

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LUCAS KÜPLERİNDE BAZI BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**Merve ARTIRAN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI**

**ARALIK 2022**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Merve ARTIRAN

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### LUCAS KÜPLERİNDE BAZI BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ

Merve ARTIRAN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI

Tarih: ARALIK 2022

Ara bağlantı ağlarının çalışılma sebeplerinden biri çoğul bilgisayarların iletişim ihtiyaçlarıdır. Ara bağlantı ağları matematiksel olarak, köşe kümesi  $V(G)$  ve kenar kümesi  $E(G)$  olan bir  $G = (V(G), E(G))$  çizgesi şeklinde gösterilmektedir.  $V(G)$  kümesi işlemcileri,  $E(G)$  kümesi ise iletişim ağlarını temsil eder. Bağlantı ağı modelleri konusunda esas olarak alabileceğimiz  $n$  boyutlu hiperküp  $Q_n$  çizgesidir. Hiperküpün köşeleri uzunluğu  $n$  olan bütün ikili diziler ile gösterilirken, bir biti farklı olan köşeleri eşleştirerek kenar kümesi elde edilir.  $n$  boyutlu Fibonacci küpü  $\Gamma_n$ ,  $Q_n$  çizgesinin köşe kümesinden ardışık bir içeren tüm köşeleri çıkararak, Lucas küpü  $\Lambda_n$  ise  $\Gamma_n$  çizgesindeki başında ve sonunda aynı anda bir olan köşelerin çıkarılması ile oluşturulmuştur. Literatürde Lucas küpleri ile bazı baskınlık tipi değişmezleri çalışılmıştır ve baskınlık sayıları bilinmektedir. Bunun yanında şimdiye kadar çalışılmamış olan baskınlık sayıları da yer almaktadır. İşaretli baskınlık sayısı ve eşli baskınlık sayısı ve Roman tipi baskınlık problemi daha önce Lucas küplerinde çalışılmamıştır. Bu tezde, Eşli baskınlık sayısı, İşaretli baskınlık sayısı, Roman baskınlık sayısı, zayıf Roman baskınlık sayısı ve çift Roman baskınlık sayısı olmak üzere beş farklı Lucas küplerinde yeni baskınlık tipi değişmezleri ele alınmaktadır. Tam sayı lineer programlama problemlerinden faydalanılarak Lucas küplerinde bu baskınlık sayıları  $n \leq 9$ ,  $n \leq 10$  veya  $n \leq 11$  olacak şekilde hesaplanmış ve  $n \leq 13$  e kadar en iyi alt ve üst sınırlar bulunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Lukas küp, Hiperküp, Baskınlık sayısı, Roman baskınlık sayısı.

## ABSTRACT

Master of Science

### SOME DOMINATION TYPE INVARIANTS OF LUCAS CUBES

Merve ARTIRAN

TOBB University of Economics and Technology  
Institute of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI

Date: December 2022

One of the reasons interconnection networks work is for the communication needs of multiple computers. Interconnection networks are mathematically represented as a graph  $G = (V(G), E(G))$  with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . The  $V(G)$  cluster represents the processors and the  $E(G)$  cluster represents the communication networks. The hypercube with an  $n$  dimensional that we can take as a basis for connection network models is the  $Q_n$  diagram. While the vertices of the hypercube are represented by all binary sequences of length  $n$ , the edge set is obtained by matching vertices that differ by one bit. The Fibonacci cube with an  $n$  dimensional  $\Gamma_n$  is constructed by subtracting all vertices containing a consecutive one from the vertex set of  $Q_n$ , while the Lucas cube  $\Lambda_n$  is formed by subtracting the vertices that are one at the beginning and end of the  $\Gamma_n$  diagram. In the literature, Lucas cubes and some domination type invariants have been studied and the domination numbers are known. In addition, there are also domination numbers that have not been studied so far. The signed domination number and the paired domination number and Roman type domination problem have not been studied in Lucas cubes before. In this thesis, unknown domination type invariants are discussed in five different Lucas cubes: Paired domination number, Signed domination number, Roman domination number, weak Roman domination number and double Roman domination number. By using integer linear programming problems, these dominance numbers are calculated as  $n \leq 9$ ,  $n \leq 10$  or  $n \leq 11$  in Lucas cubes, depending on the difficulty of the algorithm of the dominance type invariant and for uncomputable dimensions, the best lower and upper bounds were found up to  $n \leq 13$ .

**Keywords:** Lucas cube, Hypercube, Dominatin number, Roman domination number.

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve destekleyen saygıdeğer danışmanım, hocam Prof. Dr. Zülfükar SAYGI'ya çok teşekkür ederim. Birbirinden değerli tecrübelerinden ve bilgi dağarcıklarından faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Benim için çok kıymetli olan çalışmalarımızı birlikte yürüttüğümüz bana her daim destek veren yüreklendiren her konuda ve her anlamda yanımda olduklarını gösteren Melis Berçin Yılmaz ve Tunahan Yılmaz' a dostluklarından dolayı ayrıca çok teşekkür ediyorum. Birlikte öğrenci asistanlığı da yaptığım benim için çok kıymetli arkadaşım Arş. Gör. Pınar Baydemir' e gerek manevi gerekse tecrübeleriyle yanımda olduğu için teşekkür ederim. Bu tezde iki tip baskınlık ve üç tip Roman baskınlık değişiminin tam sayı lineer programlamalarının kod olarak yazılmasına verdiği destekleri sebebiyle hocamız Arda Buğra ÖZER'e teşekkürü borç bilirim.

Her zaman yanımda olan ve eğitimimi sonsuz destekleyen babam Veli Polat'a, bana olan bitmeyen inancı, sevgisi ve desteğiyle bir anneden çok daha fazlası olduğu için Safiye Polat'a ve hayattaki varlıklarından güç aldığım kardeşlerime çok teşekkür ederim.

Değerli eşim Oğuz Artıran, lise yıllarımdan bu yana çocukluğum, bugünüm ve yarınım olduğun, gücüme benden çok inanarak bugünkü Merve olmamda en büyük katkıyı sen verdiğin ve hayat arkadaşım olduğun için sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez TÜBİTAK tarafından 120F125 numaralı "Hiperküp ve Belirli Alt Çizgilerinin Bazı Çizge Teorik Özellikleri ve Baskınlık Tipi Değişmezleri" başlıklı proje kapsamında desteklenmiştir.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve tam burs imkanı sunan TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Lucas Küplerinin Tanımı, Rekürsif Yapısı ve Genel Özellikleri . . . . .	2
1.1.1 Lucas küplerinin yinelemeli yapısı . . . . .	5
1.1.2 Lucas küplerinin genel özellikleri . . . . .	6
1.2 Lucas Küpünün Sayma Sonuçları . . . . .	9
1.2.1 Derece dizilerine ait sonuçlar . . . . .	10
1.2.2 Küp sayısına ait sonuçlar . . . . .	11
1.2.3 Lucas küplerinde uzaklık değişmezine ait sonuçlar . . . . .	12
1.2.4 Lucas küplerinde düzensizliğe ait sonuçlar . . . . .	15
<b>2. BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 Lucas Küplerinde Bilinen Baskınlık Tipi Değişmezleri . . . . .	18
2.2 Lucas Küplerinde Yeni Baskınlık Tipi Değişmezleri . . . . .	20
2.2.1 Lucas küplerinde eşli baskınlık sayısı . . . . .	20
2.2.2 Lucas küplerinde işaretli baskınlık sayısı . . . . .	23
2.2.3 Lucas küplerinde roman baskınlık sayıları . . . . .	28
2.2.4 Lucas küplerinde çift Roman baskınlık sayıları . . . . .	34
2.2.5 Lucas küplerinde zayıf Roman baskınlık sayıları . . . . .	40
<b>3. SONUÇ</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>KAYNAKLAR</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>EKLER</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> . . . . .	<b>54</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Sırasıyla $Q_1$ , $Q_2$ ve $Q_3$ hiperküpleri . . . . .	2
Şekil 1.2: Sırasıyla $\Gamma_1$ , $\Gamma_2$ ve $\Gamma_3$ Fibonacci küpleri . . . . .	3
Şekil 1.3: Sırasıyla $\Lambda_2$ ve $\Lambda_3$ Lucas küpleri . . . . .	4
Şekil 1.4: Sırasıyla $\Lambda_4$ ve $\Lambda_5$ Lucas küpleri . . . . .	4
Şekil 1.5: $\Gamma_1$ çizgesi . . . . .	5
Şekil 1.6: $\Gamma_3$ çizgesi . . . . .	5
Şekil 1.7: $10\Gamma_10$ ve $0\Gamma_3$ çizgesi . . . . .	5
Şekil 1.8: $\Lambda_4$ çizgesi . . . . .	6
Şekil 1.9: Sırasıyla $\Lambda_3$ ve $\Lambda_4$ küplerindeki bağımsız kenar kümeleri . . . . .	7
Şekil 1.10: Sırasıyla $\Lambda_3$ ve $\Lambda_4$ küplerindeki bağımsız kenar kümeleri . . . . .	8
Şekil 1.11: $\Lambda_5$ küpünde 11 köşe, 15 kenar, 5 adet 4-döngüsü ( $C_4$ ) olduğu görülmektedir. . . . .	12
Şekil 2.1: $G$ çizgesindeki olası baskın köşe kümeleri . . . . .	18
Şekil 2.2: $\Lambda_3$ küpü için eşli baskın küme örneği . . . . .	20
Şekil 2.3: $\Lambda_4$ küpü için olası eşli baskın küme örnekleri . . . . .	21
Şekil 2.4: $\Lambda_3$ küpü için bir işaretli baskın $f$ fonksiyonu . . . . .	24
Şekil 2.5: $\Lambda_4$ küpünde bir işaretli baskın $f$ fonksiyonu . . . . .	25
Şekil 2.6: $\Lambda_2$ küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	30
Şekil 2.7: $\Lambda_3$ küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	31
Şekil 2.8: $\Lambda_4$ küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	31
Şekil 2.9: $\Lambda_5$ küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	32
Şekil 2.10: $\Lambda_2$ küpündeki $\gamma_{DR}$ - fonksiyon değerleri . . . . .	36
Şekil 2.11: $\Lambda_3$ küpündeki $\gamma_{DR}$ - fonksiyon değerleri . . . . .	37
Şekil 2.12: $\Lambda_4$ küpündeki $\gamma_{DR}$ - fonksiyon değerleri . . . . .	37
Şekil 2.13: $\Lambda_5$ küpündeki $\gamma_{DR}$ - fonksiyon değerleri . . . . .	38
Şekil 2.14: $\Lambda_2$ küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	42
Şekil 2.15: $\Lambda_3$ küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	43
Şekil 2.16: $\Lambda_4$ küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	43
Şekil 2.17: $\Lambda_5$ küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri . . . . .	44

## SEMBOL LİSTESİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$V(G)$	Bir $G$ çizgesinin köşe kümesi
$E(G)$	Bir $G$ çizgesinin kenar kümesi
$Q_n$	$n$ - boyutlu Hiperküp
$F_n$	$n$ . Fibonacci sayısı
$L_n$	$n$ . Lucas sayısı
$\Gamma_n$	$n$ - boyutlu Fibonacci küpü
$\Lambda_n$	$n$ - boyutlu Lucas küpü
$P_n$	$n$ - boyutlu yol
$C_n$	$n$ - boyutlu döngü
$\alpha(G)$	Bir $G$ çizgesinin bağımsızlık sayısı
$C(G, x)$	Bir $G$ çizgesinin küp polinomu
$d_G(u, v)$	Bir $G$ çizgesindeki $u$ ve $v$ köşeleri arasındaki uzaklık
$diam(G)$	Bir $G$ çizgesinin çapı
$ecc_G(u)$	Bir $G$ çizgesindeki $u$ köşesinin dışmerkezliliği
$W(G)$	Bir $G$ çizgesinin Wiener indeksi
$\overline{ecc}(G)$	Bir $G$ çizgesinin ortalama dışmerkezliliği
$\overline{deg}(G)$	Bir $G$ çizgesinin ortalama derecesi
$\delta(G)$	Bir $G$ çizgesinin en küçük derecesi
$\Delta(G)$	Bir $G$ çizgesinin en büyük derecesi
$irr(G)$	Bir $G$ çizgesinin düzensizliği
$I_G(x)$	Bir $G$ çizgesinin düzensizlik polinomu
$\gamma(G)$	Bir $G$ çizgesinin baskınlık sayısı
$N(v)$	Bir $G$ çizgesindeki $v$ köşesinin komşu köşelerini içeren küme
$N[v]$	Bir $G$ çizgesindeki $v$ köşesinin komşu köşelerini ve $v$ köşesini içeren küme
$\rho(G)$	Bir $G$ çizgesinin 2 - kutulama sayısı
$i(G)$	Bir $G$ çizgesinin bağımsız baskınlık sayısı
$\gamma(G)$	Bir $G$ çizgesinin toplam baskınlık sayısı
$\gamma_p(G)$	Bir $G$ çizgesinin eşli baskınlık sayısı
$\gamma_s(G)$	Bir $G$ çizgesinin işaretli baskınlık sayısı
$\gamma_R(G)$	Bir $G$ çizgesinin Roman baskınlık sayısı
$\gamma_r(G)$	Bir $G$ çizgesinin zayıf Roman baskınlık sayısı
$\gamma_{dR}(G)$	Bir $G$ çizgesinin çift Roman baskınlık sayısı



## 1. GİRİŞ

Özel sayı dizileri bilimin birçok alanında önemli rol oynamaktadır. Bunlardan biri olan Fibonacci dizisinin geçmişi 820 yıl öncesine dayanmaktadır. Altın oran ile olan ilişkisi ve ayrıca Kimya, Fizik, Biyoloji, Antropoloji, Sosyal Bilimler, Mimarlık, Anatomi, Finans vb. alanlardaki birçok uygulama nedeniyle Fibonacci sayıları üzerinde çok sayıda araştırma yapılmıştır. Fibonacci dizisinin hafif bir varyantı ise Lucas tarafından on sekizinci yüzyılda elde edilmiştir ve bu sebeble Lucas dizisi olarak adlandırılmıştır. Çizge teorisi ile sayılar teorisi dahil olmak üzere Matematiğin diğer alanları arasında çok doğal olan yakın ilişkiler vardır. Fibonacci küpleri yeni bir ara bağlantı modeli olarak hiperküplere alternatif olarak sunulmuştur. Asimetrik ve nispeten seyrek ara bağlantılarına rağmen, Fibonacci küpünün tekrarlayan yapıları sahip olduğu bilinmektedir. Boole küpüne (hiperküp) bir alt çizge olarak gömülebildiğinden ve aynı zamanda diğer yapıların bir üst çizgesi olduğundan dolayı, Fibonacci küplerinin hataya dayanıklı hesaplamalarda uygulamaları bulunmaktadır. Köşe kümesi  $V(G)$  ve kenar kümesi  $E(G)$  olan bir  $G = (V(G), E(G))$  çizgesi ile bağlantı ağları temsil edilebilir. Burada  $V(G)$  kümesi işlemcileri,  $E(G)$  kümesi ise iletişim ağlarını gösterir. En temel bağlantı ağı modellerinden biri  $n$  - boyutlu hiperküp,  $Q_n = (V_n, E_n)$  dir.  $Q_n$  nin köşeleri uzunluğu  $n$  olan ikili diziler ile ifade edilir. İki köşe arasındaki kenar ancak ve ancak temsil eden ikili diziler arasındaki Hamming uzaklık 1 ise vardır. Hamming uzaklık, yani dizilerin aynı pozisyondaki toplam farklı koordinat sayısıdır. Lucas küpü, Lucas sayılarından ilham alan yeni bir ağ sınıfı olarak sunulmuştur.  $n$  - boyutlu Lucas küpü,  $\Lambda_n$ , en basit ifadeyle ikili dizilerinde ardışık 1 içermeyen ve aynı anda başında ve sonunda 1 bulunmayan köşelerin oluşturduğu hiperküplerin alt çizgesi olarak tanımlanır. Lucas küpleri alt çizgeleri Fibonacci küpü olan ağlara ayrıştırılabilen bir yapıya sahiptir. Bu yapı oldukça ilgi çekici olarak bulunmaktadır. Aynı sayıda köşeler için hiperküplerden ve Fibonacci küplerinden çok daha az oranda kenar bulundurmasıyla tercih edilmektedir. Bundan dolayı Lucas küpleri ne Hiperküpler ne Fibonacci küpleri kadar hızlı büyümektedir. Dolayısıyla, temel yinelemeli yapısal özellikleri nedeniyle bağlantı ağı modeli olarak tanıtılmaktadır.

Tezin 1. bölümünde öncelikle Lucas küplerinin tanımına, temel ayrışımına ve sırasıyla literatürde bilinen derece dizilerine, küp sayısına, uzaklık değişmezlerine, bağlılığa ve düzensizliğe ait sayma sonuçlarına değinilmiş ve bu sonuçlar örneklendirilmiştir. 2. bölümün ilk kısmında bir  $G$  çizgesi için baskınlık problemi motivasyonu ve baskınlık sayısı tanımı verilmiş olup Lucas küplerinin bazı baskınlık tipi değişmezlerine ait sonuçlarına yer verilmektedir. 2. bölümün ikinci kısmında ise Lucas küplerinde yeni bazı baskınlık tipi değişmezlerini ele alacağız. Yeni baskınlık tipi değişmezleri olarak Eşli baskınlık sayısı, İşaretli baskınlık sayısı, Roman baskınlık sayısı, Çift Roman baskınlık sayısı ve Zayıf Roman baskınlık sayısı üzerinde çalıştık. Bu kısımda öncelikle Eşli baskınlık ve İşaretli baskınlık değişmezlerinin tanımlarına, bir  $G$  çizgesi için bilinen genel sonuçlarına ve optimizasyon problemlerine değinilmiştir.

Bu baskınlık tipi değişmezleri literatürde daha önce Lucas küpleri için çalışılmamıştır. Biz bu 2 farklı baskınlık tipi değişmezinin tam sayı lineer programlamasını Lucas küpleri için bilgisayar ortamında çalıştırdığımız zaman her bir optimizasyon problemiyle 1 saatlik süre sonunda  $n \leq 10$  için elde ettiğimiz kesin değerleri ve karar değişkenlerinin hangi köşelere ait olduğunu açık bir şekilde verdik.  $11 \leq n \leq 13$  için ise elde ettiğimiz en iyi alt ve üst sınır değerlerini verdik. Daha sonra Roman baskınlık probleminin kaynağı olan motivasyonu ve Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerinin tanımları ve optimizasyon problemleri yer almaktadır. Son olarak literatürde daha önce Lucas küplerinde çalışılmamış olan bu 3 farklı Roman baskınlık tipi değişmezinin Lucas küpleri için bilgisayar ortamında çalıştırdığımız her bir optimizasyon problemiyle 1 saatlik süre sonunda Roman baskınlık değişmezi için  $n \leq 11$ , Çift roman baskınlık değişmezi için  $n \leq 10$  ve Zayıf roman baskınlık değişmezinde  $n \leq 9$  için elde ettiğimiz kesin değerlere ve  $n \leq 13$  e kadar literatürdeki alt ve üst sınır değerlerini geliştiren ya da ilk kez alt ve üst sınır değerleri ortaya koyan sayısal sonuçlara yer verdik.

