ile verilen denklemden elde edildiği için  $\varphi$  yalnızca dönme açısını belirler. Öyleyse, birinci denklem, birinci mertebeden bir fark denklemdir. Burada  $\bar{\rho} = 0$  sistemin bir denge noktası olup negatif ve yeterince küçük  $\delta$  değeri için  $\bar{\rho} = 0$  kararlı, pozitif  $\delta$  değeri için ise kararsızdır.

$\rho_{t+1} = f(\rho_t, \delta)$  olmak üzere  $f_{\rho_t} = 1 + \delta + 3a(\delta)\rho_t^2 + 5\rho_t^4 R(\rho_t, \delta) + \rho_t^4 R'(\rho_t, \delta)$  olarak hesaplanır. Burada  $f_{\rho_t}(0) = 1 + \delta$  olup  $-2 < \delta < 0$  için denge noktası kararlıdır.



$\delta = 0$  iken denge noktasının kararlılığı  $a(0)$  ın işareti ile belirlenir.

- Kabul edelim ki  $a(0) < 0$  olsun. O halde orijin denge noktası  $\delta = 0$  iken kararlıdır. Öte taraftan,  $\delta > 0$  iken (2.34) sisteminin sıfırdan farklı denge noktası

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} (1 + \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \delta)) \Rightarrow 0 = \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \delta) \approx \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2$$

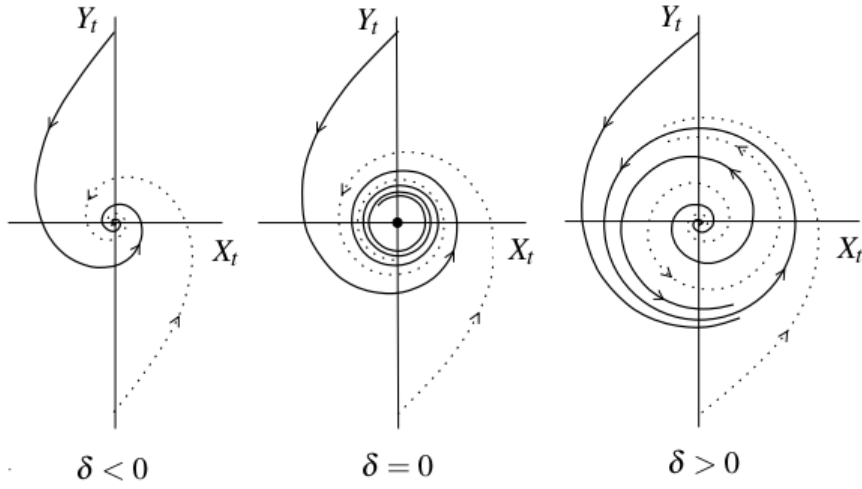
olmak üzere aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\bar{\rho}_0 = \sqrt{-\frac{\delta}{a(\delta)}} + O(\delta).$$

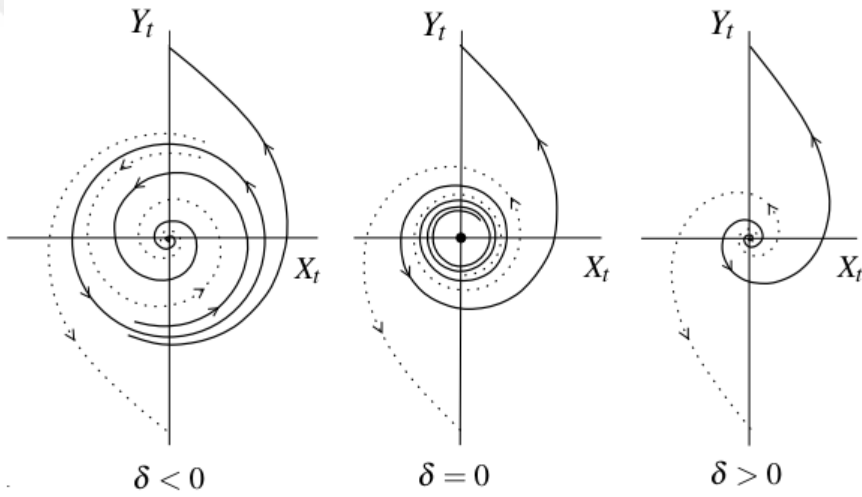
Burada  $f_{\rho_t}(\bar{\rho}_0) = 1 - 2\delta + \theta(\delta^2)$  olup yeterince küçük  $\delta$  değerleri için  $|f_{\rho_t}(\bar{\rho}_0)| < 1$  sağlanacağından  $\bar{\rho}_0$  denge noktası kararlıdır. Diğer taraftan  $\varphi$ ,  $\delta$  ve  $\rho$  ya göre dönme açısını belirler ve yaklaşık olarak  $\theta(\delta)$  ya eşittir. Sonuç olarak faz portresi şu şekilde çizilir:

$\delta > 0$  durumunda  $\bar{\rho} = 0$  kararsız denge noktasının etrafında kapalı bir eğri meydana gelir. Her bir  $\delta > 0$  için bu eğri tektir ve yarıçapı  $\rho_0(\delta)$  dır. Orijin noktası haricinde kapalı eğrinin içinde veya dışında başlayan tüm yörüngeler (2.34) sistemindeki iterasyonları gerçekler.  $a(0) < 0$  olduğundan  $\delta = 0$  değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümler kararlı olup bu durum Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 2.4).

- $a(0) > 0$  durumu da benzer şekilde analiz edilebilir. Bir önceki analizin aksine negatif  $\delta$  değerinde kararsız bir kapalı eğri mevcuttur ve bu eğri  $\delta$  pozitif değerine giderken yok olmaktadır.  $a(0) > 0$  olduğundan  $\delta = 0$  değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümler kararsız olup bu durum Subkritik Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 2.5).



Şekil 2.4: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)



Şekil 2.5: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)

Şimdi (2.30) sisteminde yüksek mertebeden terimlerin de mevcut olduğunu kabul edelim ve aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} &= (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\
 &+ (X_t^2 + Y_t^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + O(\|X_t^4, Y_t^4\|).
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Burada  $O(\|X_t^4, Y_t^4\|)$ ,  $\delta$  ya bağılı düzgün bir fonksiyondur. Fakat (2.35) sistemi (2.30) sistemine lokal topolojik olarak denk değildir. Bu yüzden yüksek mertebeden terimler sistemin çatallanma davranışını etkiler. Eğer (2.35) sistemi kutupsal formda yazılırsa  $\rho$  dönüşümü  $\varphi$  açısına bağılı olacaktır. Bu sistem (2.34) formunda yazılabilir fakat burada  $R$  ve  $Q$  fonksiyonları  $2\pi$ -periyotludur. Buna karşın, (2.30) ve (2.35) sistemlerinin faz portreleri benzer özelliklere sahip olduğundan aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

**Lemma 2.2.**  $O(\|X_t^4, Y_t^4\|)$  terimleri (2.35) sistemindeki kapalı eğrinin çatallanmasını etkilemez. Yani, kapalı yörünge orijinin solundan sağına geçerken (2.30) sistemindeki aynı yön ve kararlılık yapısı ile çatallanır (Kuznetsov, 1998).

Şimdi de Neimark-Sacker çatallanmaya sahip herhangi 2–boyutlu sistemin (2.35) formuna dönüştürülebileceğini gösteren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

**Teorem 2.9.**

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t, \delta) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t, \delta) \end{pmatrix}$$

sistemi yeterince küçük  $\delta$  değerleri için  $(0,0)$  denge noktasına sahip olsun ve bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin özdeğerleri  $\lambda_{1,2} = r(\delta)e^{\mp i\theta(\delta)} \ni r(\bar{\delta}) = 1$  ve  $\theta(\bar{\delta}) = \theta_0$  olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(N.S.1)  $r'(\bar{\delta}) \neq 0$ ,

(N.S.2)  $e^{ik\theta_0} \neq 1, k=1,2,3,4$ .

Öyleyse, (2.9) sistemini (2.35) sistemine dönüştüren tersi mevcut olan parametre ve koordinat dönüşümleri mevcuttur. Ek olarak  $a(\bar{\delta}) = \text{Re}(e^{i\theta_0}c_1(\bar{\delta})) \neq 0$  olsun. Bu durumda,  $\delta$  soldan sağa  $\bar{\delta}$  değerinden geçerken orijinin bir komşuluğunda kapalı yörünge ailesi ortaya çıkar. Burada

$$a(\bar{\delta}) = \text{Re}\left(\frac{e^{-i\theta_0}g_{21}}{2}\right) - \text{Re}\left(\frac{(1-2e^{-i\theta_0})e^{-2i\theta_0}g_{20}g_{11}}{2(1-e^{-i\theta_0})}\right) - \frac{|g_{11}|^2}{2} - \frac{|g_{02}|^2}{4}$$

dir (Kuznetsov, 1998).

**Açıklama 2.1.**  $a(\bar{\delta})$  katsayısı kapalı yörüngenin yönünü ve kararlılığını belirler.

- Eğer  $a(\bar{\delta}) < 0$  ise Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.
- Eğer  $a(\bar{\delta}) > 0$  ise Subkritik Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.

## 2.2.4 Hopf Çatallanma Teorisi

Bir diferensiyel denklem sisteminde periyodik çözümlerin görüldüğü, bir başka ifadeyle sistemin denge noktasının lokal komşuluğunda (bir çift sıfır sanal özdeğerin

bulunmasıyla) limit döngülerinin ortaya çıktığı çatallanma türü Hopf çatallanma olarak adlandırılır.

Sürekli zamanda değişen gezegenlerin güneş etrafındaki hareketi, gece ve gündüz döngüsü, uyku döngüsü, solunum olayı, kalbin kanı periyodik olarak pompalaması, finansal piyasadaki fiyat değişiklikleri karşılaşılan farklı periyodik davranışlara örnek olarak verilebilir. Hemen hemen her alanda görülebilen periyodik davranışlar aslında tanımladığı olgunun kontrol edilebileceğini göstermektedir. Dolayısıyla, av-avcı popülasyon dinamiğinde türlerin hayatta kalma stratejilerini anlamak, türlerin varlığının korunması ve kontrol edilmesini analiz etmek özellikle nesilleri tükenme tehlikesi altında olan türler için geliştirilecek önlemler için önemli bir araştırma konusudur.

Bir diferensiyel denklem sisteminde Hopf çatallanmanın görülebilmesi için gerekli şartları belirtmeden önce bu çatallanmanın normal formunu ele alalım. Bu amaç doğrultusunda aşağıda verilen 2-boyutlu ve  $k$  parametresine bağlı sistemini ele alalım:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - (X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Burada  $X := X(t)$  ve  $Y := Y(t)$  yi temsil etmektedir. Tüm  $k$  reel sayısı için (2.36) sisteminin  $(0,0)$  denge noktasındaki Jakobiyen matrisi  $J(k) = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$  olup  $\lambda_{1,2}(k) = k \mp i$  bu matrisin kompleks eşlenik özdeğeridir.

Şimdi de  $Z = X + iY$  kompleks değişkenini ele alalım.  $\bar{Z} = X - iY$  ve  $|Z|^2 = X^2 + Y^2$  olmak üzere  $\dot{Z} = \dot{X} + i\dot{Y} = k(X + iY) + i(X + iY) - (X + iY)(X^2 + Y^2)$  olup (2.36) sistemi

$$\dot{Z} = (k + i)Z - Z|Z|^2 \quad (2.37)$$

sistemine indirgenir. Ayrık sistemlerde olduğu gibi  $Z = \rho e^{i\varphi}$  dönüşümü ile

$$\dot{Z} = \dot{\rho} e^{i\varphi} + \rho i \dot{\varphi} e^{i\varphi} \Rightarrow \dot{\rho} e^{i\varphi} + \rho i \dot{\varphi} e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} (k + i - \rho^2)$$

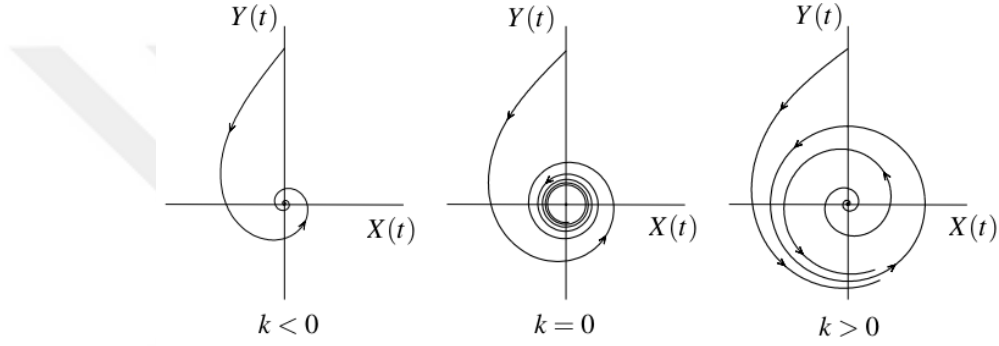
eşitliğinden (2.36) sisteminin kutupsal formu

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(k - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

olarak elde edilir. (2.38) ile verilen ikinci denklem sabit hızda dönüşü göstermektedir. (2.38) ile verilen birinci denklem ise tüm  $k$  değerleri için  $\rho = 0$  denge noktasına sahip iken pozitif  $k$  değerleri için  $\rho = \sqrt{k}$  denge noktasına sahiptir. Denge noktalarının

kararlılıkları için denklemin sağ tarafını  $f(\rho, k) = \rho(k - \rho^2)$  ile gösterelim. Buradan  $f_\rho = k - 3\rho^2$  olup aşağıda ifade edilen üç durum söz konusudur:

- Eğer  $k < 0$  ise  $f_\rho(\rho = 0) = k < 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktası karardır.
- $k = 0$  iken  $f_\rho(\rho = 0) = 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktasının kararlılığı için lineerleştirme cevap vermez. Fakat  $k = 0$  iken  $\dot{\rho} = -\rho^3 < 0$  olup çözüm eğrisi orijine yaklaşır.
- $k > 0$  iken  $f_\rho(\rho = 0) = k > 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktası kararsızdır.  $f_\rho(\sqrt{k}) = -2k < 0$  olup  $\rho = \sqrt{k}$  denge noktası karardır.



Şekil 2.6: Süperkritik Hopf çatallanma (Kuznetsov, 1998)

Dikkat edilirse  $\rho = 0$  denge noktası pozitif  $k$  değeri için kararlı bir kapalı yörünge ( $\sqrt{k}$  yarıçaplı çember) ile çevrilidir. Dolayısıyla orijin dışında kapalı limit döngüsünün içinde veya dışında başlayan tüm çözümler  $t \rightarrow \infty$  iken döngüye yönelecektir (Bakınız Şekil 2.6). Bu ise Andronov-Hopf çatallanma, kısaca Hopf çatallanma olarak adlandırılır (Kuznetsov, 1998). Burada  $k = 0$  kritik çatallanma değeri olup bu değerde (2.36) sistemi bir çift sıfır sanal özdeğere sahiptir.

**Lemma 2.3.**

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - (X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + O(\|X^4, Y^4\|) \quad (2.39)$$

*sistemi orijin denge noktasının komşuluğunda (2.36) sistemine lokal topolojik olarak denktir. Yani yüksek mertebeden terimler kapalı eğrinin çatallanma davranışını değiştirmez.*

Şimdi de

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

sistemini ele alalım. Yine  $Z = X + iY$  değişken değiştirmesi yapılırsa (2.40) sistemi

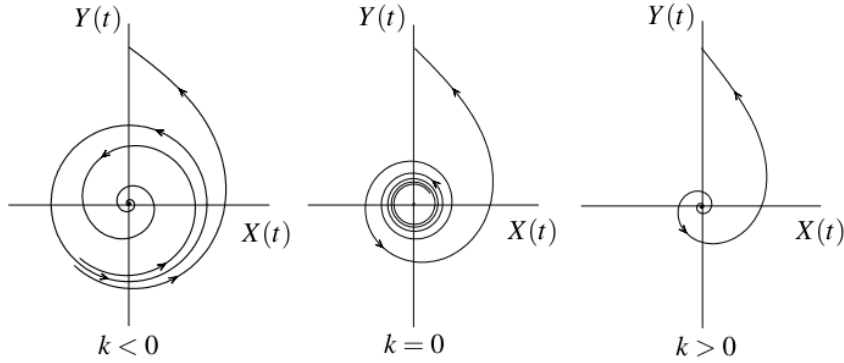
$$\dot{Z} = (k + i)Z + Z|Z|^2 \quad (2.41)$$

sistemine indirgenir.  $Z = \rho e^{i\varphi}$  dönüşümü ile

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(k + \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

birbirinden bağımsız iki denklemden oluşan (uncoupled) sistem elde edilir. Burada birinci denklem tüm  $k$  değerleri için  $\rho = 0$  ve negatif  $k$  değerleri için  $\rho = \sqrt{-k}$  denge noktasına sahiptir.  $f(\rho, k) = \rho(k + \rho^2)$  olmak üzere  $f_\rho = k + 3\rho^2$  dir. Öyleyse

- $k < 0$  iken  $f_\rho(\rho = 0) = k < 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktası kararlıdır.  $f_\rho(\sqrt{-k}) = -2k > 0$  olup  $\rho = \sqrt{-k}$  denge noktası kararsızdır.
- $k = 0$  iken  $f_\rho(\rho = 0) = 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktasının kararlılığı için lineerleştirme cevap vermez. Fakat  $k = 0$  iken  $\dot{\rho} = \rho^3 > 0$  olup çözüm eğrisi orijinden uzaklaşır.
- $k > 0$  iken  $f_\rho(\rho = 0) = k > 0$  olup  $\rho = 0$  denge noktası kararsızdır.



Şekil 2.7: Subkritik Hopf çatallanma (Kuznetsov, 1998)

Bölüm 2.1.2'den biliyoruz ki bir diferensiyel denklem sisteminin kararlılık yapısı, lineerleştirilmiş sistemin özdeğerlerinin işaretine bağlıdır. Ayrıca tanımlanan yeni değişkenlerle hem denge noktası hem de kritik çatallanma değeri sıfıra taşınabilir. Aşağıdaki teorem 2–boyutlu keyfi bir diferensiyel denklem sisteminde Hopf çatallanmanın varlığı için yeterli koşulları vermektedir. Bu tez çalışmasında ele aldığımız sürekli av-avcı sistemi için periyodik çözümlerin varlığı bu teoremin uygulanması ile gösterilecektir.

**Teorem 2.10.** *Kabul edelim ki*

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(X, Y, k) \\ \tilde{g}(X, Y, k) \end{pmatrix}$$

*sistemi yeterince küçük  $k$  değerleri için  $(0,0)$  denge noktasına sahip olsun ve bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisi  $\lambda(k) = m(k) \mp in(k)$  kompleks eşlenik özdeğere sahip olsun. Ek olarak  $k_c$  kritik çatallanma değerinde,*

$$(H.1) \quad m(k_c) = 0 \text{ ve } m'(k_c) \neq 0$$

$$(H.2) \quad n(k_c) := n_0 > 0$$

*sağlansın. Öyleyse,  $\alpha(k_c) = -\frac{Re(c_1(k_c))}{m'(k_c)} \neq 0$  ise  $k$  soldan sağa  $k_c$  değerinden geçerken orijinin bir komşuluğunda kapalı yörünge ailesi ortaya çıkar. Burada*

$$c_1(k_c) = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

*dir (Kuznetsov, 1998).*

**Açıklama 2.2.** *Kapalı yörüngenin yönünü ve kararlılığı için dört farklı durum söz konusudur.*

- *Eğer  $m'(k_c) > 0$  ve  $\alpha(k_c) > 0$  ise denge noktası  $k_c$  çatallanma değerinden önce kararlı iken bu değerden sonra kararsızdır. Periyodik çözümler çatallanma değerinden sonra ortaya çıkar.  $Re(c_1(k_c)) < 0$  olduğu için periyodik çözümler kararlıdır. Dolayısıyla,  $k_c$  kritik çatallanma değerinde Süperkritik Hopf çatallanma meydana gelir.*
- *Eğer  $m'(k_c) > 0$  ve  $\alpha(k_c) < 0$  ise denge noktası  $k_c$  çatallanma değerinden önce kararlı iken bu değerden sonra kararsızdır. Periyodik çözümler çatallanma değerinden önce ortaya çıkar.  $Re(c_1(k_c)) > 0$  olduğu için periyodik çözümler kararsızdır. Dolayısıyla,  $k_c$  kritik çatallanma değerinde Subkritik Hopf çatallanma meydana gelir.*
- *Eğer  $m'(k_c) < 0$  ve  $\alpha(k_c) < 0$  ise denge noktası  $k_c$  çatallanma değerinden önce kararsız iken bu değerden sonra kararlıdır. Periyodik çözümler çatallanma değerinden önce ortaya çıkar.  $Re(c_1(k_c)) < 0$  olduğu için periyodik çözümler kararlıdır. Dolayısıyla,  $k_c$  kritik çatallanma değerinde Süperkritik Hopf çatallanma meydana gelir.*
- *Eğer  $m'(k_c) < 0$  ve  $\alpha(k_c) > 0$  ise denge noktası  $k_c$  çatallanma değerinden önce kararsız iken bu değerden sonra kararlıdır. Periyodik çözümler çatallanma değerinden sonra ortaya çıkar.  $Re(c_1(k_c)) > 0$  olduğu için periyodik çözümler*

kararsızdır. Dolayısıyla,  $k_c$  kritik çatallanma değerinde Subkritik Hopf çatallanma meydana gelir.

Ek olarak, aşağıda tanımlı  $\tilde{T}$  değeri ile periyodik çözümlerin periyodu hesaplanır:

$$\tilde{T} = -\frac{\text{Im}(c_1(k_c)) + \alpha(k_c)n'(k_c)}{n(k_c)}.$$

- Eğer  $\tilde{T} > 0$  ise periyodik çözümlerin periyodu  $k_c$  çatallanma değeri arttıkça artar,
- Eğer  $\tilde{T} < 0$  ise periyodik çözümlerin periyodu  $k_c$  kritik çatallanma değeri arttıkça azalır.



### 3. AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNDE ALLEE ETKİSİ

#### 3.1 Modelin Tanıtımı ve Temel Özellikleri

Bu tezde, ilk olarak

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_t + \delta N_t (r_1 - \epsilon P_t) \\ P_t + \delta P_t (r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t}) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Leslie tipi ayrik av-avcı sistemi ele alınacaktır. Burada  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\epsilon$ ,  $\theta$  parametreleri pozitif olup  $N_t$  ve  $P_t$  sırasıyla  $t$  anındaki av ve avcı popülasyon yoğunluklarını göstermektedir. Modelde,  $r_1 N_t$  ifadesi av popülasyonunun sınırsız bir büyümeye sahip olduğunu gösterirken, tepki fonksiyonu  $\epsilon P_t$ , bu büyümenin sınırsız olmadığını belirtir. Av popülasyonundan farklı olarak, avcı popülasyonu  $r_2$  büyüme oranı ile lojistik bir büyümeye sahiptir, ancak avcının yaşaması avcı başına düşen ortamdaki av sayısı ile sınırlıdır. Burada,  $\theta$  parametresi denge halinde her bir avcının hayatta kalabilmesi için tüketmesi gereken gerekli av sayısını temsil etmektedir. Son olarak,  $\delta$  ayırıklaştırma adıdır. Biyolojik açıdan modelin türetilmesinde  $\delta$  ayırıklaştırma adımını sabit bir değer almadan (örneğin  $\delta = 1$ ) dikkate almak, iyi tanımlı lineer olmayan bir sistem elde etmemizi sağlar. (3.1) sistemi Euler metodu ile aşağıdaki sürekli av-avcı sisteminden elde edilmiştir:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) - \epsilon P(t) N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left( r_2 - \theta \frac{P(t)}{N(t)} \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

Popülasyon modelleri üzerine yapılan araştırmalar çeşitli mekanizmalar veya etkileşimlerin popülasyon dinamiklerinde meydana getirdiği değişiklikleri içermektedir. Allee etkisi de bu mekanizmalardan biridir. Allee etkisinin tek bir açıklaması bulunmayıp bu tezde (3.1) ve (3.2) sistemlerinde Allee etkisine ayrıntılı bir şekilde yer verilecektir.

Un kurdu, alp marmotları gibi türlerin yaşamlarını sürdürebilmesi için türdeşlerinin varlığı önemli bir avantaj sağlamaktadır. Örneğin, düşük popülasyon yoğunluğunda bireylerin buldukları ortamdaki türdeş sayısı arttıkça her bir bireyin eş bulma şansı, buna bağlı olarak da kişi başı doğum oranı artar. Av-avcı popülasyon modellerinde av popülasyonu uygun bir eş bulma zorluğu yaşayıp Allee etkisine maruz kalabilir. Bu durum, tek besin kaynağı av popülasyonu olan avcı popülasyonunu olumsuz etkileyebilir.

Kabul edelim ki av popülasyonu eş bulma Allee etkisine sahip olsun. O halde (3.1) sistemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_t + \delta r_1 N_t \left( \frac{N_t}{N_t + \beta} \right) - \delta \epsilon N_t P_t \\ P_t + \delta P_t \left( r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Burada  $\beta > 0$ , Allee sabiti olup Allee etkisinin büyüklüğünü belirler.  $\beta$  parametresi azaldıkça Allee etkisinin gücü azalır. Bir başka ifadeyle,  $\beta \rightarrow 0$  iken  $\alpha(N_t) \rightarrow 1$  olur.

Dikkat edilirse,  $\alpha(N_t) = \frac{N_t}{N_t + \beta}$  fonksiyonu  $N$  nin artan fonksiyonudur

( $\alpha'(N_t) = \frac{\beta}{(N_t + \beta)^2} > 0$ ). Yani, popülasyon yoğunluğu arttıkça bireylerin eş bulma olasılığı, dolayısıyla doğum oranı artar ve Allee etkisi azalır. Eğer popülasyondaki birey sayısı çok fazla ise eş bulma sorunu belirlenemeyeceğinden Allee etkisinden bahsedemeyiz (yani, matematiksel olarak  $\lim_{N_t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{N_t + \beta} = 1$  dir).

### 3.2 Kararlılık Analizi

Av-avcı popülasyon modelleri üzerine yapılan çalışmaların temel amaçlarından birisi ileri zamandaki popülasyon davranışlarının incelenmesi; denge noktalarının (şayet var ise) kararlı olabilmesi için gerekli şartların belirlenmesidir.

(3.1) sisteminin pozitif denge noktasında lokal kararlı olabilmesi için gerekli şartlar Baydemir ve diğ. (2020) tarafından belirlenmiştir. Şimdi de Allee etkisi içeren (3.3) sisteminin kararlılık analizini inceleyelim. İlk olarak, sistemin denge noktalarını belirleyelim. (3.3) sisteminde birinci denklemi ele alırsak

$$\bar{N} = \bar{N} + \delta r_1 \bar{N} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} \right) - \delta \epsilon \bar{N} \bar{P} \Rightarrow \bar{N} \delta \left( r_1 \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} - \epsilon \bar{P} \right) = 0 \quad (3.4)$$

eşitliğinin sağlanması için  $\delta > 0$  olmak üzere

$$\bar{N} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{P} = \frac{r_1}{\epsilon} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} \right) \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (3.3) sisteminde ikinci denklemden

$$\bar{P} = \bar{P} + \delta \bar{P} \left( r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right) \Rightarrow \delta \bar{P} \left( r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right) = 0 \quad (3.6)$$

eşitliği

$$\bar{P} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{N} = \frac{\theta \bar{P}}{r_2} \quad (3.7)$$

iken sağlanır. Açıkça görülüyor ki  $(\bar{N}, \bar{P}) = (0, 0)$  (3.3) sisteminin bir denge noktasıdır. Fakat bu denge noktası biyolojik açıdan anlamlı değildir. Çünkü model

"Av popülasyonu avcı popülasyonunun tek besin kaynağıdır ve avcının yaşaması ortamdaki av sayısı ile ilişkilidir" hipotezi altında kurulmuştur. Öyleyse

$$\bar{N} = \frac{\theta}{r_2} \bar{P} = \frac{\theta}{r_2} \frac{r_1}{\epsilon} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} \right) \Rightarrow \bar{N} \left( 1 - \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} \frac{1}{\bar{N} + \beta} \right) = 0 \Leftrightarrow \bar{N} = \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} - \beta \quad (3.8)$$

olup (3.7) eşitliğinden

$$\bar{P} = \frac{r_2}{\theta} \bar{N} = \frac{r_2}{\theta} \left( \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} - \beta \right) = \frac{r_1}{\epsilon} - \frac{r_2}{\theta} \beta \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Denge noktasının pozitif olabilmesi için  $\beta = k \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} \ni k \in (0, 1)$  alabiliriz. Sonuç olarak (3.3) sistemin tek denge noktası

$$(\bar{N}, \bar{P}) = \left( (1-k) \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}, (1-k) \frac{r_1}{\epsilon} \right) \quad (3.10)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse  $k = 0$  için (3.10) denge noktası Allee etkisi içermeyen (3.1) sisteminin denge noktasına indirgenirken  $k = 1$  için  $(\bar{N}, \bar{P}) = (0, 0)$  denge noktası elde edilir. Buradan  $k$  arttıkça  $\beta$  Allee sabitinin arttığını, dolayısıyla Allee etkisi sonucu sistemin dengeye ulaştığı değer küçülür.

(3.3) sisteminde denklemlerin sağ tarafı sırası ile  $f(N, P)$  ve  $g(N, P)$  fonksiyonları ile gösterilsin. Öyleyse

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} f_N(N, P) & f_P(N, P) \\ g_N(N, P) & g_P(N, P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \delta r_1 \frac{N^2 + 2N\beta}{(N + \beta)^2} - \delta \epsilon P & -\delta \epsilon N \\ \frac{\delta \theta P^2}{N^2} & 1 + \delta r_2 - \frac{2\delta \theta \epsilon}{N} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

olmak üzere (3.3) sistemin denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J(\bar{N}, \bar{P}) = \begin{pmatrix} 1 + \delta r_1 (k - k^2) & \frac{-\delta \theta r_1}{r_2} (1 - k) \\ \frac{\delta r_2^2}{\theta} & 1 - \delta r_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Burada

$$a = r_1 k (1 - k), \quad b = \frac{\theta r_1}{r_2} (1 - k), \quad c = \frac{r_2^2}{\theta}, \quad d = r_2 \quad (3.13)$$

olmak üzere Jakobiyen matrisinin izi ve determinanı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \text{iz} J &= 2 - \delta r_2 + \delta r_1 (k - k^2) = 2 + \delta (a - d) \\ \text{det} J &= 1 - \delta r_2 + \delta r_1 k (1 - k) + \delta^2 r_1 r_2 (1 - k)^2 = 1 + \delta (a - d) + \delta^2 (bc - ad). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Öyleyse  $x := a - d$  ve  $y := bc - ad$  alınır, (3.3) sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - izJ\lambda + detJ = \lambda^2 - (2 + \delta x)\lambda + (1 + \delta x + \delta^2 y) \quad (3.15)$$

olarak bulunur.

Biliyoruz ki ayrık sistemlerde bir sistemin denge noktasının lokal kararlı olabilmesi için karakteristik polinomun tüm köklerinin mutlak değerinin birden küçük, kararsız olabilmesi için en az bir kökün mutlak değerinin birden büyük, çatallanmanın ortaya çıkabilmesi için de köklerden en az birinin veya tüm köklerin mutlak değerinin bire eşit olması gerekmektedir. Bu yüzden, (3.15) ile verilen karakteristik polinomun

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + \delta x \pm \delta \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad (3.16)$$

köklerini analiz edebilmek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

**Lemma 3.1.**  $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$  ikinci dereceden reel katsayılı bir polinom olsun ve  $\lambda_1$  ile  $\lambda_2$  de  $F(\lambda)$  polinomunun iki kökü olsun. Öyleyse,

1.  $|\lambda_1| < 1$  ve  $|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, F(-1) > 0, \text{ ve } C < 1,$
2.  $\lambda_1 = -1$  ve  $|\lambda_2| \neq 1 \Leftrightarrow F(-1) = 0 \text{ ve } B \neq 0, 2,$
3.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, |\lambda_1| = 1 \text{ ve } |\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0 \text{ ve } C = 1 \text{ dir.}$

**İspat.** Bakınız Baydemir ve diğ. (2020).

Lemma 3.1 gereğince  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasının kararlı olabilmesi için  $F(1) > 0, F(-1) > 0$  ve  $C < 1$  eşitsizliklerinin aynı anda sağlanması gerekmektedir. Bu üç eşitsizliğin aynı anda sağlanması için gerekli koşulları araştıralım.

$F(1) = 1 - 2 - \delta x + 1 + \delta x + \delta^2 y = \delta^2 y > 0$  olması için  $y > 0$  olmalıdır.

$C = 1 + \delta x + \delta^2 y < 1 \Rightarrow \delta(x + \delta y) < 0$  için  $\delta < -x/y$  sağlanmalıdır.  $\delta > 0$  ve  $F(1) > 0$  iken  $y > 0$  olacağından  $C < 1$  için  $x < 0$  olmalıdır.

$F(-1) = 1 + 2 + \delta x + 1 + \delta x + \delta^2 y = \delta^2 y + 2\delta x + 4 = (\delta - \bar{\delta}_1)(\delta - \bar{\delta}_2)$  olup  $x < 0$  ve  $y > 0$  olmak üzere  $F(-1)$  polinomunun kökleri

$$\bar{\delta}_1 = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4y}}{y} \quad \text{ve} \quad \bar{\delta}_2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4y}}{y} \quad (3.17)$$

şeklindedir. Eğer  $x^2 > 4y$  ise  $F(-1)$  polinomu iki reel köke sahiptir. Ayrıca,  $\bar{\delta} > 0$  olması için  $x^2 - 4y > 0$  ise  $-x > x^2 - 4y > 0$  yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki

tarafının karekökü alınırsa  $\bar{\delta}_1 > 0$  olarak elde edilir. Öte yandan,  $0 < \bar{\delta}_1 < \bar{\delta}_2$  gerçekleşir. Öyleyse,  $F(-1)$  polinomunun işaret tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

	0	$\bar{\delta}_1$	$\bar{\delta}_2$
$F(-1)$	+	-	+

Sonuç olarak,  $x^2 > 4y$  iken  $0 < \delta < \bar{\delta}_1$  veya  $\delta > \bar{\delta}_2$  ise  $F(-1) > 0$  sağlanır. Dikkat edilirse  $\bar{\delta}_1 < -\frac{x}{y} < \bar{\delta}_2$  dir.  $C < 1$  şartından  $\delta < -\frac{x}{y}$  olmalıdır. O halde  $\delta > \bar{\delta}_2$  alınamayacağından  $x^2 > 4y$  iken  $0 < \delta < \bar{\delta}_1$  için  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Eğer  $x^2 < 4y$  ise  $F(-1)$  polinomu reel köke sahip olmadığından  $\forall \delta > 0$  için  $F(-1) > 0$  sağlanır.

Eğer  $x^2 = 4y$  ise de  $F(-1)$  çift katlı köke sahip olup  $\forall \delta > 0$  için  $F(-1) > 0$  sağlanır. O halde  $x^2 \leq 4y$  için tek bakmamız gereken kriter  $F(1) > 0$  ve  $C < 1$  olmasıdır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.1.** *Eğer  $F(\lambda)$  karakteristik polinomu  $x < 0$  ve  $y > 0$  olmak üzere aşağıdaki şartlardan birini sağlıyor ise  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır:*

i)  $x^2 > 4y$  iken  $0 < \delta < \bar{\delta}_1$ ,

ii)  $x^2 \leq 4y$  iken  $0 < \delta < -\frac{x}{y}$ .

*Burada*

$$\bar{\delta}_1 = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4y}}{y} \quad (3.18)$$

*dır.*

### 3.3 Flip Çatallanma Analizi

Lemma 3.1 gereğince (3.3) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında Flip çatallanmanın görülebilmesi için  $F(-1) = 0$  ve  $B \neq 0, 2$  olmalıdır. Öyleyse,  $F(-1) = 0$  için  $\delta = \bar{\delta}_1$  veya  $\delta = \bar{\delta}_2$  seçilmelidir. Ayrıca  $B \neq 0, 2$  olabilmesi için  $\delta \neq -\frac{2}{x}, -\frac{4}{x}$  şartı sağlanmalıdır.

İlk olarak  $\delta = \bar{\delta}_1$  olduğunu kabul edelim. Bu kabul altında,  $\lambda_1 = -1$  ve  $\lambda_2 = 3 + x\bar{\delta}_1$

$\ni |\lambda_2| \neq 1$  olarak bulunur. Bu ise denge noktasında Flip çatallanmanın görülebileceğini işaret eder. Öyleyse çatallanmanın var olduğunu analitik olarak gösterelim.

Şimdi de işlemleri basitleştirmek için sistemin denge noktasını orijine taşıyalım. Bu amaçla (3.3) sistemindeki denklemlerin sağ tarafını

$$\begin{aligned} f(N_t, P_t) &:= N_t + \delta r_1 N_t \left( \frac{N_t}{N_t + \beta} \right) - \delta \epsilon N_t P_t, \\ g(N_t, P_t) &:= P_t + \delta P_t (r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ile gösterelim. Daha sonra (3.19) ile tanımlanan  $f(N_t, P_t)$  ve  $g(N_t, P_t)$  fonksiyonlarını  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında Taylor Serisine açalım:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= f(\bar{N}, \bar{P}) + f_N(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N}) + f_P(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P}) \\ &+ \frac{1}{2} [f_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2 + 2f_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) + f_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^2] \\ &+ \frac{1}{6} [f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^3 + 3f_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2(P_t - \bar{P}) \\ &+ 3f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^3] + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= g(\bar{N}, \bar{P}) + g_N(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N}) + g_P(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P}) \\ &+ \frac{1}{2} [g_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2 + 2g_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) + g_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^2] \\ &+ \frac{1}{6} [g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^3 + 3g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2(P_t - \bar{P}) \\ &+ 3g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^3] + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

formunda olup (3.10) ve (3.13) eşitliklerinden

- $f(\bar{N}, \bar{P}) = \bar{N}$  ve  $g(\bar{N}, \bar{P}) = \bar{P}$
- $f_N = 1 + \delta r_1 \frac{N^2 + 2N\beta}{(N + \beta)^2} - \delta \epsilon P$  ise  $f_N(\bar{N}, \bar{P}) = 1 + \delta a$
- $f_P = -\delta \epsilon N$  ise  $f_P(\bar{N}, \bar{P}) = -\delta b$
- $f_{NN} = \frac{2\beta^2}{(N + \beta)^3}$  ise  $f_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = \delta \frac{2k^2 \epsilon r_2}{\theta}$
- $f_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\delta \epsilon$  ve  $f_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$

- $f_{NNN} = -\frac{6}{(N+\beta)^4}$  ise  $f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = -\delta \frac{6k^2 \epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1}$

- $f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$

- $g_N = \delta \frac{\theta P^2}{N^2}$  ise  $g_N(\bar{N}, \bar{P}) = \delta c$

- $g_P = 1 + \delta r_2 - 2\delta \frac{\theta P}{N}$  ise  $g_P(\bar{N}, \bar{P}) = 1 - \delta d$

- $g_{NN} = -2\delta \frac{\theta P^2}{N^3}$  ise  $g_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = -2\delta \frac{\epsilon r_2^3}{(1-k)\theta^2 r_1}$

- $g_{NP} = 2\delta \frac{\theta P}{N^2}$  ise  $g_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = 2\delta \frac{\epsilon r_2^2}{(1-k)\theta r_1}$

- $g_{PP} = -2\delta \frac{\theta}{N}$  ise  $g_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = -2\delta \frac{\epsilon r_2}{(1-k)r_1}$

- $g_{NNN} = 6\delta \frac{\theta P^2}{N^4}$  ise  $g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = 6\delta \frac{\epsilon^2 r_2^4}{(1-k)^2 \theta^3 r_1^2}$

- $g_{NNP} = -4\delta \frac{\theta P}{N^3}$  ise  $g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P}) = -4\delta \frac{\epsilon^2 r_2^3}{(1-k)^2 \theta^2 r_1^2}$

- $g_{NPP} = 2\delta \frac{\theta}{N^2}$  ise  $g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 2\delta \frac{\epsilon^2 r_2^2}{(1-k)^2 \theta r_1^2}$

- $g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$

olarak hesaplanır. Buradan (3.10) ve (3.12) denklemleri aşağıdaki şekilde ifade

edilebilir:

$$\begin{aligned}
N_{t+1} &= \bar{N} + (1 + \delta a)(N_t - \bar{N}) - \delta b(P_t - \bar{P}) + \delta \frac{k^2 \epsilon r_2}{\theta} (N_t - \bar{N})^2 \\
&\quad - \epsilon \delta (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \delta \frac{k^2 \epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1} (N_t - \bar{N})^3 + \dots, \\
P_{t+1} &= \bar{P} + \delta c(N_t - \bar{N}) + (1 - \delta d)(P_t - \bar{P}) - \delta \frac{\epsilon r_2^3}{(1-k)\theta^2 r_1} (N_t - \bar{N})^2 \\
&\quad + 2\delta \frac{\epsilon r_2^2}{(1-k)\theta r_1} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \delta \frac{\epsilon r_2}{(1-k)r_1} (P_t - \bar{P})^2 + \delta \frac{\epsilon^2 r_2^4}{(1-k)^2 \theta^3 r_1^2} (N_t - \bar{N})^3 \\
&\quad - 2\delta \frac{\epsilon^2 r_2^3}{(1-k)^2 \theta^2 r_1^2} (N_t - \bar{N})^2 (P_t - \bar{P}) - \delta \frac{\epsilon^2 r_2^2}{(1-k)^2 \theta r_1^2} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Böylelikle (3.3) sistemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \delta a & -\delta b \\ \delta c & 1 - \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t - \bar{N} \\ P_t - \bar{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Burada

$$\begin{aligned}
f_1 &= \delta \frac{k^2 \epsilon r_2}{\theta} (N_t - \bar{N})^2 - \epsilon \delta (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \delta \frac{k^2 \epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1} (N_t - \bar{N})^3 + \dots, \\
f_2 &= -\delta \frac{\epsilon r_2^3}{(1-k)\theta^2 r_1} (N_t - \bar{N})^2 + 2\delta \frac{\epsilon r_2^2}{(1-k)\theta r_1} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \delta \frac{\epsilon r_2}{(1-k)r_1} (P_t - \bar{P})^2 \\
&\quad + \delta \frac{\epsilon^2 r_2^4}{(1-k)^2 \theta^3 r_1^2} (N_t - \bar{N})^3 - 2\delta \frac{\epsilon^2 r_2^3}{(1-k)^2 \theta^2 r_1^2} (N_t - \bar{N})^2 (P_t - \bar{P}) \\
&\quad - \delta \frac{\epsilon^2 r_2^2}{(1-k)^2 \theta r_1^2} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + \dots
\end{aligned} \tag{3.24}$$

dir. Gösterim kolaylığı açısından  $\bar{\delta} := \bar{\delta}_1$  alalım ve  $\tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}$  dönüşümü ile yeni bir çatalanma parametresi tanımlayalım. Ayrıca  $U_t = N_t - \bar{N}$  ve  $V_t = P_t - \bar{P}$  olsun. Öyleyse  $U_{t+1} = N_{t+1} - \bar{N}$  ve  $V_{t+1} = P_{t+1} - \bar{P}$  olup (3.23) sistemi aşağıdaki sisteme dönüşür:

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ V_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta} a & -\bar{\delta} b \\ \bar{\delta} c & 1 - \bar{\delta} d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \tag{3.25}$$



ve yukarıdaki ifadede  $f_1$  ve  $f_2$  aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= \tilde{\delta}aU - \bar{\delta}bV + (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_1U^2 - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_2UV - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_3U^3 + YMT, \\ f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= \tilde{\delta}cU + (1 - \bar{\delta}d)V - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_4U^2 + (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_5UV - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_6V^2 \\ &\quad + (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_7U^3 - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_8U^2V - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})s_9UV^2 + YMT. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Burada  $i = 1, \dots, 9$  için  $s_i$  katsayıları aşağıda yer aldığı gibidir:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{k^2\epsilon r_2}{\theta} & s_2 &= \epsilon & s_3 &= \frac{(k\epsilon r_2)^2}{r_1\theta^2} \\ s_4 &= \frac{\epsilon r_2^3}{(1-k)r_1\theta^2} & s_5 &= \frac{2\epsilon r_2^2}{(1-k)\theta r_1} & s_6 &= \frac{\epsilon r_2}{(1-k)r_1} \\ s_7 &= \frac{\epsilon^2 r_2^4}{(1-k)^2\theta^3 r_1^2} & s_8 &= \frac{2\epsilon^2 r_2^3}{(1-k)^2\theta^2 r_1^2} & s_9 &= \frac{\epsilon^2 r_2^2}{(1-k)^2\theta r_1^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dikkat edilirse (3.25) sisteminin denge noktası  $(0,0)$  dır. Ayrıca  $\delta = \bar{\delta}$  iken  $\tilde{\delta} = 0$  olur. Sonuç olarak, (3.23) sistemin kritik çatallanma değeri ve denge noktası orijine taşınmış ve bu sistemin dinamik yapısına lokal topolojik olarak denk olan (3.25) sistemi elde edilmiştir. Öyleyse, analize (3.25) sistemi ile devam edelim.

Dikkat edilirse  $\delta = \bar{\delta}$  iken (3.23) ve (3.25) sistemleri aynı Jakobiyen matrisine sahiptir. Dolayısıyla  $\delta = \bar{\delta}$  kritik çatallanma değerinde (yani,  $\tilde{\delta} = 0$  iken), (3.25) sistemin karakteristik polinomunun kökleri, bir başka deyişle Jakobiyen matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1 = -1$  ve  $\lambda_2 = 3 + x\bar{\delta}_1 = 3 + x\bar{\delta}$  şeklindedir.

Şimdi de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım. İlk olarak

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}a & -\bar{\delta}b \\ \bar{\delta}c & 1 - \bar{\delta}d \end{pmatrix} \Rightarrow (J - \lambda_1 I)\Phi = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 + \bar{\delta}a & -\bar{\delta}b \\ \bar{\delta}c & 2 - \bar{\delta}d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

eşitliğini sağlayan  $\Phi$  vektörünü bulalım. Bunun için

$$\begin{aligned} (2 + \bar{\delta}a)\phi_1 - \bar{\delta}b\phi_2 &= 0 \\ \bar{\delta}c\phi_1 + (2 - \bar{\delta}d)\phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

eşitliklerini sağlayan  $\phi_1$  ve  $\phi_2$  değerlerini bulalım. Birinci denklemden kabul edelim ki

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}b \\ 2 + \bar{\delta}a \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

olsun. Öyleyse bu değerler ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\delta}c\bar{\delta}b + (2 - \bar{\delta}d)(2 + \bar{\delta}a) &= \bar{\delta}^2(bc - ad) + 2\bar{\delta}(a - d) + 4 \\ &= \bar{\delta}^2y + 2\bar{\delta}x + 4 \end{aligned} \quad (3.31)$$

denklemi elde edilir. Burada kabülümüz gereği  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\delta}^2y + 2\bar{\delta}x + 4 &= y \left( \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4y}}{y} \right)^2 + 2x \left( \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4y}}{y} \right) + 4 \\ &= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 4y} + x^2 - 4y}{y} - \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 4y}}{y} + 4 \\ &= -4 + 4 = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. O halde (3.30) ile tanımlanan  $\Phi$  vektörü  $\lambda_1 = -1$  özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Benzer şekilde  $\lambda_2 = 3 + x\bar{\delta}$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}a & -\bar{\delta}b \\ \bar{\delta}c & 1 - \bar{\delta}d \end{pmatrix} \Rightarrow (J - \lambda_2 I)M = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\delta}a - \bar{\delta}x - 2 & -\bar{\delta}b \\ \bar{\delta}c & -2 - \bar{\delta}d - \bar{\delta}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} (\bar{\delta}a - \bar{\delta}x - 2)m_1 - \bar{\delta}bm_2 &= 0 \\ \bar{\delta}cm_1 + (-2 - \bar{\delta}d - \bar{\delta}x)m_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

eşitliklerini sağlayan  $m_1$  ve  $m_2$  değerleri için birinci denklemi baz alarak

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}b \\ \bar{\delta}(a - x) - 2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

olduğunu kabul edelim. İkinci denklemde bu değerler yerine yazılır ve (3.32) eşitliği

ele alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{\delta}c\bar{\delta}b + (-2 - \bar{\delta}(d+x))(\bar{\delta}(a-x) - 2) &= \bar{\delta}^2(bc - ad) + 4 + 2\bar{\delta}(d+x-a+x) \\ &= \bar{\delta}^2y + 2\bar{\delta}x + 4 = 0\end{aligned}\quad (3.36)$$

olarak bulunur. Bu da bize  $M$  vektörünün  $\lambda_2 = 3 + x\bar{\delta}$  özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğunu söyler. O halde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri birer sütun kabul eden aşağıdaki tersinir  $T$  matrisini inşa edebiliriz:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{\delta}b & \bar{\delta}b \\ 2 + \bar{\delta}a & \bar{\delta}(a-x) - 2 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Burada  $\det(T) = -b\bar{\delta}(4 + x\bar{\delta})$  dir. Lemma 3.1 gereğince (3.25) sisteminde Flip çatallanmanın görülebilmesi için  $\delta \neq -\frac{2}{x}, -\frac{4}{x}$  şartı sağlanmalıdır. Ayrıca  $b$  ve  $\bar{\delta}$  pozitif olacağından  $\det(T) \neq 0$  dır. Öyleyse  $T$  matrisinin tersi

$$T^{-1} = \frac{1}{4 + \bar{\delta}x} \begin{pmatrix} \frac{2 - \bar{\delta}(a-x)}{\bar{\delta}b} & 1 \\ \frac{2 + \bar{\delta}a}{\bar{\delta}b} & -1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

olarak elde edilir. Şimdi de

$$\begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

dönüşümünü ele alalım.

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ V_{t+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

olup (3.25) sistemini yeniden yazarsak

$$T \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}a & -\bar{\delta}b \\ \bar{\delta}c & 1 - \bar{\delta}d \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

sistemi elde edilir. Burada (3.41) sisteminin her iki yanını soldan  $T^{-1}$  matrisi ile çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

dir. Öyleyse bu matrisi hesaplayalım. İlk olarak

$$\begin{pmatrix} f_1(U_t, V_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(U_t, V_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(X_t, Y_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

formuna geçişi inceleyelim. (3.39) dönüşümünden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\delta}b & \bar{\delta}b \\ 2 + \bar{\delta}a & \bar{\delta}(a-x) - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\delta}b(X_t + Y_t) \\ (2 + \bar{\delta}a)X_t + (\bar{\delta}(a-x) - 2)Y_t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Buradan  $U$  ve  $V$  değişkenine bağlı yüksek dereceli terimler aşağıdaki kutuda formülize edilmiştir:

$$\begin{aligned} U_t^2 &= (\bar{\delta}b)^2 (X_t^2 + 2X_tY_t + Y_t^2) \\ U_t^3 &= (\bar{\delta}b)^3 (X_t^3 + 3X_t^2Y_t + 3X_tY_t^2 + Y_t^3) \\ V_t^2 &= (2 + \bar{\delta}a)^2 X_t^2 + 2(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a-x) - 2)X_tY_t + (\bar{\delta}(a-x) - 2)^2 Y_t^2 \\ U_tV_t &= \bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)X_t^2 + \bar{\delta}^2b(2a-x)X_tY_t + \bar{\delta}b(\bar{\delta}(a-x) - 2)Y_t^2 \\ U_t^2V_t &= [(\bar{\delta}b)^2(2 + \bar{\delta}a)] X_t^3 + [(\bar{\delta}b)^2(2 + \bar{\delta}(3a+x))] X_t^2Y_t \\ &\quad + [(\bar{\delta}b)^2(\bar{\delta}(3a-2x) - 2)] X_tY_t^2 + [(\bar{\delta}b)^2(\bar{\delta}(a-x) - 2)] Y_t^3 \\ U_tV_t^2 &= [\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)^2] X_t^3 + [\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(3a-2x) - 2)] X_t^2Y_t \\ &\quad + [\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a-x) - 2)(\bar{\delta}(3a-x) + 2)] X_tY_t^2 + [\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a-x) - 2)^2] Y_t^3. \end{aligned} \quad (3.46)$$

(3.26) ve (3.46) eşitlikleri kullanılırsa  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonları

$$\begin{aligned}
f_1(X_t, Y_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) &= -2b\bar{\delta}X_t + \bar{\delta}(2b + \bar{\delta}bx)Y_t + [s_1\bar{\delta}^3b^2 + s_2\bar{\delta}^2b(2 + \bar{\delta}a)]X_t^2 \\
&+ [2s_1\bar{\delta}^3b^2 + s_2\bar{\delta}^3b(2a - x)]X_tY_t + [s_1\bar{\delta}^3b^2 + s_2\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a - x) - 2)]Y_t^2 \\
&+ \bar{\delta}[s_1\bar{\delta}^2b^2 + s_2\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)]X_t^2 + \bar{\delta}[2s_1\bar{\delta}^2b^2 + s_2\bar{\delta}^2b(2a - x)]X_tY_t \\
&+ \bar{\delta}[s_1\bar{\delta}^2b^2 + s_2\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2)]Y_t^2 - s_3\bar{\delta}^4b^3X_t^3 - 3s_3\bar{\delta}^4b^3(X_t^2Y_t + X_tY_t^2) \\
&- s_3\bar{\delta}^4b^3Y_t^3 - \bar{\delta}s_3\bar{\delta}^3b^3X_t^3 - 3\bar{\delta}s_3\bar{\delta}^3b^3(X_t^2Y_t + X_tY_t^2) - \bar{\delta}s_3\bar{\delta}^3b^3Y_t^3,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
f_2(X_t, Y_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) &= \bar{\delta}[\bar{\delta}(bc - ad) - 2d]X_t + \bar{\delta}[\bar{\delta}(bc - ad + xd) + 2d]Y_t \\
&+ [-s_4\bar{\delta}^3b^2 + s_5\bar{\delta}^2b(2 + \bar{\delta}a) - s_6\bar{\delta}(2 + \bar{\delta}a)^2]X_t^2 \\
&+ [-2s_4\bar{\delta}^3b^2 + s_5\bar{\delta}^3b(2a - x) - 2s_6\bar{\delta}(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a - x) - 2)]X_tY_t \\
&+ [-s_4\bar{\delta}^3b^2 + s_5\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a - x) - 2) - s_6\bar{\delta}(\bar{\delta}(a - x) - 2)^2]Y_t^2 \\
&+ \bar{\delta}[-s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a) - s_6(2 + \bar{\delta}a)^2]X_t^2 \\
&+ \bar{\delta}[-2s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}^23b(2a - x) - 2s_6(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a - x) - 2)]X_tY_t \\
&+ \bar{\delta}[-s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2) - s_6(\bar{\delta}(a - x) - 2)^2]Y_t^2 \\
&+ [s_7\bar{\delta}^4b^3 - s_8\bar{\delta}^3b^2(2 + \bar{\delta}a) + s_9\bar{\delta}^2b(2 + \bar{\delta}a)^2]X_t^3 \\
&+ [3s_7\bar{\delta}^4b^3 - s_8\bar{\delta}^3b^2(2 + \bar{\delta}(3a - x)) + s_9\bar{\delta}^2b(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(3a - 2x) - 2)]X_t^2Y_t \\
&+ [3s_7\bar{\delta}^4b^3 - s_8\bar{\delta}^3b^2(2 + \bar{\delta}(3a - 2x)) + s_9\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a - x) - 2)(\bar{\delta}(3a - x) + 2)]X_tY_t^2 \\
&+ [s_7\bar{\delta}^4b^3 - s_8\bar{\delta}^3b^2(\bar{\delta}(a - x) - 2) + s_9\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a - x) - 2)]Y_t^3 \\
&+ \bar{\delta}[s_7(\bar{\delta}b)^3 - s_8(\bar{\delta}b)^2(2 + \bar{\delta}a) + s_9\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)^2]X_t^3 \\
&+ \bar{\delta}[3s_7(\bar{\delta}b)^3 - s_8(\bar{\delta}b)^2(2 + \bar{\delta}(3a - x)) + s_9\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(3a - 2x) - 2)]X_t^2Y_t \\
&+ \bar{\delta}[3s_7(\bar{\delta}b)^3 - s_8(\bar{\delta}b)^2(2 + \bar{\delta}(3a - 2x)) + s_9\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2)(\bar{\delta}(3a - x) + 2)]X_tY_t^2 \\
&+ \bar{\delta}[s_7(\bar{\delta}b)^3 - s_8(\bar{\delta}b)^2(\bar{\delta}(a - x) - 2) + s_9\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2)]Y_t^3
\end{aligned} \tag{3.48}$$

formunda yazılır. Şimdi de ifadeyi daha takip edilebilir hale getirmek için  $T^{-1}$  matrisini

$$T^{-1} = \frac{1}{4 + \bar{\delta}x} \begin{pmatrix} \frac{2 - \bar{\delta}(a - x)}{\bar{\delta}b} & 1 \\ \frac{2 + \bar{\delta}a}{\bar{\delta}b} & -1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

formunda ele alalım. Öyleyse (3.43) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
g_1(X_t, Y_t) &= t_{11}f_1 + t_{12}f_2 \\
&= \alpha_1 \tilde{\delta}X_t + \alpha_2 \tilde{\delta}Y_t + \alpha_3 X_t^2 + \alpha_4 X_t Y_t + \alpha_5 Y_t^2 + \alpha_6 \tilde{\delta}X_t^2 \\
&\quad + \alpha_7 \tilde{\delta}X_t Y_t + \alpha_8 \tilde{\delta}Y_t^2 + \alpha_9 X_t^3 + YMT
\end{aligned} \tag{3.50}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki  $\alpha_i$  katsayılar aşağıda yer aldığı gibidir:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= t_{11}(-2b) + t_{12}(\bar{\delta}(bc - ad) - 2d) \\
\alpha_2 &= t_{11}(2b + \bar{\delta}bx) + t_{12}(\bar{\delta}(bc - ad + dx) + 2d) \\
\alpha_3 &= t_{11}(s_1 \bar{\delta}^3 b^2 + s_2 \bar{\delta}^2 b(2 + \bar{\delta}a)) + t_{12}(-s_4 \bar{\delta}^3 b^2 + s_5 \bar{\delta}^2 b(2 + \bar{\delta}a) - s_6 \bar{\delta}(2 + \bar{\delta}a)^2) \\
\alpha_4 &= t_{11}(2s_1 \bar{\delta}^3 b^2 + s_2 \bar{\delta}^3 b(2a - x)) + t_{12}(-2s_4 \bar{\delta}^3 b^2 + s_5 \bar{\delta}^3 b(2a - x) - s_6 \bar{\delta}^2(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a - x) - 2)) \\
\alpha_5 &= t_{11}(s_1 \bar{\delta}^3 b^2 + s_2 \bar{\delta}^2 b(\bar{\delta}(a - x) - 2)) + t_{12}(-s_4 \bar{\delta}^3 b^2 + s_5 \bar{\delta}^2 b(\bar{\delta}(a - x) - 2) - s_6 \bar{\delta}(\bar{\delta}(a - x) - 2)^2) \\
\alpha_6 &= t_{11}(s_1 (\bar{\delta}b)^2 + s_2 \bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)) + t_{12}(-s_4 (\bar{\delta}b)^2 + s_5 \bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a) - s_6 (2 + \bar{\delta}a)^2) \\
\alpha_7 &= t_{11}(2s_1 (\bar{\delta}b)^2 + s_2 \bar{\delta}^2 b(2a - x)) + t_{12}(-2s_4 (\bar{\delta}b)^2 + s_5 \bar{\delta}^2 b(2a - x) - s_6 2(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a - x) - 2)) \\
\alpha_8 &= t_{11}(s_1 (\bar{\delta}b)^2 + s_2 \bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2)) + t_{12}(-s_4 (\bar{\delta}b)^2 + s_5 \bar{\delta}b(\bar{\delta}(a - x) - 2) - s_6 (\bar{\delta}(a - x) - 2)^2) \\
\alpha_9 &= t_{11}(-s_3 \bar{\delta}^4 b^3) + t_{12}(s_7 \bar{\delta}^4 b^3 - s_8 \bar{\delta}^3 b^2(2 + \bar{\delta}a) + s_9 \bar{\delta}^2 b(2 + \bar{\delta}a)^2).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
g_2(X_t, Y_t) &= t_{21}f_1 + t_{22}f_2 \\
&= \gamma_1 \tilde{\delta}X_t + \gamma_2 \tilde{\delta}Y_t + \gamma_3 X_t^2 + \gamma_4 X_t Y_t + \gamma_5 Y_t^2 + \gamma_6 \tilde{\delta}X_t^2 \\
&\quad + \gamma_7 \tilde{\delta}X_t Y_t + \gamma_8 \tilde{\delta}Y_t^2 + \gamma_9 X_t^3 + YMT
\end{aligned} \tag{3.52}$$

formunda yazılabilir. Buradaki  $\gamma_i$  katsayıları ise aşağıda tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= t_{21}(-2b) + t_{22}(\bar{\delta}(bc - ad) - 2d), \\
\gamma_2 &= t_{21}(2b + \bar{\delta}bx) + t_{22}(\bar{\delta}(bc - ad + dx) + 2d), \\
\gamma_3 &= t_{21}(s_1 \bar{\delta}^3 b^2 + s_2 \bar{\delta}^2 b(2 + \bar{\delta}a)) + t_{22}(-s_4 \bar{\delta}^3 b^2 + s_5 \bar{\delta}^2 b(2 + \bar{\delta}a) - s_6 \bar{\delta}(2 + \bar{\delta}a)^2), \\
\gamma_4 &= t_{21}(2s_1 \bar{\delta}^3 b^2 + s_2 \bar{\delta}^3 b(2a - x)) + t_{22}(-2s_4 \bar{\delta}^3 b^2 + s_5 \bar{\delta}^3 b(2a - x) - s_6 \bar{\delta}^2(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a - x) - 2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= t_{21}(s_1\bar{\delta}^3b^2 + s_2\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a-x) - 2)) + t_{22}(-s_4\bar{\delta}^3b^2 + s_5\bar{\delta}^2b(\bar{\delta}(a-x) - 2) - s_6\bar{\delta}(\bar{\delta}(a-x) - 2)^2), \\
\gamma_6 &= t_{21}(s_1(\bar{\delta}b)^2 + s_2\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a)) + t_{22}(-s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}b(2 + \bar{\delta}a) - s_6(2 + \bar{\delta}a)^2), \\
\gamma_7 &= t_{21}(2s_1(\bar{\delta}b)^2 + s_2\bar{\delta}^2b(2a-x)) + t_{22}(-2s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}^2b(2a-x) - s_62(2 + \bar{\delta}a)(\bar{\delta}(a-x) - 2)), \\
\gamma_8 &= t_{21}(s_1(\bar{\delta}b)^2 + s_2\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a-x) - 2)) + t_{22}(-s_4(\bar{\delta}b)^2 + s_5\bar{\delta}b(\bar{\delta}(a-x) - 2) - s_6(\bar{\delta}(a-x) - 2)^2), \\
\gamma_9 &= t_{21}(-s_3\bar{\delta}^4b^3) + t_{22}(s_7\bar{\delta}^4b^3 - s_8\bar{\delta}^3b^2(2 + \bar{\delta}a) + s_9\bar{\delta}^2b(2 + \bar{\delta}a)^2).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Sonuç olarak, (3.42) sistemi merkez manifold teoremini kullanabileceğimiz uygun formda elde edilmiştir. Öyleyse, bu sisteme karşılık gelen  $W^c(0,0,0)$  merkez manifoldu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W^c(0,0,0) = \{(X_t, Y_t, \bar{\delta}) \in \mathbb{R}^3 : Y_t = h(X_t) = h_1X_t^2 + h_2\bar{\delta}X_t + h_3\bar{\delta}^2\}. \tag{3.54}$$