Bu tez boyunca  $G = (V(G), E(G))$  ifadesi ile gösterilen bir  $G$  çizgesi eğer  $G$  çizgesi açıksa  $G = (V, E)$  şeklinde gösterilecektir. Bu ifade şeklinde  $V$  kümesi  $G$  çizgesinin köşe kümesini  $E$  kümesi ise  $G$  çizgesinin kenar kümesini temsil etmektedir.

## 1.1 Lucas Küplerinin Tanımı, Rekürsif Yapısı ve Genel Özellikleri

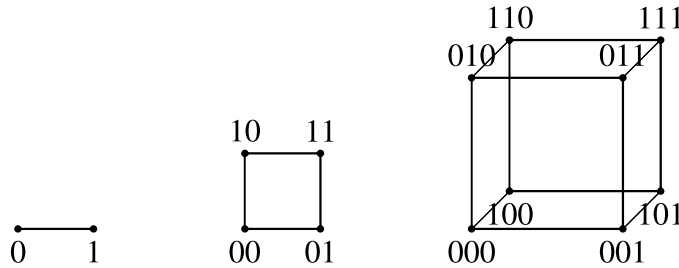
Lucas küplerini anlamak için öncelikle hiperküpü ve Fibonacci küplerini iyi anlamamız gerekir. Şimdi hiperküpün matematiksel olarak nasıl ifade edildiğine bakalım.

**Tanım 1.1.1.**  $B = \{0, 1\}$  olmak üzere  $n \geq 1$  için,,

$$\mathcal{B}_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid b_i \in B, 1 \leq i \leq n\} \quad (1.1)$$

kümesi tanımlansın. Hiperküp,  $Q_n$  ( $n$  - küp),  $\mathcal{B}_n$  köşe kümesi üzerinde tanımlı bir çizgedir. Bu çizgede eğer yalnızca bir tane  $i \in 1, \dots, n$  için  $b_i \neq b'_i$  ise  $b_1 b_2 \dots b_n$  köşesi  $b'_1 b'_2 \dots b'_n$  köşesi ile komşudur.  $n$  - boyutlu hiperküpün köşe sayısı  $2^n$  dir. Yani  $|V(Q_n)| = 2^n$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 1.** Şekil 1.1 de sırasıyla  $n = 1, 2$  ve  $3$  boyutları için  $Q_n$  çizgeleri ve bu çizgelerin köşelerine  $\mathcal{B}_n$  köşe kümesinin elemanlarının etiketlenmiş halleri gösterilmektedir.



Şekil 1.1: Sırasıyla  $Q_1$ ,  $Q_2$  ve  $Q_3$  hiperküpleri

Hamming mesafesi, iki tane ikili veri dizgisini karşılaştırmak için bir ölçüdür. Eşit uzunluktaki ikili dizgiyi karşılaştırırken, Hamming mesafesi, iki bitin farklı olduğu bit konumlarının sayısıdır ve  $d_H$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.2.** *Hiperküplerle benzer özelliklere sahip Fibonacci küpleri ilk kez WengJing Hsu tarafından ara bağlantı ağları için bir model olarak tanıtılmıştır.*

$n \geq 1$  için,

$$\mathcal{F}_n = \{b_1b_2\dots b_n \in \mathcal{B}_n \mid b_i \cdot b_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq n-1\}. \quad (1.2)$$

$$E(\Gamma_n) = \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathcal{F}_n, d_H(u, v) = 1\} \quad (1.3)$$

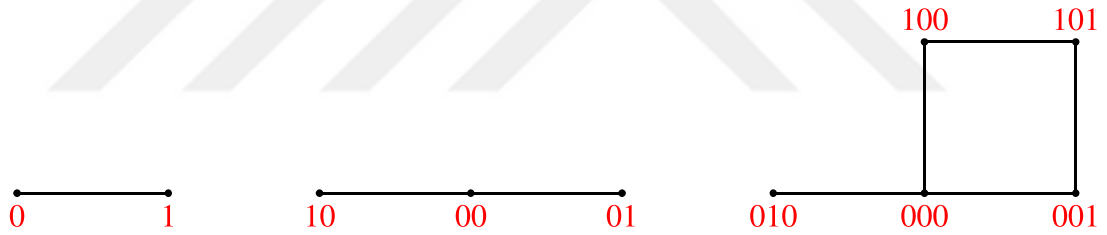
olmak üzere  $\mathcal{F}_n$  kümesi art arda 1 içermeyen  $n$  uzunluğundaki ikili dizilerden oluşur.

Fibonacci küpü  $\Gamma_n$ ,  $n \geq 1$  olmak üzere  $\mathcal{F}_n$  köşe kümesi üzerinde tanımlıdır ve kenar kümesi

$$E(\Gamma_n) = \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathcal{F}_n, \wedge d_H(u, v) = 1\} \quad (1.4)$$

olarak tanımlanır.

**Örnek 2.** Şekil 1.2 de sırasıyla  $n = 1$ ,  $n = 2$  ve 3 boyutları için  $\Gamma_n$  çizgeleri ve bu çizgelerin köşelerine  $\mathcal{F}_n$  köşe kümesinin elemanlarının etiketlenmiş halleri gösterilmektedir.



Şekil 1.2: Sırasıyla  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$  Fibonacci küpleri

Fibonacci sayı dizisinin en önemli özelliği kendinden önceki iki ardışık sayının toplamının, kendisinden sonraki sayıya eşit olmasıdır.

Fibonacci sayıları:

$$F_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Fibonacci küplerinin köşe sayısı ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişki  $|\mathcal{F}_n| = |V(\Gamma_n)| = F_{n+2}$  dir.

**Tanım 1.1.3.** *Lucas küpü köşeleri  $n$  uzunluğunda bitişik 1 içermeyen ve aynı anda başta ve sonda 1 bulundurmayan ikili dizilerden oluşan ve köşelerin Hamming mesafesi 1 olduğunda komşu olduğu çizge olarak tanımlanır.  $\Lambda_n$  ile gösterilir.*

$B = \{0, 1\}$  olmak üzere  $n \geq 1$  için,

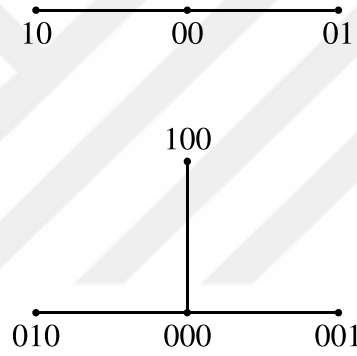
$$V(\Lambda_n) = \{b_1 b_2 \dots b_n \in B \mid b_i \cdot b_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq n-1 \wedge b_1 \cdot b_n = 0\}. \quad (1.6)$$

$$E(\Lambda_n) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(\Lambda_n), d_H(u, v) = 1\} \quad (1.7)$$

**Not 1.1.4.** Fibonacci küpleri Hiperküplerinin alt çizgesidir. Hiperküplerin köşelerinden bitişik 1 bulunan köşeler çıkarıldığında Fibonacci küpleri  $\Gamma_n$  elde edilir. Başka bir deyişle Fibonacci küplerinin köşelerini oluşturan ikili dizelerde yan yana 1 bulunamaz.

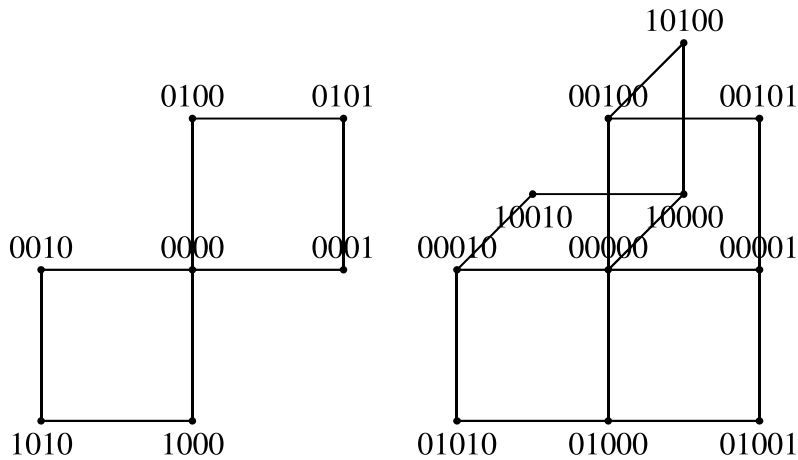
Fibonacci küplerinden  $b_1 = b_n = 1$  olan köşeleri kaldırdığımız zaman Lucas küpünü elde ederiz.

**Örnek 3.** Şekil 1.3 de sırasıyla  $n = 2$  ve  $n = 3$  boyutları için  $\Lambda_n$  çizgeleri gösterilmektedir.



Şekil 1.3: Sırasıyla  $\Lambda_2$  ve  $\Lambda_3$  Lucas küpleri

**Örnek 4.** Şekil 1.4 de sırasıyla  $n = 4$  ve  $n = 5$  boyutları için  $\Lambda_n$  çizgeleri gösterilmektedir.



Şekil 1.4: Sırasıyla  $\Lambda_4$  ve  $\Lambda_5$  Lucas küpleri

### 1.1.1 Lucas küplerinin yinelemeli yapısı

Lucas küpleri 0 ile başlıyor ise dizinin geri kalanı  $n - 1$  uzunluğunda Fibonacci dizisi ile devam eder. Eğer Lucas dizisi 1 ile başlarsa 0 ile devam etmeli ve kesinlikle 0 ile bitmelidir. Bu durumda arada kalan kısmı  $n - 3$  uzunluğunda Fibonacci dizisi oluşturur. Bu özellik kullanılarak;

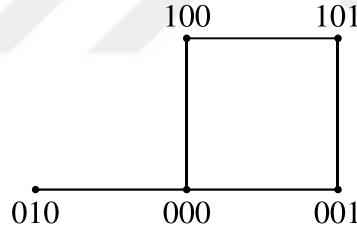
$$\Lambda_n = 0\Gamma_{n-1} + 10\Gamma_{n-3}0$$

yazılabilir. Yukarıdaki gösterimi açıklamak gerekirse öncelikle  $n - 1$  boyutundaki  $\Gamma_{n-1}$  küpünün köşelerinin başına 0 eklenerek yeni bir köşe kümesi oluşur. Bu köşe kümesinden oluşan yeni köşe kümesi  $n - 3$  boyutundaki  $\Gamma_{n-3}$  küpünün köşelerinin başına 10 ve sonuna 0 eklenmiş yeni haline Hamming mesafesi 1 olacak şekilde uç uca birleştirilmesi ile  $n$  boyutundaki  $\Lambda_n$  küpünün köşe kümesi oluşur.

**Örnek 5.** Lucas küplerinin yinelemeli yapısını daha iyi anlamak için  $\Lambda_4$ 'i inceleyelim. Şekil 1.5 de  $\Gamma_1$  ve Şekil 1.6 de  $\Gamma_3$  küplerinin çizimini görüyoruz.

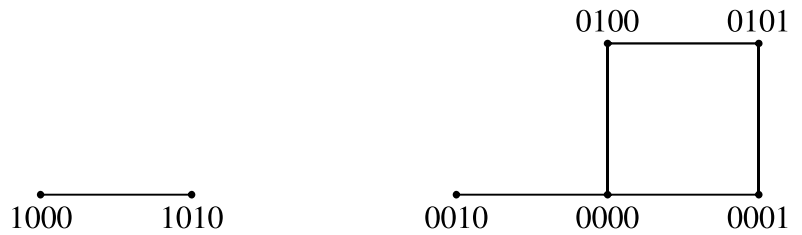


Şekil 1.5:  $\Gamma_1$  çizgesi



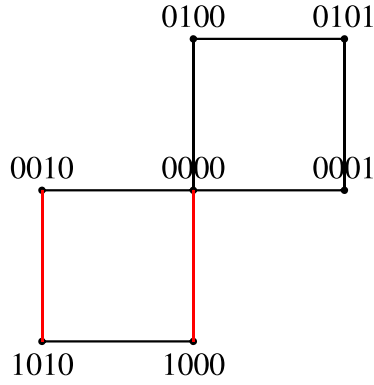
Şekil 1.6:  $\Gamma_3$  çizgesi

Şimdi 1.7 de  $\Gamma_3$  ün köşelerinin başına 0 ve  $\Gamma_1$  in köşelerinin önüne 10 sonuna 0 eklenmiş hali ile gösterilmektedir.



Şekil 1.7:  $10\Gamma_10$  ve  $0\Gamma_3$  çizgesi

Şekil 1.8 de  $\Lambda_4$  küpünün gösterimi verilmektedir.



Şekil 1.8:  $\Lambda_4$  çizgesi

Lucas sayılarını oluşturan kurala baktığımız zaman başlangıç koşulları  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  olan dışında diğer her sayının önceki iki sayının toplamı şeklinde devam ettiğini görmekteyiz. Matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

**Lucas sayıları:**

$$L_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & n \geq 2 \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Lucas küplerinin genel özellikleri

Bu bölümde Lucas küplerinin literatürde çalışılıp bulunmuş olan genel özellikleri incelenecektir.

**Önerme 1.1.5.**  $n \geq 2$  için,

$$|V(\Gamma_n)| = L_n \quad (1.9)$$

dir (Munarini ve diğ., 1999).

$V(\Lambda_n)$  içindeki köşelerden çift veya tek sayıda 1'e sahip Lucas köşelerinin oluşturduğu kümeleri  $\{\hat{E}_n\}$  ve  $\{\hat{O}_n\}$  ile gösterelim. Kardinalitileri ise  $\{\hat{e}_n\}$  ve  $\{\hat{o}_n\}$  olsun.

$$\hat{e}_n = |\hat{E}_n| = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k} \cdot \frac{n}{n-2k} \quad (1.10)$$

$$\hat{o}_n = |\hat{O}_n| = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k-1}{2k+1} \cdot \frac{n}{n-2k-1} \quad (1.11)$$

(Munarini ve diğ., 1999)

Lucas küplerini köşe sayısının  $n \geq 2$  için  $L_n$  olduğuna göre bu sayı çift veya tek

sayıda 1 içeren köşelerin oluşturduğu kümelerin kardinaliteleri toplamına eşit olduğu görülmektedir.

$$\hat{e}_n + \hat{o}_n = L_n \quad (1.12)$$

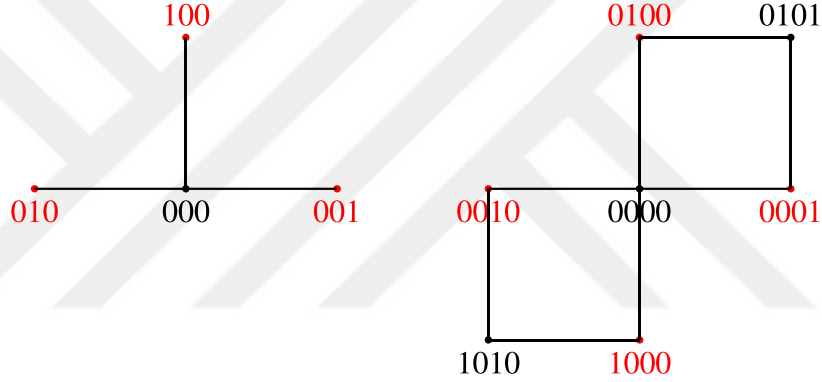
**Tanım 1.1.6.** Bir  $G$  çizgesinin en büyük bağımsız köşe (komşu olmayan köşeler) kümesindeki eleman sayısına  $o$  çizgenin köşe **bağımsızlık sayısı** denir. Bu sayı  $\beta_0(G)$  ile gösterilir.

**Teorem 1.1.7.**  $\Lambda_n$ ' in köşe bağımsızlık sayısı;

$$\beta_0(\Lambda_n) = \left\lceil \frac{L_n + 1}{2} \right\rceil \quad (1.13)$$

dir. (Munarini ve diğ., 1999)

**Örnek 6.** Şekil 1.9 da sırasıyla  $n = 3$  ve  $n = 4$  boyutları için Lucas küplerindeki bağımsız köşe kümeleri bu küplerdeki kırmızı renkteki köşeler ile gösterilmektedir. Buradan  $\beta_0(\Lambda_3) = 3$  ve  $\beta_0(\Lambda_4) = 4$  olduğu gözlemlenir.



Şekil 1.9: Sırasıyla  $\Lambda_3$  ve  $\Lambda_4$  küplerindeki bağımsız kenar kümeleri

Dolayısıyla Şekil 1.9 da görüldüğü üzere teorem 1.1.7

$$\beta_0(\Lambda_3) = \left\lceil \frac{L_3 + 1}{2} \right\rceil = 3 \quad (1.14)$$

ve

$$\beta_0(\Lambda_4) = \left\lceil \frac{L_4 + 1}{2} \right\rceil = 4 \quad (1.15)$$

sağlanmaktadır.

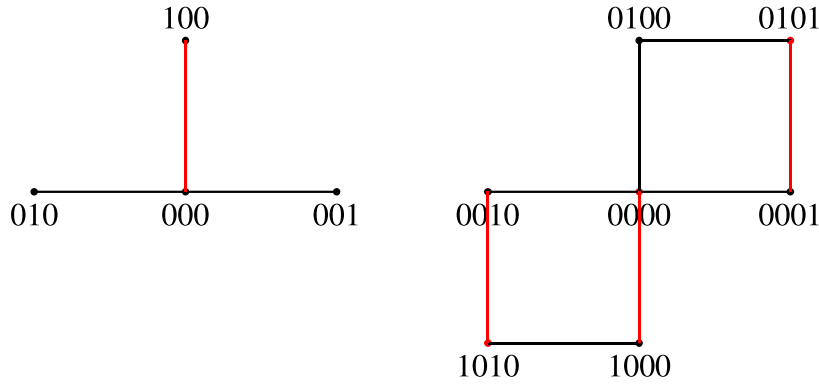
**Tanım 1.1.8.** Bir  $G$  çizgesinin en büyük bağımsız kenar (komşu olmayan kenarlar) kümesindeki eleman sayısına  $o$  çizgenin kenar **bağımsızlık sayısı** denir. Bu sayı  $\beta_1(G)$  ile gösterilir.

**Teorem 1.1.9.**  $\Lambda_n$ ' in kenar bağımsızlık sayısı

$$\beta_1(\Lambda_n) = \left\lfloor \frac{L_n - 1}{2} \right\rfloor \quad (1.16)$$

olur. (Munarini ve diğ., 1999)

**Örnek 7.** Şekil 1.10 da sırasıyla  $n = 3$  ve  $n = 4$  boyutları için Lucas küplerindeki bağımsız kenar kümeleri bu küplerdeki kırmızı renkteki kenarlar ile gösterilmektedir. Buradan  $\beta_1(\Lambda_3) = 1$  ve  $\beta_1(\Lambda_4) = 3$  olduğu gözlemlenir.



Şekil 1.10: Sırasıyla  $\Lambda_3$  ve  $\Lambda_4$  küplerindeki bağımsız kenar kümeleri

Dolayısıyla Şekil 1.10 da görüldüğü üzere Teorem 1.1.9

$$\beta_1(\Lambda_3) = \left\lfloor \frac{\mathcal{L}_3 - 1}{2} \right\rfloor = 1 \quad (1.17)$$

ve

$$\beta_1(\Lambda_4) = \left\lfloor \frac{\mathcal{L}_4 - 1}{2} \right\rfloor = 3 \quad (1.18)$$

sağlanmaktadır.