Buradaki  $h_1, h_2$  ve  $h_3$  katsayıları için (3.42) sistemini tekrar ele alalım

$$\begin{cases} X_{t+1} = \lambda_1 X_t + g_1(X_t, Y_t) \\ Y_{t+1} = \lambda_2 Y_t + g_2(X_t, Y_t). \end{cases} \tag{3.55}$$

Burada  $\lambda_1 = -1$  olduğundan  $X_{t+1} = -X_t + g_1(X_t, h(X_t))$  olarak yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} h(X_{t+1}) = Y_{t+1} &\Rightarrow h(X_{t+1}) = \lambda_2 Y_t + g_2(X_t, Y_t) \\ &= \lambda_2 h(X_t) + g_2(X_t, h(X_t)) \end{aligned} \tag{3.56}$$

olup

$$h(-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) = \lambda_2 h(X_t) + g_2(X_t, h(X_t)) \tag{3.57}$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlikten,

$$R(h(X_t)) := h(-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) - \lambda_2 h(X_t) - g_2(X_t, h(X_t)) = 0 \tag{3.58}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Dikkat edilirse (3.54) ile tanımlanan merkez manifold ve

(3.50) ile (3.52) eşitliklerinde ifade edilen  $g_1$  ve  $g_2$  fonksiyonları uyarınca,

$$\begin{aligned}
R(h(X_t)) &= h_1 [-X_t + g_1(X_t, h(X_t))]^2 + h_2 \tilde{\delta} (-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) \\
&\quad + h_3 \tilde{\delta}^2 - \lambda_2 h(X_t) - g_2(X_t, h(X_t)) \\
&= h_1 [X_t^2 - 2X_t g_1(X_t, h(X_t)) + g_1^2(X_t, h(X_t))] + h_2 \tilde{\delta} (-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) \\
&\quad + h_3 \tilde{\delta}^2 - \lambda_2 [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t + h_3 \tilde{\delta}^2] - g_2(X_t, h(X_t)) \\
&= h_1 X_t^2 - 2h_1 X_t [\alpha_1 \tilde{\delta} X_t + \alpha_2 \tilde{\delta} h(X_t) + \alpha_3 X_t^2 + \alpha_4 X_t h(X_t) + YMT] \\
&\quad + h_1 [\alpha_1 \tilde{\delta} X_t + \alpha_2 \tilde{\delta} h(X_t) + \alpha_3 X_t^2 + \alpha_4 X_t h(X_t) + YMT]^2 - h_2 \tilde{\delta} X_t \\
&\quad + h_2 \tilde{\delta} [\alpha_1 \tilde{\delta} X_t + \alpha_2 \tilde{\delta} h(X_t) + \alpha_3 X_t^2 + \alpha_4 X_t h(X_t) + YMT] + h_3 \tilde{\delta}^2 - \lambda_2 h_1 X_t^2 \\
&\quad - \lambda_2 h_2 \tilde{\delta} X_t - \lambda_2 h_3 \tilde{\delta}^2 - [\gamma_1 \tilde{\delta} X_t + \gamma_2 \tilde{\delta} h(X_t) + \gamma_3 X_t^2 + \gamma_4 X_t h(X_t) + YMT] \\
&= [h_1 - \lambda_2 h_1 - \gamma_3] X_t^2 - [h_2 + \gamma_1 + \lambda_2 h_2] \tilde{\delta} X_t + [h_3 - \lambda_2 h_3] \tilde{\delta}^2 + YMT \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

olması için  $X_t^2$ ,  $\tilde{\delta} X_t$  ve  $\tilde{\delta}^2$  terimlerinin katsayıları sıfır olmalıdır. Öyleyse  $|\lambda_2| \neq 1$  olmak üzere,

$$h_1 - \lambda_2 h_1 - \gamma_3 = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\gamma_3}{1 - \lambda_2},$$

$$h_2 + \gamma_1 + \lambda_2 h_2 = 0 \Rightarrow h_2(1 + \lambda_2) + \gamma_1 = 0 \Rightarrow h_2 = -\frac{\gamma_1}{1 + \lambda_2},$$

$$h_3 - \lambda_2 h_3 = 0 \Rightarrow h_3(1 - \lambda_2) = 0 \Rightarrow h_3 = 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak  $Y_t = h(X_t) = h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t$  olup (3.42) sistemi

$$X_{t+1} = -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \tag{3.60}$$

1-boyutlu sistemine indirgenir. Burada  $g_1$  fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
g_1(X_t, h(X_t)) &= \alpha_1 \tilde{\delta} X_t + \alpha_2 \tilde{\delta} [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t] + \alpha_3 X_t^2 + \alpha_4 X_t [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t] \\
&\quad + \alpha_5 [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t]^2 + \alpha_6 \tilde{\delta} X_t^2 + \alpha_7 \tilde{\delta} X_t [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t] \\
&\quad + \alpha_8 \tilde{\delta} [h_1 X_t^2 + h_2 \tilde{\delta} X_t]^2 + \alpha_9 X_t^3 + YMT \\
&= \alpha_1 \tilde{\delta} X_t + \alpha_3 X_t^2 + (\alpha_2 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_6) \tilde{\delta} X_t^2 \\
&\quad + (\alpha_2 h_2) \tilde{\delta}^2 X_t + (\alpha_4 h_1 + \alpha_9) X_t^3 + YMT.
\end{aligned} \tag{3.61}$$



Şimdi de (3.60) sisteminin sağ tarafını  $f(X, \tilde{\delta})$  olarak tanımlayalım ve Flip çatallanma teoreminin hipotezlerini kontrol edelim.

$$\begin{aligned} X_{t+1} = f(X, \tilde{\delta}) = & -X + \alpha_1 \tilde{\delta} X + \alpha_3 X^2 + (\alpha_2 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_6) \tilde{\delta} X^2 \\ & + (\alpha_2 h_2) \tilde{\delta}^2 X + (\alpha_4 h_1 + \alpha_9) X^3 + YMT \end{aligned} \quad (3.62)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_X(X, \tilde{\delta}) = & -1 + \alpha_1 \tilde{\delta} + 2\alpha_3 X + 2(\alpha_2 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_6) \tilde{\delta} X \\ & + (\alpha_2 h_2) \tilde{\delta}^2 + 3(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) X^2 + YMT \\ f_{XX}(X, \tilde{\delta}) = & 2\alpha_3 + 2(\alpha_2 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_6) \tilde{\delta} + 6(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) X + YMT \\ f_{XXX}(X, \tilde{\delta}) = & 6(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) + YMT \\ f_{X\tilde{\delta}}(X, \tilde{\delta}) = & \alpha_1 + 2(\alpha_2 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_6) X + 2(\alpha_2 h_2) \tilde{\delta} + YMT \end{aligned} \quad (3.63)$$

olup bu türev fonksiyonlarının  $(X, \tilde{\delta}) = (0, 0)$  daki değerleri

$$\begin{aligned} f_X(0, 0) = & -1 \\ f_{XX}(0, 0) = & 2\alpha_3 \\ f_{XXX}(0, 0) = & 6(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) \\ f_{X\tilde{\delta}}(0, 0) = & \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

dir. Ayrıca yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{XX}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0, 0) = & 2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) \\ f_{X\tilde{\delta}}(0, 0) = & \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ile (3.60) sisteminde Flip çatallanmanın görülebilmesi için gerekli şartlar belirlenmiş olur.

**Teorem 3.1.** (3.60) sistemi  $x < 0$  ve  $y > 0$  değerleri için

$$F0) \quad x^2 > 4y \quad \text{ve} \quad \bar{\delta} = \bar{\delta}_1 \ni \bar{\delta} \neq -\frac{2}{x}, -\frac{4}{x}$$

$$F1) \quad 2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) \neq 0$$

$$F2) \quad \alpha_1 \neq 0$$

şartları altında Flip çatallanmaya sahiptir. Eğer  $2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) > 0$  ise çatallanma süperkritik, eğer  $2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) < 0$  ise çatallanma subkritiktir.

### 3.4 Neimark-Sacker Çatallanma Analizi

Bu kısımda,  $\delta$  çatallanma parametresi olmak üzere (3.3) sistemin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında ortaya çıkan Neimark-Sacker çatallanma analizine yer verilecektir.

(3.15) ve (3.16) eşitliklerinden görüldüğü üzere  $x^2 < 4y$  iken (yani  $B^2 - 4C = (izJ)^2 - 4\det J < 0$  iken) (3.3) sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu kompleks eşlenik köke sahiptir. Bu özdeğerler

$$\lambda_{1,2}(\delta) = \mu(\delta) \mp i\omega(\delta) = r(\delta)e^{\mp i\theta(\delta)} \quad (3.66)$$

formundadır. Burada

$$\begin{aligned} \mu(\delta) &= \frac{2 + \delta x}{2} & \omega(\delta) &= \frac{\delta\sqrt{4y - x^2}}{2}, \\ r(\delta) &= \sqrt{\mu^2(\delta) + \omega^2(\delta)} = \sqrt{1 + \delta x + \delta^2 y}, \\ \theta(\delta) &= \text{Arctan}\left(\frac{\omega(\delta)}{\mu(\delta)}\right) = \frac{\delta\sqrt{4y - x^2}}{2 + \delta x} \end{aligned} \quad (3.67)$$

dir. Lemma 3.1 den biliyoruz ki  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda_1| = 1$  ve  $|\lambda_2| = 1$  olabilmesi için gerek ve yeter şart  $B^2 - 4C < 0$  ve  $C = 1$  olmasıdır.  $B^2 - 4C < 0$  ise  $\delta^2(x^2 - 4y) < 0$  eşitsizliğinden  $x^2 < 4y$  eşitsizliğine ulaşılır. Burada  $0 < x^2 < 4y$  olduğundan  $y > 0$  dir.

$C = 1$  ise  $\delta(x + \delta y) = 0$  olup  $\delta \neq 0$  olduğundan  $\delta = -\frac{x}{y}$  olarak bulunur. Burada pozitif  $\delta$  değeri için ( $y > 0$  olduğundan)  $x < 0$  olmalıdır. O halde,  $x < 0$  ve  $y > 0$  değerleri için

$$x^2 < 4y \quad \text{ve} \quad \delta := \bar{\delta} = -\frac{x}{y} \quad (3.68)$$

koşulları altında (3.3) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir. Çatallanmanın var olduğunu analitik olarak gösterebilmek için Neimark-Sacker Çatallanma Teoremi kullanılacaktır (Bakınız Teorem 2.9).

Eğer (3.68) koşulları sağlanırsa  $\mu(\bar{\delta}) = 1 - \frac{x^2}{2y}$  ve  $\omega(\bar{\delta}) = \frac{x\sqrt{4y - x^2}}{2y}$  olmak üzere

$$\lambda_{1,2}(\bar{\delta}) = \mu(\bar{\delta}) \mp i\omega(\bar{\delta}) = 1 - \frac{x^2}{2y} \mp i\frac{x\sqrt{4y - x^2}}{2y} \quad (3.69)$$

kompleks eşlenik özdeğeri elde edilir. (3.66) ve (3.67) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}(\bar{\delta})| &= r(\bar{\delta}) = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)x + \left(\frac{-x}{y}\right)^2 y} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
\theta(\bar{\delta}) &= \text{Arctan} \left( \frac{\omega(\bar{\delta})}{\mu(\bar{\delta})} \right) = \frac{\left( \frac{-x}{y} \right) \sqrt{4y-x^2}}{2 + \left( \frac{-x}{y} \right) x} \\
&= \text{Arctan} \left( \frac{-x\sqrt{4y-x^2}}{2y-x^2} \right) \\
&= \theta_0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

ve

$$\begin{aligned}
r(\delta) &= \sqrt{1 + \delta x + \delta^2 y} \Rightarrow r'(\delta) = \frac{x + 2\delta y}{2\sqrt{1 + \delta x + \delta^2 y}} \\
&\Rightarrow r'(\bar{\delta}) = \frac{x + 2\left(\frac{-x}{y}\right)y}{2\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)x + \left(\frac{-x}{y}\right)^2 y}} \\
&\Rightarrow r'(\bar{\delta}) = -\frac{x}{2}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

dır. Burada  $x < 0$  ve  $y > 0$  kabulümüzden

$$r'(\bar{\delta}) \neq 0 \tag{3.73}$$

ve  $\omega(\bar{\delta}) \neq 0$  ise  $\theta_0 \neq 0$  olup  $k = 1, 2, 3, 4$  için

$$[\lambda_{1,2}(\bar{\delta})]^k = e^{ik\theta_0} \neq 1 \tag{3.74}$$

gerçeklenir. Böylelikle Neimark-Sacker çatallanma teoreminin (N.S.1) ve (N.S.2) şartı sağlanmış olur.

Şimdi de çatallanmanın yön analizini inceleyelim. Bunun için (3.3) sisteminin denge noktası ve kritik çatallanma değerinin orijine taşındığında elde ettiğimiz (3.22) sistemini ele alalım. Ayrıca  $\text{iz}J = 2 + \bar{\delta}(a-d) = 2 + \bar{\delta}x$  ve  $\text{det}J = 1 + \bar{\delta}(a-d) + \bar{\delta}^2(bc-ad) = 1 + \bar{\delta}x + \bar{\delta}^2y$  olup  $x < 0$  ve  $y > 0$  değerleri için  $x^2 < 4y$  ve  $\bar{\delta} = -\frac{x}{y}$  seçilmesiyle (3.22) sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen özdeğerleri (3.69) ile verilen formda elde edilir.

Şimdi de  $\lambda_1 = \mu - i\omega$  özdeğere karşılık gelen özvektörü bulalım.

$$J(\bar{\delta}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{ax}{y} & \frac{bx}{y} \\ -\frac{cx}{y} & 1 + \frac{dx}{y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

olup  $(J - \lambda_1 I)W = 0$  için

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2}{2y} - \frac{ax}{y} + i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} & \frac{bx}{y} \\ -\frac{cx}{y} & \frac{dx}{y} + \frac{x^2}{2y} + i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

eşitliğini sağlayan  $W$  vektörünü bulalım. Bunun için

$$\left( \frac{x^2}{2y} - \frac{ax}{y} + i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \right) w_1 + \frac{bx}{y} w_2 = 0 \quad (3.77)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde kabul edelim ki

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bx}{y} \\ \frac{ax}{y} - \frac{x^2}{2y} - i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

olsun. Bu durumda  $W$  vektörü

$$\begin{aligned} & \frac{bx}{y} \left( -\frac{cx}{y} \right) + \left( \frac{dx}{y} + \frac{x^2}{2y} + i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \right) \left( \frac{ax}{y} - \frac{x^2}{2y} - i\frac{x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \right) \\ &= \frac{x^2}{y^2} (ad - bc) + \frac{x^3}{y^2} \left( \frac{x}{2} + \frac{i\sqrt{4y-x^2}}{2} \right) - \frac{x^2}{y^2} \left( \frac{x^2 + 2xi\sqrt{4y-x^2} - (4y-x^2)}{4} \right) \\ &= -\frac{x^2}{y} + \frac{x^4}{2y^2} + i\frac{x^3\sqrt{4y-x^2}}{2y^2} - \frac{x^4}{4y^2} - i\frac{x^3\sqrt{4y-x^2}}{2y^2} + \frac{x^2}{y} - \frac{x^4}{4y^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

eşitliğini de sağlar. Öyleyse  $\lambda_1$  özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$W = \begin{pmatrix} \frac{bx}{y} \\ \frac{ax}{y} - \frac{x^2}{2y} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

olup bu özvektörün reel ve imajiner kısımlarına karşılık gelen sütun vektörlerinden

$$T = \begin{pmatrix} \frac{bx}{y} & 0 \\ \frac{ax}{y} - \frac{x^2}{2y} & \frac{-x\sqrt{4y-x^2}}{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} j_{12} & 0 \\ \mu - j_{11} & -\omega \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

matrisini inşa edebiliriz. Burada  $\det(T) = -j_{12}\omega \neq 0$  olup

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{j_{12}} & 0 \\ \frac{\mu - j_{11}}{j_{12}\omega} & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

olarak hesaplanır. (3.39) dönüşümü ile birlikte (3.25) sistemi

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

sistemine indirgenir. Burada

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

olup

$$\begin{pmatrix} f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(X_t, Y_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

formuna geçiş için aşağıdaki adımları takip edelim. (3.39) dönüşümünden

$$\begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12} & 0 \\ \mu - j_{11} & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12}X_t \\ (\mu - j_{11})X_t - \omega Y_t \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

dir. Buradan  $U$  ve  $V$  değişkenine bağlı yüksek dereceli terimler aşağıda ifade edildiği gibidir:

$$\begin{aligned} U_t^2 &= j_{12}^2 X_t^2 & U_t^3 &= j_{12}^3 X_t^3 \\ V_t^2 &= (\mu - j_{11})^2 X_t^2 - 2\omega(\mu - j_{11})X_t Y_t + \omega^2 Y_t^2 \\ U_t V_t &= j_{12}(\mu - j_{11})X_t^2 - \omega j_{12} X_t Y_t \\ U_t^2 V_t &= j_{12}^2(\mu - j_{11})X_t^3 - j_{12}^2 \omega X_t^2 Y_t \\ U_t V_t^2 &= j_{12}(\mu - j_{11})^2 X_t^3 - 2j_{12}\omega(\mu - j_{11})X_t^2 Y_t + j_{12}\omega^2 X_t Y_t^2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

$\tilde{\delta} = 0$  için (3.26) ve (3.87) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f_1 &= s_1 \bar{\delta} U_t^2 - s_2 \bar{\delta} U_t V_t - s_3 \bar{\delta} U_t^3 \\ f_2 &= -s_4 \bar{\delta} U_t^2 + s_5 \bar{\delta} U_t V_t - s_6 \bar{\delta} V_t^2 + s_7 \bar{\delta} U_t^3 - s_8 \bar{\delta} U_t^2 V_t - s_9 \bar{\delta} U_t V_t^2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

alınabilir. Öyleyse

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{j_{12}} & 0 \\ \frac{\mu - j_{11}}{j_{12}\omega} & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{j_{12}} f_1 \\ \frac{\mu - j_{11}}{j_{12}\omega} f_1 - \frac{1}{\omega} f_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.89)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= k_1 X_t^2 + k_2 X_t Y_t + k_3 X_t^3 \\ \tilde{g} &= l_1 X_t^2 + l_2 X_t Y_t + l_3 Y_t^2 + l_4 X_t^3 + l_5 X_t^2 Y_t + l_6 X_t Y_t^2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= s_2 \bar{\delta} (\mu - j_{11}) - s_1 \bar{\delta} j_{12} \\ k_2 &= -s_2 \bar{\delta} \omega \\ k_3 &= -s_3 \bar{\delta} j_{12}^2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

ve

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{\omega} [-s_1 \bar{\delta} (\mu - j_{11}) j_{12} - s_2 \bar{\delta} (\mu - j_{11})^2 + s_4 \bar{\delta} j_{12}^2 - s_5 \bar{\delta} j_{12} (\mu - j_{11}) + s_6 \bar{\delta} (\mu - j_{11})^2] \\ l_2 &= s_2 \bar{\delta} (\mu - j_{11}) - 2s_6 \bar{\delta} (\mu - j_{11}), \quad l_3 = s_6 \bar{\delta} \omega \\ l_4 &= \frac{1}{\omega} [-s_3 \bar{\delta} (\mu - j_{11}) j_{12}^2 - s_7 \bar{\delta} j_{12}^3 + s_8 \bar{\delta} (\mu - j_{11}) j_{12}^2 + s_9 \bar{\delta} (\mu - j_{11})^2 j_{12}] \\ l_5 &= s_5 \bar{\delta} j_{12} - 2s_8 \bar{\delta} j_{12} - 2s_9 \bar{\delta} j_{12} (\mu - j_{11}), \quad l_6 = s_9 \bar{\delta} j_{12} \omega \end{aligned} \quad (3.92)$$

dir. Sonuç olarak (3.83) sistemi aşağıdaki formda elde edilir:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Şimdi yukarıdaki sisteme  $Z_t = X_t + iY_t$  kompleks dönüşümünü uygulayalım. Bu

dönüşüm ile

$$\begin{aligned}
Z_{t+1} &= X_{t+1} + iY_{t+1} \\
&= \mu X_t - \omega Y_t + \tilde{f} + i(\omega X_t + \mu Y_t + \tilde{g}) \\
&= (\mu + i\omega)(X_t + iY_t) + \tilde{f} + i\tilde{g} \\
&= \lambda Z_t + g(Z_t, \bar{Z}_t, \bar{\delta})
\end{aligned} \tag{3.94}$$

olup  $g(Z_t, \bar{Z}_t, \bar{\delta})$  fonksiyonunu ifade edelim. Bunun için aşağıdaki formülleri kullanalım.

$$\begin{cases} Z_t = X_t + iY_t \\ \bar{Z}_t = X_t - iY_t \end{cases} \Rightarrow X_t = \frac{Z_t + \bar{Z}_t}{2} \quad \text{ve} \quad Y_t = i \frac{\bar{Z}_t - Z_t}{2} \tag{3.95}$$

olup

$$\begin{aligned}
X_t^2 &= \frac{Z_t^2 + 2Z_t\bar{Z}_t + \bar{Z}_t^2}{4} & Y_t^2 &= -\frac{\bar{Z}_t^2 - 2Z_t\bar{Z}_t + Z_t^2}{4} \\
X_t^3 &= \frac{Z_t^3 + 3Z_t^2\bar{Z}_t + 3Z_t\bar{Z}_t^2 + \bar{Z}_t^3}{8} & X_tY_t &= i \frac{\bar{Z}_t^2 - Z_t^2}{2} \\
X_t^2Y_t &= i \frac{\bar{Z}_t^3 + Z_t\bar{Z}_t^2 - Z_t^2\bar{Z}_t - Z_t^3}{8} & X_tY_t^2 &= -\frac{\bar{Z}_t^3 - Z_t\bar{Z}_t^2 - Z_t^2\bar{Z}_t - Z_t^3}{8}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned}
g(Z_t, \bar{Z}_t, \bar{\delta}) &= \tilde{f} + i\tilde{g} = \left[ \frac{k_1}{4} - i\frac{k_2}{2} + i\frac{l_1}{4} + \frac{l_2}{2} - i\frac{l_3}{4} \right] Z_t^2 \\
&+ \left[ \frac{k_1}{2} + i\frac{l_1}{2} + i\frac{l_3}{2} \right] Z_t\bar{Z}_t + \left[ \frac{k_1}{4} + i\frac{k_2}{2} + i\frac{l_1}{4} - \frac{l_2}{2} - i\frac{l_3}{4} \right] \bar{Z}_t^2 \\
&+ \left[ \frac{3k_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} - \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \right] Z_t\bar{Z}_t^2 + \left[ \frac{3k_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \right] Z_t^2\bar{Z}_t \\
&+ \left[ \frac{k_3}{8} + i\frac{l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \right] Z_t^3 + \left[ \frac{k_3}{8} + i\frac{l_4}{8} - \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8} \right] \bar{Z}_t^3
\end{aligned} \tag{3.97}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer

$$\begin{aligned}
\frac{g_{20}}{2} &:= \frac{k_1}{4} - i\frac{k_2}{2} + i\frac{l_1}{4} + \frac{l_2}{2} - i\frac{l_3}{4} \\
g_{11} &:= \frac{k_1}{2} + i\frac{l_1}{2} + i\frac{l_3}{2} \\
\frac{g_{02}}{2} &:= \frac{k_1}{4} + i\frac{k_2}{2} + i\frac{l_1}{4} - \frac{l_2}{2} - i\frac{l_3}{4} \\
\frac{g_{12}}{2} &:= \frac{3k_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} - \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{21}}{2} &:= \frac{3k_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{30}}{6} &:= \frac{k_3}{8} + i\frac{l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{03}}{6} &:= \frac{k_3}{8} + i\frac{l_4}{8} - \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

olarak tanımlanırsa (3.93) sistemi

$$\begin{aligned}
Z_{t+1} &= \lambda Z_t + \frac{g_{20}}{2} Z_t^2 + g_{11} Z_t \bar{Z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{Z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2} Z_t \bar{Z}_t^2 \\
&+ \frac{g_{21}}{2} Z_t^2 \bar{Z}_t + \frac{g_{30}}{6} Z_t^3 + \frac{g_{03}}{6} \bar{Z}_t^3
\end{aligned} \tag{3.99}$$

sistemine indirgenir. Öyleyse aşağıdaki adımları takip ederek çatallanmanın yönünü belirleyen  $a(\bar{\delta})$  katsayısını hesaplayabiliriz.

**1. Adım:** (3.74) şartından biliyoruz ki  $e^{i\theta_0} \neq 1$  ve  $e^{3i\theta_0} \neq 1$  dir. Öyleyse yeterince küçük  $\delta$  değerleri için parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$Z_t = V_t + \frac{h_{20}}{2} V_t^2 + h_{11} V_t \bar{V}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{V}_t^2 \tag{3.100}$$

dönüşümünü ele alalım. Burada kabul edelim ki

$$V_t = AZ_t + BZ_t^2 + CZ_t \bar{Z}_t + D\bar{Z}_t^2 + YMT \tag{3.101}$$

formunda olsun. Belirsiz katsayılar yöntemi ile



$$\begin{aligned}
Z_t &= AZ_t + BZ_t^2 + CZ_t\bar{Z}_t + D\bar{Z}_t^2 + \frac{h_{20}}{2} [A^2Z_t^2 + \dots] \\
&+ h_{11} [A^2Z_t\bar{Z}_t + \dots] + \frac{h_{02}}{2} [A^2\bar{Z}_t^2 + \dots] \\
&= AZ_t + \left[ B + \frac{h_{20}}{2}A^2 \right] Z_t^2 + [C + h_{11}A^2] Z_t\bar{Z}_t + \left[ D + \frac{h_{02}}{2}A^2 \right] \bar{Z}_t^2 + YMT
\end{aligned} \tag{3.102}$$

denkleminde  $A = 1$ ,  $B = -\frac{h_{20}}{2}$ ,  $C = -h_{11}$  ve  $D = -\frac{h_{02}}{2}$  olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$V_t = Z_t - \frac{h_{20}}{2}Z_t^2 - h_{11}Z_t\bar{Z}_t - \frac{h_{02}}{2}\bar{Z}_t^2 + YMT \tag{3.103}$$

olarak elde edilir. Buradan (3.99) denklemi ile birlikte

$$\begin{aligned}
V_{t+1} &= Z_{t+1} - \frac{h_{20}}{2}Z_{t+1}^2 - h_{11}Z_{t+1}\bar{Z}_{t+1} - \frac{h_{02}}{2}\bar{Z}_{t+1}^2 + YMT \\
&= \left[ \lambda Z_t + \frac{g_{20}}{2}Z_t^2 + g_{11}Z_t\bar{Z}_t + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2}Z_t\bar{Z}_t^2 + \frac{g_{21}}{2}Z_t^2\bar{Z}_t + \dots \right] \\
&- \frac{h_{02}}{2} \left[ \lambda Z_t + \frac{g_{20}}{2}Z_t^2 + g_{11}Z_t\bar{Z}_t + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2}Z_t\bar{Z}_t^2 + \frac{g_{21}}{2}Z_t^2\bar{Z}_t + \dots \right]^2 \\
&- h_{11} \left[ \lambda Z_t + \frac{g_{20}}{2}Z_t^2 + g_{11}Z_t\bar{Z}_t + \dots \right] \left[ \lambda \bar{Z}_t + \frac{g_{20}}{2}\bar{Z}_t^2 + g_{11}\bar{Z}_tZ_t + \dots \right] \\
&- \frac{h_{02}}{2} \left[ \lambda \bar{Z}_t + \frac{g_{20}}{2}\bar{Z}_t^2 + g_{11}\bar{Z}_tZ_t + \frac{g_{02}}{2}Z_t^2 + \frac{g_{12}}{2}\bar{Z}_tZ_t^2 + \frac{g_{21}}{2}\bar{Z}_t^2Z_t + \dots \right]^2
\end{aligned} \tag{3.104}$$

olarak elde edilir. Son eşitlikte (3.100) dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
V_{t+1} &= \lambda V_t + \left( \frac{g_{20}}{2} + (\lambda - \lambda^2) \frac{h_{20}}{2} \right) V_t^2 + (g_{11} - (\lambda - \lambda\bar{\lambda})h_{11}) V_t\bar{V}_t \\
&+ \left( \frac{g_{02}}{2} + (\lambda - \bar{\lambda}^2) \frac{h_{02}}{2} \right) \bar{V}_t^2 + YMT
\end{aligned} \tag{3.105}$$

denklemini elde edilir. Eğer

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda(\bar{\lambda} - 1)} \quad \text{ve} \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\lambda}^2 - \lambda}$$

seçilirse kuadratik terimler yok olur ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$V_{t+1} = \lambda V_t + \frac{k_{30}}{6}V_t^3 + \frac{k_{21}}{2}V_t^2\bar{V}_t + \frac{k_{12}}{2}V_t\bar{V}_t^2 + \frac{k_{03}}{6}\bar{V}_t^3 + YMT. \tag{3.106}$$

Yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned}\frac{k_{30}}{6} &= (1 - \lambda) \frac{g_{20}h_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}^2}{2} + \frac{g_{11}h_{02}}{2} - \lambda \bar{\lambda} \frac{h_{11}h_{02}}{2} + \frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{g_{02}h_{11}}{2} + \lambda^3, \\ \frac{k_{21}}{2} &= (1 - \frac{\bar{\lambda}}{2})g_{20}h_{11} - (\lambda^2 + \frac{\lambda \bar{\lambda}}{2})h_{20}h_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11}^2 - (\lambda - \frac{1}{2})g_{11}h_{20} + (1 - \lambda)g_{11}h_{11} \\ &\quad - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{20}^2}{2} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{g_{02}h_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2}, \\ \frac{k_{12}}{2} &= \frac{g_{20}h_{02}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}h_{02}}{2} + \frac{g_{11}h_{20}}{2} - \lambda \bar{\lambda} \frac{h_{11}h_{02}}{2} + (1 - \bar{\lambda})g_{11}h_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11}^2 + g_{20}h_{11} \\ &\quad - \bar{\lambda}^2 h_{02}h_{11} + \frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{g_{02}h_{20}}{2} - \lambda \frac{g_{20}h_{11}}{2} - \bar{\lambda} \frac{g_{11}h_{02}}{2}, \\ \frac{k_{03}}{6} &= \frac{g_{11}h_{02}}{2} - \lambda \bar{\lambda} \frac{h_{11}h_{02}}{2} + \frac{g_{02}h_{20}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}h_{20}}{2} + \frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda}^2 \frac{g_{02}h_{11}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{g_{20}h_{02}}{2}\end{aligned}$$

dir.