**Tanım 1.1.10.** Bir  $G = (V, E)$  çizgesi üzerinde bir veya daha fazla köşeden geçen rotaya *yol* denir.  $n$  köşeden geçen yol  $P_n$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.11.** Bir  $G = (V, E)$  çizgesinde bir köşeden başlayıp aynı köşede biten yola *döngü* denir.  $n$  köşeli döngü  $C_n$  ile gösterilir.

**Not 1.1.12.** Bu çalışma boyunca  $v_1, \dots, v_n \in V(P_n)$  olmak üzere  $P_n = (v_1, \dots, v_n)$  ve  $v'_1, \dots, v'_n \in V(C_n)$  olmak üzere  $C_n = (v'_1, \dots, v'_n)$  ile gösterilecektir.

**Tanım 1.1.13.** Bir  $G$  çizgesinde bir yolun (path) Hamilton yolu olabilmesi için her bir köşeden sadece bir kere geçilen bir yol varsa iki köşe arasındaki bu yola *Hamilton yolu* denir. Bir  $G$  çizgesindeki **Hamilton döngüsü** tüm köşelerden bir kez geçen bir döngüdür.

Fibonacci küplerinin çift sayıda köşeye sahip olması durumunda bir Hamilton döngüsüne sahip olduğu kanıtlanmıştır Hsu (1993). Lucas küpleri için (Munarini ve diğ., 1999)'da hiçbir Lucas küpünün Hamilton grafiği olmadığını kanıtlamıştır.

**Sonuç 1.1.14.** (Munarini ve diğ., 1999)

$$\beta_1(\Lambda_n) = \min(\hat{e}_n, \hat{o}_n) \quad (1.19)$$

**Teorem 1.1.15.**  $\Lambda_n$ 'in köşe bağımsızlık sayısı  $\beta_0(\Lambda_n)$  olsun. O halde

$$\beta_0(\Lambda_n) = \max(\hat{e}_n, \hat{o}_n) \quad (1.20)$$

dir. (Munarini ve diğ., 1999)



## 1.2 Lucas Küpünün Sayma Sonuçları

Bu kısımda  $\Lambda_n$  Lucas küpü ile ilgili önemli sayma sonuçlarına yer verilecektir. Bu sonuçların büyük bir kısmı üreteç fonksiyonu yöntemiyle elde edilmiştir.

Lucas küplerinin yinelemeli yapısını incelediğimizde fark ediyoruz ki;  $\Lambda_n$  kenar sayısı  $\Gamma_{n-3}$  ve  $\Gamma_{n-1}$  ün kenar sayılarına  $\Gamma_{n-3}$  ün köşelerinin  $\Gamma_{n-1}$  e birleştirilmesiyle oluşan kenarların eklenmesiyle bulunuyor.  $\Gamma_{n-3}$  ün köşe sayısının  $\Gamma_{n-1}$  den daha az olduğu aşikardır. O halde  $a_n$  ve  $b_n$  sırasıyla  $\Gamma_n$  ve  $\Lambda_n$  'in kenar kümelerinin kardinalitesini gösterebilir.  $|V(\Gamma_n)| = F_{n+2}$  olduğu bilinmektedir. O halde  $|V(\Gamma_{n-3})| = F_{n-1}$  dir.  $n \geq 3$  için  $b_1 = 0$  ve  $b_2 = 2$

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-3} + F_{n-1} \quad (1.21)$$

olduğu görülmektedir. (Munarini ve diğ., 1999).

**Önerme 1.2.1.**  $n \geq 2$  için  $\Lambda_n$  küpündeki kenar sayısı

$$|E(\Lambda_n)| = n \cdot F_{n-1} \quad (1.22)$$

şeklinde verilmektedir. (Munarini ve diğ., 1999)

Klavzar (2005) çalışmasında ise  $\Lambda_n$  için kenar sayısı şu şekilde ifade edilmiştir.

**Önerme 1.2.2.**  $n \geq 2$  için  $\Lambda_n$  küpündeki kenar sayısı

$$|E(\Lambda_n)| = \sum_{i=1}^{n-1} F_i L_{n-1-i} \quad (1.23)$$

Çizelge 1.1 de  $n \leq 13$  boyutuna kadar Lucas küplerinin kenar sayıları verilmektedir.

Çizelge 1.1:  $n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün kenar sayıları.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ E(\Lambda_n) $	0	2	3	8	15	30	56	104	189	340	550	1068	1872

Tanım 1.1.11 de verdiğimiz gibi 4 köşeden geçen döngü  $C_4$  ile gösterilir.

**Önerme 1.2.3.**  $n \geq 5$  için Lucas küplerindeki  $C_4$  sayısı,

$$|S(\Lambda_n)| = \sum_{i=0}^{n-4} L_i (|E(\Gamma_{n-3-i})|) \quad (1.24)$$

dir (Klavzar, 2005)

Yukarıdaki önermeyi kullanarak  $n \leq 13$  için Lucas küplerindeki döngü sayısını Çizelge 1.2 de hesapladık.

Çizelge 1.2:  $n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küplerindeki  $C_4$  (döngü) sayısı.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ S(\Lambda_n) $	0	0	0	0	5	15	35	80	171	355	715	1342	2586

### 1.2.1 Derece dizilerine ait sonuçlar

$\Lambda_n$  Lucas küpünün yinelemeli yapısı ve üreteç fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

**Teorem 1.2.4.**  $n \geq k \geq 0$  ve  $n \geq 2$  olsun.  $\Lambda_n$  çizgesinde derecesi  $k$  olan köşelerin sayısı

$$\sum_{i=0}^k \left[ 2 \binom{i}{2i+k-n} \binom{n-2i-1}{k-i} + \binom{i-1}{2i+k-n} \binom{n-2i}{k-i} \right] \quad (1.25)$$

ile bulunur (Klavzar ve diğ., 2011).

**Tanım 1.2.5.** Köşenin ağırlığı:  $b_1 b_2 \dots b_n \in V(\Lambda_n)$  olmak üzere bu köşenin ağırlığı  $\sum_{i=1}^n b_i$  olarak bulunur.

**Teorem 1.2.6.**  $n \geq k, w \geq 0$  ve  $n \geq 2$  olmak üzere  $k, n, w$  tam sayılar olsun. Ağırlığı  $w$  ve derecesi  $k$  olan  $\Lambda_n$  çizgesinin köşe sayısı

$$\binom{w-1}{2w+k-n} \binom{n-2w}{k-w} + 2 \binom{w}{2w+k-n} \binom{n-2w-1}{k-w} \quad (1.26)$$

olur (Klavzar ve diğ., 2011).

**Örnek 8.** (1.26) kullanılarak  $\Lambda_4$  çizgesinde derecesi 2 ağırlığı 1 olan köşe sayısını bulalım.

$$\binom{1-1}{2+2-4} \binom{4-2}{2-1} + 2 \binom{1}{2+2-4} \binom{4-2-1}{2-1} = \binom{0}{0} \binom{2}{1} + 2 \binom{1}{0} \binom{1}{1} = 4$$

bulunur. Derecesi 2 olan köşelerin kümesi  $\{0010, 1010, 1000, 0001, 0101, 0100\}$  olup bu kümede ağırlığı 1 olan köşeler 0010, 0100, 1000 ve 0001 köşeleridir. Dolayısıyla sonucu 4 olarak buluruz

**Sonuç 1.2.7.**  $n \geq 1$  olsun.  $w \leq n$  için  $\Lambda_n$  içinde ağırlığı  $w$  olan köşelerin sayısını vermektedir. (Klavzar ve diğ., 2011)

$$\binom{n-w}{w} + \binom{n-w-1}{n-2w} \quad (1.27)$$

**Örnek 9.** (1.2.7) u kullanarak  $\Lambda_4$  çizgesinde ağırlığı 2 olan köşe sayısını bulalım.

$$\binom{4-2}{2} + \binom{4-2-1}{4-4} = \binom{2}{2} + \binom{1}{0} = 2$$

bulunur. Ağırlığı 2 olan köşelerin kümesi  $\{1010, 0101\}$  olup 2 olduğunu doğrulamış oluruz.

## 1.2.2 Küp sayısına ait sonuçlar

**Tanım 1.2.8.**  $G$  çizgesinin  $Q_n$  hiperküpüne izomorf alt çizge sayısı  $c_n(G)$  ile gösterelim.  $G$  çizgesinin küp polinomu şu şekilde ifade edilir.

$$C(G, x) = \sum_{n \geq 0} c_n(G) x^n \quad (1.28)$$

ile gösterilir (Bresar ve diğ., 2003).

Burada  $c_0(G) = |V(G)|$ ,  $c_1(G) = |E(G)|$  ve  $G$  çizgesinin içerdiği 4 - döngü sayısı  $c_2(G)$  olur.

**Önerme 1.2.9.** Lucas küplerinin küp polinomları dizisi üreteç fonksiyonu  $\{C(\Lambda_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_{n \leq 0} C(\Lambda_n, x) y^n = \frac{1 + y^2(1+x)}{1 - y - y^2(1+x)} \quad (1.29)$$

olarak bulunur.

**Teorem 1.2.10.** Herhangi  $n \geq 3$  tam sayısı için,  $C(\Lambda_n, x)$ 'in derecesi  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  dir ve

$$C(\Lambda_n, x) = \sum_{a=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[ 2 \binom{n-a}{a} - \binom{n-a+1}{a} \right] (a+x)^a \quad (1.30)$$

eşitliği sağlanır (Klavzar ve Mollard, 2012).

(1.30) dan faydalanılarak  $\Lambda_n$  ' in  $0 \leq n \leq 8$  için küp polinomları (Klavzar ve Mollard, 2012).

$$C(\Lambda_0, x) = 1 \quad (1.31a)$$

$$C(\Lambda_1, x) = 1, \quad (1.31b)$$

$$C(\Lambda_2, x) = 2x + 3, \quad (1.31c)$$

$$C(\Lambda_3, x) = 3x + 4, \quad (1.31d)$$

$$C(\Lambda_4, x) = 2x^2 + 8x + 7, \quad (1.31e)$$

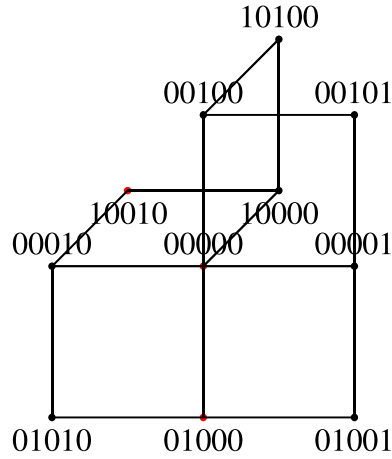
$$C(\Lambda_5, x) = 5x^2 + 15x + 11, \quad (1.31f)$$

$$C(\Lambda_6, x) = 2x^3 + 15x^2 + 30x + 18, \quad (1.31g)$$

$$C(\Lambda_7, x) = 7x^3 + 35x^2 + 56x + 29, \quad (1.31h)$$

$$C(\Lambda_8, x) = 2x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 104x + 47 \quad (1.31i)$$

**Örnek 10.** Tanım 1.2.8 dan faydalanarak  $C(\Lambda_5, x) = 5x^2 + 15x + 11$  küp polinomunda 11 değerinin  $\Lambda_5$  de köşe sayısını,  $x$  in katsayısı olan 15 in  $\Lambda_5$  de kenar sayısını ve  $x^2$  nin katsayısı olan 4 ise içerdiği 4-döngü ( $C_4$ ) sayısını verdiğini Şekil 1.11 de görebiliyoruz.



Şekil 1.11:  $\Lambda_5$  küpünde 11 köşe, 15 kenar, 5 adet 4-döngüsü ( $C_4$ ) olduğu görülmektedir.

**Sonuç 1.2.11.**  $n \geq 1$  ve  $k \geq 1$  için oluşturulan  $Q_k$  sayısının

$$\sum_{i=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[ 2 \binom{n-i}{i} - \binom{n-i+1}{k} \right] \binom{i}{k} \quad (1.32)$$

olduğunu gösterilmektedir (Klavzar ve Mollard, 2012).

**Teorem 1.2.12.**  $k \geq 1$  sabit bir tam sayı olsun.

$$\sum_{n \geq 0} C_k(\Lambda_n) y^n = \frac{y^{2k}(2-y)}{(1-y-y^2)^{k+1}} \quad (1.33)$$

Klavzar, Mollard (2012).

### 1.2.3 Lucas küplerinde uzaklık değişmezine ait sonuçlar

Bu bölümde ilk olarak uzaklık değişmezlerine ait tanımları vereceğiz. Daha sonra  $\Lambda_n$  küpünde elde edilen sonuçları sırasıyla ele alalım.

**Tanım 1.2.13.**  $G$  çizgesinde iki köşe arasındaki en kısa mesafeye uzaklık denir.  $d_G(u, v)$  şeklinde gösterilir. Örnekte görüldüğü gibi  $d_{\Lambda_4}(0101, 0010) = 3$  buluruz.

**Tanım 1.2.14.** Çizgede yer alan herhangi iki köşeden birbirine yol bulunabiliyorsa o çizgeye bağlı çizge denir.

Lucas küpleri bağlı çizgeye örnek olarak verilebilir.

**Tanım 1.2.15.** Dışmerkezlilik (eccentricity): Bağlı bir  $G$  çizgesindeki  $v$  köşesinin dış merkezliliği,  $v$  ile diğer köşeler arasındaki maksimum mesafedir, yani

$$e(v) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

$\Lambda_3$  çizgesinde (010) köşesinin dışmerkezliliğini inceleyelim.

$$d_{\Lambda_3}(010, 000) = 1$$

$$d_{\Lambda_3}(010, 001) = 2$$

$$d_{\Lambda_3}(010, 100) = 2$$

*O halde 010 köşesinin dış merkezliliği 2 dir.*

**Tanım 1.2.16.** *Bağlı bir çizgede bulunan iki köşe arasındaki en uzun uzaklık  $G$  çizgesinin çapı olarak adlandırılır. Başka bir deyişle bağlı bir  $G$  çizgesinin çapını  $v$  köşesi  $G$  çizgesinde iken maksimum dış merkezlik ile ifade ederiz.*

$$\text{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} e(v) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$$

**Tanım 1.2.17.**  *$G$  çizgesinin yarıçapı,  $G$ 'nin köşelerinin minimum dış merkezliği olarak ifade edilir.*

$$\text{rad}(G) = \min_{u \in V(G)} e(v)$$

**Tanım 1.2.18.** *Bir çizgenin merkezi, çizgenin yarıçapına eşit dışmerkezlilik değerine sahip olan köşeler kümesidir. Yani*

$$\text{rad}(G) = e(v)$$

*ise  $v$  köşesi merkezdir. Merkez köşelerinin kümesi  $Z(G)$  ile ifade edilir.  $\Lambda_4$  çizgesinde bütün köşelerin dışmerkezliliğine baktığımızda  $\Lambda_4$ 'ün yarıçapı 2 olarak bulunur.  $\Lambda_4$  çizgesinde dış merkezliliği 2 olan sadece (0000) köşesi olduğundan merkez  $\{0000\}$  dir.*

**Tanım 1.2.19.** *Eğer  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  dizisinde  $i=1, 2, \dots, n$  için  $\alpha_i = \alpha_{n-i}$  ise simetrik olarak adlandırılır. Lucas küpleri için açık bir şekilde görülüyor ki;*

$$\text{diam}(\Lambda_n) = \begin{cases} n & n = \text{ift} \\ n-1 & n = \text{tek} \end{cases}$$

**Önerme 1.2.20.** *Çapa eşit mesafedeki köşe çiftlerinin sayısı  $n$  çift ise  $n$  ve  $n$  tek sayı ise  $n-1$  dir (Munarini ve diğ., 1999).*

**Teorem 1.2.21.**  *$n \geq 1$  için  $\Lambda_n$  çizgesi aşağıdaki özellikleri sağlar.*

$$(i) \text{ rad}(\Lambda_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$(ii) Z(\Lambda_n) = \{\hat{0}\}$$

*(Munarini ve diğ., 1999).*

**Teorem 1.2.22.**  *$\Lambda_n$  çizgesindeki simetrik Lucas string sayısı*

$$\text{Sim}(\Lambda_n) = F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - (-1)^n} \quad (1.34)$$

*şeklinde bulunur (Munarini ve diğ., 1999).*

**Teorem 1.2.23.**  $n \geq k \geq 1$  olsun.  $\Lambda_n$  çizgesindeki  $k$  dışmerkezli köşe sayısı

$$\binom{k}{n-k} + \binom{k-1}{n-k-1} + \epsilon_{n,k} \quad (1.35)$$

$$\epsilon_{n,k} = \begin{cases} -1 & n = 2k \\ 1 & n = 2k + 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir (Castro ve Mollard, 2011).

**Tanım 1.2.24.** Bağlı bir  $G$  çizgesinin Wiener indeksi  $W(G)$ ,  $G$ 'nin tüm sıralı olmayan bütün köşe çiftleri üzerindeki mesafelerin toplamıdır.

Matematiksel kimya alanında Wiener indeksi oldukça önemlidir.  $\mu(G)$ , değeri hesaplanan ortalama uzaklığa, eşdeğerdir.

$$\mu(G) = \frac{1}{\binom{|V(G)|}{2}} W(G) \quad (1.36)$$

olarak ifade edilir. Klavzar ve Mollard (2011) Lucas küplerinin Wiener indeksini Lucas sayılarıyla aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

**Teorem 1.2.25.** Herhangi  $n \geq 1$  için,

$$W(\Lambda_n) = nF_{n-1}F_{n+1} \quad (1.37)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2011).

Teorem (1.37) yi kullanarak hesapladığımız  $n \leq 11$  için Lucas küplerinin Wiener indeksleri aşağıdaki Çizelge 1.3 verilmektedir.

Çizelge 1.3:  $n \leq 11$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün Wiener indeksleri.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$ W(\Lambda_n) $	0	4	9	40	120	390	1176	3536	10395	30260	87120

Binet formülünü ve (1.37) kullanılarak, Lucas küplerinin ortalama uzaklığı için bir sonuç elde edilmiştir.

**Sonuç 1.2.26.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Lambda_n)}{n} = \frac{2}{5} \quad (1.38)$$

(Klavzar ve Mollard, 2011).

**Tanım 1.2.27.** Bir  $G$  çizgesinin *ortalama dışmerkezliliği* (average eccentricity)

$$\overline{ecc}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{u \in V(G)} \overline{ecc}(u)$$

eşitliği ile tanımlanır.

**Tanım 1.2.28.** (Klavzar ve Mollard, 2014).  $\Lambda_n$  çizgesinin ortalama dışmerkezliliğinin limiti hesaplanmıştır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{ecc}(\Lambda_n)}{n} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad (1.39)$$

dur (Klavzar ve Mollard, 2014).

#### 1.2.4 Lucas küplerinde düzensizliğe ait sonuçlar

**Tanım 1.2.29.** Bir  $G$  çizgesinin **düzenli** (regular) olabilmesi için tüm köşelerinin derecesi aynı olmalıdır.

Bir  $G$  çizgesinin düzensizliği (irregularity) çizgenin düzenli bir çizgeden ne kadar farklı olduğunu ölçen bir değişmezdir. Hiperküp,  $Q_n$  çizgesinde tüm köşelerin dereceleri aynı olduğu için bu çizge düzenli çizgedir.

**Tanım 1.2.30.** Bir  $G$  çizgesinin düzensizliği  $irr(G)$ , bir diğer ismiyle Albertson indeksi

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |deg_G(u) - deg_G(v)| \quad (1.40)$$

dir.

Eğecioğlu ve diğ. (2020) bu sonucu motivasyon olarak kullanmıştır. Çalışmasında düzensizlik polinomunu Lucas küpleri için incelemiştir. Lucas küpleri için düzensizlik polinomunun Albertson indeksini özelleştirdiği ve  $|deg(u) - deg(v)|$  hakkında ek bilgiler sağladığı görülür.

**Tanım 1.2.31.**  $I_G(x)$  bir  $G$  çizgesinin düzensizlik polinomunu olsun.

$$I_G(x) = \sum_{uv \in E(G)} x^{|deg_G(u) - deg_G(v)|} \quad (1.41)$$

dir.

**Teorem 1.2.32.**  $I_n(x)$  gösterimi  $\Gamma_n$  küpünün düzensizlik polinomunu olsun.  $J_n(x) = I_{\Lambda_n}(x)$  gösterimi  $\Lambda_n$  küpünün düzensizlik polinomunu belirtsin. Her  $n \geq 4$  için  $\Lambda_n$  çizgesinin  $J_n(x)$  düzensizlik polinomu

$$J_n(x) = J_{n+2}(x) - J_{n+1}(x) - J_n(x) = I_{n+1}(x) - I_n(x) - I_{n-2}(x) - I_{n-3}(x) \quad (1.42)$$

olarak tanımlanır. Burada  $J_1(x) = 0$ ,  $J_2(x) = 2x$ ,  $J_3(x) = 3x^2$ ,  $J_4(x) = 4x^2 + 4$ ,  $J_5(x) = 5x^2 + 10x$  ve  $J_6(x) = 6x^2 + 12x + 6$  dir (Eğecioğlu ve diğ., 2020).

**Örnek 11.**  $\Lambda_4$  küpünün düzensizlik polinomu  $J_4(x) = 4x^2 + 4$  dır. Bu polinomdan çıkarmamız gereken  $u, v \in \Lambda_4$  iken 4 kenar için  $|deg(u) - deg(v)|$  farkının 4 ve 4 kenar için bu farkın 0 olduğudur.

$\Lambda_6$  küpünün düzensizlik polinomu  $J_6(x) = 6x^2 + 12x + 6$  dır. Bu polinomdan çıkarmamız gereken  $u, v \in \Lambda_6$  iken 6 kenar için  $|deg(u) - deg(v)|$  farkının 2, 12 kenar için farkın 1 ve yine 4 kenar için bu farkın 0 olduğudur.

**Sonuç 1.2.33.**  $\Lambda_n$  çizgesinin  $J_n(x)$  düzensizlik polinomlarının  $\{J_n(x)\}_{n \geq 0}$  dizisinin üreteç fonksiyonu

$$J(x, y) = \frac{y(c_1(x)y + c_2(x)y^2 + c_3(x)y^3 + c_4(x)y^4 + c_5(x)y^5 + c_6(x)y^6 + \dots)}{(1 - y - y^2)^2} \quad (1.43)$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 2x \\ c_2(x) &= x(3x - 4) \\ c_3(x) &= -2(x - 1)(x + 2) \\ c_4(x) &= -2(x - 1)(3x - 4) \\ c_5(x) &= 2(x - 1)(2x - 1) \\ c_6(x) &= 3(x - 1)^2 \end{aligned}$$

(Eğecioğlu ve diğ., 2020).

Ayrıca  $J_n(x)$   $x - 1$  in katsayılarıyla genişletilerek ve elde edilen katsayıları sadeleştirerek (Eğecioğlu ve diğ., 2020) aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

**Sonuç 1.2.34.**  $n \geq 4$  için  $\Lambda_n$  çizgesinin düzensizlik polinomu  $J_n(x)$

$$J_n(x) = nF_{n-1} + 2nF_{n-2}(x - 1) + nF_{n-3}(x - 1)^2 \quad (1.44)$$

$$= nF_{n-5} + 2nF_{n-4}x + nF_{n-3}x^2 \quad (1.45)$$

Burada  $J_1(x) = 0, J_2(x) = 2x$  ve  $J_3(x) = 3x^2$  dir.

$\Lambda_n$  çizgesinin düzensizlik polinomu  $J_n(x)$ 'in her zaman  $n$ 'nin bir katı ve bir integral polinomu olduğu gözlemlenmiştir.  $L_n = |E(\Lambda_n)|$  olduğu biliniyor.  $L_n = nF_{n-1}$  şeklinde gösterilebilir.  $J_n(x)$  türevi alınarak ve  $x - 1$  yerine koyma metodu kullanılarak  $irr(\Lambda_n)$  düzensizlik polinomu elde edilir. 1.45  $\Lambda_n$ 'nin düzensizliğini vermektedir.

**Sonuç 1.2.35.**  $n \geq 3$  için

$$irr(\Lambda_n) = 2nF_{n-2} = 2L_{n-1} + 2F_{n-2} \quad (1.46)$$

(Eğecioğlu ve diğ., 2020).

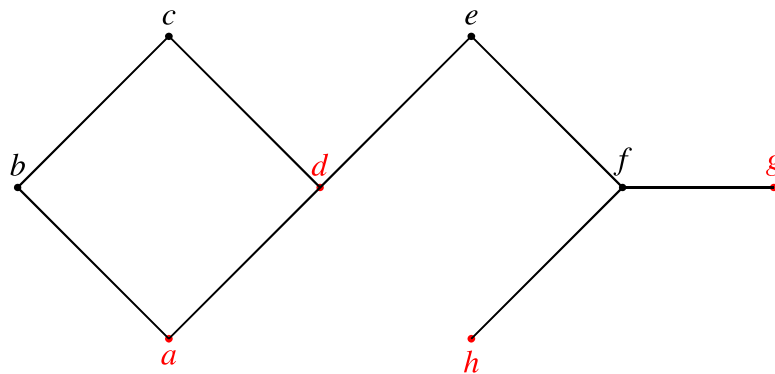
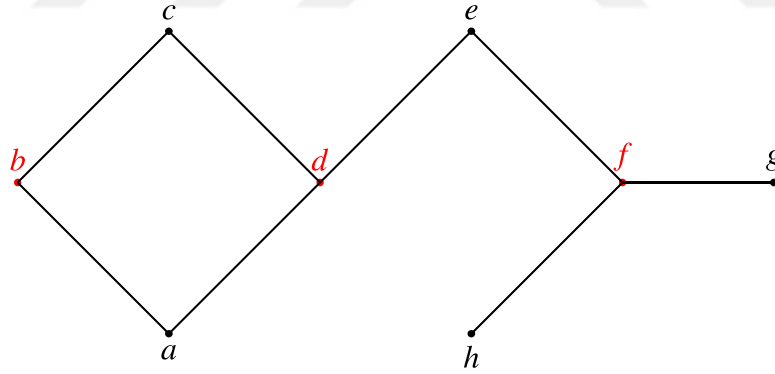


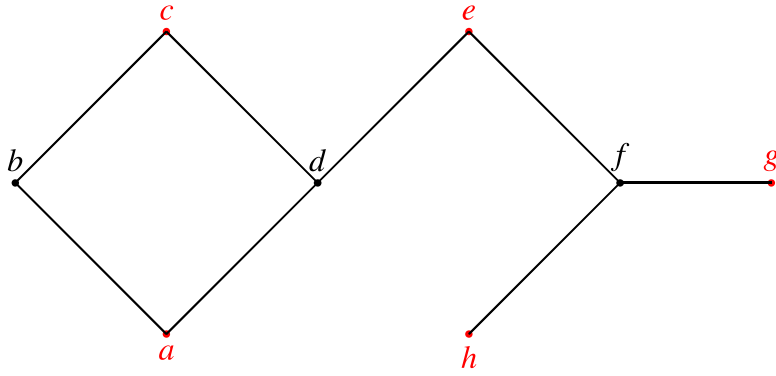
## 2. BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ

Baskınlık probleminin doğuşunun 1850 li yıllarda Avrupa' daki satranca merak duyan insanların satranç tahtasına en az kaç tane vezir yerleştirerek bütün kareleri domine edebiliriz merakına dayandığı bilinmektedir. Fakat baskınlık problemi yardımlaşma dağıtım gibi farklı alanlara uyarlanabilmektedir. Bir pizzacı zincirini ele alalım. Hizmet verdiği ilde maksimum 30 dakika içinde siparişleri ulaştırması beklenmektedir. Bu ilin mahallelerinin gösterildiği haritayı  $G$  çizge modeli olarak kabul edersek, öyle mahallelere pizzacı şubesi yerleştirmeliyiz ki diğer bütün mahallelere sipariş yarım saat içinde ulaştırılabilsin. Bu noktada maliyet açısından en az pizzacı şubesi ile bütün mahallelere ulaşılması amaçlanmaktadır. Pizzacı şubesinin hizmet vermesi için seçilen noktalar  $G$  çizgesinin köşeleri olsun. Bu köşeler çizgenin baskın köşe kümesini oluşturmaktadır.

**Tanım 2.0.1.**  $G = (V, E)$  çizge ve  $D$  kümesi  $V$  noktalar kümesinin alt kümesi olmak üzere  $u \in V - D$  deki tüm noktalar,  $D'$  deki her bir noktayla ya da  $D'$  deki en az bir noktaya komşu ise bu  $D$  kümesine baskınlık kümesi denir. Baskınlık kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına baskınlık sayısı denir.  $\gamma(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 12.** Şekil 2.1 de 8 köşe ve 8 kenarlı bir  $G$  çizgesinin baskınlık kümesinin farklı durumları gösterilmiştir. Baskın köşe kümeleri kırmızı ile gösterilmektedir.





Şekil 2.1:  $G$  çizgesindeki olası baskın köşe kümeleri

Şekil 2.1 de  $G = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  çizgesi verilmektedir. 3 farklı olası baskın köşe kümeleri gösterilmiştir. İlk  $G$  çizgesinde kırmızı ile gösterilen köşeler  $\{b, d, f\}$  dir. 2.  $G$  çizgesinde ise kırmızı ile gösterilen köşeler  $\{a, d, h, g\}$  köşeleridir. 3.  $G$  çizgesinde ise kırmızı ile gösterilen köşeler  $\{a, c, e, h, g\}$  köşeleridir. Her üç şekilde de kırmızı ile ifade edilen köşeler baskın köşelerdir. Fakat en az elemanlı baskın köşe kümesinin eleman sayısı bakınlık sayısı olduğu için  $G$  çizgesinin baskınlık sayısı 3 olarak bulunur.

## 2.1 Lucas Küplerinde Bilinen Baskınlık Tipi Değişmezleri

Tam sayılı doğrusal programlama yaklaşımı, Lucas küplerinde bazı baskınlık sayılarını hesaplamak için kullanılmıştır. Ilic ve Milosevic (2017) çalışmasında tam sayı lineer programlamasını kullanarak  $n = 11$  boyutuna kadar Lucas küplerinin baskınlık sayısını, 2-paketlenme sayısını ve bağımsız baskınlık sayılarını hesaplamışlardır.  $\gamma(\Lambda_9)$  için Castro ve diğ. (2011) çalışmasında üst sınır olarak verilen 16 sayısının ise  $\gamma(\Lambda_9) = 16$  olduğu Ilic ve Milosevic (2017) de doğrulanmıştır. Baskınlık sayısı ile ilgili çalışmalara bakıldığında zaman Saygı (2020) tarafından Lucas küplerinin bütün köşelerinin derece bilgileriyle ilgili daha fazla ayrıntı veren yukarı - aşağı derece polinomları (up - down degree polynomials) çalışılmıştır. Saygı (2020) bu polinomların tam sayı lineer programlaması ile elde edilen optimizasyon probleminden çok daha az sayıda değişken ve kısıt verdiğini gözlemlemiştir. Bu polinomlar sayesinde Lucas küplerinin baskınlık sayısı için yukarıda incelediğimiz optimizasyon probleminden daha iyi alt sınır veren optimizasyon problemi tanımlanmıştır. Örnek vermek gerekirse  $\Lambda_{26}$  için değişkenlerin sayısının 58 ve kısıtların sayısının 14 olarak belirlenmiştir. Bu sayı tam sayı lineer programlaması ile  $\Lambda_{26}$  için 271443 e eşittir. Bunların yanında Saygı (2020)  $\Lambda_n$  için  $12 \leq n \leq 26$  olmak üzere NEOS Sunucusunda CPLEX kullanarak tam sayılı doğrusal programlama problemini çalıştırmıştır ve 0,02 saniyeden daha kısa bir sürede sonuçlara ulaşmıştır. Literatürü incelediğimiz zaman Castro ve diğ. (2011) çalışmasında  $n = 10$  boyutuna kadar  $\Lambda_n$  için 2 - kutulama sayısı elde edilmiştir. Daha sonrasında Ilic ve Milosevic (2017) yaptıkları çalışmalarında tam sayı lineer programlama kullanarak  $n = 12$  boyutuna kadar olan  $\Lambda_n$  Lucas küplerinin 2 - kutulama sayılarını elde etmişlerdir. Bağımsız baskınlık sayısı ile ilgili bulunan sonuçlara baktığımız zaman Ilic ve Milosevic (2017) çalışmasında  $n \leq 11$  için Lucas küplerinin bağımsız baskınlık

sayılarını da geliştirmeyi başarmışlardır. Bir  $G$  çizgesinin toplam baskınlık sayısı,  $\gamma(G)$  ilk kez Cockayne ve diğ. (1980) de çalışılmıştır.  $n \leq 12$  için NEOS Sunucusunda CPLEX kullanarak Saygı(2020) tarafından lineer tam sayı programlaması uygulanarak  $\gamma(\Lambda_n)$  değerleri elde edilmiştir. Ayrıca  $n \leq 12$  olmak üzere  $49 \leq \gamma(\Lambda_{12}) \leq 54$  sınırlaması yapılmıştır. Bu sınırların bulunmasının yaklaşık 2 saat sürdüğü belirtilmektedir.  $n \leq 11$  için  $\Lambda_n$  değerleri daha öncesinde bilinmektedir. Şimdi bu paragrafta bahsedilen ve henüz tanıtılmayan kavramları tanımlayalım.  $G$  bir çizge olsun.  $X$  kümesinin herhangi farklı  $u$  ve  $v$  köşeleri için  $d(u, v) > 2$  ise  $X \subseteq V(G)$  kümesine 2-packing denir. 2-packing sayısı,  $\rho(G)$ ,  $G$  çizgesinin 2-packing kümesinin eleman sayısının en büyüğüdür.  $G$  bir çizge olmak üzere bağımsız küme veya kararlı küme içerdiği köşelerin herhangi ikisi komşu olmayan köşeler kümesidir.  $G$  çizgesinin bağımsız baskınlık sayısı  $i(G)$ , en küçük baskın kümenin boyutudur.  $\gamma(G) \leq i(G)$  ile gösterilir. Toplam baskınlık sayısı sadece izole köşesi bulunmayan, farklı bir anlatımla bağlı çizgeler için tanımlanmaktadır. Her toplam baskın küme aynı zamanda baskın kümedir. Bundan dolayı  $\gamma(G) \leq \gamma_i(G)$  sağlanmaktadır. Buraya kadar elde edilen hesaplama sonuçlarının hepsi Çizelge 2.1, Çizelge 2.2, Çizelge 2.3 ve Çizelge ?? de toplanmıştır.

Çizelge 2.1:  $n \leq 12$  için  $\Lambda_n$  için bazı baskınlık sayıları (Castro ve diğ. (2011), Ilic ve Milosevic (2017), Saygı(2020))

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\gamma_i(\Lambda_n)$	1	2	2	3	4	7	9	13	19	27	41	58
$i(\Lambda_n)$	1	1	1	3	4	5	8	11	17	24	35	
$\rho(\Lambda_n)$	1	1	1	2	3	5	6	8	13	18	26	38
$\gamma(\Lambda_n)$	1	1	1	3	4	5	7	11	16	23	35	49 – 54

Çizelge 2.2:  $13 \leq n \leq 17$  için  $\Lambda_n$  için bazı baskınlık sayıları (Saygı(2020))

$n$	13	14	15	16	17
$\gamma_i(\Lambda_n)$	77 – 95	101 – 145	151 – 231	225 – 362	340 – 567
$\gamma(\Lambda_n)$	61 – 86	89 – 132	134 – 215	203 – 340	310 – 555

Çizelge 2.3:  $18 \leq n \leq 22$  için  $\Lambda_n$  için bazı baskınlık sayıları (Saygı(2020))

$n$	18	19	20	21	22
$\gamma_i(\Lambda_n)$	514 – 909	787 – 1450	1205 – 2345	1862 – 3795	2893 – 6140
$\gamma(\Lambda_n)$	471 – 895	725 – 1450	1114 – 2345	1724 – 3795	2686 – 6140

Çizelge 2.4:  $23 \leq n \leq 26$  için  $\Lambda_n$  için bazı baskınlık sayıları (Saygı(2020))

$n$	23	24	25	26
$\gamma_i(\Lambda_n)$	4490 – 9935	6794 – 16075	10839 – 26010	16838 – 42082
$\gamma(\Lambda_n)$	4184 – 9935	6519 – 16075	10163 – 26010	15835 – 42085

## 2.2 Lucas Küplerinde Yeni Baskınlık Tipi Değişmezleri

### 2.2.1 Lucas küplerinde eşli baskınlık sayısı

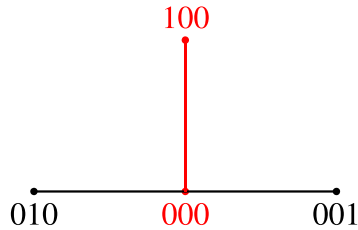
Eşli baskınlık sayısının geçmişini ve ilk çıkışını araştırdığımız zaman karşımıza Haynes ve Slater (1998) çalışması çıkmaktadır. Eşli baskınlık sayısı ve baskınlık sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyen ve elde ettikleri sayısal sonuçların verildiği bir çalışmadır. Daha sonrasında (Azarija ve diğ., 2018) makalesinde eşli baskınlık sayısını Fibonacci küplerinde çalışmış ve optimizasyon problemini kullanarak  $n \leq 10$  boyutuna kadar sayısal değerler elde etmişlerdir. Lucas küplerinde ise eşli baskınlık sayısı daha önce çalışılmamıştır. İlk olarak tanımına bakalım. Daha sonrasında örneklerle detaylandıralım.

**Tanım 2.2.1.**  $G$  bir çizge olsun. Eşli baskınlık sayısı (paired domination number),  $\gamma_p(G)$ , en küçük baskın küme  $S \subseteq V(G)$  kümesinin eleman sayısıdır.  $S$  tarafından oluşturulan çizge mükemmel eşleşme içermelidir.

**Tanım 2.2.2.** Bir  $G$  çizgesinde **mükemmel eşleşme** (perfect matching) çizgenin tüm köşelerini eşleyen bir eşleşmedir. Bir başka deyişle, eğer çizgedeki her köşe eşleşmenin bir kenarına ait ise bu eşlemeye mükemmel eşleşme denir.