**2. Adım:**  $e^{2i\theta_0} \neq 1$  ve  $e^{4i\theta_0} \neq 1$  olmak üzere yeterince küçük  $\delta$  değerleri için aşağıdaki parametreye bağlı ve tersi mevcut olan dönüşümü ele alalım.

$$W_t = W_t + \frac{h_{30}}{6}W_t^3 + \frac{h_{21}}{2}W_t^2\bar{W}_t + \frac{h_{12}}{2}W_t\bar{W}_t^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{W}_t^3 + YMT \quad (3.107)$$

Belirsiz katsayılar yönteminden

$$W_t = V_t - \frac{h_{30}}{6}V_t^3 - \frac{h_{21}}{2}V_t^2\bar{V}_t - \frac{h_{12}}{2}V_t\bar{V}_t^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{V}_t^3 + YMT$$

olup

$$W_{t+1} = V_{t+1} - \frac{h_{30}}{6}V_{t+1}^3 - \frac{h_{21}}{2}V_{t+1}^2\bar{V}_{t+1} - \frac{h_{12}}{2}V_{t+1}\bar{V}_{t+1}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{V}_{t+1}^3 + YMT \quad (3.108)$$

olarak bulunur. Burada ilk olarak  $V_{t+1}$  i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A := V_{t+1} &= \lambda V_t + \frac{k_{30}}{6} V_t^3 + \frac{k_{21}}{2} V_t^2 \bar{V}_t + \frac{k_{12}}{2} V_t \bar{V}_t^2 + \frac{k_{03}}{6} \bar{V}_t^3 + YMT \\
&= \lambda \left[ W_t + \frac{h_{30}}{6} W_t^3 + \frac{h_{21}}{2} W_t^2 \bar{W}_t + \frac{h_{12}}{2} W_t \bar{W}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}_t^3 + YMT \right] \\
&+ \frac{k_{30}}{6} \left[ W_t + \frac{h_{30}}{6} W_t^3 + \frac{h_{21}}{2} W_t^2 \bar{W}_t + \frac{h_{12}}{2} W_t \bar{W}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}_t^3 + YMT \right]^3 \\
&+ \frac{k_{21}}{2} \left[ W_t + \frac{h_{30}}{6} W_t^3 + \dots \right]^2 \left[ \bar{W}_t + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}_t^3 + \dots \right] \\
&+ \frac{k_{12}}{2} \left[ W_t + \frac{h_{30}}{6} W_t^3 + \dots \right] \left[ \bar{W}_t + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}_t^3 + \dots \right]^2 \\
&+ \frac{k_{03}}{6} \left[ \bar{W}_t + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}_t^3 + \frac{h_{21}}{2} \bar{W}_t^2 W_t + \frac{h_{12}}{2} \bar{W}_t W_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}_t^3 + YMT \right]^3
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
W_{t+1} &= A - \frac{h_{30}}{6} A^3 - \frac{h_{21}}{2} A^2 \bar{A} - \frac{h_{12}}{2} A \bar{A}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{A}^3 + YMT \\
&= \lambda W_t + \left( \frac{k_{30}}{6} + (\lambda - \lambda^3) \frac{h_{30}}{6} \right) W_t^3 + \left( \frac{k_{21}}{2} + (\lambda - \lambda^2 \bar{\lambda}) \frac{h_{21}}{2} \right) W_t^2 \bar{W}_t \quad (3.109) \\
&+ \left( \frac{k_{12}}{2} + (\lambda - \lambda \bar{\lambda}) \frac{h_{12}}{2} \right) W_t \bar{W}_t^2 + \left( \frac{k_{03}}{6} + (\lambda - \bar{\lambda}^3) \frac{h_{03}}{6} \right) \bar{W}_t^3 + YMT
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$h_{30} = \frac{k_{30}}{\lambda^3 - \lambda}, \quad h_{12} = \frac{k_{12}}{\bar{\lambda} |\lambda|^2 - \lambda} \quad \text{ve} \quad h_{03} = \frac{k_{03}}{\bar{\lambda}^3 - \lambda}$$

alınırsa  $W_t^2 \bar{W}_t$  terimi dışındaki kübik terimler yok olur ve (3.106) denklemi

$$W_{t+1} = \lambda W_t + \left( \frac{k_{21}}{2} + (\lambda - \lambda^2 \bar{\lambda}) \frac{h_{21}}{2} \right) W_t^2 \bar{W}_t + YMT \quad (3.110)$$

denkleminde indirgenir. Dikkat edilirse  $W_t^2 \bar{W}_t$  terimini yok etmek için  $h_{21} = \frac{k_{21}}{\lambda(\lambda \bar{\lambda} - 1)} = \frac{k_{21}}{\lambda(|\lambda|^2 - 1)}$  seçilmelidir. Fakat  $\bar{\delta}$  kritik çatallanma değerinde  $|\lambda| = 1$  olup  $\lambda(|\lambda|^2 - 1) = 0$  olacağından bu seçim gerçekleşemez. Ayrıca  $\frac{k_{21}}{2} + (\lambda - \lambda^2 \bar{\lambda}) \frac{h_{21}}{2} = \frac{k_{21}}{2}$  olup  $c_1 := \frac{k_{21}}{2}$  olmak üzere (3.110) denklemi

$$W_{t+1} = \lambda W_t + c_1 W_t^2 \bar{W}_t + YMT \quad (3.111)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $c_1 = c_1(\bar{\delta})$  olup aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$c_1(\bar{\delta}) = \frac{g_{20}g_{11}(1-2\lambda)}{2(\lambda^2-\lambda)} + \frac{|g_{11}|^2}{1-\bar{\lambda}} + \frac{g_{21}}{2} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\bar{\lambda}^2-\lambda)^2}. \quad (3.112)$$

Sonuç olarak (3.112) eşitliği,  $\bar{\delta}$  çatallanma değerinde ortaya çıkan, kapalı yörüngenin yönünü ve kararlılığını veren

$$a(\bar{\delta}) = Re(e^{i\theta_0} c_1(\bar{\delta})) \quad (3.113)$$

katsayısını hesaplamak için elde edilmiş olur.

### 3.5 Nümerik Örnekler

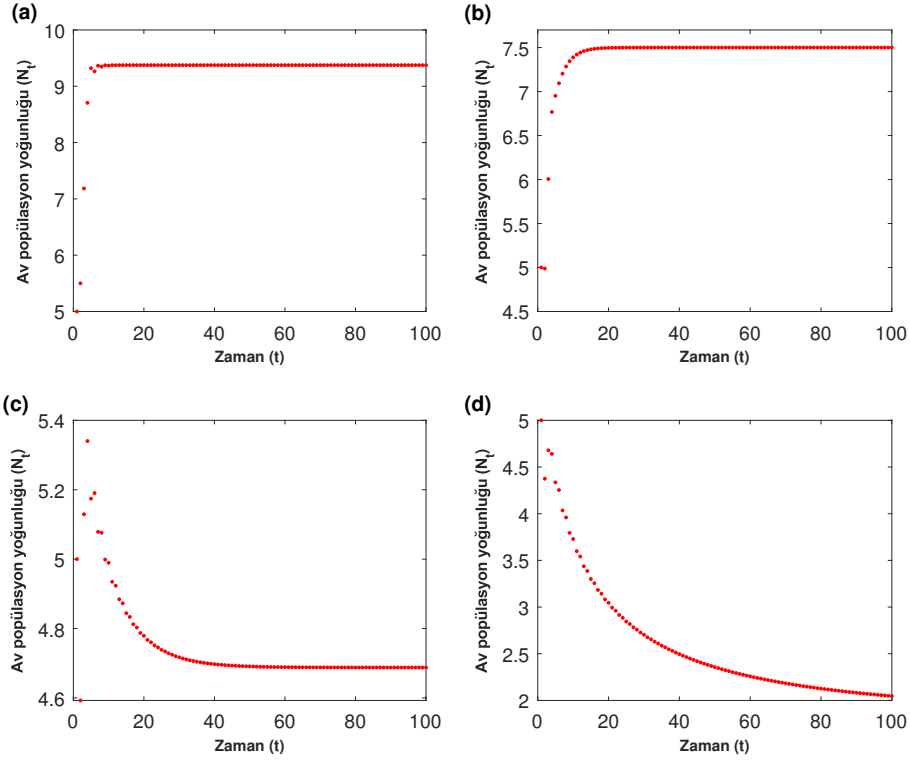
Bu bölümde, Bölüm 3.2, Bölüm 3.3 ve Bölüm 3.4'te bulunan teorik sonuçları nümerik örneklerle desteklemek ve Allee kontrol parametrisinin ( $\beta$  parametrisinin) (3.3) sisteminin dinamiği üzerindeki etkisini göstermek amaçlanmaktadır. Bunun için MATLAB programı kullanılarak (3.3) sistemi için aşağıdaki simülasyonlar elde edilmiştir.

**1. Örnek:** İlk olarak, (3.3) sisteminin kararlılığını inceleyelim. Bunun için Baydemir ve diğ. (2020) ele aldığı aşağıdaki parametre değerlerini baz alalım:

$$r_1 = 1.5, \quad r_2 = 8, \quad \epsilon = 0.1, \quad ve \quad \theta = 0.5. \quad (3.114)$$

Bu parametre değerlerinde  $\forall k \in (0,1)$  için Sonuç 3.1'in birinci maddesindeki hipotezler sağlanır. Dolayısıyla  $\forall k \in (0,1)$  değeri için elde edilen  $\bar{\delta}_1$  kritik değerinden küçük  $\delta$  değerlerinde (3.3) sisteminin denge noktası lokal asimptotik kararlı olur. Örneğin,  $k = 0$  için  $\bar{\delta}_1 = 0.3333$ ,  $k = 0.2$  için  $\bar{\delta}_1 = 0.3032$ ,  $k = 0.5$  için  $\bar{\delta}_1 = 0.2774$  ve  $k = 0.8$  için  $\bar{\delta}_1 = 0.2598$  olarak hesaplanır. Şekil 3.1 ve 3.2'de ele alınan  $k$  değerleri için hesaplanan  $\bar{\delta}_1$  kritik değerlerinden daha düşük  $\delta = 0.25$  değeri kullanılarak av ve avcı popülasyonunun zamana göre değişim grafiğine yer verilmiştir. Her iki şekilde de görüldüğü üzere av ve avcı popülasyonu denge değerlerine ulaşmakta, fakat aynı başlangıç değerleri ve aynı  $\delta$  değerinde Allee sabiti,  $\beta$ , arttıkça her iki popülasyonun da dengeye ulaşma süresi gecikmektedir.

Tam tersine,  $\bar{\delta}_1$  kritik değerlerinden büyük  $\delta$  değeri için (3.3) sisteminin denge noktası kararsız olacaktır. Hatta  $\delta$  değeri arttıkça sistemde 2-döngü, 4-döngü vb. yapıların ortaya çıkması beklenmektedir. Şekil 3.3 (b)'de görüldüğü üzere Allee etkisi içermeyen model 4-döngüye sahip iken Allee etkisi dinamik yapıyı bozarak görünümünü farklı olan çekicinin (strange attractor) oluşmasına neden olmuştur.



Şekil 3.1:  $\delta = 0.25$  iken  $N(0) = 5$ ,  $P(0) = 11$  başlangıç değerindeki farklı  $\beta$  değerleri için av-zaman ilişkisi gösterilmektedir.  $\beta$  değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a)  $k = 0$  için  $\beta = 0$ ,  $\bar{N} = 9.3750$ , (b)  $k = 0.2$  için  $\beta = 1.8750$ ,  $\bar{N} = 7.5$ , (c)  $k = 0.5$  için  $\beta = 4.6875$ ,  $\bar{N} = 4.6875$ , (d)  $k = 0.8$  için  $\beta = 7.5$ ,  $\bar{N} = 1.8750$ .

Şimdi de (3.3) sisteminde görülen Flip çatallanma diyagramına bakalım.

- $k = 0$  iken, yani Allee etkisi mevcut değil iken (3.3) sistemi tek bir pozitif denge noktasına sahiptir. Bu denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P}) = (9.3750, 15)$  dir. Kritik çatallanma değeri ise  $\bar{\delta}_1 = 0.3333$  olarak hesaplanır. Teorem 3.1 gereğince

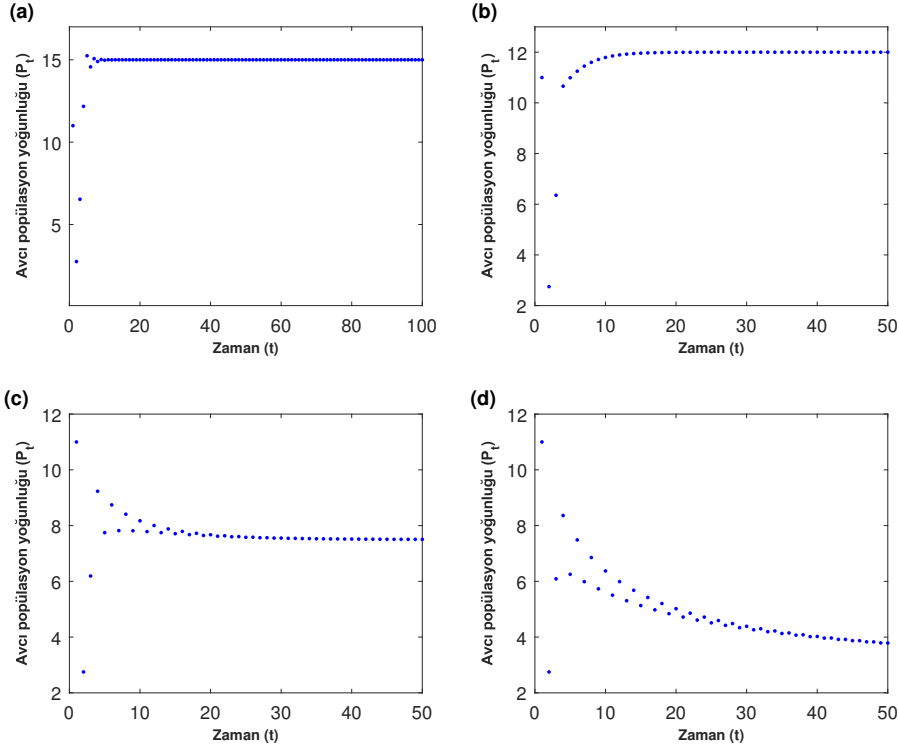
$$x = -8 < 0 \quad \text{ve} \quad y = 12 > 0$$

hipotezleri sağlanıp

- $x^2 - 4y = 16 > 0$

- $-\frac{2}{x} = 0.25$  ve  $-\frac{4}{x} = 0.5$  için  $\delta = \bar{\delta}_1 \ni \delta \neq -\frac{2}{x}, -\frac{4}{x}$

- $2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) = 1.2177 > 0$



Şekil 3.2:  $\delta = 0.25$  iken  $N(0) = 5$ ,  $P(0) = 11$  başlangıç değerindeki farklı  $\beta$  değerleri için avcı-zaman ilişkisi gösterilmektedir.  $\beta$  değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a)  $k=0$  için  $\beta=0$ ,  $\bar{P}=15$ , (b)  $k=0.2$  için  $\beta=1.8750$ ,  $\bar{P}=12$ , (c)  $k=0.5$  için  $\beta=4.6875$ ,  $\bar{P}=7.5$ , (d)  $k=0.8$  için  $\beta=7.5$ ,  $\bar{P}=3$ .

- $\alpha_1 = -25.8 \neq 0$

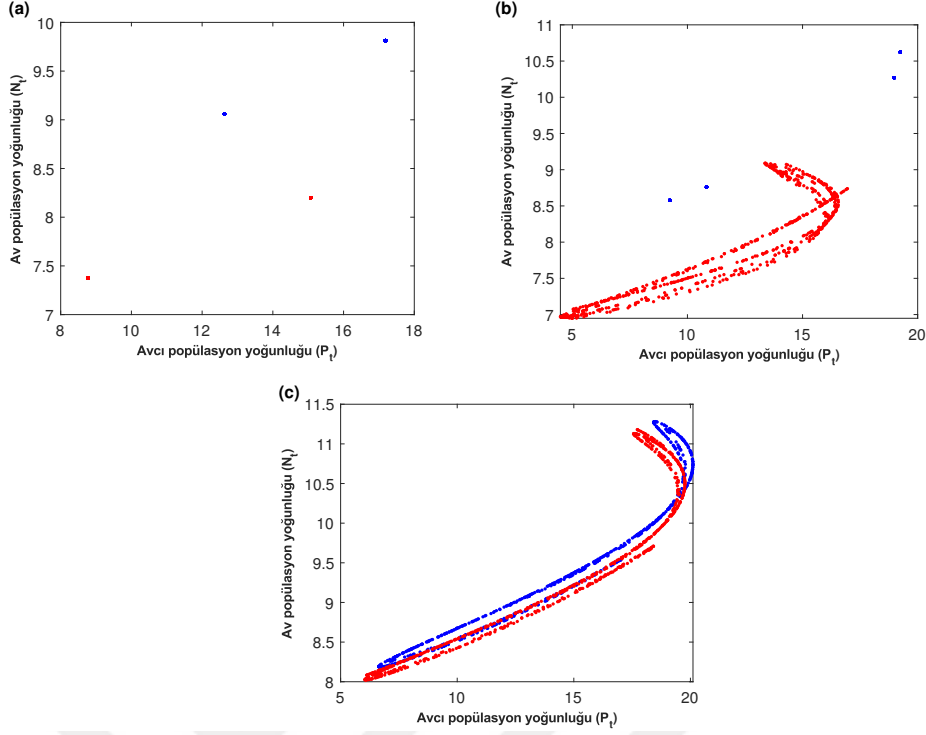
olduğundan teoremin  $F(0)$ ,  $F(1)$  ve  $F(2)$  şartları sağlanır. Sonuç olarak çatallanma parametresi  $\delta$ ,  $\bar{\delta}_1 = 0.3333$  değerinden geçerken (3.3) sistemi süperkritik Flip çatallanmaya sahiptir.

- $k = 0.2$  iken, yani av popülasyonu eş bulma Allee etkisine sahip iken (3.3) sistemi yine tek bir pozitif denge noktasına sahiptir. Bu denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P}) = (7.5, 12)$  olup Allee etkisi altında av ve avcı popülasyonun denge değeri azalmıştır. Kritik çatallanma değeri ise  $\bar{\delta}_1 = 0.3032$  değerine düşmüştür. Teorem 3.1 in hipotezlerinden

$$x = -7.76 < 0 \quad \text{ve} \quad y = 7.68 > 0$$

olup

- $x^2 - 4y = 29.4976 > 0$

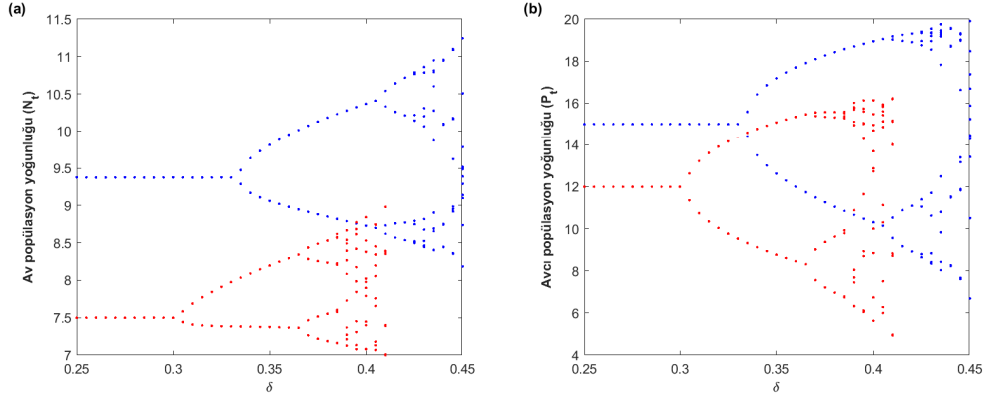


Şekil 3.3:  $N(0) = 9.38$  ve  $P(0) = 15.01$  başlangıç değerleri ve  $k = 0.2$  için Allee etkisi içermeyen (mavi) ve Allee etkisi içeren (kırmızı) av-avcı faz portresi gösterilmektedir. (a)  $\delta = 0.35$  iken her iki modelde de 2 periyotlu çözüm (2-döngü) mevcuttur. (b)  $\delta = 0.414$  için Allee etkisi içermeyen modelde 4-döngü gözükürken, Allee etkisi içeren model görünümü farklı olan çekiciye sahiptir. (c)  $\delta = 0.45$  değerinde her iki model de görünümü farklı olan çekiciye sahiptir.

- $-\frac{2}{x} = 0.2577$  ve  $-\frac{4}{x} = 0.555$  için  $\delta = \bar{\delta}_1 \ni \delta \neq -\frac{2}{x}, -\frac{4}{x}$
- $2\alpha_3^2 + 2(\alpha_4 h_1 + \alpha_9) = 3.9097 > 0$
- $\alpha_1 = -34.7949 \neq 0$

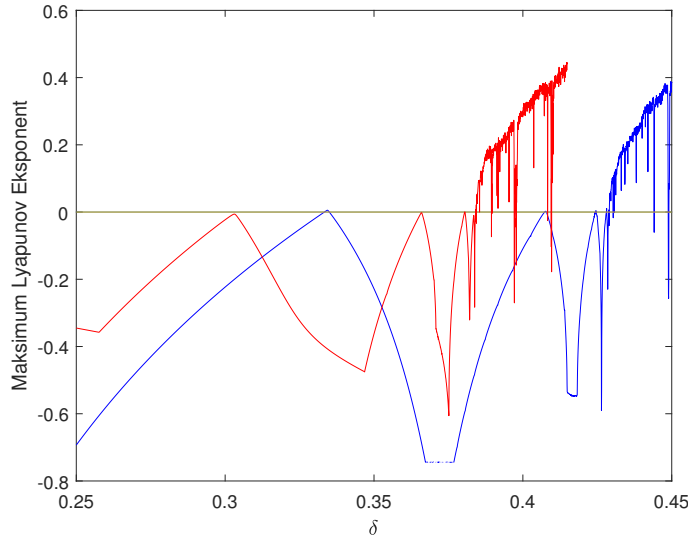
olarak hesaplanır. Böylelikle teoremin  $F(0)$ ,  $F(1)$  ve  $F(2)$  şartları sağlanır. Bu sonuç bize çatallanma parametresi  $\delta$  nın,  $\bar{\delta}_1 = 0.3032$  kritik çatallanma değerinden geçerken (3.3) sisteminde süperkritik Flip çatallanmanın mevcut olduğunu söyler.

Şekil 3.4 de  $N(0) = 9.38$  ve  $P(0) = 15.01$  başlangıç değerlerinde  $\delta$  değeri  $[0.25 \ 0.45]$  aralığında değişirken sırasıyla av ve avcı popülasyonun değişim grafiğine yer verilmiştir. Burada Allee etkisi içeren ve içermeyen model bir arada yer almaktadır. Allee etkisini şu şekilde yorumlayabiliriz: Allee etkisi ile birlikte av popülasyonun azalması temel besin kaynağı av olan avcı popülasyonunu da azaltacağından iki türün



Şekil 3.4:  $\delta$  parametresi  $0.25 \leq \delta \leq 0.45$  aralığında değişirken av ve avcı popülasyonun çatallanma diyagramı sırasıyla şekil (a) ve (b) de verilmiştir.  $k = 0$  iken popülasyon grafikleri mavi,  $k = 0.2$  iken popülasyon grafikleri kırmızı renk ile gösterilmiştir.

birbiri ile etkileşimi gecikmektedir. Dolayısıyla Allee etkisi içermeyen modelin denge noktasının kararlı olduğu  $\delta$  değerinde, Allee etkisi içeren modelin denge noktası kararsızlaşmakta ve 2 periyotlu çözüm (2-döngü) ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak Allee etkisi ile birlikte (3.3) sistemi düşük  $\delta$  değerinde kaotik yapıya sahiptir. Hatta  $\delta$  değeri arttıkça Şekil 3.3 (b)'de görüldüğü üzere Allee etkisi içermeyen model 4-döngüye sahip iken Allee etkisi dinamik yapıyı bozarak görünümü farklı olan çekicinin oluşmasına neden olmuştur.



Şekil 3.5:  $0.25 \leq \delta \leq 0.45$  için Maksimum Lyapunov Eksponent. Allee etkisi içermeyen (3.3) sistem için ( $k = 0$  durumu) mavi ile, Allee etkisi içeren sistem ( $k = 0.2$  durumu) kırmızı ile gösterilmiştir.

Ayrık sistem çözümlerinde kaotik davranış göstergesinden biri başlangıç koşullarına olan hassasiyettir. Bu hassasiyetten kastımız başlangıçta birbirine çok yakın başlayan

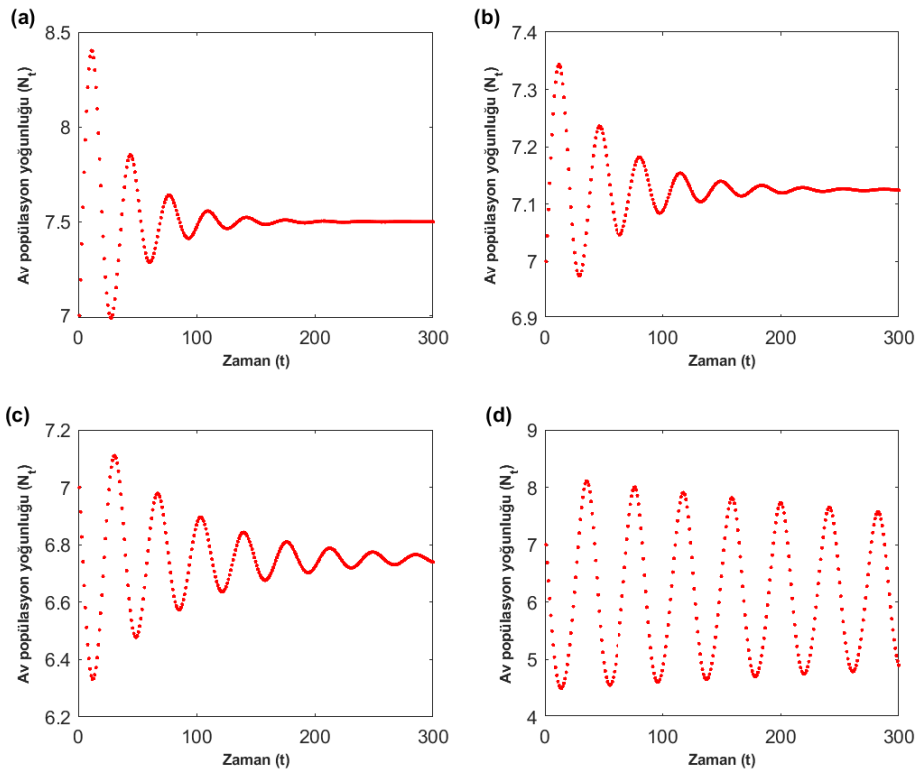


çözümlerin birbirinden farklı davranışlar sergilemesidir. Bu ise pozitif lyapunov katsayısı ile ölçülmektedir. Şekil 3.5'te  $[0.25 \ 0.45]$  aralığındaki  $\delta$  değerleri için Maksimum Lyapunov Eksponent grafiğine yer verilmiştir. Bu grafikten kritik  $\bar{\delta}_1$  değerinden yüksek  $\delta$  değerlerinde kaotik yapıların görüldüğünü söyleyebiliriz.

**2. Örnek:** Şimdi de kabul edelim ki

$$r_1 = 0.45, \quad r_2 = 0.1, \quad \epsilon = 0.03, \quad \text{ve} \quad \theta = 0.05 \quad (3.115)$$

olsun. (3.115) parametre değerlerinde Allee etkisi içermeyen modelin ( $\beta = 0$ , (yani



Şekil 3.6:  $\delta = 0.9$  iken  $N(0) = 7$  ve  $P(0) = 14$  başlangıç değerindeki farklı  $\beta$  değerleri için av-zaman ilişkisi gösterilmektedir.  $\beta$  değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a)  $k = 0$  için  $\beta = 0$ ,  $\bar{N} = 7.5$ , (b)  $k = 0.05$  için  $\beta = 0.375$ ,  $\bar{N} = 7.125$ , (c)  $k = 0.1$  için  $\beta = 0.75$ ,  $\bar{N} = 6.75$ , (d)  $k = 0.2$  için  $\beta = 1.5$ ,  $\bar{N} = 6$ .

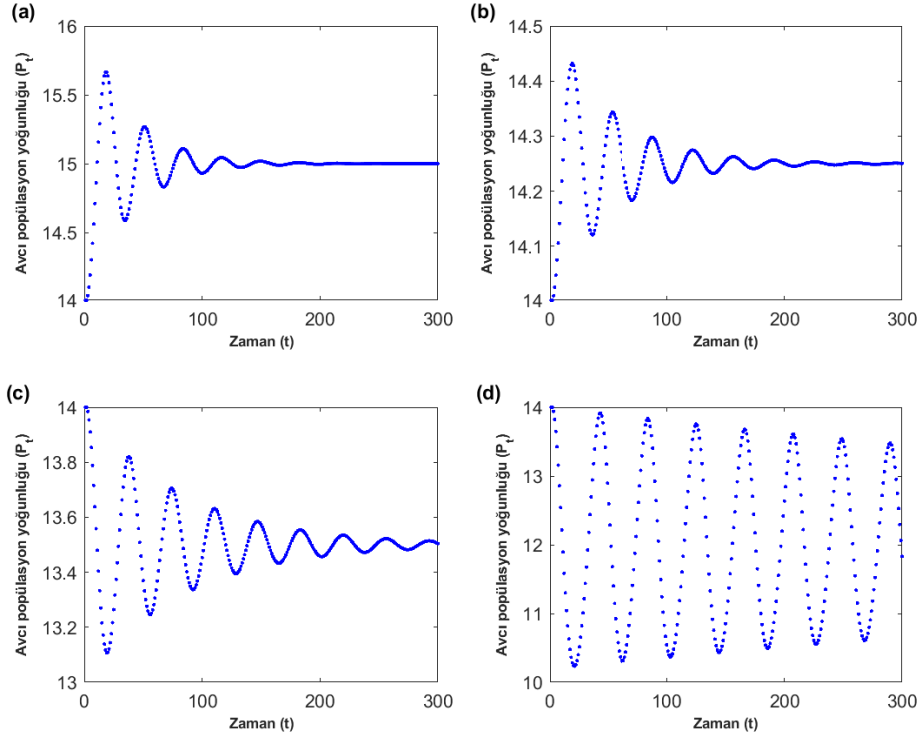
$k = 0$ ) iken) kararlılık analizi Baydemir ve diğ. (2020) tarafından çalışılmıştır. Bu parametre değerleri için sistemin denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P}) = (7.5, 15)$  dir.

Ayrıca  $x = -0.1 < 0$  ve  $y = 0.045 > 0$  olup  $x^2 - 4y = -0.17 < 0$  olduğundan sistemin kompleks eşlenik özdeğerleri mevcuttur. Kritik çatallanma değeri  $\bar{\delta} = 2.222$

olup (3.113) formülü kullanılırsa

$$a(\bar{\delta}) = -0.0034$$

olarak hesaplanır. Bu değer,  $\delta$  çatallanma parametresi  $\bar{\delta} = -\frac{x}{y} = \frac{r_2 - r_1 k(1-k)}{r_1 r_2 (1-k)^2}$



Şekil 3.7:  $\delta = 0.9$  iken  $N(0) = 7$  ve  $P(0) = 14$  başlangıç değerindeki farklı  $\beta$  değerleri için avcı-zaman ilişkisi gösterilmektedir.  $\beta$  değerleri ve bu değere karşılık gelen denge noktası sırasıyla şu şekildedir: (a)  $k = 0$  için  $\beta = 0$ ,  $\bar{P} = 15$ , (b)  $k = 0.05$  için  $\beta = 0.3750$ ,  $\bar{P} = 14.25$ , (c)  $k = 0.1$  için  $\beta = 0.75$ ,  $\bar{P} = 13.50$ , (d)  $k = 0.2$  için  $\beta = 1.5$ ,  $\bar{P} = 12$ .

kritik değerinden geçerken (3.3) sistemin denge noktasında süperkritik Neimark-Sacker çatallanmanın ortaya çıktığını belirtir. Bir başka ifadeyle,  $\bar{\delta}$  değerinden önce çözümler kararlı iken (yani çözümler denge noktasına yaklaşırken),  $\bar{\delta}$  kritik değerinde kararlı periyodik çözüm ortaya çıkmaktadır.  $\delta$  değeri  $\bar{\delta}$  değerinden büyük olması halinde çözümler kararsızlaşır.