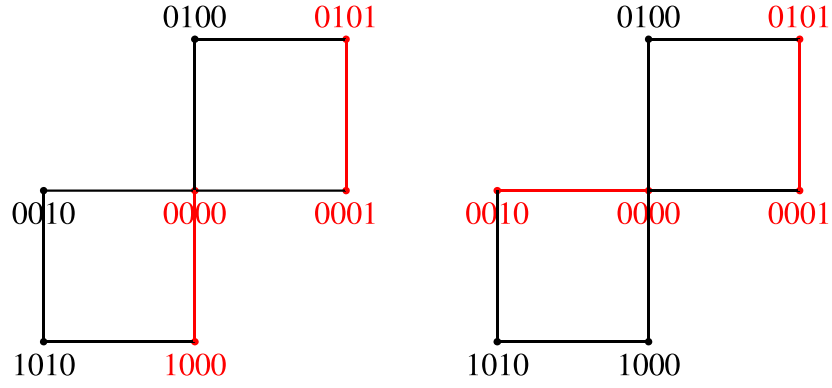
Eşli baskınlık sayısını daha iyi anlayabilmek için öncelikle Lucas küplerinde  $n = 3$  ve  $n = 4$  boyutlarında inceleyelim.

**Örnek 13.**  $K_1 = \{000, 100\}$  kümesi  $\Lambda_3$  için baskın küme olduğunu biliyoruz. Ayrıca  $K_1$  kümesinin oluşturduğu çizge mükemmel eşleşmeyi sağladığından dolayı  $\Lambda_3$  için  $K_1$  kümesini eşli baskın küme olarak kabul edebiliriz. O halde  $\gamma_p(\Lambda_3) = 2$  dir. Şekil 2.2 de kırmızı renk ile gösterilen  $K_1$  kümesidir.



Şekil 2.2:  $\Lambda_3$  küpü için eşli baskın küme örneği

$K_2 = \{1000, 0000, 0001, 0101\}$  ve  $K_3 = \{0010, 0000, 0001, 0101\}$  kümelerinin oluşturduğu çizge mükemmel eşleşmeyi sağladığından dolayı  $\Lambda_4$  için  $K_2$  ve  $K_3$  kümelerini olası eşli baskın küme olarak verebiliriz. O halde  $\gamma_p(\Lambda_4) = 4$  dir. Şekil 2.3 de kırmızı renk ile gösterilen köşeler sırasıyla  $K_2$  ve  $K_3$  kümelerinin elemanlarıdır.



Şekil 2.3:  $\Lambda_4$  küpü için olası eşli baskın küme örnekleri

Azarija ve diğ., 2018 makalesinde bir çizgenin eşli baskınlık sayısını tam sayılı lineer program kullanarak belirleme çalışmaları sonucunda optimizasyon problemi literatüre sunulmuştur. Bu modelleme  $G$  çizgesinin eşli baskın köşe kümesi tarafından oluşturulan çizgesinde  $e \in E(G)$  kenarının mevcut olup olmadığını gösteren bir ikili değişken  $x_e$  tanımlanmaktadır. Lucas küplerinde daha büyük boyutlarda eşli baskınlık sayısının sayısal sonuçlarına ulaşmak için bu optimizasyon problemini kullanacağız. Sonuçları vermeden önce kısaca modellemeyi açıklayalım.

$$\gamma_p(G) = \min \left( 2 \sum_{e \in E(G)} x_e \right) \quad (2.1)$$

Kısıtlar:

$$\text{Her } v \in V(G) \text{ için } \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, \quad (2.2)$$

$$\text{Her } v \in V(G) \text{ için } \sum_{u \in N(v)} \sum_{w \in N(u)} x_{uw} \geq 1 \quad (2.3)$$

Çizgenin eşli baskın köşenin kümeleri yukarıda tanımlanan  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait ise bu köşelere 1 sayısı atanır eğer değilse 0 atanmaktadır. (2.1) de ifade edilen ise eşli baskınlık sayısında köşe kümesinin eleman sayısını baz aldığımız için elde edilen toplamın 2 katını almamız gerektiğidir. (2.2) ve (2.3) ise kısıtları belirtmektedir. Lucas küplerinde  $n \leq 10$  olmak üzere eşli baskınlık sayılarının köşe çiftlerini göstermek için Lucas küplerinin Fibonacci küplerinden oluşumunu ve yinelemeli yapısını kullanarak köşe kümelerini gösterdik.  $n = 11, 12$ , ve  $n = 13$  için sırasıyla  $L_{11} = 199$ ,  $L_{12} = 322$  ve  $L_{13} = 521$  kısıta sahip olduğundan kesin değerler 1 saatlik sürede elde edilememiştir bu sebeple biz elde ettiğimiz en iyi alt ve üst sınırları verdik. Sınırlar ile birlikte Çizelge 2.4 de Lucas küplerinde  $n \leq 10$  olmak üzere elde ettiğimiz eşli baskınlık sayısı değerleri ile birlikte verilmektedir.

Çizelge 2.4:  $n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün eşli baskınlık sayıları.

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma_p(\Lambda_n)$	2	2	4	6	8	10	14	20	28	40 – 42	56 – 62	80 – 98

Bu modellemeden faydalanarak 1 saatlik süre sonunda bulduğumuz sonuçlara göre  $n \leq 10$  için  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenarın hangi köşelere 1 sayısı atandığını hangi köşelere 0 atandığını ayrıntılı olarak vereceğiz. Burada  $V_1$ , 1 değerini alan köşe çiftlerini  $V_0$  ise 0 değerini alan köşeleri ifade etmektedir. Çizelge 2.5, Çizelge 2.6, Çizelge 2.7, Çizelge 2.8, Çizelge 2.9 da sırasıyla  $n = 2, 3, 4, 5$  ve  $n = 6$  için Lucas küplerinde  $V_0$  ve  $V_1$  kümelerinin elemanlarını gösterdik.

Çizelge 2.5:  $\Lambda_2$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 1 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_2) = 2$  olduğu görülmektedir.

$n = 2$	Küme elemanları
$V_1$	$\{01 \leftrightarrow 10\}$
$V_0$	$V(\Lambda_2) \setminus V_1$

Çizelge 2.6:  $\Lambda_3$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 1 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_3) = 2$  olduğu görülmektedir.

$n = 3$	Küme elemanları
$V_1$	$\{000 \leftrightarrow 100\}$
$V_0$	$V(\Lambda_3) \setminus V_1$

Çizelge 2.7:  $\Lambda_4$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 2 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_4) = 4$  olmaktadır.

$n = 4$	Küme elemanları
$V_1$	$\{0100 \leftrightarrow 0101, 1000 \leftrightarrow 1010\}$
$V_0$	$V(\Lambda_4) \setminus V_1$

Çizelge 2.8:  $\Lambda_5$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 3 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_5) = 6$  olmaktadır.

$n = 5$	Küme elemanları
$V_1$	$\{00000 \leftrightarrow 10000, 00001 \leftrightarrow 00101, 00010 \leftrightarrow 10010\}$
$V_0$	$V(\Lambda_5) \setminus V_1$

Çizelge 2.9:  $\Lambda_6$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 4 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_6) = 8$  olmaktadır.

$n = 6$	Küme elemanları
$V_1$	$\{001000 \leftrightarrow 001010, 010000 \leftrightarrow 010010, 010001 \leftrightarrow 010101, 100000 \leftrightarrow 100100\}$
$V_0$	$V(\Lambda_6) \setminus V_1$

Aşağıda Çizelge 2.10, Çizelge 2.11, Çizelge 2.12, Çizelge 2.13 de sırasıyla  $n = 7, 8, 9$  ve  $n = 10$  için Lucas küplerinde köşe çiftlerinin eşli baskınlık fonksiyonundaki değerleri yani  $V_0$  ve  $V_1$  kümelerinin elemanları yer almaktadır.

Çizelge 2.10:  $\Lambda_7$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 5 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_7) = 10$  olmaktadır.

$n = 7$	Küme elemanları
$V_1$	{0000001 $\leftrightarrow$ 0000101, 0000010 $\leftrightarrow$ 0001010, 0000100 $\leftrightarrow$ 0010100, 0001000 $\leftrightarrow$ 0101000, 0010000 $\leftrightarrow$ 1010000}
$V_0$	$V(\Lambda_7) \setminus V_1$

Çizelge 2.11:  $\Lambda_8$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 7 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_8) = 14$  olmaktadır.

$n = 8$	Küme elemanları
$V_1$	{00000100 $\leftrightarrow$ 00000101, 00001000 $\leftrightarrow$ 01001000, 00100000 $\leftrightarrow$ 00100001, 00001010 $\leftrightarrow$ 01001010, 01010000 $\leftrightarrow$ 01010001, 10010000 $\leftrightarrow$ 10010010, 10100000 $\leftrightarrow$ 10100010}
$V_0$	$V(\Lambda_8) \setminus V_1$

Çizelge 2.12:  $\Lambda_9$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 10 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_9) = 20$  olmaktadır.

$n = 9$	Küme elemanları
$V_1$	{000000010 $\leftrightarrow$ 010000010, 000000101 $\leftrightarrow$ 000100101, 000101000 $\leftrightarrow$ 000101010, 001001000 $\leftrightarrow$ 001001001, 001010000 $\leftrightarrow$ 001010100, 010000000 $\leftrightarrow$ 010001000, 100000000 $\leftrightarrow$ 100001000, 010010001 $\leftrightarrow$ 010010101, 100000010 $\leftrightarrow$ 101000010, 010100000 $\leftrightarrow$ 010100001}
$V_0$	$V(\Lambda_9) \setminus V_1$

Çizelge 2.13:  $\Lambda_{10}$  küpünde  $x_e$  değişkeninin belirttiği kenara ait köşe çiftleri 14 adet olduğu için  $\gamma_p(\Lambda_{10}) = 28$  olmaktadır.

$n = 10$	Küme elemanları
$V_1$	{0000000101 $\leftrightarrow$ 0000100101, 0000001001 $\leftrightarrow$ 0000101001, 0000001010 $\leftrightarrow$ 0000101010, 0000010001 $\leftrightarrow$ 0000010101, 0000010010 $\leftrightarrow$ 0001010010, 0001001010 $\leftrightarrow$ 0101001010, 0010000000 $\leftrightarrow$ 0010100000, 0100000000 $\leftrightarrow$ 0100100000, 0101000001 $\leftrightarrow$ 0101000101, 0101010000 $\leftrightarrow$ 0101010100, 1000001010 $\leftrightarrow$ 1010001010, 1000100000 $\leftrightarrow$ 1010100000, 1001000000 $\leftrightarrow$ 1001000100, 1010010000 $\leftrightarrow$ 1010010100}
$V_0$	$V(\Lambda_{10}) \setminus V_1$

## 2.2.2 Lucas küplerinde işaretli baskınlık sayısı

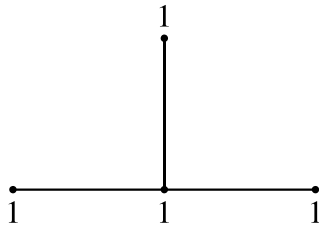
İşaretli baskınlık sayısının ilk çıkışını araştırdığımızda karşımıza Dunbar ve diğ. (1995) çalışması çıkmaktadır. Daha sonrasında işaretli baskınlık tipi çeşidi

özelleştirilmiş bazı çizgelerde dahil olmak üzere herhangi  $G$  çizgesindeki sayısal değerlere ve sınırlara ulaşmak için detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Azarija ve diğ. (2018) de işaretli baskınlık sayısını Fibonacci küplerinde çalışmış ve tanımlanan optimizasyon problemi sayesinde  $n \leq 10$  boyutları için sayısal değerler elde etmişlerdir. Eşli baskınlık sayısında olduğu gibi Lucas küplerinde daha önce çalışılmamıştır. İlk olarak tanımına bakalım sonra örneklerle detaylandırmaya çalışalım.

**Tanım 2.2.3.**  $G$  bir çizge ve  $f : V(G) \rightarrow \{-1, 1\}$  şeklinde tanımlansın. Her  $v \in V(G)$  için  $N[v] = \{v\} \cup \{u : uv \in E(G)\}$  ifadesi  $v$  köşesinin kapalı komşuluğu olarak tanımlanıyor. Eğer  $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$  sağlanıyorsa  $f$  işaretli baskın fonksiyon olarak adlandırılır. İşaretli baskınlık sayısı ise,  $\gamma_s(G)$ ,  $G$  çizgesinin bütün işaretli baskın  $f$  fonksiyonlarının toplamının,  $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ , alabileceği minimum değer olarak ifade edilir. Dunbar ve diğ. (1995)

İşaretli baskınlık sayısını şimdi Lucas küplerinde  $n = 3$  ve  $n = 4$  boyutlarında inceleyelim.

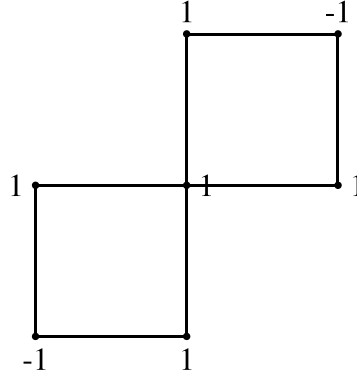
**Örnek 14.**  $\Lambda_3$  küpünde köşelerin  $f$  fonksiyonu altındaki görüntülerini öyle yerleştirmeliyiz ki her köşenin kapalı komşuluğundaki köşelerin  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüleri toplamı en az 1 olmalıdır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_3) = 4$  olduğu Şekil 2.4 de görülmektedir.



Şekil 2.4:  $\Lambda_3$  küpü için bir işaretli baskın  $f$  fonksiyonu

$\Lambda_4$  küpü için işaretli baskınlık sayısını bulmak istediğimizde köşelerin  $f$  fonksiyonu altındaki görüntülerini Şekil 2.5 deki gibi yerleştirerek toplamalarının minimum değerine ulaşabiliriz. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_4) = 3$  olduğu görülmektedir.





Şekil 2.5:  $\Lambda_4$  küpünde bir işaretli baskın  $f$  fonksiyonu

Benzer şekilde, işaretli baskınlık sayısını modellemek için Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında, her  $v \in V(G)$  köşesiyle bağlantılı bir şekilde  $v$ 'ye sıralı bir şekilde 1 veya  $-1$  görüntüsünün verilir ve verilmemesini gösteren bir  $x_v$  ikili değişkeni tanımlanmıştır.  $f$  fonksiyonunda  $v$  köşesinin işaretli baskınlık görüntüsü  $-1$  ise  $x_v = 0$ , 1 ise  $x_v = 1$  olmak üzere, aşağıdaki tam sayılı lineer programlama modeli sunulmuştur.

$$\min \sum_{v \in V(G)} (2x_v - 1) \quad (2.4)$$

Kısıt:

$$v \in V(G) \text{ olmak üzere } \sum_{u \in N[v]} (2x_u - 1) \geq 1 \quad (2.5)$$

Burada (2.4) herhangi bir  $G$  çizgesindeki her  $v$  köşesinin işaretli baskın  $f$  fonksiyonu görüntüsü altındaki aldığı değerlerin toplamının minimum değerini belirtmektedir. (2.5) kısıtından çıkarmamız gereken tanımda ifade edilen her  $v$  köşesinin kapalı komşuluğunda yer alan bütün köşelerin işaretli baskın  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüleri toplamının en az 1 e eşit yada büyük olması gerektiğini göstermektedir. (2.5) eşitsizlikleri ile verilen kısıtlar altında (2.4) deki amaç fonksiyonu değerleri Lucas küpleri için hesapladığımızda Çizelge 2.14 deki sonuçları elde ettik.

Çizelge 2.14:  $n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün işaretli baskınlık sayıları.

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma_s(\Lambda_n)$	3	4	3	5	6	13	15	20	35	57- 59	72-86	103-139
$ V(\Lambda_n) $	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

Bu modellemeden faydalanarak bulduğumuz sonuçlara göre Lucas küplerinde  $n \leq 10$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunda  $v$  köşesinin işaretli baskınlık görüntüsü  $-1$  olduğu zaman  $x_v = 0$ , 1 olduğunda ise  $x_v = 1$  olmak üzere için hangi köşelerin  $-1$  hangi köşelerin 1 değerini aldığını belirttik.  $11 \leq n \leq 13$  için toplam değişken ve kısıt sayıları sırasıyla  $L_{11} = 199$ ,  $L_{12} = 322$  ve  $L_{13} = 521$  olduğundan kesin değerler 1 saatlik sürede elde edilememiştir bu nedenle elde ettiğimiz en iyi alt ve üst sınırları verdik. Çizelgelerde  $V_0$  olarak verilen kümedeki köşeler  $-1$  değerini,  $V_1$  olarak belirtilen kümedeki köşeler ise 1 değerini almaktadır.

$\Lambda_2$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan köşe yoktur.  $\Lambda_2$  küpünün 3 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_2) = 3$  olduğu Çizelge 2.15 da görülmektedir.

Çizelge 2.15:  $\Lambda_2$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 2$	Küme elemanları
$V_0$	$\{\emptyset\}$
$V_1$	$V(\Lambda_2) \setminus V_0$

$\Lambda_3$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan köşe yoktur.  $\Lambda_3$  küpünün 4 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_3) = 4$  olduğu Çizelge 2.16 de görülmektedir.

Çizelge 2.16:  $\Lambda_3$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 3$	Küme elemanları
$V_0$	$\{\emptyset\}$
$V_1$	$V(\Lambda_3) \setminus V_0$

$\Lambda_4$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 2 köşe vardır.  $\Lambda_4$  küpünün geriye kalan 5 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_4) = 3$  olduğu Çizelge 2.17 de görülmektedir.

Çizelge 2.17:  $\Lambda_4$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 4$	Küme elemanları
$V_0$	$\{0101, 1010\}$
$V_1$	$V(\Lambda_4) \setminus V_0$

$\Lambda_5$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 3 köşe vardır.  $\Lambda_5$  küpünün geriye kalan 8 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_5) = 5$  olduğu Çizelge 2.18 da görülmektedir.

Çizelge 2.18:  $\Lambda_5$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 5$	Küme elemanları
$V_0$	$\{00001, 00010, 10100\}$
$V_1$	$V(\Lambda_5) \setminus V_0$

$\Lambda_6$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 6 köşe vardır.  $\Lambda_6$  küpünün geriye kalan 12 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_6) = 6$  olduğu Çizelge 2.19 de görülmektedir.

Çizelge 2.19:  $\Lambda_6$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 6$	Küme elemanları
$V_0$	$\{000000, 001001, 010010, 010101, 100100, 101010\}$
$V_1$	$V(\Lambda_6) \setminus V_0$

$\Lambda_7$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 8 köşe vardır.  $\Lambda_7$  küpünün geriye kalan 21 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_7) = 13$  olduğu Çizelge 2.20 de görülmektedir.

Çizelge 2.20:  $\Lambda_7$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 7$	Küme elemanları
$V_0$	{00000000, 0001001, 0010101, 0100101, 0101010, 1001010, 1010010, 1010100}
$V_1$	$V(\Lambda_7) \setminus V_0$

$\Lambda_8$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 16 köşe vardır.  $\Lambda_8$  küpünün geriye kalan 31 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_8) = 15$  olduğu Çizelge 2.21 de görülmektedir.

Çizelge 2.21:  $\Lambda_8$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 8$	Küme elemanları
$V_0$	{00000000, 00000100, 00010000, 00010001, 00100001, 00100010, 00101010, 01000101, 01001001, 01001010, 01010010, 01010101, 10000010, 10001000, 10100100, 10101000}
$V_1$	$V(\Lambda_8) \setminus V_0$

$\Lambda_9$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 28 köşe vardır.  $\Lambda_9$  küpünün geriye kalan 48 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_9) = 20$  olduğu Çizelge 2.22 de görülmektedir.