Dikkat edilirse (3.115) ile verilen parametre değerleri için eğer  $k < 0.33$  ise Sonuç 3.1 ikinci maddenin hipotezleri sağlanır. Öyleyse  $k < 0.33$  şartını sağlayan farklı  $k$

değerleri için  $\bar{\delta}$  değerini ve bu  $k$  değerine karşılık gelen denge noktalarını bulalım.

$$k = 0 \Rightarrow \beta = 0, (\bar{N}, \bar{P}) = (7.5, 15), \bar{\delta} = 2.222,$$

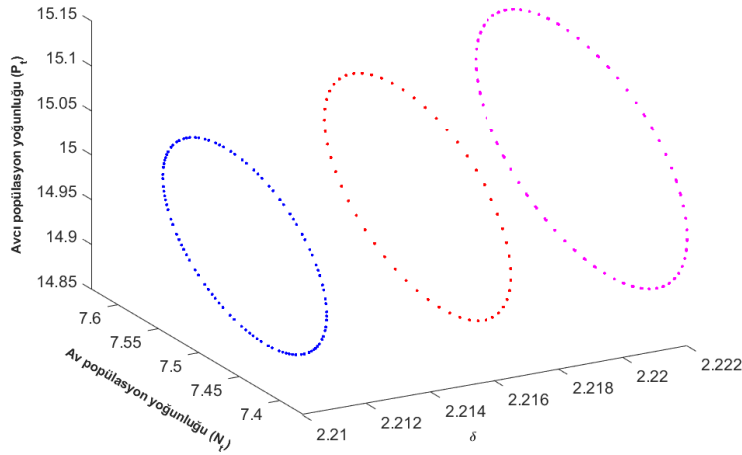
$$k = 0.05 \Rightarrow \beta = 0.375, (\bar{N}, \bar{P}) = (7.125, 14.250), \bar{\delta} = 1.9360,$$

$$k = 0.1 \Rightarrow \beta = 0.75, (\bar{N}, \bar{P}) = (6.75, 13.50), \bar{\delta} = 1.6324,$$

$$k = 0.2 \Rightarrow \beta = 1.5, (\bar{N}, \bar{P}) = (6, 12), \bar{\delta} = 0.9722.$$

Şekil 3.6 ve 3.7’de  $N(0) = 7$  ve  $P(0) = 14$  olmak üzere  $\delta = 0.9$  değerinde sırasıyla av ve avcı popülasyonunun zamana göre grafiğine yer verilmiştir. Grafiklerden görüldüğü üzere Allee sabiti  $\beta$  değeri arttıkça, yani av popülasyonunun eş bulma oranı azalıp üreme oranı azaldıkça av popülasyonu ve buna bağlı olarak avcı popülasyonu azalmakta, bir başka ifadeyle, denge noktası azalmakta ve başlangıçtaki popülasyonların denge değerlerine ulaşma süresi artmaktadır.

Baydemir ve diğ. (2020) aynı parametre değerleri ve  $N(0) = 7.4$  ve  $P(0) = 14.9$  başlangıç değeri için Allee etkisi içermeyen modelde ( $k = 0$  hali)  $\bar{\delta} = 2.222$  değerinde periyodik çözümlerin varlığını göstermiştir. Şekil 3.8’de parametre değerleri ve başlangıç koşulu sabit tutulmuş ve  $k = 0.001$  için  $\delta = 2.2116$  ile  $k = 0.002$  için  $\delta = 2.2111$  değerinde periyodik çözümlerin varlığı gösterilmiştir. Burada Allee sabitindeki artış çözümlerin periyodunu azaltmıştır.



Şekil 3.8:  $N(0) = 7.4$ ,  $P(0) = 14.9$  başlangıç değerindeki av-avcı popülasyon diyagramı  $\delta = 2.2111$  iken 1.şekil (mavi),  $\delta = 2.2116$  iken 2.şekil (kırmızı) ve  $\delta = 2.222$  iken 3.şekilde (pembe) gösterildiği gibidir.



## 4. SÜREKLİ AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNDE ALLEE ETKİSİ

### 4.1 Modelin Tanıtımı ve Temel Özellikleri

Çalışmanın bu kısmında

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = r_1 N(t) \frac{N(t)}{N(t) + \beta} - \epsilon P(t) N(t) \\ \dot{P}(t) = r_2 P(t) - \theta \frac{P^2(t)}{N(t)} \end{cases} \quad (4.1)$$

ile verilen av popülasyonun eş bulma Allee etkisine sahip olduğu sürekli av-avcı popülasyon modelinin karalılık ve çatalanma analizine yer verilecektir. Burada  $\beta > 0$  sabiti Allee etkisini göstermekte olup  $r_1, r_2, \epsilon$  ve  $\theta$  parametreleri pozitiftir.  $N(t)$  ve  $P(t)$  sırasıyla  $t$  anındaki av ve avcı popülasyon yoğunluklarını,  $\dot{N}(t) := dN(t)/dt$  ve  $\dot{P}(t) := dP(t)/dt$  ise av ve avcı popülasyonlarının zamana göre değişimlerini gösterir. Modeldeki diğer katsayılar ise (3.3) sisteminde ifade edildiği gibidir.

### 4.2 Kararlılık Analizi

Bu bölümde, Allee etkisi altında, av ve avcı popülasyonlarının ileri zamandaki davranışları araştırılacaktır. Bunun için ilk olarak (4.1) sisteminin denge noktalarını belirleyelim. Denge noktasından kastımız ileri zamandaki av ve avcı popülasyonun sabit değeri, bir başka ifadeyle popülasyon yoğunluğunda değişikliğinin olmadığı değerdir. Zamana bağlı fonksiyonların değişimi o fonksiyonların zamana göre türevi ile ifade edilir. Öyleyse ele aldığımız modelin denge noktaları için  $\dot{N} = 0$  ve  $\dot{P} = 0$  eşitliklerini sağlayan  $(\bar{N}, \bar{P})$  ikililerini bulalım. Daha sonra bu denge noktalarının kararlı veya kararsız olduğu durumları analiz edelim.

(4.1) sistemindeki birinci denklemi ele alırsak

$$\begin{aligned} \dot{N} = 0 &\Rightarrow r_1 \bar{N} \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} - \epsilon \bar{P} \bar{N} = 0 \Rightarrow \bar{N} \left( \frac{r_1 \bar{N}}{\bar{N} + \beta} - \epsilon \bar{P} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{N} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{P} = \frac{r_1}{\epsilon} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

olmalıdır. Benzer şekilde, (4.1) sisteminin ikinci denkleminde

$$\begin{aligned} \dot{P} = 0 &\Rightarrow r_2 \bar{P} - \theta \frac{\bar{P}^2}{\bar{N}} = 0 \Rightarrow \bar{P} \left( r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{P} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{N} = \frac{\theta \bar{P}}{r_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. Açıkça görülüyor ki  $(\bar{N}, \bar{P}) = (0, 0)$  değeri (4.1) sisteminin bir denge noktasıdır. Ancak, bu denge noktası biyolojik açıdan ilgi çekici değildir. Öyleyse

$$\bar{N} = \frac{\theta}{r_2} \bar{P} = \frac{\theta}{r_2} \frac{r_1}{\epsilon} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + \beta} \right) \Rightarrow \bar{N} \left( 1 - \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} \cdot \frac{1}{\bar{N} + \beta} \right) = 0 \Leftrightarrow \bar{N} = \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} - \beta \quad (4.4)$$

olup (4.3) eşitliğinden

$$\bar{P} = \frac{r_2}{\theta} \bar{N} = \frac{r_2}{\theta} \cdot \left( \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} - \beta \right) = \frac{r_1}{\epsilon} - \frac{r_2}{\theta} \beta \quad (4.5)$$

olarak bulunur. Denge noktasının pozitif olabilmesi için  $k \in \mathbb{R}$  ve  $k \in (0, 1)$  olmak üzere  $\beta = k \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}$  alınabilir. Sonuç olarak (4.1) sisteminin pozitif denge noktası

$$(\bar{N}, \bar{P}) = \left( (1-k) \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}, (1-k) \frac{r_1}{\epsilon} \right) \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse (3.3) sistemi ile (4.1) sistemi aynı denge noktasına sahiptir. Şimdi bu denge noktasının kararlılığı için Teorem 2.5'i ele alalım.

$$\begin{aligned} f(N(t), P(t)) &= r_1 N(t) \frac{N(t)}{N(t) + \beta} - \epsilon P(t) N(t), \\ g(N(t), P(t)) &= r_2 P(t) - \theta \frac{P^2(t)}{N(t)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olup (4.1) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J(\bar{N}, \bar{P}) = \begin{pmatrix} f_N(\bar{N}, \bar{P}) & f_P(\bar{N}, \bar{P}) \\ g_N(\bar{N}, \bar{P}) & g_P(\bar{N}, \bar{P}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k (1-k) & -(1-k) \frac{\theta r_1}{r_2} \\ \frac{r_2^2}{\theta} & -r_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

dir. Burada

$$izJ = r_1 k (1-k) - r_2, \quad (4.9)$$

$$\det J = r_1 r_2 (1-k)^2$$

olup  $a_1 := -izJ$  ve  $a_2 := \det J$  olmak üzere (4.1) sisteminin denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu ise

$$F(\lambda) = \lambda^2 - izJ\lambda + \det J = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Öyleyse  $a_1 > 0$  (yani  $-iz(J) > 0 \Rightarrow iz(J) < 0$ ) ve  $a_2 > 0$  (yani  $\det(J) > 0$ ) iken  $(\bar{N}, \bar{P})$  pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlı olur.

(4.9) eşitliklerinden açıkça görülüyor ki  $a_2 = \det J = r_1 r_2 (1-k)^2$  her zaman pozitifdir. O halde  $a_1$  katsayının pozitif olması için gerekli şartları belirleyelim.

$a_1 = r_2 - r_1k(1 - k) = r_1k^2 - r_1k + r_2$  denklemi  $k$  reel parametresine bağlı ikinci dereceden bir denklemdir. Bu denklemi  $a_1(k)$  ile ifade edelim. Denklem,  $r_1^2 - 4r_1r_2 \geq 0$  iken

$$k_{1,2} = \frac{r_1 \mp \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} \quad (4.11)$$

formundaki reel köke sahiptir. Burada iki durum söz konusudur.

Eğer  $r_1 > 4r_2$  ise  $r_1^2 - 4r_1r_2 > 0$  olup  $\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2} < |r_1|$  eşitsizliği sağlanacağından  $k_{1,2} > 0$  olur. Ayrıca burada

$$k_1 = \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} \quad (4.12)$$

olmak üzere  $k_1 < k_2$  olup  $a_1(k)$  denklemin köklerinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir. Tablodan da görüldüğü üzere  $k \in (0, k_1) \cup (k_2, 1)$  için  $a_1(k) > 0$  olur.

	0		$k_1$		$k_2$		1
$a_1(k)$	+		-		+		

Eğer  $r_1 = 4r_2$  ise  $k_{1,2} = \frac{1}{2}$  olup  $a_1(k) = r_2 - 4r_2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$  dır. Her ne kadar  $F(\lambda)$  polinomunun  $r_1 = 4r_2$  iken bir çift sanal özdeğeri de olsa ( $a_1(k) = 0, a_2 > 0$  olup  $\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{a_2}$ ) aşağıdaki işaret tablosundan da görüldüğü üzere denge noktasının  $k$  değişirken kararlılık yapısı değişmez. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ile (4.1) sisteminin denge

	0		$k_{1,2}$		1
$a_1(k)$	+		+		

noktasının lokal asimptotik kararlı olması için gerekli şartları ifade edebiliriz.

**Teorem 4.1.**  $r_1 > 4r_2$  iken

$$k_1 = \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} \quad (4.13)$$

olmak üzere  $k \in (0, k_1) \cup (k_2, 1)$  ise (4.1) sisteminin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

### 4.3 Hopf Çatallanma Analizi

Bölüm 4.2'de gösterdik ki  $k$  parametresi ve buna bağlı olarak  $\beta$  Allee sabiti değiştikçe sistemin denge noktasının kararlılık yapısı değişmektedir. Öyleyse Allee etkisi altında

(4.1) sisteminin dinamiğinde nitel değişikliklerin, yani çatallanmaların mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Burada denge noktasının kararlılık yapısında değişiklik olması demek sistemin reel kısmının negatif olduğu iki özdeğerin değişikliğinin neden olduğu parametre değerinde, yani çatallanma parametresinde, sıfır olması ve çatallanma parametresinden sonra ise aynı özdeğerlerin reel kısmının pozitif olmasıdır. Bu durum, sistemin çatallanma parametresinde sıfır veya bir çift sıfır sanal özdeğere sahip olması halinde gerçekleşir. Bir çift sıfır sanal özdeğerin mevcut olduğu durumda sistemde Hopf çatallanma ortaya çıkmaktadır. Öyleyse Allee etkisi içeren (4.1) sisteminin hangi şartlar altında Hopf çatallanmaya sahip olduğunu araştıralım.

**Lemma 4.1.** (4.1) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasındaki Jakobiyen matrisinden elde edilen karakteristik polinomu  $F(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$  formunda verilen reel katsayılı ikinci dereceden bir polinom olsun. Öyleyse, bu polinomun bir çift sıfır sanal özdeğere sahip olması için gerek ve yeter şart  $a_1 = 0$  ve  $a_2 > 0$  olmasıdır.

**İspat.**  $w \in \mathbb{R}$  ve  $w > 0$  olmak üzere  $\lambda = iw$  değerinin  $F(\lambda)$  polinomunun bir kökü olduğunu kabul edelim. Öyleyse,  $\lambda = iw$  kökü  $F(\lambda) = 0$  denklemini sağlayacağından

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 &\Rightarrow (iw)^2 + a_1(iw) + a_2 = 0 \Rightarrow -w^2 + a_1iw + a_2 = 0 \\ &\Rightarrow (a_2 - w^2) + i(a_1w) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ ve } a_2 = w^2 > 0 \end{aligned}$$

dir. Burada  $\lambda = -iw$  için de aynı sonuç geçerlidir. Tersine, kabul edelim ki  $a_1 = 0$  ve  $a_2 > 0$  olsun. Bu durumda karakteristik polinom  $F(\lambda) = \lambda^2 + a_2$  şeklinde olup bu denklemin kökleri, bir başka ifadeyle karakteristik polinomun özdeğerleri  $\lambda^2 = -a_2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{a_2}$  şeklinde bir çift sıfır sanal özdeğerdir.

Sonuç olarak, çatallanma parametresinde  $F(\lambda)$  karakteristik polinomunun reel kısmı sıfır olan kompleks eşlenik köke sahip olması için gerekli şartlar aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

**Teorem 4.2.**  $k_1$  ve  $k_2$  Teorem 4.1 de ifade edildiği gibi olmak üzere ya  $k = k_1$  ya da  $k = k_2$  ise  $F(\lambda)$  karakteristik polinomu bir çift sıfır sanal özdeğere sahiptir.

**İspat.** Eğer  $k = k_1$  ya da  $k = k_2$  ise  $a_1 = 0$  olur. Öte taraftan  $a_2 > 0$  olduğundan Lemma 4.1 gereğince  $F(\lambda)$  polinomu bir çift sıfır sanal özdeğere sahiptir.

Şimdi de kabul edelim ki  $F(\lambda)$  karakteristik polinomu  $\lambda_{1,2}(k) = m(k) \mp in(k)$  formunda kompleks eşlenik özdeğere sahip olsun. Burada  $m(k), n(k) \in \mathbb{R}$  ve  $n(k) \neq 0$  dır. Burada  $k$  çatallanma parametresi olup (4.1) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında Hopf çatallanmanın görülebilmesi için  $m(k_c) = 0$  ve  $n(k_c) = n_0 > 0$  olacak şekilde  $k_c$  kritik çatallanma değeri bulunmalıdır.

Kabul edelim ki  $\lambda_1 = m(k) + in(k)$  olsun. Gösterim kolaylığı açısından  $m(k) = m$  ve  $n(k) = n$  olarak ifade edelim.  $\lambda_1, F(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$  polinomunun bir kökü olduğundan

$$\begin{aligned} (m + in)^2 + a_1(m + in) + a_2 = 0 &\Rightarrow m^2 + 2mni - n^2 + a_1m + ia_1n + a_2 = 0 \\ &\Rightarrow (m^2 - n^2 + a_1m + a_2) + i(2mn + a_1n) = 0 \end{aligned}$$



olmalıdır. Bu ise  $m^2 - n^2 + a_1m + a_2 = 0$  ve  $2mn + a_1n = 0$  eşitliklerinin aynı anda sağlanması durumunda gerçekleşir.

Benzer şekilde,  $\lambda_2 = m - in$  için

$$\begin{aligned} (m - in)^2 + a_1(m - in) + a_2 = 0 &\Rightarrow m^2 - 2mni - n^2 + a_1m - ia_1n + a_2 = 0 \\ &\Rightarrow (m^2 - n^2 + a_1m + a_2) + i(-2mn - a_1n) = 0 \end{aligned}$$

olup bu eşitliğin sağlanması için  $m^2 - n^2 + a_1m + a_2 = 0$  ve  $-(2mn + a_1n) = 0 \Rightarrow 2mn + a_1n = 0$  olmalıdır. Buradan

$$n(2m + a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = -2m \quad (4.14)$$

$$m^2 - n^2 + a_1m + a_2 = 0 \Rightarrow m^2 + a_1m + a_2 - n^2 = 0 \quad (4.15)$$

denklemleri elde edilir. Öyleyse, bu denklemleri ortak çözelim. (4.14) eşitliğini (4.15) denkleminde yerine yazarsak

$$m^2 + m(-2m) + a_2 - n^2 = 0 \Rightarrow m^2 = a_2 - n^2 \quad (4.16)$$

denklemini elde edilir. Burada üç durum söz konusudur.

- Eğer  $a_2 < n^2$  ise  $m^2 < 0$  olup  $m \in \mathbb{R}$  olması ile çelişir.
- Eğer  $a_2 = n^2$  ise  $m = 0$  olup  $\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{a_2}$  olur.
- Eğer  $a_2 > n^2$  ise  $m = \mp \sqrt{a_2 - n^2} \neq 0$  olur. Fakat bu durumda  $m(k_c) = 0$  eşitliğini sağlayan  $k_c$  kritik çatallanma değeri bulunamaz.

Şimdi de (4.15) denklemini ele alalım. Bu denklem  $m$  parametresine bağlı reel katsayılı ikinci dereceden bir denklem olup denklemin kökleri  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) \geq 0$  koşulu altında aşağıdaki gibidir:

$$m_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - n^2)}}{2} \quad \text{ve} \quad m_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - n^2)}}{2}. \quad (4.17)$$

Dikkat edilirse burada  $a_1, a_2$  ve  $n, k$  parametresine bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca  $a_2$  her zaman sıfırdan büyüktür. Öyleyse sırasıyla  $a_1$  in sıfır, negatif veya pozitif olduğu durumları aşağıda analiz edelim.

**1. Durum:** Eğer  $a_1 = 0$  ise (4.14) den  $m = 0$  olup bu değer (4.15) denkleminde yerine yazılırsa  $n^2 = a_2 \Rightarrow n = \mp \sqrt{a_2}$  bulunur. Böylelikle  $F(\lambda)$  polinomu  $\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{a_2}$  şeklinde bir çift sıfır sanal özdeğere sahip olur.

**2. Durum:** Eğer  $a_1 > 0$  ise (4.14) den  $m = -\frac{a_1}{2} < 0$  olmalıdır. (4.15) denklemini için ise  $m_1$  ve  $m_2$  köklerini ayrı ayrı ele alalım. İlk olarak kabul edelim ki  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  olsun.

- Eğer  $a_2 = n^2$  ise  $m_1 = 0$  olup  $m < 0$  olması ile çelişir.
- Eğer  $a_2 < n^2$  ise  $m_1 > 0$  olup  $m < 0$  olması ile çelişir.
- Eğer  $a_2 > n^2$  ise  $m_1 < 0$  bulunur.

Sonuç olarak,  $a_1 > 0$  ve  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  olmak üzere eğer  $a_2 > n^2$  iken  $m = m_1$  seçilirse  $F(\lambda)$  polinomu reel kısmı negatif olan kompleks eşlenik köke sahip olur. Dolayısıyla denge noktası lokal asimptotik kararlı olur. Benzer şekilde,

- Eğer  $a_2 = n^2$  ise  $m_2 = -a_1 < 0$  olur.
- Eğer  $a_2 < n^2$  veya  $a_2 > n^2$  ise  $m_2 < 0$  bulunur.

O halde  $a_1 > 0$  ve  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  değerleri için  $m = m_2$  alınırsa  $F(\lambda)$  polinomunun reel kısmı negatif olan kompleks eşlenik kökü mevcuttur. Bu durumda (4.1) sistemin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**3. Durum:** Eğer  $a_1 < 0$  ise (4.14) den  $m = -\frac{a_1}{2} > 0$  olmalıdır. Ayrıca reel  $m$  değeri için  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  olmalıdır. Bu kabul altında

- Eğer  $a_2 = n^2$  ise  $m_1 = -a_1 > 0$  olur.
- Eğer  $a_2 < n^2$  veya  $a_2 > n^2$  ise  $m_1 > 0$  bulunur.

Dolayısıyla,  $a_1 < 0$  ve  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  iken  $m = m_1$  ise  $F(\lambda)$  polinomunun reel kısmı pozitif kompleks eşlenik köke sahip olduğundan denge noktası kararsız olur. Şimdi de aynı koşullar altında  $m_2$  nin işaretini inceleyelim:

- Eğer  $a_2 = n^2$  ise  $m_2 = 0$  olup  $m > 0$  olması ile çelişir.
- Eğer  $a_2 < n^2$  ise  $m_2 < 0$  bulunur. Bu ise  $m > 0$  olması ile çelişir.
- Eğer  $a_2 > n^2$  ise  $m_2 > 0$  dir.

Sonuç olarak,  $a_1 < 0$  ve  $a_1^2 - 4(a_2 - n^2) > 0$  koşulları altında eğer  $a_2 > n^2$  iken  $m = m_2$  alınırsa  $F(\lambda)$  polinomunun kompleks eşlenik özdeğerlerinin reel kısmı pozitif olur. Bu da denge noktasının kararsız olduğunu söyler.

Dikkat edilirse  $a_1$ , yani  $a_1(k)$ , kritik çatallanma değerini belirlemektedir. Dolayısıyla  $a_1(k) = 0$  denkleminin çözümü kritik çatallanma değerini verecektir. Bu değeri  $k_c$  ile gösterelim.  $r_1 > 4r_2$  iken  $a_1(k) = 0$  ikinci dereceden denklemin kökleri (4.11) denkleminde verildiği gibi olmak üzere  $k_c = k_1$  veya  $k_c = k_2$  değerinde  $m(k_c) = 0$ ,  $n(k_c) = \sqrt{a_2}$  olup  $\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{a_2}$  olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Dikkat edilirse, Teorem 4.2 hipotezi altında  $F(\lambda)$  karakteristik polinomu bir çift sıfır sanal özdeğere sahiptir. Ayrıca,  $0 < k < k_1$  veya  $k_2 < k < 1$  (yani Teorem 4.1 hipotezi altında) iken (4.1) sisteminin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (bakınız Durum 2). Öte taraftan,  $k_1 < k < k_2$  iken denge noktası kararsızdır (bakınız Durum 3).

Şimdi de yukarıdaki hipotezler altında elde ettiğimiz kompleks özdeğerler için aşağıdaki sonuçlara yer verelim.

**Lemma 4.2.**  $a_1$  ve  $m, k$  nın bir fonksiyonu olmak üzere eğer  $\left. \frac{d(a_1)}{dk} \right|_{k_c} \neq 0$  ise  $\left. \frac{dm}{dk} \right|_{k_c} \neq 0$  dır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $m(k) = m_1(k) = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - n^2)}}{2}$  olsun.

$m_1(k) = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} [a_1^2 - 4(a_2 - n^2)]^{1/2}$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{dm_1}{dk} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d(a_1)}{dk} \right] + \frac{1}{4} [a_1^2 - 4(a_2 - n^2)]^{-1/2} \cdot \left[ 2a_1 \frac{d(a_1)}{dk} - 4 \left( \frac{d(a_2)}{dk} - 2n \frac{d(n)}{dk} \right) \right]$$

olarak hesaplanır. Burada  $k = k_c$  iken  $a_1 = 0$  olacağından  $a_2 = n^2$  eşitliği sağlandığında  $\frac{dm_1}{dk} = -\frac{1}{2} \frac{d(a_1)}{dk}$  bulunur. Benzer şekilde,  $m(k) = m_2(k)$  iken eğer  $k = k_c$  ise  $\frac{dm_2}{dk} = -\frac{1}{2} \frac{d(a_1)}{dk}$  olur. Öyleyse,  $\left. \frac{dm}{dk} \right|_{k_c} \neq 0$  olması için  $\left. \frac{d(a_1)}{dk_c} \right|_{k_c} \neq 0$  olmalıdır. Gerçekten de  $\frac{d(a_1)}{dk} = \frac{d}{dk} (r_1 k^2 - r_1 k + r_2) = (2r_1 k - r_1)$  olmak üzere  $k_c \neq \frac{1}{2}$  olduğundan  $\left. \frac{d(a_1)}{dk_c} \right|_{k_c} \neq 0$  dır.

Dikkat edilirse  $k_c = \frac{1}{2} \Rightarrow k_c = k_{1,2} = \frac{r_1 \mp \sqrt{r_1^2 - 4r_1 r_2}}{2r_1} = \frac{1}{2}$  eşitliğinin sağlanabilmesi için  $r_1^2 - 4r_1 r_2 = 0$  olmalıdır. Fakat  $k_c$  nin tanımı gereğince  $r_1 > 4r_2$  olup  $k_c = \frac{1}{2}$  olamaz.

**Lemma 4.3.**  $Re \left( \frac{d(\lambda(k))}{dk} \right) \Big|_{k_c} \neq 0$

**İspat.**  $Re \left( \frac{d(\lambda(k))}{dk} \right) \Big|_{k_c} = \left. \frac{dm}{dk} \right|_{k_c}$  olup Lemma 4.2 den  $\left. \frac{dm}{dk} \right|_{k_c} \neq 0$  olup ispat tamamlanır.

Şu ana kadar Teorem 4.1 ile (4.1) sisteminin  $(\bar{N}, \bar{P}) = \left( (1-k) \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}, (1-k) \frac{r_1}{\epsilon} \right)$  pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu gösterdik. Ayrıca Teorem 4.2 den de biliyoruz ki  $k = k_1$  veya  $k = k_2$  ise  $\lambda_{1,2} = \mp i \sqrt{a_2}$  bir çift sıfır sanal özdeğeri mevcuttur. Dolayısıyla, bu durumda  $r_1 > 4r_2$  iken Hopf çatallanma ortaya çıkmaktadır.

Şimdi de Hopf çatallanmanın mevcut olduğunu Teorem 2.10 ile ifade edilen Kuznetsov'un Hopf Çatallanma Teoremi ile göstereyim. İlk olarak işlemleri basitleştirmek için sistemin denge noktasını orijine taşıyalım. Bu amaçla (4.1) sistemindeki denklemlerin sağ tarafını

$$\begin{aligned} f(N(t), P(t)) &:= r_1 N(t) \frac{N(t)}{N(t) + \beta} - \epsilon P(t) N(t), \\ g(N(t), P(t)) &:= r_2 P(t) - \theta \frac{P^2(t)}{N(t)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ile göstereyim. Daha sonra (4.18) ile tanımlanan  $f(N(t), P(t))$  ve  $g(N(t), P(t))$  fonksiyonlarını

$(\bar{N}, \bar{P})$  denge noktasında Taylor Serisine açalım:

$$\begin{aligned}
\dot{N}(t) &= f(\bar{N}, \bar{P}) + f_N(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N}) + f_P(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P}) \\
&+ \frac{1}{2}[f_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^2 + 2f_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})(P(t) - \bar{P}) + f_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P})^2] \\
&+ \frac{1}{6}[f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^3 + 3f_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^2(P(t) - \bar{P}) \\
&+ 3f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})(P(t) - \bar{P})^2 + f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P})^3] + \dots
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= g(\bar{N}, \bar{P}) + g_N(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N}) + g_P(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P}) \\
&+ \frac{1}{2}[g_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^2 + 2g_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})(P(t) - \bar{P}) + g_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P})^2] \\
&+ \frac{1}{6}[g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^3 + 3g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})^2(P(t) - \bar{P}) \\
&+ 3g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N(t) - \bar{N})(P(t) - \bar{P})^2 + g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P(t) - \bar{P})^3] + \dots
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklindedir. Burada  $f(\bar{N}, \bar{P}) = 0$  ve  $g(\bar{N}, \bar{P}) = 0$  olup ilgili türevler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

- $f_N = \frac{N(N + 2\beta)}{(N + \beta)^2} - \epsilon P \Rightarrow f_N(\bar{N}, \bar{P}) = r_1 k(1 - k)$
- $f_P = -\epsilon N \Rightarrow f_P(\bar{N}, \bar{P}) = -(1 - k)\frac{\theta r_1}{r_2}$  ve  $f_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$
- $f_{NN} = r_1 \frac{2\beta^2}{(N + \beta)^3} \Rightarrow f_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = 2k^2 \frac{\epsilon r_2}{\theta}$
- $f_{NP} = -\epsilon \Rightarrow f_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\epsilon$
- $f_{NNN} = -6r_1 \beta^2 (N + \beta)^{-4} \Rightarrow f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = -6k^2 \frac{\epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1}$
- $f_{NNP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$
- $g_N = \frac{\theta P^2}{N^2} \Rightarrow g_N(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{r_2^2}{\theta}$
- $g_P = r_2 - 2\delta \frac{\theta P}{N} \Rightarrow g_P(\bar{N}, \bar{P}) = -r_2$
- $g_{NN} = -2\theta P^2 N^{-3} \Rightarrow g_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{2\epsilon r_2^3}{(1 - k)\theta^2 r_1}$
- $g_{NP} = 2\frac{\theta P}{N^2} \Rightarrow g_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{2\epsilon r_2^2}{(1 - k)\theta r_1}$

- $g_{PP} = -2\frac{\theta}{N} \Rightarrow g_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{2\epsilon r_2}{(1-k)r_1}$
- $g_{NNN} = 6\theta P^2 N^{-4} \Rightarrow g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{6\epsilon^2 r_2^4}{(1-k)^2 \theta^3 r_1^2}$
- $g_{NNP} = -4\theta P N^{-3} \Rightarrow g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{4\epsilon^2 r_2^3}{(1-k)^2 \theta^2 r_1^2}$
- $g_{NPP} = 2\frac{\theta}{N^2} \Rightarrow g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{2\epsilon^2 r_2^2}{(1-k)^2 \theta r_1^2}$
- $g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0.$

Şimdi de

$$\begin{aligned} U(t) &= N(t) - \bar{N} \\ V(t) &= P(t) - \bar{P} \\ \tilde{k} &= k - k_c \end{aligned} \quad (4.21)$$

dönüşümlerini tanımlayalım. (4.21) eşitlikleri altında (4.19) ve (4.20) denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= r_1(\tilde{k} + k_c)(1 - (\tilde{k} + k_c))U(t) + (-(1 - (\tilde{k} + k_c))\frac{\theta r_1}{r_2})V(t) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ 2(\tilde{k} + k_c)^2 \frac{\epsilon r_2}{\theta} U^2(t) - 2\epsilon U(t)V(t) \right] + \frac{1}{6} \left[ -6(\tilde{k} + k_c)^2 \frac{\epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1} U^3(t) \right] \\ \dot{V}(t) &= \frac{r_2^2}{\theta} U(t) - r_2 V(t) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{2\epsilon r_2^3}{(1 - (\tilde{k} + k_c))\theta^2 r_1} U^2(t) + \frac{4\epsilon r_2^2}{(1-k)\theta r_1} U(t)V(t) - \frac{2\epsilon r_2}{(1 - (\tilde{k} + k_c))r_1} V^2(t) \right] \\ &+ \frac{1}{6} \left[ \frac{6\epsilon^2 r_2^4}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta^3 r_1^2} U^3(t) - \frac{12\epsilon^2 r_2^3}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta^2 r_1^2} U^2(t)V(t) + \frac{2\epsilon^2 r_2^2}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta r_1^2} U(t)V^2(t) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

formunda elde edilir. Böylelikle (4.22) denkleminde denge noktası  $(0,0)$  olan aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k_c (1 - k_c) & -(1 - k_c) \frac{\theta r_1}{r_2} \\ \frac{r_2^2}{\theta} & -r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(U(t), V(t), \tilde{k}, k_c) \\ f_2(U(t), V(t), \tilde{k}, k_c) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Yukarıdaki ifadede yer alan  $f_1$  ve  $f_2$  aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned}
f_1(U(t), V(t), \tilde{k}, k_c) &= r_1 \left( \tilde{k} - \tilde{k}^2 - 2\tilde{k}k_c \right) U(t) + \tilde{k} \frac{\theta r_1}{r_2} V(t) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ 2 \left( \tilde{k} + 2\tilde{k}k_c + k_c^2 \right) \frac{\epsilon r_2}{\theta} U^2(t) - 2\epsilon U(t)V(t) \right] \\
&+ \frac{1}{6} \left[ -6 \left( \tilde{k} + 2\tilde{k}k_c + k_c^2 \right) \frac{\epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1} U^3(t) \right] \\
f_2(U(t), V(t), \tilde{k}, k_c) &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2\epsilon r_2^3}{(1 - (\tilde{k} + k_c))\theta^2 r_1} U^2(t) + \frac{4\epsilon r_2^2}{(1 - (\tilde{k} + k_c))\theta r_1} U(t)V(t) - \frac{2\epsilon r_2}{(1 - (\tilde{k} + k_c))r_1} V^2(t) \right] \\
&+ \frac{1}{6} \left[ \frac{6\epsilon^2 r_2^4}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta^3 r_1^2} U^3(t) - \frac{12\epsilon^2 r_2^3}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta^2 r_1^2} U^2(t)V(t) + \frac{2\epsilon^2 r_2^2}{(1 - (\tilde{k} + k_c))^2 \theta r_1^2} U(t)V^2(t) \right].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dikkat edilirse, (4.23) sisteminde hem denge noktası orijine taşınmış hemde kritik çatallanma değeri  $\tilde{k}$  ( $k = k_c$  iken) orijine taşınmıştır. Dolayısıyla,  $\tilde{k} = 0$  için  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde yeniden ifade edelim:

$$\begin{aligned}
f_1(U(t), V(t), k_c) &= s_1 k_c^2 U^2(t) - s_2 U(t)V(t) - s_3 k_c^2 U^3(t), \\
f_2(U(t), V(t), k_c) &= -\frac{s_4}{(1 - k_c)} U^2(t) + \frac{s_5}{(1 - k_c)} U(t)V(t) - \frac{s_6}{(1 - k_c)} V^2(t) \\
&+ \frac{s_7}{(1 - k_c)^2} U^3(t) - \frac{s_8}{(1 - k_c)^2} U^2(t)V(t) + \frac{s_9}{(1 - k_c)^2} U(t)V^2(t).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Burada  $i = 1, \dots, 9$  için  $s_i$  katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\epsilon r_2}{\theta} & s_2 &= \epsilon & s_3 &= \frac{\epsilon^2 r_2^2}{\theta^2 r_1} & s_4 &= \frac{\epsilon r_2^3}{\theta^2 r_1} \\
s_5 &= \frac{2\epsilon r_2^2}{\theta r_1} & s_6 &= \frac{\epsilon r_2}{r_1} & s_7 &= \frac{\epsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2} \\
s_8 &= \frac{2\epsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2} & s_9 &= \frac{\epsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Şimdi kabul edelim ki  $k_c = k_1$  (yani  $k = k_1$ ) olsun. Bu durumda (4.23) sisteminin Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu  $a_1 = r_2 - r_1 k_c (1 - k_c)$  ve  $a_2 = r_1 r_2 (1 - k_c)^2$  olmak üzere  $F(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  olarak bulunur. Dolayısıyla, Teorem 4.2 den  $F(\lambda)$  polinomu  $\lambda_{1,2} = m(k_c) \mp in(k_c) = \mp i \sqrt{a_2}$  kompleks köke sahip olup sistemde periyodik çözümler ortaya çıkmaktadır. Burada  $m(k_c) = 0$  ve Lemma 4.3 gereği  $m'(k_c) = \frac{1}{2} r_1 (1 - 2k_c) \neq 0$  dır. Ayrıca  $n(k_c) = \sqrt{a_2} > 0$  olup Hopf Çatallanma Teoreminin (H.1) ve (H.2) şartları sağlanmış olur. Öyleyse, Hopf çatallanma teoremini uygulayabilmek ve çatallanmanın yön analizini veren  $c_1(k_c)$

Lyapunov katsayısını hesaplayabilmek için (4.23) sistemini normal forma indirgeyelim.