Çizelge 2.22:  $\Lambda_9$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 9$	Küme elemanları
$V_0$	{000000000, 000000101, 000001010, 000010100, 000100101, 000101000, 000101001, 001000101, 001001010, 001010000, 001010001, 001010010, 010000001, 010001001, 010001010, 010010001, 010010100, 010100000, 010100010, 010100100, 100000010, 100010010, 100010100, 100100010, 100101000, 101000100, 101001000, 101000000}
$V_1$	$V(\Lambda_9) \setminus V_0$

$\Lambda_{10}$  küpünde görüntüsü  $-1$  olan 44 köşe vardır.  $\Lambda_{10}$  küpünün geriye kalan 79 köşesi de 1 değerini almaktadır. Dolayısıyla  $\gamma_s(\Lambda_{10}) = 35$  olduğu Çizelge 2.23 de görülmektedir.

Çizelge 2.23:  $\Lambda_{10}$  küpünün köşelerinin İşaretli baskınlık fonksiyonu görüntüleri

$n = 10$	Küme elemanları
$V_0$	{0000000000, 0000000100, 0000001000, 0000001010, 0000010010, 0000100010, 0001000100, 0001000101, 0001001001, 0001010000, 0001010001, 0010000000, 0010001001, 0010010001, 0010010010, 0010010101, 0010100010, 0010100100, 0010100101, 0010101001, 0100000000, 0100000101, 0100010000, 0100010101, 0100100010, 0100100101, 0100101000, 0100101001, 0101000010, 0101001001, 0101001010, 0101010000, 1000010010, 1000010100, 1000100000, 1000100100, 1000101000, 1001000000, 1001000010, 1001001000, 1010000000, 1010001010, 1010010100, 1010101010}
$V_1$	$V(\Lambda_{10}) \setminus V_0$

### 2.2.3 Lucas küplerinde roman baskınlık sayıları

Roman baskınlık sayısının motivasyonu Milattan sonra Roma İmparatorluğu'nu korumak için bir savunma stratejisinden doğmuştur. Roman baskınlık problemini sadece savunma stratejisi olarak düşünmemeliyiz. Genel olarak dağıtım ve kargolama problemlerine de kolaylıkla uyarlanabilir. Örneğin, bir şehrin veya mahallenin online market uygulamalarının ürün deposu veya e ticaret sitelerinin kurye merkezi ihtiyaçlarının hızlı ve hiçbir aksaklık olmadan yürütülmesi için hangi noktaların seçilmesi gerektiği problemine uyarlanabilir. Bir ilçeye bağlı bütün mahalleleri göz önüne alalım. Diyelim ki bazı mahallelerde ürün deposu olmasın. Eğer bu mahallelerin komşularından en az birinde 2 ürün deposuna sahip ise herhangi bir ihtiyaç durumunda bu birimler birer ürün deposunu imkanı olmayan bu mahallelerin kullanımına açabilirler. Böylelikle bu ürün deposu alt yapısına sahip mahalleler herhangi bir sıkıntı çekmeden imkanları olmayan diğer mahallelerin ihtiyaçlarını giderebilirler. Hatta aynı anda iki farklı mahallenin depo kullanımına ihtiyacı varsa bu iki mahallenin ortak komşuluğunda olan ve en az 2 depoya sahip mahalle her iki mahalleye de aynı zamanda ürün deposunu kullanıma açabilir. Bu şekilde ihtiyaçların giderilmesi bir Roman tipi baskınlık problemi olarak açıklanabilir.

Bir  $G$  çizgesindeki her köşe bir ilçedeki mahalleleri gösterebilir. Bir  $v$  köşesi ürün deposuna sahip değilse Roman baskınlık fonksiyonu,  $f$ , değeri 0'dır. Yani  $f(v) = 0$  olur. Eğer  $G$  çizgesindeki bir  $v$  köşesi ürün deposuna sahip ise  $f(v) \in \{1, 2\}$  dir. Bir  $v$  köşesinden depoya sahip olmayan komşu bölgenin kullanımına açmadan önce  $f(v) = 2$  olduğu kontrol edilmelidir. Maliyeti azaltmak ama aynı zamanda bütün mahallelerin ürün ihtiyaçlarını hızlı bir şekilde giderebilmek ise  $f$  fonksiyonunun ağırlığı olan  $w(f)$  ile ifade edilir.  $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$  dir ve dolayısıyla amaç bu toplamın en az değerine ulaşmaktır (Henning ve Hedetniemi, 2003).

Roman baskınlık sayısı, Çift roman baskınlık sayısı ve zayıf roman baskınlık sayısının sayısal özellikleri ve bulunulan sınırları Yılmaz (2022) çalışmasında incelenmiştir. Yılmaz (2022) çalışmasında roman baskınlık sayısı, Çift roman baskınlık sayısı ve zayıf roman baskınlık sayısının optimizasyon problemleri bilgisayar ortamında çalıştırılarak Fibonacci küplerinde incelemiş ve Roman baskınlık sayısı için  $n \leq 10$  boyutuna kadar kesin değerleri elde edebilirken  $n = 11, 12, 13$  boyutları için sınır değerler elde edilmiştir. Zayıf roman baskınlık sayısı için  $n \leq 8$  boyutuna kadar kesin değerleri elde edebilirken  $n = 9, 10, 11, 12, 13$  boyutları için sınır değerler elde edebilmiştir. Çift roman baskınlık sayısı için ise  $n \leq 10$  boyutuna kadar kesin değerleri elde edilirken  $n = 11, 12, 13$  boyutları için sınır değerler elde edilmiştir.

Biz bu tezde Roman baskınlık değişmezinin, Çift roman baskınlık değişmezinin ve Zayıf roman baskınlık değişmezinin optimizasyon problemlerini Lucas küpleri için bilgisayar ortamında çalıştırarak elde ettiğimiz değerleri ve sınırları vereceğiz.

**Tanım 2.2.4.**  $G$  bir çizge ve  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  fonksiyonu  $G$  üzerinde bir fonksiyon olsun.  $f(u) = 0$  olan her  $u$  köşesi en az bir tane  $f(v) = 2$  olan bir  $v$  köşesine komşuysa  $f$  fonksiyonu Roman baskınlık fonksiyonu olarak tanımlanır.

**Tanım 2.2.5.** Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığı  $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$  dir.  $G$  çizgesinin Roman baskınlık sayısı Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının en küçük değeridir ve  $\gamma_R(G)$  ile gösterilir.

**Önerme 2.2.6.** Herhangi bir  $G$  çizgesi için,

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. (Cockayne ve diğ., 2004).

**Önerme 2.2.7.** Köşe sayısı  $n$  ve en büyük derecesi  $\Delta$  olan herhangi  $G$  çizgesi için,

$$\frac{2n}{\Delta+1} \leq \gamma_R(G) \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. (Cockayne ve diğ., 2004).

Roman baskınlık değişmezinin literatürde oluşturulmuş 4 farklı tam sayı lineer programlama bulunmaktadır. İlk lineer programlama problemi  $\mathcal{RR}$  olarak isimlendirilmiştir. Bu lineer problem Revelle ve Rosing (2000) tarafından çalışılmıştır.  $\mathcal{BVV}$  formülasyonu olarak bilinen problem Burger ve diğ. (2013) tarafından kullanılmıştır. Daha sonrasında bu optimizasyon problemlerinin geliştirilmiş versiyonları yapılmıştır. Bizim bu çalışmamızda  $\mathcal{RR}$  ve  $\mathcal{BVV}$  formülasyonlarını açıklanmaktadır. Fakat Lucas küplerindeki sonuçlarını elde edebilmek için  $\mathcal{BVV}$  formülasyonunu kullandık.

**$\mathcal{RR}$  Formülasyonu**  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  ye tanımlanan  $f$  fonksiyonu ve  $i \in V$  için değişkenler şu şekilde tanımlanır.

$$x_i = \begin{cases} 1, & f(i) \geq 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & f(i) = 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Roman Baskınlık Probleminin  $\mathcal{RR}$  formülasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\min \sum_{i \in V} x_i + \sum_{i \in V} y_i \quad (2.8)$$

Kısıtlar:

$$x_i + \sum_{j \in N_i} y_j \geq 1, \quad i \in V \quad (2.9)$$

$$y_i \leq x_i, \quad i \in V \quad (2.10)$$

$$x_i, y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V \quad (2.11)$$

(2.8) de verilen amaç fonksiyonu mahallelerde kullanılan toplam ürün depo sayısını ifade etmektedir. (2.9) deki koşullar her mahallede depo olduğunu veya komşu mahallelerde iki depoya sahip mahalle olduğunun garantisini vermektedir. (2.10) da iki depoya sahip bölgede bir aksama olmayacağını ifade etmektedir. Karar değişkenleri  $x_i$  ve  $y_i$ , (2.11) koşulu tarafından ikili olarak korunmaktadır.  $\mathcal{RR}$  formülasyonu  $2|V|$  ikili değişken ve  $2|V|$  adet koşul içermektedir.

**$\mathcal{BVV}$  formülasyonu**  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  kümesine tanımlanan  $f$  fonksiyonu için

$$x_i = \begin{cases} 1, & f(i) = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & f(i) = 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\mathcal{BVV}$  tam sayı lineer programlamasında  $V_1$  kümesi  $x_i = 1$  olan köşeler iken  $V_2$  kümesi  $y_i = 1$  olan köşelerin temsil edildiği kümeleri göstermektedir.  $V_0$  kümesi  $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$  olmak üzere (2.13), (2.14) ve (2.15) koşullarının altında (2.12) teki elde edilebilecek minimum değer bir  $G$  çizgesinin Roman Baskınlık sayısını vermektedir.

$$\min \sum_{i \in V} x_i + 2 \sum_{i \in V} y_i \quad (2.12)$$

Kısıtlar:

$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i + y_i + \sum_{j \in N_i} y_j \geq 1, \quad (2.13)$$

$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i + y_i \leq 1, \quad (2.14)$$

$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i, y_i \in \{0, 1\} \quad (2.15)$$

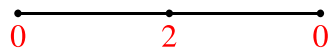
(2.12) verilen amaç fonksiyonu mahallelerde kullanılan toplam ürün depo sayısını gösterir. (2.13) kısıtı ürün deposu olmayan mahallenin komşu mahallelerinde iki depoya sahip en az bir mahalle olduğunun garantisini vermektedir. (2.14) koşulu bir mahalleye ya 1 depo ya da 2 depo yerleştirebileceğimizi bunun sonucunda  $x_i + y_i$  toplamının en fazla 1 değeri alabileceğini göstermektedir. Karar değişkenlerimiz  $x_i$  ve  $y_i$ , (2.15) koşulu tarafından ikili olarak korunmaktadır.  $\mathcal{BVV}$  formülasyonu  $2|V|$  ikili değişken ve  $2|V|$  adet koşul içermektedir.

Aşağıda  $n \leq 11$  boyutuna kadar  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundan faydalanılarak Lucas küpleri için elde edilmiş değerleri ve karar değişkenini oluşturan bu köşelerin fonksiyonda hangi kümeye ait olduğunu gösterdik.  $12 \leq n \leq 13$  boyutlarında köşe kümeleri çok fazlar arttığı için bilgisayar ortamında 1 saat gibi bir süre çalıştırarak sınır değerlerini belirledik. Bu karar değişkenlerinin Lucas küplerinde hangi köşeleri temsil ettiğinin belirlenmesinde ise Fibonacci küplerinin temel ayrışım prensibi ve Lucas küplerinin Fibonacci küplerinden oluşan yinelemeli yapısından yararlandık.

Çizelge 2.24 den  $\{00\}$  köşesinin  $V_2$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.6 da ise bu köşenin  $\Lambda_2$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_R(\Lambda_2) = 2$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.24:  $\Lambda_2$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{00\}$
$V_0$	$V(\Lambda_2) \setminus (V_1 \cup V_2)$

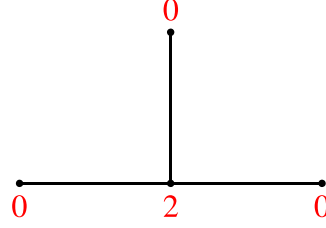


Şekil 2.6:  $\Lambda_2$  küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.25 den  $\{000\}$  köşesinin  $V_2$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.7 de ise bu köşenin  $\Lambda_3$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_R(\Lambda_3) = 2$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.25:  $\Lambda_3$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_3) \setminus (V_1 \cup V_2)$

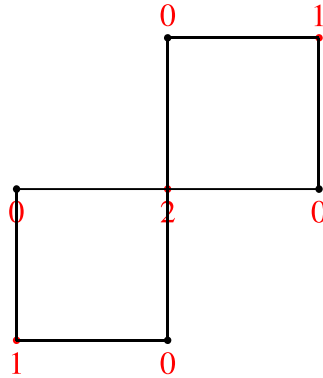


Şekil 2.7:  $\Lambda_3$  küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.26 den  $\{0101, 1010\}$  köşelerinin  $V_1$ ,  $\{0000\}$  köşesinin ise  $V_2$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.8 de ise bu köşelerin  $\Lambda_4$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_R(\Lambda_4) = 4$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.26:  $\Lambda_4$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{0101, 1010\}$
$V_2$	$\{0000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_4) \setminus (V_1 \cup V_2)$

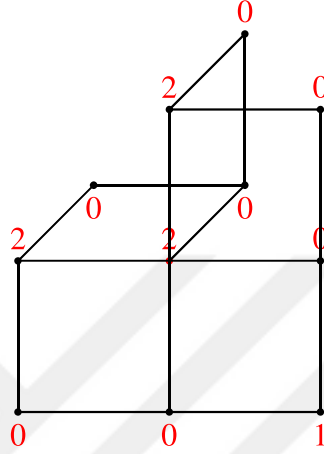


Şekil 2.8:  $\Lambda_4$  küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.27 den  $\{00000, 00010, 00100\}$  köşelerinin  $V_2$  kümesine,  $\{01001\}$  köşesinin ise  $V_1$  ait olduğunu Şekil 2.9 da ise bu köşelerin  $\Lambda_5$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_R(\Lambda_5) = 7$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.27:  $\Lambda_5$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{01001\}$
$V_2$	$\{00000, 00010, 00100\}$
$V_0$	$V(\Lambda_5) \setminus (V_1 \cup V_2)$



Şekil 2.9:  $\Lambda_5$  küpündeki Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Bilgisayarda  $\mathcal{BVV}$ - formülasyonunu 1 saat gibi bir süre çalıştırarak  $\Lambda_n$  küpünde  $n = 11$  boyutuna kadar Roman baskınlık sayıları hesaplanabilmektedir. Fakat  $n = 6, 7, 8, 9, 10$  ve  $n = 11$  için köşe sayıları çok arttığından dolayı el ile gösterimi oldukça zorlamaktadır. Bu sebeple Çizelge 2.28, Çizelge 2.29, Çizelge 2.30, Çizelge 2.31, Çizelge 2.32, Çizelge 2.33 de sırasıyla  $n = 6, 7, 8, 9, 10$  ve  $n = 11$  için Lucas küplerinin köşelerinin ait olduğu karar değişkeni kümeleri gösterilmektedir.

Çizelge 2.28:  $\Lambda_6$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_6) = 9$  dur.

$n = 6$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{001001, 010010, 100100\}$
$V_2$	$\{000000, 010101, 101010\}$
$V_0$	$V(\Lambda_6) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.29:  $\Lambda_7$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_7) = 14$  dür.

$n = 7$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{0100100, 0100101\}$
$V_2$	$\{0000001, 0010100, 0000010, 0101000, 1000000, 1000010\}$
$V_0$	$V(\Lambda_7) \setminus (V_1 \cup V_2)$



Çizelge 2.30:  $\Lambda_8$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_8) = 21$  dir.

$n = 8$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{00010001\}$
$V_2$	$\{00000101, 00001001, 00001010, 00010010, 00100000, 01000000, 01010101, 10001010, 10010100, 10100000, \}$
$V_0$	$V(\Lambda_8) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.31:  $\Lambda_9$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_9) = 30$  dur.

$n = 9$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{010101001, 101010000\}$
$V_2$	$\{000001001, 000001010, 000010010, 000100101, 000101010, 001000100, 001010001, 010000000, 010010101, 010100000, 100010100, 100100000, 101000010, 101001000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_9) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.32:  $\Lambda_{10}$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_{10}) = 45$  dir.

$n = 10$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{0001000100, 0010000010, 0100101000\}$
$V_2$	$\{0000001010, 0000010000, 0000100101, 0000101001, 0001000001, 0010001001, 1010101010, 0010010101, 0010100000, 0100000001, 0100000100, 1010000100, 0100100010, 0101001000, 1010010010, 0101010010, 0101010101, 1000001000, 1000100000, 1001000010, 1001010100\}$
$V_0$	$V(\Lambda_{10}) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.33:  $\Lambda_{11}$  küpünün  $\mathcal{BVV}$  formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir ve  $\gamma_R(\Lambda_{11}) = 69$  dur.

$n = 11$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{10100001000\}$
$V_2$	$\{00000100001, 00000100010, 00000101000, 00001000101, 00001010001, 00001010010, 00010000101, 00010001000, 00010010100, 00100001001, 00100001010, 00100010010, 00100010101, 00100100100, 00101000000, 01000000000, 01000000101, 01001001001, 01001001010, 01001010100, 01010010001, 01010010010, 01010100100, 01010101001, 01010101010, 10000000100, 10000010000, 10000101010, 10001001000, 10010000010, 10010100000, 10100100000, 10101000010, 10101010100\}$
$V_0$	$V(\Lambda_{11}) \setminus (V_1 \cup V_2)$

$n = 11$  boyutuna kadar kesin değerler elde ettiğimizden dolayı karar değişken kümelerini gösterebildik. Fakat  $\mathcal{BVV}$  formülasyonu ile 1 saat çalıştırarak Lucas

küplerinde  $n = 12$  ve  $n = 13$  için köşe sayısı çok hızlı arttığından dolayı elde ettiğimiz sınır değerlerini elde ettik. Şimdi  $\mathcal{BVV}$  formülasyonunun 1 saat çalıştırılması ile elde edilen sınır değerlerini Çizelge 2.34 da vereceğiz.  $n = 12$  ve  $n = 13$  boyutları için Çizelge 2.34 de sıralı bir şekilde alt sınırın 98 ve 142 üst sınırların ise 105 ve 164 olduğunu görüyoruz.

Çizelge 2.34:  $n \leq 13$  için  $\Lambda_n$  küpünün alt ve üst sınırları ve  $\mathcal{BVV}$  - formülasyonu ile elde edilen sonuçlar.

$n$	$\frac{2 V(\Lambda_n) }{\Delta + 1}$	$\leq \gamma_R(\Lambda_n) \leq 2\gamma(\Lambda_n)$	$\gamma_R(\Lambda_n)$
2		$2 \leq \gamma_R(\Lambda_2) \leq 2$	2
3		$2 \leq \gamma_R(\Lambda_3) \leq 2$	2
4		$2 \leq \gamma_R(\Lambda_4) \leq 6$	4
5		$3 \leq \gamma_R(\Lambda_5) \leq 8$	7
6		$5 \leq \gamma_R(\Lambda_6) \leq 10$	9
7		$7 \leq \gamma_R(\Lambda_7) \leq 14$	14
8		$10 \leq \gamma_R(\Lambda_8) \leq 22$	21
9		$15 \leq \gamma_R(\Lambda_9) \leq 32$	30
10		$22 \leq \gamma_R(\Lambda_{10}) \leq 46$	45
11		$33 \leq \gamma_R(\Lambda_{11}) \leq 70$	69
12		$49 \leq \gamma_R(\Lambda_{12}) \leq 108$	$98 \leq \gamma_R(\Lambda_{12}) \leq 105$
13		$74 \leq \gamma_R(\Lambda_{13}) \leq 172$	$142 \leq \gamma_R(\Lambda_{13}) \leq 164$

## 2.2.4 Lucas küplerinde çift Roman baskınlık sayıları

Beeler ve diğ. (2016) çalışmasında sunulan yöntem ise olası bir saldırıda yetersiz olan bölgeyi en az 2 ordunun korumasını amaçlayan Roman baskınlık değişmezine göre daha kuvvetli bir değişmezdir. Roman baskınlık tipinde bir mahalleye maksimum 2 farklı ürün deposu kurulacağından bahsetmiştik. Buradaki problemde ise stratejik olarak seçilmiş olan mahalleye 3 tane ürün deposu yerleştirebiliriz. Bu durum daha az maliyet ile daha hızlı şekilde ihtiyaçların giderilmesine imkan sağlamaktadır.

**Tanım 2.2.8.**  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu fonksiyona Çift Roman baskınlık fonksiyonu (double Roman dominating function) denir.

$f$  fonksiyonu tarafından  $i$  değeri atanmış köşelerin kümesi  $V_i$  olmak üzere;

(a) eğer  $f(v) = 0$  ise  $v$  köşesinin ya  $V_2$  kümesinde en az iki komşusu ya da  $V_3$  kümesinde en az bir komşusu olması zorunludur.

(b) eğer  $f(v) = 1$  ise  $v$  köşesinin  $V_2 \cup V_3$  kümesinde en az bir komşusu olması zorunludur.

**Önerme 2.2.9.**  $\gamma_{dR}(G)$  ağırlıklı çift Roman baskınlık fonksiyonunda hiçbir köşeye 1 değeri atanması zorunlu değildir. (Beeler ve diğ. 2016).

**Önerme 2.2.10.**  $G$  bir çizge olsun.  $f = (V_0, V_1, V_2)$  olarak tanımlanan  $G$  çizgesinin bir  $\gamma_{DR}$  - fonksiyonu olmak üzere

$$\gamma_{DR}(G) \leq 2|V_1| + 3|V_2| \quad \text{dir (Beeler ve diğ. 2016).} \quad (2.16)$$

**Teorem 2.2.11.**  $\Delta$  en büyük dereceli ve  $n$  köşe sayılı herhangi bir  $G$  çizgesi için,

$$\gamma_{DR}(G) \geq \frac{2n}{\Delta} + \frac{\Delta - 2}{\Delta} \gamma(G) \quad \text{dir (Yue ve diğ., 2018).} \quad (2.17)$$

**Sonuç 2.2.12.** Eğer  $G$  çizgesi aşikar olmayan bağlı bir çizge ve  $G$  çizgesinin  $V_2$  kümesindeki köşelerinin sayısını en yüksek büyüklüğe çıkaran  $f = (V_0, V_1, V_2)$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu bir Roman baskınlık fonksiyonu ise,  $\gamma_{DR}(G) \leq 2\gamma_R(G) - |V_2|$  eşitsizliği sağlanır (Beeler ve diğ. 2016).

Çift Roman Baskınlık değişiminin Lucas küplerindeki değerlerini elde edebilmek için **DRDP - 1** optimizasyon problemini kullanacağız. Bu optimizasyon probleminin yanısıra **DRDP - 2** problemi Cai ve diğ. (2019) tarafından yapılan çalışmada karşımıza çıkmaktadır.

#### **DRDP-1 tam sayı lineer programlama**

**DRDP-1** tam sayı lineer programlamasında Cai ve diğ. (2019) tarafından üç farklı ikili değişkenler kümesi tanımlanmaktadır.  $V_1$  kümesi  $x_v = 1$ ,  $V_2$  kümesi  $y_v = 1$  ve  $V_3$  kümesi ise  $z_v = 1$  değişkenlerinin temsil edildiği kümeleri göstermektedir.  $V_0$  kümesi  $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$  olmak üzere her  $v \in V$  köşesi için

$$x_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 1 \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad y_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 2 \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad z_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 3 \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.18) daki toplamın en az değerini elde etmek istediğimiz bu problemde belirtilen köşeler için (2.19), (2.20), (2.21) ve (2.22) koşullarının sağlanması gerekir. Elde edilen minimum toplam çift Roman baskınlık sayısını vermektedir.

$$[\text{DRDP-1}] \quad \min \sum_{v \in V} x_v + 2 \sum_{v \in V} y_v + 3 \sum_{v \in V} z_v \quad (2.18)$$

Kısıtlar:

$$\forall v \in V \quad \text{için} \quad x_v + y_v + z_v + \frac{1}{2} \sum_{u \in N(v)} y_u + \sum_{u \in N(v)} z_u \geq 1, \quad (2.19)$$

$$\forall v \in V \quad \text{için} \quad \sum_{u \in N(v)} y_u + \sum_{u \in N(v)} z_u \geq x_v, \quad (2.20)$$

$$\forall v \in V \quad \text{için} \quad x_v + y_v + z_v \leq 1, \quad (2.21)$$

$$\forall v \in V \quad \text{için} \quad x_v, y_v, z_v \in \{0, 1\} \quad (2.22)$$

Yukarıdaki kısıtları kısaca açıklamak gerekirse  $\gamma_{DR}$  - fonksiyonunda aldığı değer 0 olan her köşenin en az bir 3 değerini almış veya 2 değerini almış olan en az iki köşeye komşu olması gerektiğini sağlayan kısıt (2.19) dir. Eğer  $\gamma_{DR}$  - fonksiyonunda aldığı değer 1 ise bu durumda 1 olan köşenin değeri 2 ya da 3 olan en az bir köşeye

komşuluğunun gerçekleşmesini sağlayan kısıt (2.20) dir. Son olarak  $\gamma_{dR}$  - fonksiyonunda alınan değerlerin başka bir deyişle her köşenin sadece bir tane değer aldığı gösteren kısıt ise (2.21) de verilmektedir.

**DRDP - 1** formülasyonundan faydalanarak Yılmaz (2022) çalışmasında Fibonacci küplerinde  $n \leq 10$  olmak üzere Çift Roman Baskınlık sayısının değerlerini elde etmişlerdir. Fakat  $11 \leq n \leq 13$  için sınır değerlerine ulaşmışlardır. Biz bu çalışmamızda **DRDP - 1** formülasyonunu kullanarak Lucas küplerinde  $n \leq 10$  olmak üzere elde ettiğimiz Çift Roman Baskınlık sayılarının değerlerini ve  $11 \leq n \leq 13$  için elde ettiğimiz sınır değerlerini verdik. Aşağıda  $n \leq 10$  a kadar Lucas küplerinde hangi köşelerin  $\gamma_{dR}$  - fonksiyonunda karar değişkenlerinin hangi değerleri aldığı açıkça gösterilmektedir. Bu karar değişkenlerinin Lucas küplerinde hangi köşeleri temsil ettiğinin belirlenmesinde ise Fibonacci küplerinin temel ayrışım prensibi ve Lucas küplerinin Fibonacci küplerinden oluşan yinelemeli yapısından yararlandık. Çizelge 2.35 dan  $\{00\}$  köşesinin  $V_3$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.10 da ise bu köşenin  $\Lambda_2$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_{dR}(\Lambda_2) = 3$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.35:  $\Lambda_2$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\emptyset$
$V_3$	$\{00\}$
$V_0$	$V(\Lambda_2) \setminus V_3$

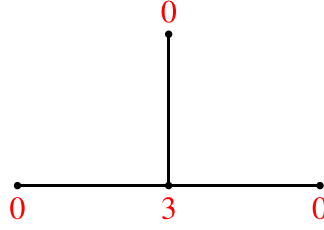


Şekil 2.10:  $\Lambda_2$  küpündeki  $\gamma_{dR}$  - fonksiyon değerleri

Çizelge 2.36 den  $\{000\}$  köşesinin  $V_3$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.11 de ise bu köşenin  $\Lambda_3$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_{dR}(\Lambda_3) = 3$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.36:  $\Lambda_3$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\emptyset$
$V_3$	$\{000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_3) \setminus V_3$



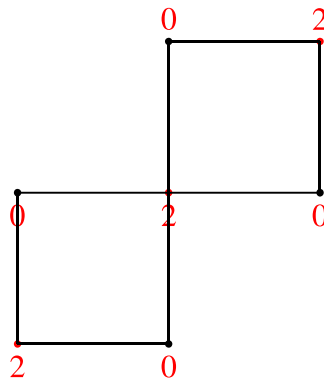
Şekil 2.11:  $\Lambda_3$  küpündeki  $\gamma_{dR}$  - fonksiyon değerleri

Çizelge 2.37 de  $\{0101, 0000, 1010\}$  köşelerinin  $V_2$  kümesine ait olduğu ifade edilmektedir.

Çizelge 2.37:  $\Lambda_4$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{0101, 0000, 1010\}$
$V_3$	$\emptyset$
$V_0$	$V(\Lambda_4) \setminus V_2$

Şekil 2.12 de ise bu köşelerin  $\Lambda_4$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_{dR}(\Lambda_4) = 6$  olduğu görülmektedir.

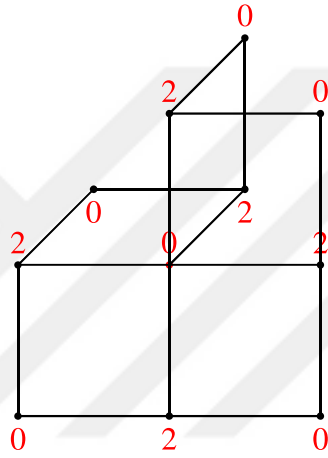


Şekil 2.12:  $\Lambda_4$  küpündeki  $\gamma_{dR}$  - fonksiyon değerleri

Çizelge 2.38 dan  $\{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\}$  köşelerinin  $V_2$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.13 de ise bu köşelerin  $\Lambda_5$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_{dR}(\Lambda_5) = 10$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.38:  $\Lambda_5$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\}$
$V_3$	$\emptyset$
$V_0$	$V(\Lambda_5) \setminus V_2$



Şekil 2.13:  $\Lambda_5$  küpündeki  $\gamma_{dR}$  - fonksiyon değerleri

$n = 6, 7, 8, 9$  ve  $n = 10$  için köşe sayıları çok arttığından dolayı el ile çizimi çok zor olmaktadır. Bundan dolayı aşağıdaki Çizelge 2.39 da  $\gamma_{dR}(\Lambda_6) = 14$ , Çizelge 2.40 de  $\gamma_{dR}(\Lambda_7) = 21$ , Çizelge 2.41 de  $\gamma_{dR}(\Lambda_8) = 32$ , Çizelge 2.42 de  $\gamma_{dR}(\Lambda_9) = 46$ , Çizelge 2.43 de  $\gamma_{dR}(\Lambda_{10}) = 68$  değerlerini elde ettiğimiz köşe kümeleri ayrıntılı bir şekilde gösterilmektedir.

Çizelge 2.39:  $\Lambda_6$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 6$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{001001\}$
$V_3$	$\{000101, 001010, 010000, 100000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_6) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 2.40:  $\Lambda_7$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 7$	Küme Elemanları
$V_1$	{1010010}
$V_2$	{0010010}
$V_3$	{0000001, 0001010, 0010100, 0100000, 0100001, 1000000}
$V_0$	$V(\Lambda_7) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$

Çizelge 2.41:  $\Lambda_8$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 8$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	{01001010}
$V_3$	{10101010, 10000000, 01010101, 01000000, 00101010, 00100100, 00010100, 00010010, 00001001, 00000001}
$V_0$	$V(\Lambda_8) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 2.42:  $\Lambda_9$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 9$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	{000101010, 001010101}
$V_3$	{000000100, 000010010, 000010100, 000101001, 001000001, 001001010, 010001000, 010010001, 010100010, 010100101, 100001010, 100100000, 101000000, 101010000}
$V_0$	$V(\Lambda_9) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 2.43:  $\Lambda_{10}$  küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki  $V_1, V_2, V_3$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 10$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	{0001010010, 00010001000, 1001000100, 1001010000}
$V_3$	{0000000100, 0000010001, 0000010100, 0000100000, 0001000001, 0001001010, 0010000010, 0010000101, 0010101001, 0100001001, 0100010010, 0100100101, 0100101010, 0101000000, 0101010101, 1000000010, 1000001000, 1010010000, 1010100100, 1010101010}
$V_0$	$V(\Lambda_{10}) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Boyut büyüdükçe bilgisayar ortamında çalıştırdığımız 1 saatlik süre içinde  $n = 11$ ,  $n = 12$  ve  $n = 13$  için program kesin sonuçlar vermediğinden dolayı karar değişken

kümelerini gösteremiyoruz. Fakat **DRDP - 1** formülasyonunun 1 saat çalıştırılması ile elde edilen sınır değerlerini Çizelge 2.44 de verdik.  $n = 11$ ,  $n = 12$  ve  $n = 13$  boyutları için Çizelge 2.44 de sıralı bir şekilde alt sınırların 99, 143 ve 209 üst sınırların ise 104, 157 ve 247 olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.44:  $2 \leq n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün çift Roman baskınlık sayılarının sınırları ve **DRDP - 1** formülasyonu ile elde edilen sonuçlar.

$n$	$\frac{2 V(\Lambda_n) }{\Delta} + \frac{\Delta-2}{\Delta} \gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G)$	$\gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G) -  V_2 $	$\gamma_{dR}(\Lambda_n)$
2	$3 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_2)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_2) \leq 3$	$\gamma_{dR}(\Lambda_2) = 3$
3	$3 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_3)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_3) \leq 3$	$\gamma_{dR}(\Lambda_3) = 3$
4	$5 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_4)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_4) \leq 7$	$\gamma_{dR}(\Lambda_4) = 6$
5	$\frac{34}{5} \leq \gamma_{dR}(\Lambda_5)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_5) \leq 11$	$\gamma_{dR}(\Lambda_5) = 10$
6	$\frac{56}{6} \leq \gamma_{dR}(\Lambda_6)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_6) \leq 15$	$\gamma_{dR}(\Lambda_6) = 14$
7	$\frac{93}{7} \leq \gamma_{dR}(\Lambda_7)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_7) \leq 22$	$\gamma_{dR}(\Lambda_7) = 21$
8	$20 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_8)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_8) \leq 32$	$\gamma_{dR}(\Lambda_8) = 32$
9	$\frac{264}{9} \leq \gamma_{dR}(\Lambda_9)$	$\gamma_{dR}(\Lambda_9) \leq 46$	$\gamma_{dR}(\Lambda_9) = 46$
10	$43 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_{10})$	$\gamma_{dR}(\Lambda_{10}) \leq 69$	$\gamma_{dR}(\Lambda_{10}) = 68$
11	$\frac{713}{11} \leq \gamma_{dR}(\Lambda_{11})$	$\gamma_{dR}(\Lambda_{11}) \leq 104$	$99 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_{11}) \leq 104$
12			$143 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_{12}) \leq 157$
13			$209 \leq \gamma_{dR}(\Lambda_{13}) \leq 247$

### 2.2.5 Lucas küplerinde zayıf Roman baskınlık sayıları

Zayıf Roman baskınlık sayısının amacı Roman baskınlık sayısına göre maliyeti düşürmektir diyebiliriz. Zayıf roman baskınlık sayısında ürün deposu olmayan mahalle 1 veya 2 ürün deposu olan bir mahalleye komşu olabilir. Halbuki Roman baskınlık sayısında ürün deposu olmayan mahalle 2 ürün deposu olan mahalleye komşu olmalı şartının sağlanması gerekmektedir. Bu koşul Zayıf roman baskınlık sayısının daha az maliyetli olduğunu göstermektedir (Henning ve Hedetniemi, 2003). Zayıf Roman baskınlık değişmezini Roman baskınlık değişmezinden ayıran durum bünyesindeki 1 ya da 2 ürün deposunu ihtiyacı olan komşu mahallenin kullanımına açarken diğer ürün deposuna sahip olmayan komşularının da mağdur edilmemesidir.

$G$  bir çizge ve  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun.  $V_0, V_1$  ve  $V_2$  sırasıyla  $f$  fonksiyonu değerleri 0, 1, 2 olan köşelerin kümeleri olsun. O halde  $f = (V_0, V_1, V_2)$  olarak yazılacaktır.

**Tanım 2.2.13.**  $G$  bir çizge ve  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  kümesine tanımlı bir fonksiyondur.  $V_0, V_1$  ve  $V_2$  sırasıyla  $f$  fonksiyonu değerleri 0, 1, 2 olan köşelerin kümelerini göstermektedir. O halde  $f = (V_0, V_1, V_2)$  olarak ifade edilebilir.

$u \in V_0$  olmak üzere eğer  $u$  köşesi  $V_1$  ya da  $V_2$  kümesinde bulunan bir köşeye komşu değilse  $f$  fonksiyonuna göre mağdur bölgedir. Her  $u \in V_0$  köşesi  $v \in V_1 \cup V_2$  şartını sağlayan bir  $v$  köşesi ile komşu ise öyle ki; mağdur bir köşe bulundurmamak şartıyla  $f' : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  fonksiyonu altında  $u$  köşesi  $f'(u) = 1$ ,  $v \in V_1 \cup V_2$  olan bir  $v$  köşesi ise  $f'(v) = f(v) - 1$  değerini alır. Ayrıca  $w \in V - \{u, v\}$  için  $f'(w) = f(w)$  olarak



tanımlanmaktadır. Bu koşullar altında  $f$  fonksiyonu zayıf Roman fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.14.**  $w(f)$ ,  $|V_1| + 2|V_2|$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun ağırlığı olarak tanımlanır. Zayıf Roman baskınlık sayısı,  $\gamma_r(G)$ ,  $G$  çizgesindeki zayıf Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük ağırlığıdır.

Literatürde yapılmış olan çalışmalara baktığımız zaman, baskınlık sayısı, Zayıf Roman baskınlık sayısı ve Roman baskınlık sayısı arasındaki ilişki (Henning ve Hedetniemi, 2003) tarafından verilmiştir.

**Teorem 2.2.15.** Herhangi  $G$  çizgesi için,

$$\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \quad (2.23)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. (Henning ve Hedetniemi, 2003).

Zayıf Roman Baskınlık değişiminin çalışılmış olan 2 farklı lineer programlaması vardır. WRDP ve WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama problemi ilk defa Ivanovic (2018) çalışmasında tanıtılmıştır. Biz Lucas küplerindeki Zayıf Roman baskınlık sayısı değerlerine ulaşabilmek için WRDP' in geliştirilmiş versiyonunu kullanacağız.

#### WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama

$E' = \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$  olsun ve her  $e \in E \cup E'$  için

$$z_e = \begin{cases} 1, & e = (i, j), \quad i \quad (x_i = 0 \text{ ve } y_i = 0) \quad \text{ve} \quad j \quad (x_j = 1 \text{ ya da } y_j = 1) \\ & \text{değişim kümesi oluştururlar.} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2.24)$$

tanımlanır. 1 tane depo bulunduran mahalleri temsil eden köşeler  $X$  ile gösterilirken 1 tane depo bulunduran mahalleri temsil eden köşeler  $Y$  ile gösterilir.  $x_i$  ve  $y_i$  ise ikili karar değişkenlerini ifade etmektedir.