(4.23) sisteminin  $k_c$  kritik noktasındaki jakobiyen matrisini

$$J(k_c) = \begin{pmatrix} r_1 k_c (1 - k_c) & -(1 - k_c) \frac{\theta r_1}{r_2} \\ \frac{r_2^2}{\theta} & -r_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

ile gösterelim ve  $\lambda_1 = -in(k_c)$ , kısaca  $\lambda_1 = -in$  özdeğerini ele alalım. Daha sonra (4.27) eşitliğinden yola çıkarak  $\lambda_1$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım. Bunun için

$$(J(k_c) - \lambda_1 I) V_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} j_{11} + in & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} + in \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

eşitliğini sağlayan  $V_1$  vektörünü bulalım. (4.28) eşitliğinden  $(j_{11} + in)v_1 + j_{12}v_2 = 0$  ise  $v_1 = j_{12}v_2$  ve  $v_2 = -j_{11} - in$  alalım. Bu durumda  $j_{21}v_1 + (j_{22} + in)v_2 = 0$  olmalıdır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} j_{21}v_1 + (j_{22} + in)v_2 &= \frac{r_2^2}{\theta} \left( -(1 - k_c) \frac{\theta r_1}{r_2} \right) + (-r_2 + in)(-r_1 k_c (1 - k_c) - in) \\ &= r_1 r_2 (1 - k_c)(k_c - 1) + n^2 + i(r_2 n - r_1 n k_c (1 - k_c)) \end{aligned} \quad (4.29)$$

olup  $n^2 = a_2 = r_1 r_2 (1 - k_c)^2$  olduğundan (4.29) eşitliğininin reel kısmı  $-r_1 r_2 (1 - k_c)^2 + n^2 = 0$  bulunur. Ayrıca

$$k_c(1 - k_c) = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r_1^2 - 4r_1 r_2}}{2r_1} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r_1^2 - 4r_1 r_2}}{2r_1} \right) = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.30)$$

olup (4.29) denkleminin imajiner kısmı  $r_2 n - r_1 n k_c (1 - k_c)$ , (4.30) eşitliğinden sıfıra eşittir. O halde,  $\lambda_1 = -in$  özdeğerine karşılık gelen  $V_1$  özvektörü

$$V_1 = \begin{pmatrix} j_{12} \\ -j_{11} - in \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

olarak elde edilir. Şimdi de  $V_1$  özvektörünün reel ve imajiner kısmına karşılık gelen sütun vektörlerden

$$T = \begin{pmatrix} j_{12} & 0 \\ -j_{11} & -n \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

matrisini inşaa edelim. Burada  $\det(T) = -j_{12}n = \theta r_1^2(1 - k_c)^2 > 0$  olup

$$T^{-1} = -\frac{1}{j_{12}n} \begin{pmatrix} -n & 0 \\ j_{11} & j_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j_{12}} & 0 \\ -\frac{j_{11}}{j_{12}n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$JT = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & 0 \\ -j_{11} & -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j_{12}n \\ j_{21}j_{12} - j_{11}j_{22} & -j_{22}n \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

olup (4.33) ve (4.34) matrislerinden

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} \frac{1}{j_{12}} & 0 \\ -\frac{j_{11}}{j_{12}n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j_{12}n \\ j_{21}j_{12} - j_{11}j_{22} & -j_{22}n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ \frac{j_{22}j_{11} - j_{12}j_{21}}{n} & j_{11} + j_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Dikkat edilirse bu matrisin ikinci satır birinci sütun elemanı

$$\frac{j_{22}j_{11} - j_{12}j_{21}}{n} = \frac{\det J}{n} = \frac{a_2}{n} = \frac{n^2}{n} = n$$

dir. Benzer şekilde ikinci satır ikinci sütun elemanı ise  $j_{11} + j_{22} = izJ = 0$  dır. Dolayısıyla  $T^{-1}JT$  matrisi aşağıda şekilde ifade edilir:

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Şimdi

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

dönüşümünü ele alalım.

$$\begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

olup (4.23) sisteminde (4.37) eşitliği yerine yazılırsa

$$T \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = JT \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(X(t), Y(t), k_c) \\ f_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$



sistemi elde edilir. (4.38) sisteminin her iki tarafı  $T^{-1}$  matrisi ile soldan çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) \\ \tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) \\ \tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X(t), Y(t), k_c) \\ f_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{j_{12}} & 0 \\ -\frac{j_{11}}{j_{12}n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(X(t), Y(t), k_c) \\ f_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{j_{12}} f_1(X(t), Y(t), k_c) \\ -\frac{j_{11}}{j_{12}n} f_1(X(t), Y(t), k_c) - \frac{1}{n} f_2(X(t), Y(t), k_c) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

olup bu matrisi hesaplayalım. Bunun için (4.36) dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümden

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12} & 0 \\ -j_{11} & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12}X(t) \\ -j_{11}X(t) - nY(t) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

olup  $U(t)$  ve  $V(t)$  değişkenlere bağlı yüksek dereceli terimler aşağıdaki kutuda hesaplandığı gibidir:

$$\begin{aligned} U^2(t) &= j_{12}^2 X^2(t) & U^3(t) &= j_{12}^3 X^3(t) \\ V^2(t) &= j_{11}^2 X^2(t) + 2j_{11}nX(t)Y(t) + n^2 Y^2(t) \\ U(t)V(t) &= -j_{11}j_{12}X^2(t) - j_{12}nX(t)Y(t) \\ U^2(t)V(t) &= -j_{11}j_{12}^2 X^3(t) - j_{12}^2 nX^2(t)Y(t) \\ U(t)V^2(t) &= j_{11}^2 j_{12} X^3(t) + 2j_{11}j_{12}nX^2(t)Y(t) + j_{12}n^2 X(t)Y^2(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Buradan (4.42) eşitlikleri ile birlikte

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) &= \frac{1}{j_{12}} f_1(X(t), Y(t), k_c) = \frac{1}{j_{12}} [s_1 k_c^2 U^2(t) - s_2 U(t)V(t) - s_3 k_c^2 U^3(t)] \\
&= \frac{1}{j_{12}} [s_1 k_c^2 j_{12}^2 X^2(t) - s_2 (-j_{11} j_{12} X^2(t) - j_{12} n X(t)Y(t)) - s_3 j_{12}^3 k_c^2 X^3(t)] \\
&= [s_1 j_{12} k_c^2 + s_2 j_{11}] X^2(t) + s_2 n X(t)Y(t) - s_3 j_{12}^2 k_c^2 X^3(t)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

olarak hesaplanır. İfadeyi daha yalın yazmak için

$$\begin{aligned}
t_1 &:= s_1 j_{12} k_c^2 + s_2 j_{11} \\
t_2 &:= s_2 n \\
t_3 &:= -s_3 j_{12}^2 k_c^2
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak tanımlanırsa  $\tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c)$  fonksiyonu (4.44) eşitliklerinden

$$\tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) = t_1 X^2(t) + t_2 X(t)Y(t) + t_3 Y^2(t) \tag{4.45}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) &= -\frac{j_{11}}{j_{12} n} f_1(X(t), Y(t), k_c) - \frac{1}{n} f_2(X(t), Y(t), k_c) \\
&= -\frac{s_1 j_{11} k_c^2}{n j_{12}} U^2(t) + \frac{s_2 j_{11}}{n j_{12}} U(t)V(t) + \frac{s_3 j_{11} k_c^2}{n j_{12}} U^3(t) + \frac{s_4}{(1-k_c)n} U^2(t) \\
&\quad - \frac{s_5}{(1-k_c)n} U(t)V(t) + \frac{s_6}{(1-k_c)n} V^2(t) - \frac{s_7}{(1-k_c)n} U^3(t) \\
&\quad + \frac{s_8}{(1-k_c)^2 n} U^2(t)V(t) - \frac{s_9}{(1-k_c)^2 n} U(t)V^2(t) \\
&= \left[ \frac{s_4 j_{12}^2}{(1-k_c)n} - \frac{s_1 j_{11} j_{12} k_c^2}{n} - \frac{s_2 j_{11}^2}{n} + \frac{s_5 j_{11} j_{12}}{(1-k_c)n} + \frac{s_6 j_{11}^2}{(1-k_c)n} \right] X^2(t) \\
&\quad + \left[ \frac{s_5 j_{12}}{(1-k_c)} - s_2 j_{11} + \frac{2s_6 j_{11}}{(1-k_c)} \right] X(t)Y(t) + \left[ \frac{s_6}{(1-k_c)n} \right] Y^2(t) \\
&\quad + \left[ \frac{s_3 j_{11} j_{12}^2 k_c^2}{n} - \frac{s_7 j_{12}^2}{(1-k_c)n} - \frac{s_8 j_{11} j_{12}^2}{(1-k_c)^2 n} - \frac{s_9 j_{11}^2 j_{12}}{(1-k_c)^2 n} \right] X^3(t) \\
&\quad - \left[ \frac{s_8 j_{12}^2}{(1-k_c)^2} + \frac{2s_9 j_{11} j_{12}}{(1-k_c)^2} \right] X^2(t)Y(t) - \left[ \frac{s_9 j_{12} n}{(1-k_c)^2} \right] X(t)Y^2(t)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

olup

$$\begin{aligned}
l_1 &:= \frac{s_4 j_{12}^2}{(1-k_c)n} - \frac{s_1 j_{11} j_{12} k_c^2}{n} - \frac{s_2 j_{11}^2}{n} + \frac{s_5 j_{11} j_{12}}{(1-k_c)n} + \frac{s_6 j_{11}^2}{(1-k_c)n} \\
l_2 &:= \frac{s_5 j_{12}}{(1-k_c)} - s_2 j_{11} + \frac{2s_6 j_{11}}{(1-k_c)} \\
l_3 &:= \frac{s_6}{(1-k_c)n} \\
l_4 &:= \frac{s_3 j_{11} j_{12}^2 k_c^2}{n} - \frac{s_7 j_{12}^2}{(1-k_c)n} - \frac{s_8 j_{11} j_{12}^2}{(1-k_c)^2 n} - \frac{s_9 j_{11}^2 j_{12}}{(1-k_c)^2 n} \\
l_5 &:= -\frac{s_8 j_{12}^2}{(1-k_c)^2} - \frac{2s_9 j_{11} j_{12}}{(1-k_c)^2} \\
l_6 &:= -\frac{s_9 j_{12} n}{(1-k_c)^2}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

olarak alınırsa (4.46) ve (4.47) denklemlerinden  $\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c)$  fonksiyonu

$$\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) = l_1 X^2(t) + l_2 X(t)Y(t) + l_3 Y^2(t) + l_4 X^3(t) + l_5 X^2(t)Y(t) + l_6 X(t)Y^2(t) \tag{4.48}$$

olarak ifade edilir. Sonuç olarak (4.39) sistemi

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -nY(t) + t_1 X^2(t) + t_2 X(t)Y(t) + t_3 X^3(t) \\ \dot{Y}(t) = nX(t) + l_1 X^2(t) + l_2 X(t)Y(t) + l_3 Y^2(t) + l_4 X^3(t) + l_5 X^2(t)Y(t) + l_6 X(t)Y^2(t) \end{cases} \tag{4.49}$$

sistemi olarak elde edilir. Şimdi de en son elde ettiğimiz (4.49) sistemine

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \tag{4.50}$$

kompleks dönüşümünü uygulayalım. İlk olarak, (4.50) dönüşümünün her iki tarafının zaman değişkenine göre, yani  $t$  değişkenine göre türevini alırsak

$$\begin{aligned}
\dot{Z}(t) &= \dot{X}(t) + i\dot{Y}(t) \\
&= -nY(t) + t_1 X^2(t) + t_2 X(t)Y(t) + t_3 X^3(t) \\
&\quad + i(nX(t) + l_1 X^2(t) + l_2 X(t)Y(t) + l_3 Y^2(t) + l_4 X^3(t) + l_5 X^2(t)Y(t) + l_6 X(t)Y^2(t)) \\
&= in(X(t) + iY(t)) + \tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) + i\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) \\
&= \lambda(k_c)Z(t) + g(Z(t), \bar{Z}(t), k_c)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak elde edilir. Burada  $g(Z(t), \bar{Z}(t), k_c) = \tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) + i\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c)$  olup

fonksiyonun açık halini ifade edelim. Bunun için aşağıdaki eşitlikleri kullanalım.

$$\begin{cases} Z(t) = X(t) + iY(t) \\ \bar{Z}(t) = X(t) - iY(t) \end{cases} \Rightarrow X(t) = \frac{Z(t) + \bar{Z}(t)}{2} \quad \text{ve} \quad Y(t) = i \frac{\bar{Z}(t) - Z(t)}{2} \quad (4.52)$$

olup

$$\begin{aligned} X^2(t) &= \frac{Z^2(t) + 2Z(t)\bar{Z}(t) + \bar{Z}^2(t)}{4} \\ Y^2(t) &= \frac{2Z(t)\bar{Z}(t) - \bar{Z}^2(t) - Z^2(t)}{4} \\ X^3(t) &= \frac{Z^3(t) + 3Z^2(t)\bar{Z}(t) + 3Z(t)\bar{Z}^2(t) + \bar{Z}^3(t)}{8} \\ X(t)Y(t) &= i \frac{\bar{Z}^2(t) - Z^2(t)}{4} \\ X^2(t)Y(t) &= i \frac{\bar{Z}^3(t) + Z(t)\bar{Z}^2(t) - Z^2(t)\bar{Z}(t) - Z^3(t)}{8} \\ X(t)Y^2(t) &= \frac{Z(t)\bar{Z}^2(t) - \bar{Z}^3(t) + Z^2(t)\bar{Z}(t) - Z^3(t)}{8} \end{aligned} \quad (4.53)$$

olarak hesaplanır. Öyleyse, (4.45) ve (4.48) fonksiyonlarında (4.52) ve (4.53) eşitlikleri yerine yazılırsa  $g(Z(t), \bar{Z}(t), k_c)$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} g(Z(t), \bar{Z}(t), k_c) &= \tilde{f}_1(X(t), Y(t), k_c) + i\tilde{f}_2(X(t), Y(t), k_c) \\ &= \left[ \frac{t_1}{4} - i\frac{t_2}{4} + i\frac{l_1}{4} + \frac{l_2}{4} - i\frac{l_3}{4} \right] Z^2(t) \\ &+ \left[ \frac{t_1}{2} + i\frac{l_1}{2} + i\frac{l_3}{2} \right] Z(t)\bar{Z}(t) + \left[ \frac{t_1}{4} + i\frac{t_2}{4} + i\frac{l_1}{4} - \frac{l_2}{4} - i\frac{l_3}{4} \right] \bar{Z}^2(t) \\ &+ \left[ \frac{3t_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} - \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \right] Z(t)\bar{Z}^2(t) + \left[ \frac{3t_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \right] Z^2(t)\bar{Z}(t) \\ &+ \left[ \frac{t_3}{8} + i\frac{l_4}{8} + \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8} \right] Z^3(t) + \left[ \frac{t_3}{8} + i\frac{l_4}{8} - \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8} \right] \bar{Z}^3(t). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Şimdi de kabul edelim ki

$$\begin{aligned}
\frac{g_{20}}{2} &:= \frac{t_1}{4} - i\frac{t_2}{4} + i\frac{l_1}{4} + \frac{l_2}{4} - i\frac{l_3}{4} \\
g_{11} &:= \frac{t_1}{2} + i\frac{l_1}{2} + i\frac{l_3}{2} \\
\frac{g_{02}}{2} &:= \frac{t_1}{4} + i\frac{t_2}{4} + i\frac{l_1}{4} - \frac{l_2}{4} - i\frac{l_3}{4} \\
\frac{g_{12}}{2} &:= \frac{3t_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} - \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{21}}{2} &:= \frac{3t_3}{8} + i\frac{3l_4}{8} + \frac{l_5}{8} + i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{30}}{6} &:= \frac{t_3}{8} + i\frac{l_4}{8} + \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8} \\
\frac{g_{03}}{6} &:= \frac{t_3}{8} + i\frac{l_4}{8} - \frac{l_5}{8} - i\frac{l_6}{8}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olarak tanımlansın. Öyleyse, (4.51) sisteminde (4.54) ve (4.55) eşitliklerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\dot{Z}(t) = \lambda(k_c)Z(t) + \frac{g_{20}}{2}Z^2(t) + g_{11}Z(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}^2(t) + \frac{g_{12}}{2}Z(t)\bar{Z}^2(t) \\
+ \frac{g_{21}}{2}Z^2(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{30}}{6}Z^3(t) + \frac{g_{03}}{6}\bar{Z}^3(t)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

sistemi elde edilir. Dolayısıyla (4.56) sistemini kullanarak Hopf çatallanmanın yön analizini belirleyen  $c_1(k_c)$  Lyapunov katsayısını hesaplayabiliriz. Bu hesaplama için sırasıyla aşağıdaki adımları takip edelim.

**1. Adım:** Biliyoruz ki  $k = k_c$  kritik çatallanma değerinde  $m(k_c) = 0$  ve  $n(k_c) = \sqrt{a_2} > 0$  olmak üzere (4.39) sistemi  $\lambda(k_c) = m(k_c) \mp n(k_c)$  özdeğerine sahiptir. Ayrıca (4.50) dönüşümü ile 2–boyutlu (4.39) sistemi (4.51) ile ifade edilen 1–boyutlu sisteme indirgenmiş ve bu sistem gerekli tanım ve sadeleştirmelerle son olarak (4.56) formunda elde edilmiştir. Dolayısıyla, (4.56) denkleminde  $\lambda(k_c) = in(k_c)$ , kısaca  $\lambda = in$  özdeğerine karşılık gelmektedir. Dikkat edilirse hem  $\lambda$  hem de  $\bar{\lambda} = -in$  özdeğeri sıfırdan farklıdır. Öyleyse, yeterince küçük  $k$  değeri için parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$Z(t) = Q(t) + \frac{h_{20}}{2}Q^2(t) + h_{11}Q(t)\bar{Q}(t) + \frac{h_{02}}{2}\bar{Q}^2(t) \tag{4.57}$$

dönüşümünü ele alalım. Ayrıca kabul edelim ki

$$Q(t) = AZ(t) + BZ^2(t) + CZ(t)\bar{Z}(t) + D\bar{Z}^2(t) + YMT \tag{4.58}$$

formuna sahip olsun. Öyleyse (4.58) eşitliğini (4.57) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
Z(t) &= AZ(t) + BZ^2(t) + CZ(t)\bar{Z}(t) + D\bar{Z}^2(t) + \frac{h_{20}}{2} [A^2Z^2(t) + \dots] \\
&\quad + h_{11} [A^2Z(t)\bar{Z}(t) + \dots] + \frac{h_{02}}{2} [A^2\bar{Z}^2(t) + \dots] \\
&= AZ(t) + \left[ B + \frac{h_{20}}{2}A^2 \right] Z^2(t) + [C + h_{11}A^2] Z(t)\bar{Z}(t) \\
&\quad + \left[ D + \frac{h_{02}}{2}A^2 \right] \bar{Z}^2(t) + YMT
\end{aligned} \tag{4.59}$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.59) eşitliğinin sağlanabilmesi için  $A = 1$ ,  $B = -\frac{h_{20}}{2}$ ,  $C = -h_{11}$  ve  $D = -\frac{h_{02}}{2}$  olmalıdır. Sonuç olarak

$$Q(t) = Z(t) - \frac{h_{20}}{2}Z^2(t) - h_{11}Z(t)\bar{Z}(t) - \frac{h_{02}}{2}\bar{Z}^2(t) + YMT \tag{4.60}$$

olarak ifade edilir. Şimdi de (4.60) denkleminin her iki tarafının zamana göre türevini alalım ve (4.56) ile verilen  $\dot{Z}(t)$  türevini denklemden yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= \dot{Z}(t) - h_{20}Z(t)\dot{Z}(t) - h_{11} \left( \dot{Z}(t)\bar{Z}(t) + Z(t)\dot{\bar{Z}}(t) \right) - h_{02}\bar{Z}(t)\dot{\bar{Z}}(t) + YMT \\
&= \left[ \lambda Z(t) + \frac{g_{20}}{2}Z^2(t) + g_{11}Z(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}^2(t) + \frac{g_{12}}{2}Z(t)\bar{Z}^2(t) + \frac{g_{21}}{2}Z^2(t)\bar{Z}(t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{g_{30}}{6}Z^3(t) + \frac{g_{03}}{6}\bar{Z}^3(t) \right] - h_{20} \left[ \lambda Z^2(t) + \frac{g_{20}}{2}Z^3(t) + g_{11}Z^2(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{02}}{2}Z(t)\bar{Z}^2(t) \dots \right] \\
&\quad - h_{11} \left[ \lambda Z(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{20}}{2}Z^2(t)\bar{Z}(t) + g_{11}Z(t)\bar{Z}^2(t) + \dots \right] \\
&\quad - h_{11} \left[ \bar{\lambda}Z(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{20}}{2}Z(t)\bar{Z}^2(t) + g_{11}Z^2(t)\bar{Z}(t) + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}^3(t) + \dots \right] \\
&\quad - h_{02} \left[ \bar{\lambda}\bar{Z}^2(t) + \frac{g_{20}}{2}\bar{Z}^3(t) + g_{11}Z(t)\bar{Z}^2(t) + \frac{g_{02}}{2}\bar{Z}^2(t)\bar{Z}(t) + \dots \right] \\
&= \lambda Z(t) + \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) Z^2(t) + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) Z(t)\bar{Z}(t) + \left( \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{Z}^2(t) \\
&\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - h_{20} \frac{g_{02}}{2} - h_{11}g_{11} - h_{11} \frac{g_{20}}{2} - h_{02}g_{11} \right) Z(t)\bar{Z}^2(t) \\
&\quad + \left( \frac{g_{21}}{2} - h_{20}g_{11} - h_{11} \frac{g_{20}}{2} - h_{11}g_{11} - h_{02} \frac{g_{02}}{2} \right) Z^2(t)\bar{Z}(t) \\
&\quad + \left( \frac{g_{30}}{6} - h_{20} \frac{g_{20}}{2} - h_{11} \frac{g_{02}}{2} \right) Z^3(t) + \left( \frac{g_{03}}{6} - h_{11} \frac{g_{02}}{2} - h_{02} \frac{g_{20}}{2} \right) \bar{Z}^3(t)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Daha sonra elde ettiğimiz (4.61) denkleminde (4.57) eşitliğini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= \lambda \left[ Q(t) + \frac{h_{20}}{2} Q^2(t) + h_{11} Q(t) \bar{Q}(t) + \frac{h_{02}}{2} \bar{Q}^2(t) \right] \\
&+ \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) \left[ Q(t) + \frac{h_{20}}{2} Q^2(t) + h_{11} Q(t) \bar{Q}(t) + \frac{h_{02}}{2} \bar{Q}^2(t) \right]^2 \\
&+ (g_{11} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{11}) \left[ Q(t) + \frac{h_{20}}{2} Q^2(t) + \dots \right] \left[ \bar{Q}(t) + \frac{h_{20}}{2} \bar{Q}^2(t) + \dots \right] \\
&+ \left( \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \left[ \bar{Q}(t) + \frac{h_{20}}{2} \bar{Q}^2(t) + h_{11} Q(t) \bar{Q}(t) + \frac{h_{02}}{2} Q^2(t) \right]^2 + YMT \\
&= \lambda Q(t) + \frac{g_{20} - \lambda h_{20}}{2} Q^2(t) + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) Q(t) \bar{Q}(t) + \frac{g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}}{2} \bar{Q}^2(t) + YMT
\end{aligned} \tag{4.62}$$

denklemini elde edilir.  $\lambda \neq 0$  ve  $\bar{\lambda} \neq 0$  olup eğer

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}} \quad \text{ve} \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda} \tag{4.63}$$

alınırsa (4.62) denklemini kuadratik terim içermeyen

$$\dot{Q}(t) = \lambda Q(t) + \frac{\tau_{30}}{6} Q^3(t) + \frac{\tau_{12}}{2} Q(t) \bar{Q}^2(t) + \frac{\tau_{21}}{2} Q^2(t) \bar{Q}(t) + \frac{\tau_{03}}{6} \bar{Q}^3(t) \tag{4.64}$$

denklemini olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{30}}{6} &= \frac{g_{30}}{6} - \lambda h_{11} \frac{h_{02}}{2} - h_{20} \frac{g_{20}}{2} - h_{11} \frac{g_{02}}{2} \\
\frac{\tau_{12}}{2} &= 2(\bar{\lambda} - \lambda) h_{02} h_{11} - \lambda h_{11} \left( \frac{h_{20}}{2} + h_{11} \right) + \frac{g_{12}}{2} - h_{20} \frac{g_{02}}{2} - h_{11} \left( g_{11} + \frac{g_{20}}{2} \right) - h_{02} g_{11} \\
\frac{\tau_{21}}{2} &= (\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}^2 - \lambda h_{11} \left( h_{11} + \frac{h_{20}}{2} \right) + \frac{g_{21}}{2} - h_{20} g_{11} - h_{11} \left( g_{11} + \frac{g_{20}}{2} \right) - h_{02} \frac{g_{02}}{2} \\
\frac{\tau_{03}}{6} &= \frac{g_{03}}{6} - \lambda h_{11} \frac{h_{02}}{2} + (\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}^2 - h_{02} \frac{g_{02}}{2} - h_{11} \frac{g_{02}}{2}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

dir.

**2. Adım:** Yeterince küçük  $k$  değeri için parametreye bağlı ve tersi mevcut olan aşağıdaki dönüşümü ele alalım.

$$Q(t) = W(t) + \frac{h_{30}}{6} W^3(t) + \frac{h_{12}}{2} W(t) \bar{W}^2(t) + \frac{h_{21}}{2} W^2(t) \bar{W}(t) + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}^3(t) + YMT. \tag{4.66}$$

Burada kabul edelim ki

$$W(t) = A Q(t) + B Q^3(t) + C Q^2(t) \bar{Q}(t) + D Q(t) \bar{Q}^2(t) + E \bar{Q}^3(t) + YMT \tag{4.67}$$

ile verilsin. Öyleyse (4.67) ile verilen  $W(t)$  fonksiyonunu (4.66) denkleminde yerine

yazarsak;

$$\begin{aligned}
Q(t) &= AQ(t) + BQ^3(t) + CQ^2(t)\bar{Q}(t) + DQ(t)\bar{Q}^2(t) + E\bar{Q}^3(t) + \frac{h_{30}}{6} [A^3Q^3(t) + \dots] \\
&\quad + \frac{h_{21}}{2} [A^3Q^2(t)\bar{Q}(t) + \dots] + \frac{h_{12}}{2} [A^3Q(t)\bar{Q}^2(t) + \dots] + \frac{h_{03}}{6} [A^3\bar{Q}^3(t) + \dots] \\
&= AQ(t) + \left[ B + \frac{h_{30}}{6}A^3 \right] Q^3(t) + \left[ C + \frac{h_{21}}{2}A^3 \right] Q^2(t)\bar{Q}(t) \\
&\quad + \left[ D + \frac{h_{12}}{2}A^3 \right] Q(t)\bar{Q}^2(t) + \left[ E + \frac{h_{03}}{6}A^3 \right] \bar{Q}^3(t)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

denklemini elde edilir. (4.68) denkleminde  $A = 1$ ,  $B = -\frac{h_{30}}{6}$ ,  $C = -\frac{h_{21}}{2}$   
 $D = -\frac{h_{12}}{2}$  ve  $E = -\frac{h_{03}}{6}$  olup  $W(t)$  aşağıdaki şekilde yazılır:

$$W(t) = Q(t) - \frac{h_{30}}{6}Q^3(t) - \frac{h_{21}}{2}Q^2(t)\bar{Q}(t) - \frac{h_{12}}{2}Q(t)\bar{Q}^2(t) - \frac{h_{03}}{6}\bar{Q}^3(t) + YMT \tag{4.69}$$

(4.69) denkleminin her iki tarafının zamana göre türevi alınır ve (4.64) ile ifade edilen  $\dot{Q}(t)$  eşitliği denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= \dot{Q}(t) - \frac{h_{30}}{6}3Q^2(t)\dot{Q}(t) - \frac{h_{21}}{2} \left( 2Q(t)\dot{Q}(t)\bar{Q}(t) + Q^2(t)\dot{\bar{Q}}(t) \right) \\
&\quad - \frac{h_{12}}{2} \left( \dot{Q}(t)\bar{Q}^2(t) + 2Q(t)\bar{Q}(t)\dot{\bar{Q}}(t) \right) - \frac{h_{03}}{6}3\bar{Q}^2(t)\dot{\bar{Q}}(t) + YMT \\
&= \left[ \lambda Q(t) + \frac{\tau_{30}}{6}Q^3(t) + \frac{\tau_{12}}{2}Q(t)\bar{Q}^2(t) + \frac{\tau_{21}}{2}Q^2(t)\bar{Q}(t) + \frac{\tau_{03}}{6}\bar{Q}^3(t) \right] \\
&\quad - \frac{h_{30}}{2} [\lambda Q^3(t) + \dots] - \frac{h_{21}}{2} [(2\lambda + \bar{\lambda})Q^2(t)\bar{Q}(t) + \dots] \\
&\quad - \frac{h_{12}}{2} [(\lambda + 2\bar{\lambda})Q(t)\bar{Q}^2(t) + \dots] \\
&= \lambda Q(t) + \left( \frac{\tau_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) Q^3(t) + \left( \frac{\tau_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) Q^2(t)\bar{Q}(t) \\
&\quad + \left( \frac{\tau_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) Q(t)\bar{Q}^2(t) + \left( \frac{\tau_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \right) \bar{Q}^3(t) + YMT
\end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak elde edilir. Eğer (4.66) ile verilen  $Q(t)$  fonksiyonu (4.70) denkleminde yerine



yazılırsa

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) = & \lambda \left[ W(t) + \frac{h_{30}}{6} W^3(t) + \frac{h_{12}}{2} W(t)\bar{W}^2(t) + \frac{h_{21}}{2} W^2(t)\bar{W}(t) + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}^3(t) \right] \\
& + \left( \frac{\tau_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) \left[ W(t) + \frac{h_{30}}{6} W^3(t) + \dots \right]^3 \\
& + \left( \frac{\tau_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) \left[ W(t) + \frac{h_{30}}{6} W^3(t) + \dots \right]^2 \left[ \bar{W}(t) + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}^3(t) + \dots \right] \\
& + \left( \frac{\tau_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) \left[ W(t) + \frac{h_{30}}{6} W^3(t) + \dots \right] \left[ \bar{W}(t) + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}^3(t) + \dots \right]^2 \\
& + \left( \frac{\tau_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \right) \left[ \bar{W}(t) + \frac{h_{30}}{6} \bar{W}^3(t) + \dots \right]^3 \\
= & \lambda W(t) + \frac{1}{6} (\tau_{30} - 2\lambda h_{30}) W^3(t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) W^2(t)\bar{W}(t) \\
& + \frac{1}{2} (\tau_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) W(t)\bar{W}^2(t) + \frac{1}{6} (\tau_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{W}^3(t) + YMT
\end{aligned} \tag{4.71}$$

denklemini elde edilir. Burada  $\lambda \neq 0$  ve  $\bar{\lambda} \neq 0$  olduğundan eğer

$$h_{30} = \frac{\tau_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{\tau_{12}}{2\bar{\lambda}} \quad \text{ve} \quad h_{03} = \frac{\tau_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

seçilirse  $W^2(t)\bar{W}(t)$  terimi dışındaki kübik terimler yok olur ve (4.71) denklemini

$$\dot{W}(t) = \lambda W(t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) W^2(t)\bar{W}(t) + YMT \tag{4.72}$$

denklemine indirgenir. Dikkat edilirse,  $W^2(t)\bar{W}(t)$  terimini yok edebilmek için  $h_{21} = \frac{\tau_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$  olarak seçilmelidir. Fakat  $\lambda(k_c) = \sqrt{a_2}$  ve  $\bar{\lambda}(k_c) = -\sqrt{a_2}$  olup

$\lambda + \bar{\lambda} = 0$  olacağından bu seçim gerçekleştirilemez. Öyleyse,  $\lambda + \bar{\lambda} = 0$  olacağından (4.72) denkleminde  $W^2(t)\bar{W}(t)$  teriminin katsayısı  $\frac{\tau_{21}}{2}$  olarak bulunur. Bu katsayıyı da  $c_1$  ile ifade edersek (4.72) denklemini

$$\dot{W}(t) = \lambda W(t) + c_1 W^2(t)\bar{W}(t) + YMT \tag{4.73}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi de  $c_1$  katsayısını açıkça hesaplayalım. (4.65)

denkleminde (4.63) eşitlikleri yerine yazılırsa  $c_1$  katsayısı

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\tau_{21}}{2} = (\bar{\lambda} - \lambda)h_{02}^2 - \lambda h_{11} \left( h_{11} + \frac{h_{20}}{2} \right) + \frac{g_{21}}{2} - h_{20}g_{11} - h_{11} \left( g_{11} + \frac{g_{20}}{2} \right) - h_{02} \frac{g_{02}}{2} \\
&= (\bar{\lambda} - \lambda) \frac{g_{02}^2}{(2\bar{\lambda} - \lambda)^2} - \lambda \frac{g_{11}^2}{\bar{\lambda}^2} - \lambda \frac{g_{11}g_{20}}{\bar{\lambda}\lambda} + \frac{g_{21}}{2} - \frac{g_{20}g_{11}}{\lambda} - \frac{g_{20}g_{11}}{\bar{\lambda}} - \frac{g_{11}^2}{\bar{\lambda}} - \frac{g_{02}^2}{2(2\bar{\lambda} - \lambda)} \\
&= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{20}|^2}{2(2\bar{\lambda} - \lambda)} + \frac{g_{21}}{2}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

denklemine eşit olup  $k_c$  kritik çatallanma değerinde  $\lambda(k_c) = in(k_c) = in$  ve  $\bar{\lambda}(k_c) = -in(k_c) = -in$  olduğundan (4.74) denkleminde  $c_1$  Lyapunov katsayısı

$$\begin{aligned}
c_1(k_c) &= \frac{g_{20}g_{11}(2in - in)}{2n^2} + \frac{|g_{11}|^2}{in} + \frac{|g_{20}|^2}{2(2in + in)} + \frac{g_{21}}{2} \\
&= \frac{i}{2n}g_{20}g_{11} - \frac{i}{n}|g_{11}|^2 - \frac{i}{6n}|g_{20}|^2 + \frac{g_{21}}{2}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

olarak elde edilir.

#### 4.4 Nümerik Örnekler

Bu bölümde, Bölüm 4.2 ve Bölüm 4.3'te bulunan teorik sonuçlar nümerik örneklerle desteklenecek ve Allee etkisinin çatallanma dinamiği üzerindeki etkisi gösterilecektir. Bunun için MATLAB ve MatCont programı kullanılarak aşağıdaki simülasyonlar elde edilmiştir.

İlk olarak, Allee etkisinin (4.1) sisteminin kararlılık yapısını nasıl değiştirdiğini gözlemleyebilmek için Baydemir ve diğ. (2020) ele aldığı parametre değerleri baz alınarak aşağıdaki örnek sistemi ele alalım.

$r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.08$ ,  $\epsilon = 0.03$  ve  $\theta = 0.05$  parametre değerlerinde Allee katsayısı  $\beta = k \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2} \cong 10.42k$  olup (4.1) sistemi aşağıda formda elde edilir:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = 0.5N(t) \frac{N(t)}{N(t) + \beta} - 0.03P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = 0.08P(t) - 0.05 \frac{P^2(t)}{N(t)}. \end{cases} \tag{4.76}$$

Burada  $r_1 = 0.5 > 4r_2 = 0.32$  gerçekleşip  $k_1 = \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} = 0.2$  ve

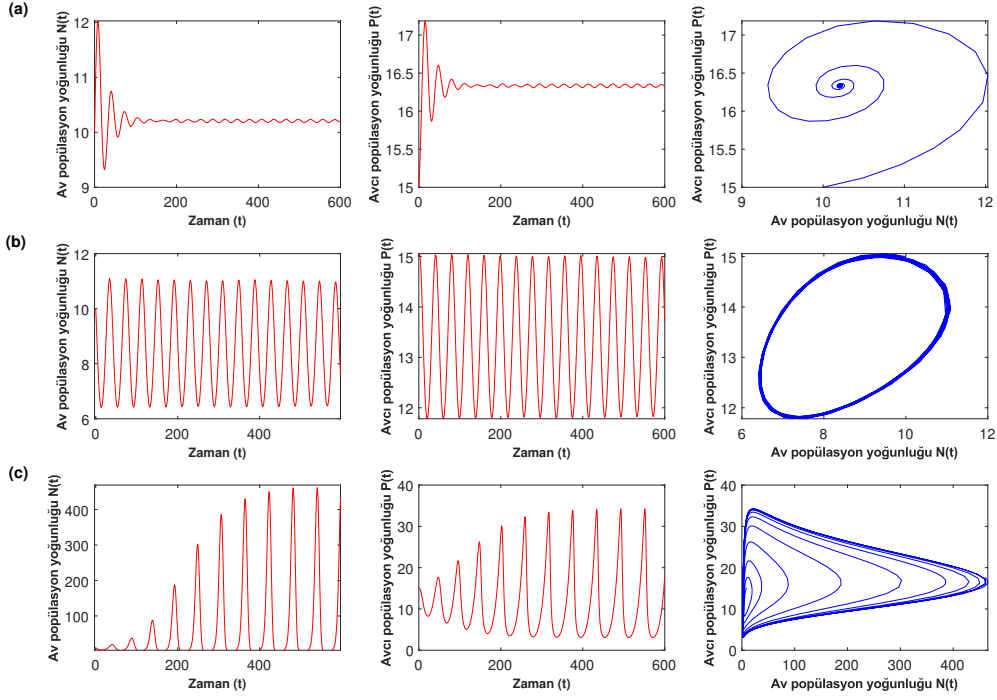
Çizelge 4.1: Seçilen  $k$  değerlerine karşılık hesaplanan Allee sabiti ve (4.76) sisteminin denge noktası

$k$	Allee Sabiti $\beta$	Denge Noktası $(\bar{N}, \bar{P})$
$k = 0.02$	$\beta = 0.2083$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (10.2083, 16.3333)$
$k = 0.2$	$\beta = 2.0833$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (8.3333, 13.3333)$
$k = 0.3$	$\beta = 3.1250$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (7.2917, 11.6667)$
$k = 0.7$	$\beta = 7.2917$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (3.1250, 5.0000)$
$k = 0.8$	$\beta = 8.3333$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (2.0833, 3.3333)$
$k = 0.9$	$\beta = 9.3750$	$(\bar{N}, \bar{P}) = (1.0417, 1.6667)$

$k_2 = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} = 0.8$  olarak bulunur. Dolayısıyla Teorem 4.1 gereğince  $k \in (0, 0.2)$  veya  $k \in (0.8, 1)$  iken (4.76) sisteminin denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması beklenir. Ayrıca Teorem 4.2 den  $k = k_1 = 0.2$  ve  $k = k_2 = 0.8$  değerinde sistemin karakteristik denkleminin sırf sanal kök çiftine sahip olması nedeni ile denge noktasının kararlılık yapısının değişeceğini ve Hopf çatallanmanın ortaya çıkacağını söyleyebiliriz. Öyleyse,  $k_1$  ve  $k_2$  (4.76) sisteminin kritik çatallanma değeridir.

Dikkat edilirse,  $r_1, r_2, \epsilon$  ve  $\theta$  parametre değerleri sabit olmak üzere (4.76) sisteminin denge noktası  $(\bar{N}, \bar{P}) = \left( (1-k) \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}, (1-k) \frac{r_1}{\epsilon} \right)$ ,  $k$  parametresine bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Ayrıca  $k$  değeri arttıkça (buna bağlı olarak Allee sabiti arttıkça) denge noktası azalmaktadır. Çizelge 1’de bazı  $k$  değerlerine karşılık gelen  $\beta$  değeri ile denge noktasına yer verilmiştir. Şekil 4.1 (a)’da  $(N(0), P(0)) = (10, 15)$  başlangıç değerindeki popülasyon için  $k = 0.02$  olarak, yani  $k_1 = 0.2$  kritik çatallanma değerinden küçük seçilmiş ve sırasıyla av ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği ile sistemin faz portetine yer verilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere av ve avcı popülasyonu salınım yaparak  $(\bar{N}, \bar{P}) = (10.2083, 16.3333)$  denge değerine yaklaşır.

Şekil 4.1 (b)’de başlangıç koşulları sabit tutulmuş ve  $k = 0.2$  için periyodik çözümlerin varlığı gösterilmiştir. Şekil 4.1 (c) ise bize  $k$  değerinin  $k_1$  kritik çatallanma değerinden



Şekil 4.1: (a)  $k = 0.02$ , (b)  $k = 0.2$  ve (c)  $k = 0.3$  iken av popülasyonun zamana göre değişim grafiği solda, avcı popülasyonun zamana göre değişim grafiği ortada, sistemin faz portresi ise sağda gösterilmiştir. Burada av ve avcı popülasyonun başlangıç değeri sırasıyla  $N(0) = 10$  ve  $P(0) = 15$  dir.

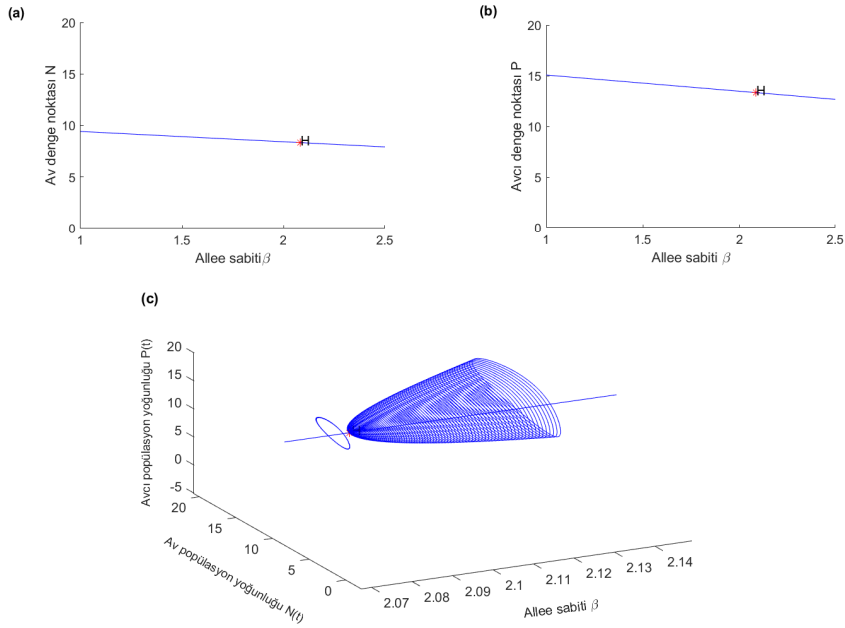
büyük olacak şekilde,  $k = 0.3$  olarak, alınması sonucunda denge noktasının kararsız olduğunu göstermektedir.

Çizelge 4.1'den de görüldüğü üzere  $k_1 = 0.2$  kritik çatallanma değeri için Allee sabiti  $\beta = 2.0833$ , denge noktası ise  $(\bar{N}, \bar{P}) = (8.3333, 13.3333)$  olarak hesaplanmaktadır. Bu kritik Allee değerinde (4.76) sistemi  $\lambda_{1,2} = m(k_1) \mp in(k_1) = \mp 0.16i$  sıfır sanal özdeğer çiftine sahiptir. Şekil 4.2 (a) ve (b) de Allee sabiti artarken denge durumundaki av ve avcı sayısındaki azalış gösterilmiş ve Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı Allee değeri "H" noktası olarak işaretlenmiştir. Bunların yanı sıra, ekte ifade edilen Hopf Çatallanma Teoreminde yer alan formüller gereğince Hopf çatallanmanın kararlılığını, yönünü ve periyodunu veren katsayılar aşağıdaki şekilde hesaplanır:

- $c_1(k_1) = -0.0011 - 0.0003i$
- $Re(c_1(k_1)) = -0.0011 < 0$
- $m'(k_1) = 0.15 \neq 0$
- $\alpha(k_1) = -\frac{Re(c_1(k_1))}{m'(k_1)} = 0.0075 > 0$

- $n'(k_1) = -0.2$
- $\tilde{T} = -\frac{Im(c_1(k_1)) + \alpha(k_1)n'(k_1)}{n(k_1)} = 0.0114 > 0.$

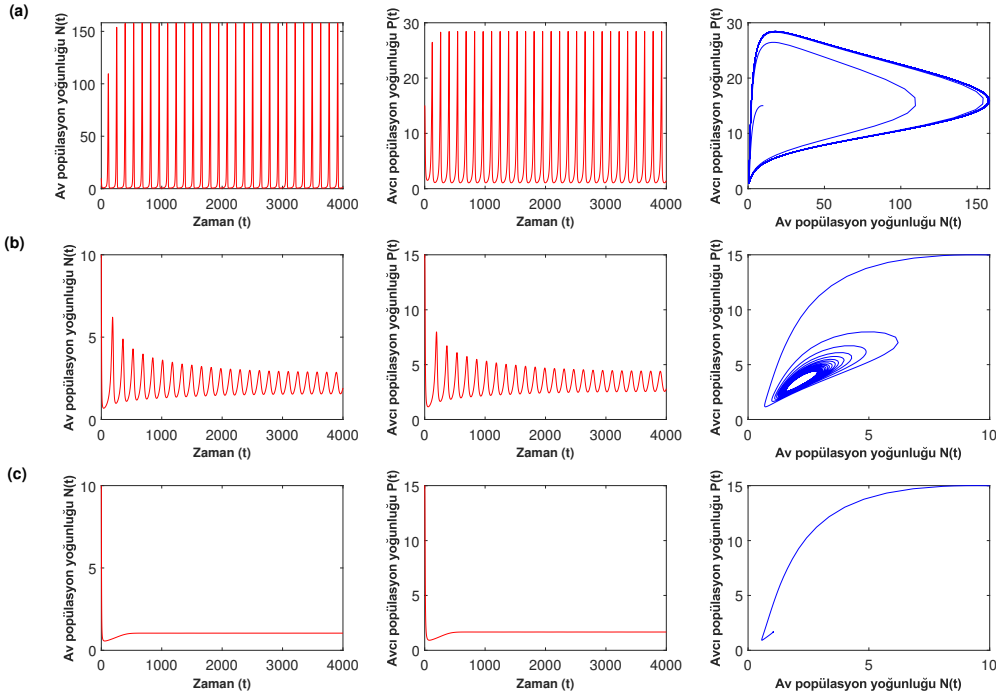
Burada  $m'(k_1) > 0$  ve  $\alpha(k_1) > 0$  olduğundan periyodik çözümler çatallanma değerinden sonra ortaya çıkar, dolayısıyla Süperkritik Hopf Çatallanma mevcuttur.  $Re(c_1(k_1)) < 0$  olduğu için bu periyodik çözümler kararlıdır. Ayrıca  $\tilde{T} > 0$  olduğundan periyodik çözümlerin periyodu çatallanma değerinden uzaklaştıkça artar. Şekil 4.2 (c) bahsi geçen Hopf çatallanma diyagramı gösterilmiştir. Şimdi de aynı



Şekil 4.2: (a) ve (b) Allee sabiti  $\beta$  değeri  $\beta = 1$ 'den  $\beta = 2.5$ 'e kadar artarken denge noktasındaki av ve avcı sayısını göstermektedir. Burada H noktası Hopf çatallanma noktasıdır.  $(\beta, N, P)$  uzayında  $\beta$  değeri artarken ortaya çıkan limit döngüleri şekil (c) de gösterildiği gibidir.

parametre değerlerinde ve başlangıç koşullarında  $k_1$  çatallanma değerinden büyük  $k$  değerleri için (4.76) sisteminin çözüm grafiklerinin ve av-avcı faz portresinin yer aldığı Şekil 4.3'ü inceleyelim. (a)'dan  $k = 0.7 < k_2 = 0.8$  için  $(\bar{N}, \bar{P}) = (3.1250, 5.0000)$  denge noktasının kararsız olduğu, Şekil 4.3 (b)'de ise  $k_2$  çatallanma değerinde  $(\bar{N}, \bar{P}) = (2.0833, 3.3333)$  denge noktası civarında çatallanan periyodik çözümlerin mevcut olduğu görülmektedir. Şekil 4.3 (c)'den de görüldüğü üzere  $k = 0.9 > k_2$  seçilmesi halinde  $(\bar{N}, \bar{P}) = (1.0417, 1.6667)$  denge noktası kararlı olmaktadır. Dolayısıyla  $k_2$  kritik çatallanma değerinde Hopf çatallanma ortaya çıkmaktadır. Gerçekten de,  $k = k_2 = 0.8$  için (4.76) sisteminin özdeğerleri  $\lambda_{1,2} = m(k_2) \mp in(k_2) = \mp 0.04i$  formundadır. Benzer şekilde  $k_2$  çatallanma değeri için Hopf çatallanmanın kararlılığını, yönünü ve periyodunu veren katsayılar aşağıdaki

şekilde hesaplanmıştır.



Şekil 4.3: (a)  $k = 0.7$ , (b)  $k = 0.8$  ve (c)  $k = 0.9$  iken  $N(0) = 10$  ve  $P(0) = 15$  başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ve av-avcı faz portresi sırasıyla şekilde gösterildiği gibidir.

- $c_1(k_2) = 0.0139 - 1.4367i$
- $Re(c_1(k_2)) = 0.0139 > 0$
- $m'(k_2) = -0.15 \neq 0$
- $\alpha(k_2) = -\frac{Re(c_1(k_2))}{m'(k_2)} = 0.0925 > 0$
- $n'(k_2) = -0.2$
- $\tilde{T} = -\frac{Im(c_1(k_2)) + \alpha(k_2)n'(k_2)}{n(k_2)} = -35.4544 < 0.$

Yukarıdaki  $k_2$  kritik çatallanma değerinde hesaplanan değerlere göre  $m'(k_2) < 0$  ve  $\alpha(k_2) > 0$  olup dördüncü durum söz konusudur.  $Re(c_1(k_2)) > 0$  olduğu için kararsız periyodik çözümler görülür. Ayrıca  $\tilde{T} - 35.4544 < 0$  olup Şekil 4.3'den de görüldüğü üzere periyodik çözümler azalan bir periyotla kararsızdır.

## 5. DUYARLILIK ANALİZİ

Av-avcı popülasyon modelinde türlerin birbiri ile etkileşimi, zamana göre değişimi modeli oluşturan denklemlerin parametrelerine bağlıdır. Keyfi seçilen parametre değerleri için av ve avcı popülasyon dinamiğindeki değişiklikleri analiz edebiliriz. Fakat popülasyon büyüklüğünün parametrelerdeki değişikliklere nasıl tepki verdiğini bilmek ele alınan modelin gerçek yaşam problemlerine uygulanabilmesi açısından oldukça önemlidir.

Bölüm 4'te (4.1) sisteminin kararlılık ve çatallanma analizi gerçekleştirilmiş, sistem dinamiğinin Allee katsayısı  $\beta$  değerini oluşturan  $k$  parametresine bağlı olduğu analitik olarak ispatlanmıştır. Çalışmanın devamında modeli oluşturan  $r_1, r_2, \epsilon$  ve  $\theta$  parametreleri sabit olmak üzere  $k$  parametresi değiştirilmiş ve farklı  $k$  değerlerine göre sistemin çözüm grafiklerine yer verilmiştir.

Bu bölümde (4.1) sisteminin dinamiğinin değiştiği ve çatallanmanın ortaya çıktığı  $k_1$  ve  $k_2$  değerlerinin, bu değerleri oluşturan  $r_1$  ve  $r_2$  parametrelerine göre ne kadar hassas olduğu araştırılacaktır. Biliyoruz ki  $Q$  parametreye bağlı bir çıktı fonksiyonu ve  $q$  da  $Q$ 'nun bir girdi parametresi olmak üzere bu girdi parametresine göre  $Q$  çıktı miktarındaki değişiklik, bu miktarın parametreye göre türevi ile ölçülür.

**Tanım 5.1.** *Herhangi bir  $Q$  niceliğinin bir  $q$  parametresine göre duyarlılığı*

$$\Gamma_Q^q = \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (5.1)$$

*oranı ile hesaplanır (Martcheva, 2015).*

Tanım 5.1,  $Q$  ve  $q$  değerlerinin büyüklüğüne bağlı olduğundan  $q$  parametresindeki yüzdelik değişime göre  $Q$  miktarındaki yüzdelik değişimi veren aşağıdaki esneklik tanımını baz almak daha doğru olacaktır.

**Tanım 5.2.** *Herhangi bir  $Q$  niceliğinin bir  $q$  parametresine göre esnekliği*

$$E_Q^q = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{q}{Q} \quad (5.2)$$

*ile tanımlanır (Martcheva, 2015).*

Şimdi  $k_1$  ve  $k_2$  kritik değerlerini tekrar ele alalım:

$$k_1 = \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} = \frac{1}{2} - \frac{(r_1^2 - 4r_1r_2)^{1/2}}{2r_1}$$

$$k_2 = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1} = \frac{1}{2} + \frac{(r_1^2 - 4r_1r_2)^{1/2}}{2r_1}.$$

Buradan  $r_1 > 4r_2$  iken aşağıdaki türevleri hesaplayabiliriz:

$$\frac{\partial k_1}{\partial r_1} = -\frac{\frac{1}{2}(r_1^2 - 4r_1r_2)^{-1/2}(2r_1 - 4r_2)2r_1 - 2(r_1^2 - 4r_1r_2)^{1/2}}{4r_1^2} = -\frac{r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} < 0$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial r_2} = -\frac{1}{2r_1} \frac{1}{2}(r_1^2 - 4r_1r_2)^{-1/2}(-4r_1) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} > 0$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial r_1} = \frac{\frac{1}{2}(r_1^2 - 4r_1r_2)^{-1/2}(2r_1 - 4r_2)2r_1 - 2(r_1^2 - 4r_1r_2)^{1/2}}{4r_1^2} = \frac{r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} > 0$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial r_2} = \frac{1}{2r_1} \frac{1}{2}(r_1^2 - 4r_1r_2)^{-1/2}(-4r_1) = -\frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} < 0.$$
(5.3)

Öyleyse Tanım 5.2 kullanılarak,  $k_1$  ve  $k_2$  kritik çatallanma değerlerinin  $r_1$  ve  $r_2$  parametrelerine göre esnekliğini hesaplayalım.

$$\bullet E_{k_1}^{r_1} = \frac{\partial k_1}{\partial r_1} \frac{r_1}{k_1} = \frac{-r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} \frac{r_1}{\frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1}} = -\frac{2r_1r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2} - (r_1^2 - 4r_1r_2)}$$

$$\bullet E_{k_1}^{r_2} = \frac{\partial k_1}{\partial r_2} \frac{r_2}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} \frac{r_2}{\frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1}} = \frac{2r_1r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2} - (r_1^2 - 4r_1r_2)}$$

$$\bullet E_{k_2}^{r_1} = \frac{\partial k_2}{\partial r_1} \frac{r_1}{k_2} = \frac{r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} \frac{r_1}{\frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1}} = \frac{2r_1r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2} + (r_1^2 - 4r_1r_2)}$$

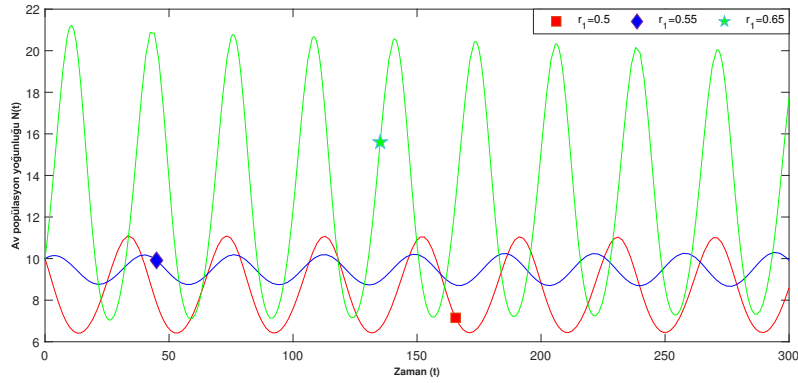
$$\bullet E_{k_2}^{r_2} = \frac{\partial k_2}{\partial r_2} \frac{r_2}{k_2} = -\frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}} \frac{r_2}{\frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2}}{2r_1}} = -\frac{2r_1r_2}{r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_1r_2} + (r_1^2 - 4r_1r_2)}.$$
(5.4)

Hipotezden biliyoruz ki  $k_1, k_2 \in (0, 1)$  ve  $r_1, r_2 > 0$  dir. Öyleyse (5.4)'te hesaplanan esneklik formüllerinin işareti (5.3) eşitlikleri ile verilen kısmi türevler tarafından belirlenir. Böylelikle aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

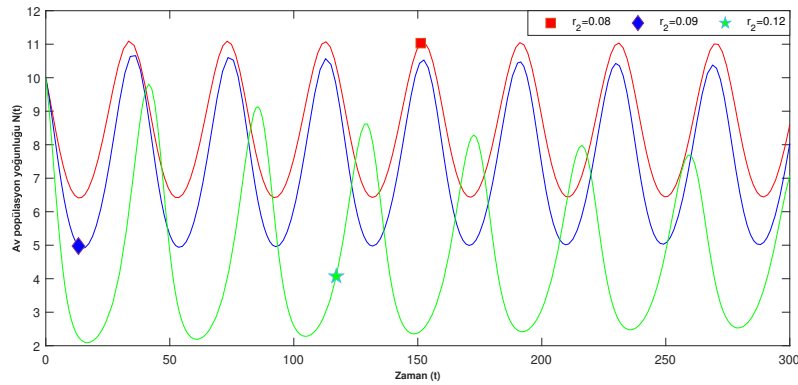


**Sonuç 5.1.**  $k_1$  kritik çatallanma değerininin  $r_1$  parametresine göre esnekliği  $E_{k_1}^{r_1}$  ile  $k_2$  kritik çatallanma değerininin  $r_2$  parametresine göre esnekliği  $E_{k_2}^{r_2}$  **daima negatif** olup,  $k_1$  değerininin  $r_2$  parametresine göre esnekliği  $E_{k_1}^{r_2}$  ile  $k_2$  değerininin  $r_1$  parametresine göre esnekliği  $E_{k_2}^{r_1}$  **daima pozitif** tir.

Sonuç 5.1'e göre  $E_{k_1}^{r_1} < 0$  olduğundan, av popülasyonunun büyüme oranını ifade eden  $r_1$ 'deki artış  $k_1$ 'i yani Allee etkisini azaltacaktır. Gerçekten  $r_1$ 'deki artış av popülasyonunun doğum oranını dolayısı ile eş bulma oranını arttıracak bu ise Allee etkisini azaltacaktır.



Şekil 5.1:  $r_2 = 0.08$ ,  $\epsilon = 0.03$ ,  $\theta = 0.05$  ve  $k = k_1$  iken  $N(0) = 10$  başlangıç değerine sahip av popülasyonu çözüm grafiği  $r_1 = 0.5$  (kare),  $r_1 = 0.55$  (karo) ve  $r_1 = 0.65$  (yıldız) değerleri için elde edilmiştir.

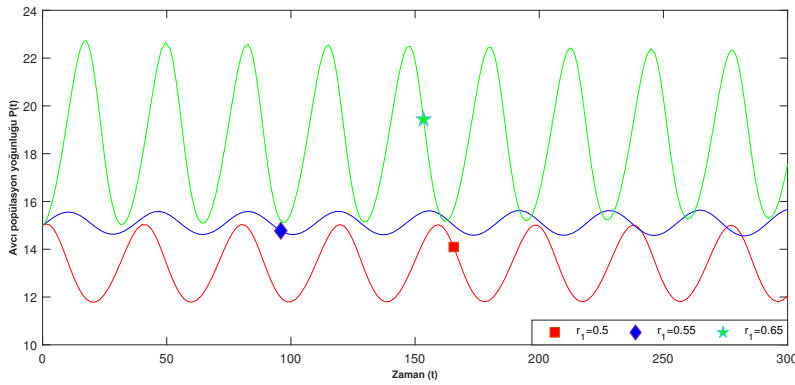


Şekil 5.2:  $r_1 = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.03$ ,  $\theta = 0.05$  ve  $k = k_1$  iken  $N(0) = 10$  başlangıç değerine sahip av popülasyonu çözüm grafiği  $r_2 = 0.08$  (kare),  $r_2 = 0.09$  (karo) ve  $r_2 = 0.12$  (yıldız) değerleri için elde edilmiştir.

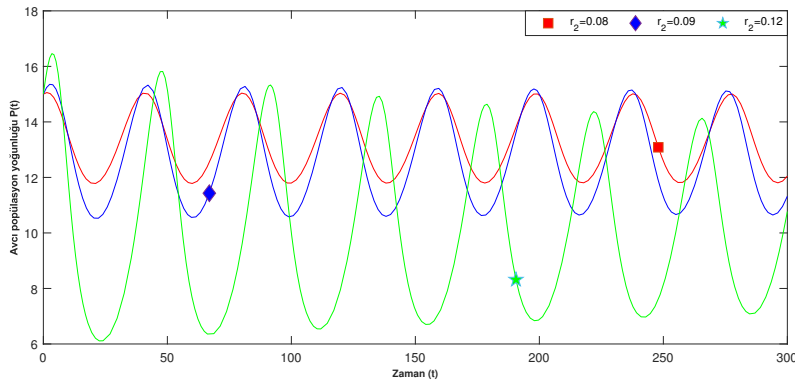
Şekil 5.1'de  $r_2, \epsilon, \theta$  değerleri sabit olmak üzere farklı  $r_1$  değerleri için  $k = k_1$  durumunda (periyodik çözümlerin mevcut olduğu) av popülasyon yoğunluğunun değişim grafiğine yer verilmiştir. Burada  $r_1$  deki artış ile Allee etkisindeki azalış nümerik olarak desteklenmektedir.

Tersine  $E_{k_1}^{r_2} > 0$  olduğundan avcı popülasyonun büyüme oranını ifade eden  $r_2$ 'deki artış avcı popülasyon sayısını arttıracak, bu ise av popülasyon sayısını azaltıp avın eş bulma olasılığını azaltacaktır. Dolayısıyla Allee etkisi artacaktır (Bakınız Şekil 5.2).

$r_1$  ve  $r_2$  büyüme oranlarındaki artışın avcı popülasyonundaki değişim ise sırasıyla Şekil 5.3 ve 5.4'te gösterilmiştir. Dikkat edilirse yapılan duyarlılık analizinde diğer



Şekil 5.3:  $r_2 = 0.08, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$  ve  $k = k_1$  iken  $P(0) = 15$  başlangıç değerine sahip avcı popülasyonu çözüm grafiği  $r_1 = 0.5$  (kare),  $r_1 = 0.55$  (karo) ve  $r_1 = 0.65$  (yıldız) değerleri için elde edilmiştir.



Şekil 5.4:  $r_1 = 0.5, \epsilon = 0.03, \theta = 0.05$  ve  $k = k_1$  iken  $P(0) = 15$  başlangıç değerine sahip avcı popülasyonu çözüm grafiği  $r_2 = 0.08$  (kare),  $r_2 = 0.09$  (karo) ve  $r_2 = 0.12$  (yıldız) değerleri için elde edilmiştir.

parametre değerleri sabit olmak üzere tek bir parametredeki değişikliğin sistem çözümüne etkisi araştırılmıştır. Peki tüm parametre değerleri değişirken av ve avcı popülasyonun zaman içindeki değişiminde hangi parametre daha etkili olur? Bu

Çizelge 5.1: (4.1) sisteminde yer alan parametre değerleri için alt ve üst sınırlar

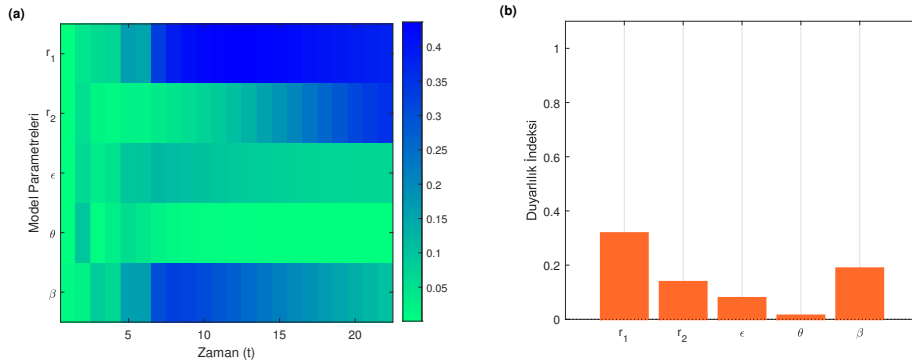
	$r_1$	$r_2$	$\epsilon$	$\theta$	$\beta$
<i>Min</i>	0.5	0.08	0.03	0.5	0.1
<i>Max</i>	0.8	0.12	0.04	0.6	10

Çizelge 5.2: (4.1) sisteminde yer alan parametre değerleri için alt ve üst sınırlar

	$r_1$	$r_2$	$\epsilon$	$\theta$	$\beta$
<i>Min</i>	0.375	0.08	0.03	0.5	0.1
<i>Max</i>	0.4	0.12	0.04	0.6	10

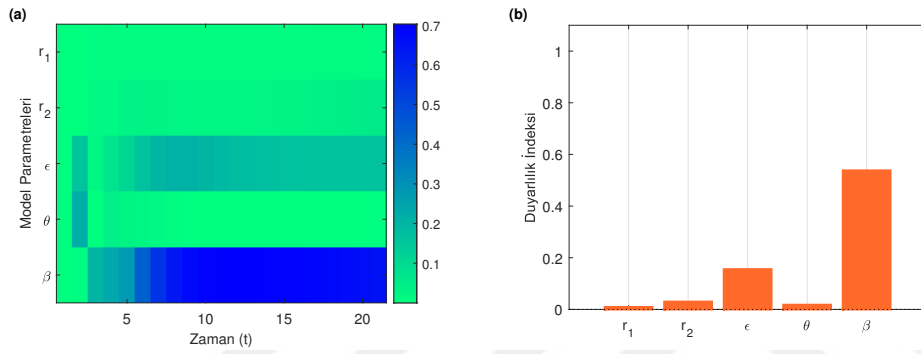
soruya cevap verebilmek adına Matlab SAFE (Sensitivity Analysis For Everybody) programının FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) metodu kullanılmıştır (Pianosi, 2015).

Burada parametre değerlerinin değişimi için Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de verilen aralıklar baz alınarak model parametrelerin duyarlılık (hassasiyet) indeksi hesaplanmış ve sonuçlar nümerik olarak Şekil 5.5 ile Şekil 5.6’da gösterilmiştir. Burada sırasıyla parametrelerin zamana bağlı duyarlılık indeksi (parametrelerin model çıktısı yani sistemin çözümünün zaman içindeki değişkenliği üzerindeki etkisi) ile birlikte duyarlılık indeksi bar grafiğine (her bir parametrenin sistemin çözümüne bireysel katkısı) yer verilmiştir. Şekil 5.5’ten görüldüğü üzere parametre değerleri sistemin kararlılık bölgesinde kalacak şekilde değiştiğinde (4.1) sistemi için en etkili parametre avın büyüme oranını gösteren  $r_1$  parametresidir.  $\beta = k \frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}$  olduğundan  $r_1$  ve  $r_2$  parametresindeki değişiklikler  $\beta$  parametresini de etkiler. Dolayısıyla, (4.1) sisteminin dinamiğinin bu üç parametredeki değişikliklere karşı daha hassas olması doğaldır.



Şekil 5.5: (a) Çizelge 5.1’de yer alan parametre aralıkları için (4.1) sistemine ait her bir parametrenin zaman bağlı duyarlılık indeksi (b) Duyarlılık indeksi bar grafiği.

Peki sistem kararlı iken av popülasyonu yeterince büyüyemez ise ne olur? Çizelge 5.2’de avın büyüme oranı  $r_1$  düşürülmüş ve aralığı kısıtlanmıştır. Bu değerler için duyarlılık indeksi grafiği Şekil 5.6’da verilmiştir. Burada Allee etkisi  $\beta$  nın duyarlılık indeksi daha yüksektir. Biyolojik açıdan yorumlamak gerekirse; eğer av popülasyonu yeterli derecede büyüme oranına sahip değilse (yani popülasyon eş bulmada ve üremede çok zorlanıyorsa) veya av popülasyonu yavaş büyüyorsa avın üreme oranı çok düşer, dolayısıyla Allee etkisi o türü yok etmeye doğru götürür. Bu durumda Allee parametresi sistemin dinamiğinde diğer parametrelere göre daha çok etkilidir. Tersine, eğer av popülasyonu yeterince mevcut ve üreme oranı çok artmışsa, eş bulmada zorluk çekmiyorsa Allee etkisinin düşmesini bekleriz. Bu ise Şekil 5.5 ile örtüşür.



Şekil 5.6: (a) Çizelge 5.2’de yer alan parametre aralıkları için (4.1) sistemine ait her bir parametrenin zaman bağı duyarlılık indeksi (b) Duyarlılık indeksi bar grafiği.

## 6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bilindiği üzere insanlar karşılaştıkları doğa olaylarını açıklayabilmek için bilime dayalı birçok çalışma yapmış, matematiksel modelleme teknikleri ile de doğa olaylarını anlamaya ve açıklamaya çalışmıştır. Bu şekilde oluşturulan biyolojik modellerden biri de popülasyon modelidir. Popülasyon modelleri aynı çevreyi paylaşan iki veya daha fazla biyolojik tür arasındaki etkileşimi içermektedir. İki türü içeren av-avcı sistemini ele alırsak avcı olarak adlandırılan tür av olarak adlandırılan türü yiyerek hayatta kalır. Av popülasyonu ise ortamdaki diğer besinlerden beslenir.

Av-avcı modellerinin biyoloji ve ekolojiye olan katkılarının yanı sıra mühendislik, ekonomi vb. çalışma alanlarındaki uygulamalarını da görebiliriz. Av-avcı modelleri Lotka (1920) ve Volterra (1926)'nın klasik av-avcı modelinde olduğu gibi ilk başta basit terimlerle ve değişkenlerle oluşturulur. Daha sonra modeli iyileştirmek ve gerçek hayat problemine daha iyi bir yaklaşım yapabilmek için modele yeni terimler ve değişkenler eklenir. Elde edilen modeller bağımlı ve bağımsız değişkenlerin yanı sıra Allee fonksiyonu gibi bu değişkenlere ve parametreye bağlı fonksiyonlar da içerebilirler. Allee etkisi, bir popülasyondaki birey sayısı ile bireylerin yaşamlarını sürdürdükleri ortam koşullarına uyumları arasındaki pozitif ilişki olarak tanımlanır. Popülasyonun yaşam alanında ne kadar çok birey varsa (belirli bir taşıma kapasitesine kadar) popülasyonun devamlılığı o kadar başarılı olur.

Klasik popülasyon dinamiği görüşüne göre bir popülasyon küçükse veya düşük yoğunlukta ise popülasyondaki her bir birey daha fazla kaynak kullanabileceğinden popülasyon bir süre sonra orta yoğunlukta olacaktır. Fakat bu görüşte tür içi dayanışma göz ardı edilmektedir. Pek çok türün bireyleri işbirliği yaparlar: avlamak veya avcılarından kurtulmak için ortak stratejiler kullanırlar, birlikte yiyecek ararlar, elverişsiz ortam koşullarından kurtulmak için güçlerini birleştirirler, aynı yerde ve zamanda eş ararlar. Popülasyonun düşük yoğunlukta olması türler için kaynak kullanımını açısından faydalı görünse de aynı türden olan bireylerin topluluk dayanışmasının getirdiği fayda daha fazla olduğunda düşük popülasyon yoğunluğu bireylerin üreme veya hayatta kalma ihtimallerini düşürecektir. Dolayısıyla türün çevreye uyumu azalacaktır. Sonuç olarak popülasyon yoğunluğu ile uyum ilişkili olup popülasyon yoğunluğu ne kadar düşükse uyum da o kadar az olacaktır. Bu durum özünde Allee etkisidir.

Popülasyonda, birey sayısı azaldıkça doğum oranı azalacak ve daha az genç birey üreyecektir. Bu durum popülasyon yok olana kadar devam edecektir. Şimdi de bir türün avcılardan korunmak veya besin bulabilmek için gerekli minimum sayıda bireye sahip olduğunu ve bu birey sayısı ile yaşama ihtimallerinin yüksek olduğunu kabul edelim. Eğer belirtilen bu minimum birey sayısından daha az birey mevcut olursa, ortamda bulunan bireylerin yaşama şansı düşer ve birey sayısı popülasyon yok olana kadar azalır. Bu iki durum Allee etkisinin birer örneği olup bu örneklerin varyantlarına dayanan Allee etkileri tanımlanabilir.

Bu tezde, av popülasyonunun eş bulma Allee etkisi ( $\beta$  Allee sabiti) içeren Leslie tipi ayrık av-avcı modeli ile sürekli av-avcı modeli ele alınmış ve Allee etkisinin iki sistemin dinamiğinde meydana getirdiği değişiklikler analiz edilmiştir. Bu kapsamda Bölüm 2’de bir dinamik sistemin denge noktasının lokal kararlı olabilmesi için gerekli şartları belirleyen temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca çatallanma teorisi kullanılarak ayrık sistemler için Flip ve Neimark-Sacker çatallanma, sürekli sistemler için ise Hopf çatallanma analizleri yapılmıştır. Flip çatallanma sistemin denge noktasının kararlılık yapısı değişirken kaotik yapıların görüldüğü, Neimark-Sacker çatallanma ve Hopf çatallanma ise değişen kararlılık durumunda periyodik çözümlerin ortaya çıktığı veya kaybolduğu bir çatallanma çeşididir.

Bölüm 3’te ilk olarak tez çalışması kapsamında ele alınan (3.3) (ayrık av-avcı) sisteminin pozitif denge noktası bulunmuştur. Daha sonra bu denge noktasının kararlı olabilmesi için gerekli şartlar Lemma 3.1’in 1. maddesinin sağlanması sonucunda Sonuç 3.1 ile belirlenmiştir. Burada Allee sabiti  $\beta$ ’nın değeri arttıkça, yani av popülasyonunun eş bulma oranı dolayısıyla üreme oranı azaldıkça av popülasyonu ve buna bağlı olarak avcı popülasyonun azaldığı, bir başka ifadeyle, sistem popülasyonun daha düşük değerlerinde dengeye ulaşırken, başlangıç popülasyonun denge değerlerine ulaşma süresinin arttığı gözlenmiştir (Bakınız Şekil 3.1 ve Şekil 3.2). Çalışmanın devamında kararlılık bölgesi dışında çatallanmaların mevcut olduğu (kaotik yapılar) gözlenmiş ve Lemma 3.1’in 2. ve 3. maddesi baz alınarak (3.3) sistemin denge noktasında Flip ve Neimark-Sacker çatallanmanın görülebilmesi için gerekli şartlar belirlenmiştir. Burada  $\delta$  ayırıklaştırma adımı çatallanma parametresi olarak ele alınmıştır. Daha sonra bulunan teorik sonuçları nümerik örneklerle desteklemek amaçlı Allee etkisi içeren ve içermeyen iki örnek model ele alınmıştır. Şekil 3.3’ten de görüldüğü üzere Allee etkisi içermeyen model periyodik çözümlere sahip iken Allee etkisi dinamik yapıyı bozarak görünümü farklı olan bir çekicinin oluşmasına neden olmuştur. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 ise Allee etkisi altında iki türün birbiri ile etkileşiminin geciktiğini göstermektedir.

(4.1) ile ifade edilen Leslie tipi sürekli av-avcı modelinde Allee etkisi Bölüm 4’te incelenmiştir. Analize sistemin denge noktaları bulunarak başlanmıştır. Denge noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli şartlar Teorem 4.1 ile belirlenmiştir. Sistemin kararlılığı Allee Sabiti  $\beta$ ’yı oluşturan  $k$  parametresine bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Teorem 4.2 ile (4.1) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı iki  $k$  değeri ( $k_1$  ve  $k_2$ ) bulunmuştur. Çatallanmanın varlığı için Kuznetsov (1998)’in Hopf Çatallanma Teoremi kullanılmış ve çatallanmanın yön analizini veren  $c_1(k_c)$  Lyapunov katsayısı hesaplanmıştır. Çalışmanın devamında teorik sonuçları desteklemek için MATLAB ve MatCont paketi kullanılarak nümerik simülasyonlar elde edilmiştir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2,  $k$  değeri artarken ortaya çıkan kararlı periyodik çözümleri (Süperkritik Hopf çatallanma) gösterirken, Şekil 4.3 kararsız periyodik çözümleri (Subkritik Hopf çatallanma) göstermektedir.  $k$  değeri arttıkça, yani Allee etkisi arttıkça, av popülasyonu eş bulma zorluğu yaşayıp sayıca azalırken tek besin kaynağı av olan avcı popülasyonu da azalmaktadır. Fakat her iki tür de hayatta kalabilmek için mevcut kararsız ortamlarına uyum sağlayarak sistem kararlı duruma geri dönmektedir.

Bölüm 5, (4.1) sisteminin duyarlılık analizine yer vermektedir. Bölüm 4’ten de görüldüğü üzere (4.1) sisteminin kararlılık yapısının değiştiği ve çatallanmanın ortaya

çıkacağı kritik değer, Allee sabitini belirleyen  $k$  parametresidir. Sistemde Hopf çatallanma  $k_1$  ve  $k_2$  parametre değerlerinde görülüp bu iki değer sırasıyla av ve avcı popülasyonun büyüme oranı olan  $r_1$  ve  $r_2$  parametresine bağlıdır. Dolayısıyla,  $r_1$  ve  $r_2$  parametrelerindeki değişiklikler sistem dinamiğini anlamak adına önemlidir. Duyarlılık indeksi, ele aldığımız sürekli av-avcı sistemi için modeli oluşturan parametre değerlerindeki değişikliğin sistem çıktısı üzerindeki etkisini ölçen sayısal bir değerdir. Bu değer 0 ile 1 arasındadır (0 ile 1 dahildir). Bir girdi parametresinin duyarlılık indeksi sıfıra yakınsa, bu parametredeki değişimin sistem çözümü üzerinde ihmal edilebilir bir etkisi vardır. Dolayısıyla bu parametre sabit bir değer olarak alınabilir. Öte taraftan, en yüksek duyarlılık indeksine sahip parametre değeri sistemin dinamiğini büyük ölçüde değiştirme potansiyeline sahip olduğundan, bu parametre değerini bir kontrol (veya çatallanma) parametresi olarak dikkate almak doğru bir adım olacaktır. Bu kapsamda, (4.1) modelini oluşturan tüm parametre değerleri değişirken duyarlılık indeksi hesaplanmış, sistemin kararlı iken av ve avcı popülasyonun büyüme oranına, av popülasyonun eş bulma Allee etkisine sahip olduğu durumda ise Allee sabiti  $\beta$ 'ya daha duyarlı olduğu gözlenmiştir (Bakınız Şekil 5.5 ve Şekil 5.6).

Sonuç olarak, elde ettiğimiz bulgular, analizler ve nümerik örnekler sadece popülasyon davranışlarını ve nesli tükenmekte olan popülasyonların hayatta kalma stratejilerini anlamada değil aynı zamanda popülasyon dinamikleri, ekoloji, koruma ve kontrol teorisi hakkında gelecekteki uygulamalar için de önemli bir etkiye sahiptir. Ayrıca, duyarlılık analizinin sayısal örnekleri, veri toplamaya öncülük edebilir ve ekosistemin işleyişi için önemli süreçleri anlama potansiyelimizi artırabilir.





## KAYNAKLAR

- Allen, L.J.S.**, *An Introduction to Mathematical Biology*, Upper Saddle River, Pearson-Prentice Hall, New Jersey, (2007).
- Allee, W.C.**, *Animal Aggregations. A Study in General Sociology*. University of Chicago Press, Chicago, (1931).
- Allee, W.C., Emerson, O., Park, T., Schmidt, K.**, *Principles of Animal Ecology*. Saunders, Philadelphia, (1949).
- Allee, W.C.**, *Cooperation Among Animals*. Henry Shuman, New York, (1951).
- Allee, W.C.**, *The Social Life of Animals*. Beacon Press, Boston, (1958).
- Baydemir, P., Merdan, H., Karaoglu, E. Sucu, G.**, (2020). Complex Dynamics of a Discrete-Time Prey-Predator System with Leslie Type: Stability, Bifurcation Analyses and Chaos, *Int. J. Bifur. Chaos.*, 30, 2050149.
- Bouin, E., Coville, J., Zhang, X.**, (2024). Precise rates of propagation in reaction-diffusion equations with logarithmic Allee effect, *Nonlinear Anal.*, 245, 113557.
- Boukal, D.S., Berec, L.**, (2009). Modelling mate-finding Allee effects and populations dynamics, with applications in pest control, *Popul. Ecol.*, 51, 445-458.
- Caughley, G.**, (1994). Directions in conservation biology, *J. Anim. Ecol.*, 63, 215-244.
- Carr, J.**, *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- Chen, M., Li, X., Wu, R.**, (2024). Bifurcations and steady states of a predator-prey model with strong Allee and fear effects, *Int. J. Biomath.*, 17(07), 2350066.
- Courchamp, F., Berec, L., Gascoigne, J.**, *Allee Effects in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, New York (2008).
- Courchamp, F., Clutton-Brock, T., Grenfell, B.**, (1999). Inverse density dependence and the Allee effect, *Trends in Ecology & Evolution*, 14(10), 405-410.
- Çelik, C., Merdan, H., Duman, O., Akın, Ö.**, (2008). Allee effects on population dynamics with delay, *Chaos Solutions Fract.*, 37, 65-74.

- Çelik, C., Duman, O.,** (2009). Allee effect in a discrete-time predator-prey system *Chaos Solutions Fract.*, 40, 1956-1962.
- Day, J.,** (1975). Malthus contradicted-chronic underpopulation and demographic catastrophe in Sardinia during Early Middle-Ages, *Annales: Economies, Societes, Civilisations*, 30, 684-702.
- Delitala, M., Ferraro, M.,** (2020). Is the Allee effect relevant in cancer evolution and therapy, *AIMS Math.*, 5(6), 7649-7660.
- Dennis, B.,** (1989). Allee effects: population growth, critical density and the chance of extinction, *Nat. Resour. Model.*, 3, 481-538.
- Duman, O., Merdan, H.,** (2009). Stability analysis of continuous population model involving predation and Allee effect, *Chaos Solutions Fract.*, 41, 1218-1222.
- Elaydi, S.N.,** *An Introduction to Difference Equations.* Springer, (2006).
- Fisher, A.M., Cornell, S.J., Holwell, G.I., Price, T.A.R.,** (2020). Mate-finding Allee effects can be exacerbated or relieved by sexual cannibalism, *J. Anim. Ecol.*, 89, 1581-1592.
- Guckenheimer J., Holmes P.** *Nonlinear oscillations, dynamical system and bifurcation of vector fields* Springer, New York, (1983).
- Hernández-López, E., Núñez-López, M., Capistrán, M.A.,** (2023). Stochastic dynamics between the immune system and cancer cells with Allee effect and immunotherapy, *J. Biol. Syst.*, 31, 1125-1146.
- Kang, Y., Sasmal, S.K., Bhowmick, A.R., Chattopadhyay, J.A.** (2015). A host-parasitoid system with predation-driven component Allee effects in host population, *J. Biol. Dyn.*, 9, 213-232.
- Karaoğlu, E.,** (2011) Allee etkisi altında bir genel fark denkleminin kararlılık analizi (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karaoğlu, E., Merdan H.,** (2014) Hopf bifurcation analysis for a ratio-dependent predator-prey system involving two delays, *ANZIAM J.*, 55, 214-231.
- Karaoğlu, E., Merdan H.,** (2014) Hopf bifurcations of a ratio-dependent predator-prey model involving two discrete maturation time delays, *Chaos Solutions Fract.*, 68, 159-168.
- Kuznetsov, Y.A.,** *Elements of Applied Bifurcation Theory,* Springer-Verlag, New York, (1998).
- Liang, C., Huo, H.F., Xiang, H.,** (2024). Modelling mosquito population suppression based on competition system with strong and weak Allee effect, *Math. Biosci. Eng.*, 4, 5227-5249.

- Lutscher, F., Popovic, L., Shaw, A.K.,** (2023). How mutation shapes the rate of population spread in the presence of a mate-finding Allee effect, *Theor. Ecol.*, 16, 255-269.
- Ma, T., Meng, X.,** (2024). Global stability analysis and Hopf bifurcation due to memory delay in a novel memory-based diffusion three-species food chain system with weak Allee effect, *Math. Method Appl. Sci.*, 47, 6079-6096.
- Martcheva, M,** *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, Springer US, (2015).
- MATLAB** version 7.10.0. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., (2010).
- McCarthy, M.A.,** (1997). The Allee effect, finding mates and theoretical models, *Ecol. Modell.*, 103, 99-102.
- Merdan, H.** (2010) Stability analysis of a Lotka-Volterra type predator-prey system involving Allee effects *ANZIAM J.*, 52, 139-145.
- Merdan, H., Duman, O.,** (2009) On the stability analysis of a general discrete-time population model involving predation and Allee effects, *Chaos Solutions Fract.*, 40, 1169-1175.
- Merdan, H., Gümüş, Ö.A.,** (2012) Stability analysis of a general discrete-time population model involving delay and Allee effects, *Appl. Math. Comput.*, 219(4), 1821-1832.
- Munkres, J.R.,** *Topology* Pearson, (2014).
- Murray, J.D.,** *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer-Verlag, (2002).
- Odum, E.P.,** *Fundamentals of Ecology*. Saunders, Philadelphia, (1953).
- Pal, P.J., Mandal, G., Guin, L.N., Saha, T.** (2024). Allee effect and hunting-induced bifurcation inquisition and pattern formation in a modified Leslie-Gower interacting species system, *Chaos Solutions Fract.*, 182, 114784.
- Perko, L.,** *Differential Equations and Dynamical Systems* Springer, New York, (2006).
- Sardar, M., Khanjanchi, S.,** (2022). Is the allee effect relevant to stochastic cancer model?, *J. Appl. Math. Comput.*, 68, 2293-2315.
- Su, X., Wang, J., Bao, A.,** (2024). Stability analysis and chaos control in a discrete predator-prey system with Allee effect, fear effect, and refuge, *AIMS Math.*, 9(5), 13462-13491.
- Sutherland, W.J,** (2003). Parallel extinction risk and global distribution of languages and species, *Nature*, 423, 276-279.

**Strogatz, S.,** *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, (1994).

**Wiggins, S.,** *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, (2003).

**Yang, Y., Fan, M.,** (2023). Impact of selective grazing on the dynamics of a diffusive plankton model with component Allee effect and additional food, *Chaos Solutions Fract.*, 175, 114004.

**Yuan, X., Liu, W., Lv, G., Moussaoui, A., Auger, P.,** (2024). Sustainable management of predatory fish affected by an Allee effect through marine protected areas and taxation, *Math. Biosci.*, 373, 109220.

**Url-1** <https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/impetus>, alındığı tarih: 17 Haziran 2024.

**Url-2** <https://www.nationalgeographic.com/animals/fish/facts/goldfish>, alındığı tarih: 17 Haziran 2024.

## **EKLER**

**EK 1** : Bazı Temel Tanımlar

**EK 2** : Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü



## EK 1: Bazı Temel Tanımlar

**Tanım.** Boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerindeki **topoloji**, aşağıdaki özelliklere sahip  $X$  kümesinin alt kümelerinden oluşan bir  $\tau$  ailesidir:

1.  $X, \emptyset \in \tau$ .
2.  $\tau$ 'ya ait keyfi sayıdaki kümelerin birleşimi  $\tau$ 'ya aittir.
3.  $\tau$ 'ya ait sonlu sayıdaki kümelerin kesişimi  $\tau$ 'ya aittir.

Topolojisi  $\tau$  olan  $X$  kümesine ise **topolojik uzay** denir (Munkres, 2014).

**Tanım.**  $\phi$  ve  $\psi$  topolojik uzaylar olmak üzere  $H : \phi \rightarrow \psi$  birebir ve örten<sup>1</sup> bir fonksiyon olsun. Ayrıca,  $H$  fonksiyonu sürekli olup  $H$  fonksiyonunun tersi  $H^{-1}$  mevcut ve sürekli olsun. Bu taktirde  $H$  fonksiyonuna **homeomorfizm** denir (Munkres, 2014).

**Topolojik Denklik**  $f$  fonksiyonu analitik olmak üzere, parametreye bağlı

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (6.1)$$

ayrık dinamik sistemini ele alalım. Bu sistemin Jakkobiyen matrisinin  $(0,0)$  noktasındaki değeri  $A(\alpha)$  olsun.

İlk olarak,  $\alpha = 0$  olduğu durumu ele alalım. Burada  $f(x,0) = f(x)$  olmak üzere (6.1) sistemi

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca  $A := A(0)$  olarak tanımlanabilir. Böylelikle lineer olmayan (6.2) sistemi

$$x \mapsto Ax \quad (6.3)$$

lineer sistemine çevrilebilir. Dikkat edilirse orijin hem (6.2) sistemi hem de (6.3) sistemin denge noktasıdır.

Benzer tanım parametreye bağlı sürekli bir diferensiyel denklem sistemi için de yapılabilir.

**Tanım.** Kabul edelim ki  $\phi$ , (6.2) sisteminin denge noktasını içeren,  $\psi$  ise (6.3) sistemin denge noktasını içeren bir açık küme olmak üzere  $\phi$  deki yörüngeleri  $\psi$  deki yörüngelere eşleyen bir  $H : \phi \rightarrow \psi$  homeomorfizmi mevcut olsun. Bu taktirde, (6.2) sistemi ile (6.3) sistemine orijinin civarında **topolojik olarak denktir** denir (Perko, 2006).

---

<sup>1</sup> $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu verilsin.  $A$ 'nın farklı elemanlarının  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüleri farklı ise  $f$  fonksiyonuna **birebir** fonksiyon denir. Eğer  $B$ 'nin her bir elemanı  $f$  fonksiyonu altında  $A$ 'nın bir elemanının görüntüsü ise  $f$  fonksiyonuna **örten** fonksiyon (Munkres, 2014).

## EK 2: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

<b>Türkçe terim</b>	<b>İngilizce Terim</b>
Adi diferensiyel denklem	Ordinary differential equation
Ayrık av-avcı modeli	Discrete-time predator-prey model
Çatallanma	Bifurcation
Denge noktası	Equilibrium Point
Değişmez	Invariant
Düzgün	Smooth
Hiperbolik	Hyperbolic
Kararlılık	Stability
Karakteristik	Characteristic
Lineer	Linear
Manifold (Çok Katlı)	Manifold
Merkez Manifold	Center Manifold
Nitel	Qualitative
Özdeğer	Eigenvalue
Özvektör	Eigenvector
Subkritik	Subcritical
Süperkritik	Supercritical
Topolojik Olarak Denklik	Topologically Equivalent
Yerel (Lokal)	Local
Yön	Direction