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in X \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & i \in Y \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.  $G(V, E)$  çizgesinde WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama aşağıdaki gibi açıklanmıştır.

$$\min \sum_{k \in V} (x_k + 2y_k) \quad (2.26)$$

Koşullar:

$$x_i + y_i + \sum_{e \ni i} z_e \geq 1, \quad i \in V \quad (2.27)$$

$$x_j + y_j - x_i - y_i + 1 \geq 2z_e, \quad e = (i, j) \in E \cup E' \quad (2.28)$$

$$y_j + \sum_{\substack{l \in N_k \\ l \neq i, \\ l \neq j}} (x_l + y_l) \geq z_e, \quad e = (i, j) \in E \cup E', \quad k \in N_j \setminus N_i \quad (2.29)$$

$$x_i, y_i, z_e \in \{0, 1\} \quad i \in V, \quad e \in E \cup E'. \quad (2.30)$$

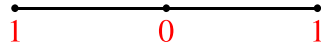
Yukarıdaki kısıtları kısaca açıklamak gerekirse  $\gamma_r(G)$  amaç fonksiyonunun değerini ifade eder. (2.27) koşulu bütün  $i$  köşesinin bir ürün deposuna sahip olduğu veya yer değiştirebilmesi için kullanımına izin verilen depoya sahip olan bir komşunun varlığını garanti eder. (2.28) koşulu ise bir  $j$  köşesi ile bir  $i$  köşesi arasında yer değişebilme durumunu göstermektedir. (2.29) koşulunda ise bu yer değişikliğinden sonra mahalleler arasında ürün yetiştirilemeyen mağdur bir bölge olmadığını garanti etmektedir. Karar değişkenlerinin iki farklı değer alabildiği (2.30) ile gösterilmektedir. WRDP için geliştirilerek yapılmış olan bu programlamada  $2|V| + |E|$  değişken ve  $3|V| + 2|E|$  tane koşul vardır.

**WRDP** nin geliştirilmiş programlamasından faydalanarak Yılmaz (2022) çalışmasında Fibonacci küplerinde  $n \leq 8$  olmak üzere Zayıf Roman Baskınlık sayısının değerlerini elde etmişlerdir. Ayrıca  $9 \leq n \leq 13$  için sınır değerlerine ulaşmışlardır. Biz bu çalışmamızda **WRDP** nin geliştirilmiş versiyonunu bilgisayar ortamında 1 saatlik bir sürede çalıştırarak Lucas küplerinde  $n \leq 9$  olmak üzere elde ettiğimiz Zayıf Roman Baskınlık sayılarının değerlerini ve  $10 \leq n \leq 13$  için belirlenen sınır değerlerini vereceğiz. Aşağıda  $n \leq 9$  a kadar Lucas küplerinde hangi köşelerin **WRDP** - programlamasında karar değişkenlerinin hangi değerleri aldığını gösterilmektedir.

Çizelge 2.45 dan  $\{01, 10\}$  köşelerinin  $V_1$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.14 de ise bu köşenin  $\Lambda_2$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_r(\Lambda_2) = 2$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.45:  $\Lambda_2$  küpünün **WRDP** formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{01, 10\}$
$V_2$	$\emptyset$
$V_0$	$V(\Lambda_2) \setminus (V_1 \cup V_2)$

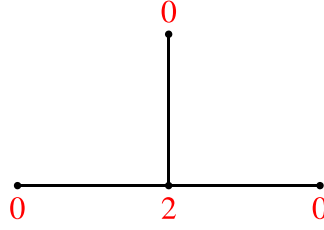


Şekil 2.14:  $\Lambda_2$  küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.46 den  $\{000\}$  köşesinin  $V_2$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.15 de ise bu köşenin  $\Lambda_3$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_r(\Lambda_3) = 2$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.46:  $\Lambda_3$  küpünün **WRDP** formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
$V_1$	$\emptyset$
$V_2$	$\{000\}$
$V_0$	$V(\Lambda_3) \setminus (V_1 \cup V_2)$

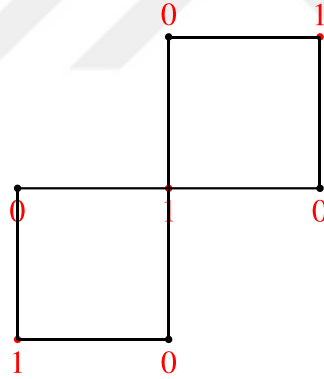


Şekil 2.15:  $\Lambda_3$  küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.47 den  $\{0101, 1010.0000\}$  köşelerinin  $V_1$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.16 da ise bu köşelerin  $\Lambda_4$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_r(\Lambda_4) = 3$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.47:  $\Lambda_4$  küpünün **WRDP** formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{0000, 0101, 1010\}$
$V_2$	$\{\emptyset\}$
$V_0$	$V(\Lambda_4) \setminus (V_1 \cup V_2)$

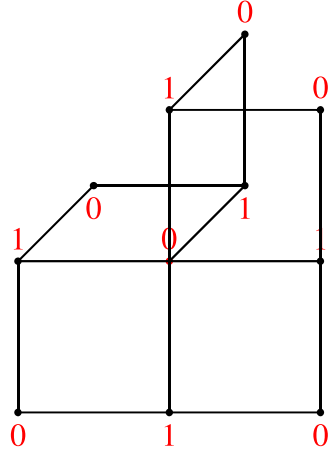


Şekil 2.16:  $\Lambda_4$  küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Çizelge 2.48 dan  $\{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\}$  köşelerinin  $V_1$  kümesine ait olduğunu Şekil 2.17 de ise bu köşelerin  $\Lambda_5$  küpünde gösterimi verilmiştir. Dolayısıyla  $\gamma_r(\Lambda_5) = 5$  olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.48:  $\Lambda_5$  küpünün **WRDP** formülasyonundaki  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
$V_1$	$\{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\}$
$V_2$	$\{\emptyset\}$
$V_0$	$V(\Lambda_5) \setminus (V_1 \cup V_2)$



Şekil 2.17:  $\Lambda_5$  küpündeki Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri

Boyut büyüdükçe köşe sayıları çok arttığından dolayı el ile gösterimi oldukça zorlamaktadır. Bu sebeble aşağıdaki Çizelge 2.49, Çizelge 2.50, Çizelge 2.51, Çizelge 2.52 de sırasıyla  $n = 6, 7, 8$  ve  $n = 9$  için Lucas küplerinin köşelerinin ait olduğu karar değişkeni kümeleri gösterilmektedir.

Çizelge 2.49:  $\gamma_r(\Lambda_6) = 7$  dir.  $V_1, V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir.

$n = 6$	Küme Elemanları
$V_1$	{000000, 000010, 001001, 010000, 010101, 100100, 101010}
$V_2$	{ $\emptyset$ }
$V_0$	$V(\Lambda_6) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.50:  $\gamma_r(\Lambda_7) = 11$  dir.  $V_1, V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir.

$n = 7$	Küme Elemanları
$V_1$	{0000001, 0000101, 0001010, 0010000, 0010101, 0100010, 0100100, 0101001, 1000100, 1001000, 1010010}
$V_2$	{ $\emptyset$ }
$V_0$	$V(\Lambda_7) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.51:  $\gamma_r(\Lambda_8) = 16$  dir.  $V_1, V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir.

$n = 8$	Küme Elemanları
$V_1$	{00000000, 00000101, 00001010, 00010100, 00010101, 00100000, 00101001, 01000100, 01001001, 01010001, 01010010, 10000000, 10010010, 10100000, 10100100, 10101010}
$V_2$	{ $\emptyset$ }
$V_0$	$V(\Lambda_8) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 2.52:  $\gamma_r(\Lambda_9) = 23$  dür.  $V_1$ ,  $V_2$  ve  $V_0$  kümelerinin elemanları listelenmiştir.

$n = 9$	Küme Elemanları
$V_1$	{000000010, 000000101, 000010000, 000010010, 000100001, 000101000, 001000100, 001001001, 001001010, 001010001, 010000000, 010000010, 010001001, 010010000, 010010101, 010100100, 010101010, 100001000, 100010100, 100100010, 100100100, 101000000, 101010010}
$V_2$	{ $\emptyset$ }
$V_0$	$V(\Lambda_9) \setminus (V_1 \cup V_2)$

**WRDP** formülasyonu ile Lucas küplerinde  $n = 9$  a kadar ulaştığımız kesin sonuçları karar değişken kümeleri ile birlikte yukarıda detaylı bir şekilde verilmektedir. Son olarak daha büyük boyutlar için **WRDP** formülasyonunun bilgisayarda 1 saat çalıştırılması ile elde edilen sınır değerleri Çizelge 2.53 de gösterilmektedir. Çizelge 2.53 de 2. sütun (2.23) deki alt ve üst sınırları gösterirken 3. sütun WRDP için geliştirilmiş formülasyon ile elde edilen sayısal sonuçları ifade etmektedir. Bu sonuçlar mavi renkle gösterilmektedir.

$n = 10$ ,  $n = 11$ ,  $n = 12$  ve  $n = 13$  boyutları için Çizelge 2.53 de sıralı bir şekilde alt sınırın 30, 39, 57 ve 83 üst sınırların ise 37, 57, 90 ve 143 olduğunu görüyoruz. Buna göre  $n = 10$ ,  $n = 11$ ,  $n = 12$  ve  $n = 13$  boyutları için daha iyi sınırlara eriştiğimizi söyleyebiliriz.

Çizelge 2.53:  $n \leq 13$  boyutu için  $\Lambda_n$  küpünün zayıf Roman baskınlık sayılarının sınırları ve WRDP için geliştirilmiş formülasyon ile elde edilen sonuçlar.

$n$	$\gamma(\Lambda_n) \leq \gamma_r(\Lambda_n) \leq \gamma_R(\Lambda_n) \leq 2\gamma(\Lambda_n)$	$\gamma_r(\Lambda_n)$
2	$1 \leq \gamma_r(\Lambda_2) \leq 2 \leq 2$	2
3	$1 \leq \gamma_r(\Lambda_3) \leq 2 \leq 2$	2
4	$3 \leq \gamma_r(\Lambda_4) \leq 4 \leq 6$	3
5	$4 \leq \gamma_r(\Lambda_5) \leq 7 \leq 8$	5
6	$5 \leq \gamma_r(\Lambda_6) \leq 9 \leq 10$	7
7	$7 \leq \gamma_r(\Lambda_7) \leq 14 \leq 14$	11
8	$11 \leq \gamma_r(\Lambda_8) \leq 21 \leq 22$	16
9	$16 \leq \gamma_r(\Lambda_9) \leq 30 \leq 32$	23
10	$23 \leq \gamma_r(\Lambda_{10}) \leq 45 \leq 46$	$30 \leq \gamma_r(\Lambda_{10}) \leq 37$
11	$35 \leq \gamma_r(\Lambda_{11}) \leq 69 \leq 70$	$39 \leq \gamma_r(\Lambda_{11}) \leq 57$
12	$49 \leq \gamma_r(\Lambda_{11}) \leq 105 \leq 108$	$57 \leq \gamma_r(\Lambda_{12}) \leq 90$
13	$61 \leq \gamma_r(\Lambda_{11}) \leq 164 \leq 172$	$83 \leq \gamma_r(\Lambda_{13}) \leq 143$



### 3. SONUÇ

Biz bu çalışmada ilk olarak yinelemeli yapısı ve daha yavaş büyümesi ile bağlantı ağı olarak Hiperküplere alternatif olarak gösterilen Lucas küplerini ele aldık. İlk bölümde Lucas küplerinin oluşumunu, yinelemeli yapısını, çizge teorik özelliklerini, literatürde çalışılmış ve elde edilmiş olan sayısal sonuçlarını vererek ve örneklendirerek  $n$  boyutlu Lucas küpleri hakkında bilgi sahibi olduk.

Daha sonra çalışmamızın temelini oluşturan baskınlık problemini pizza zincirinin bir şehirdeki yerleşimi ile açıklamaya çalıştık. Baskınlık probleminin Lucas küpleri üzerindeki yapılmış çalışmalara baktığımız zaman 2 - kutulama, bağımsız baskınlık, toplam baskınlık sayılarının çalışıldığını belirledik. Bu çalışmaların sonucunda 2 - kutulama, bağımsız baskınlık, toplam baskınlık sayıları için hesaplanmış  $\Lambda_n$  küpündeki değerlerini, alt ve üst sınırlarını özet şeklinde topladık.

Biz bu tezde çalışılmış olan baskınlık tiplerine ek yeni olarak Lucas küplerinde daha önce çalışılmamış olan Eşli baskınlık ve İşaretli baskınlık tipi değişmezi esas olmak üzere Roma İmparatorluğu'nun savaş stratejisinden doğmuş olan fakat çok çeşitli yardımlaşma ve dayanışma problemine uyarlanabilen Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerini  $\Lambda_n$  Lucas küpleri için inceledik. Bulunmuş olan optimizasyon problemlerinde ifade edilen kısıtların ve karar değişkenlerinin neyi temsil ettiğini kısaca açıklamaya çalıştık.  $n \leq 5$  için köşe ve kenar sayısı az olması sebebiyle el ile çizerek sonuçlara ulaşabilmemize rağmen daha yüksek boyutlarda değerlerini elde edebilmek için bu baskınlık tipi değişmezlerinin literatürde var olan optimizasyon problemlerini kullandık.

Çalışmamızda Azarija ve diğ.(2018) tarafından geliştirilen Eşli baskınlık sayısı ve İşaretli baskınlık sayısı için modellenen tam sayı lineer programlamasını ve sırasıyla Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık türleri için  $BVV$ , WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama ve **DRDP-1** formülasyonlarını kullandık. Bilgisayar ortamında bu optimizasyon problemlerini bir saat boyunca Gurobi Optimizerini kullanan Ubuntu 20.04 LTS Linux işletim sistemini çalıştıran 32GB RAM'li Intel Core i7-10875H CPU @ 2.30 GHz ye uyguladık. Sonuç olarak Eşli ve İşaretli baskınlık baskınlık sayıları için  $n \leq 10$  boyutu için Lucas küplerinde kesin değerlerine ve  $n = 11, 12$  ve  $n = 13$  boyutlarında bilinen en iyi alt ve üst sınır değerlerine ulaşılmıştır.  $BVV$  formülasyonu kullanılarak  $n \leq 11$  boyutu için Lucas küplerinde Roman baskınlık sayılarına,  $n = 12$  ve  $n13$  için alt ve sınır değerlerini elde ettik. Lucas küplerinin çift Roman baskınlık sayılarını hesaplamak için bilgisayar ortamında bir saat çalıştırdığımız **DRDP-1** formülasyonu ile  $n \leq 10$  boyutları için net değerler elde ederken  $11 \leq n \leq 13$  boyutlarında Lucas küplerinin çift Roman baskınlık sayılarının bilinen en iyi sınır değerlerine ulaşmayı başardık. Son olarak WRDP için kullanılan modelleme ile  $n \leq 9$  için bilgisayar ortamında bir saat çalıştırıldığında kesin değerlere ulaşabildik fakat  $n = 10, 11, 12$  ve  $13$  için alt ve üst sınır değerlerini elde ettik. İlerideki çalışmalarımızda amacımız  $\Lambda_n$  küpünde hem elde ettiğimiz sonuçları geliştirirken yanında daha büyük boyutlar için net sonuçlar elde edebilmektir. Ayrıca Lucas küplerinde hiç çalışılmamış olan restrained Roman baskınlık sayısı, Roman-3 baskınlık sayısı ve bağlı baskınlık sayısı problemlerinin optimizasyonları ile Lucas küplerinde sayısal veriler elde etmeyi planlıyoruz.





## KAYNAKLAR

- H. A. Ahangar, M. Chellali, and S. M. Sheikholeslami.** (2017). On the double Roman domination in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 232, 1-7.
- J. Azarija, S. Klavžar, J. Lee, and Y. Rho.** (2015). Connectivity of Fibonacci cubes, Lucas cubes and generalized cubes. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 17(1), 79-88.
- J. Azarija, S. Klavžar, Y. Rho, and S. Sim.** (2018). On domination-type invariants of Fibonacci cubes and hypercubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 14, 387-395.
- J. Baril, V. Vajnovszki.** (2005). *Theoretical Computer Science*. 346, 189 - 199.
- R. A. Beeler, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi.** (2016). Double Roman domination. *Discrete Applied Mathematics*, 211, 23-29.
- Q. Cai, N. Fan, Y. Shi, and S. Yao.** (2019). Integer linear programming formulations for double roman domination problem. *Optimization Methods and Software*.
- L. F. Casinillo** (2018). A note on Fibonacci and Lucas number of domination in path. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 6, 2, 317-325.
- A. Castro, S. Klavžar, M. Mollard and Y. Rho.** (2011). On the domination number and 2-packing number of Fibonacci cubes and Lucas cubes. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2655-2660.
- A. Castro and M. Mollard.** (2012). The eccentricity sequences of Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Mathematics*, 312, 1025-1037.
- E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi.** (2004). Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278, 11-22.
- J. E. Dunbar, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning and P. J. Slater.** (1995). Signed domination in graphs. *Combinatorics, Graph Theory, Applications*, 1, 311-322.
- Ö. Egeciöglu, E. Saygi, and Z. Saygi.** (2020). The irregularity polynomials of Fibonacci and Lucas cubes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44(2) 753-765.
- Ö. Egeciöglu, E. Saygi and Z. Saygi** (2022). The Mostar and Wiener index of alternate Lucas cubes. *Transactions on Combinatorics*, 2251-8665.
- Ö. Egeciöglu, E. Saygi and Z. Saygi** (2021). The structure of k-Lucas cubes. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics* 755-756.

- T. W. Haynes and P. J. Slater.** (1998). Paired-domination in graphs. *John Wiley and Sons, Inc. Networks*, 32, 199-206.
- M. A. Henning and S. T. Hedetniemi.** (2003). Defending the Roman Empire a new strategy. *Discrete Mathematics*, 266, 239-251.
- A. Ilic, S. Klavžar and Y.Rho** (2012). GENERALIZED LUCAS CUBES. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 6, 82-94.
- A. Ilic and M. Milosevic.** (2017). The parameters of Fibonacci and Lucas cubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 12, 25-29.
- M. Ivanovic.** (2016). Improved mixed integer linear programming formulations for Roman domination problem. *Publications De L'institut Mathématique*, 51-58.
- M. Ivanovic.** (2018). Improved integer linear programming formulation for weak Roman domination problem. *Soft Computing*, 22, 6583-6593.
- S. Klavžar.** (2005). On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes. *Discrete Mathematics*, 299, 145 - 153.
- S. Klavžar.** (2013) Structure of Fibonacci cubes: a survey. *Journal of Combinatorial Optimization*, 25, 505-522.
- S. Klavžar and M. Mollard.** (2014). Asymptotic properties of Fibonacci cubes and Lucas cubes. *Annals of Combinatorics*, 18, 447-457.
- S. Klavžar and M. Mollard.** (2012). Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cubes. *Acta Applicandae Mathematicae*, 117, 93-105.
- S. Klavžar, M. Mollard, and M. Petkovsek.** (2011). The degree sequence of Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Mathematics*, 311, 1310-1322.
- S. Klavžar and Y. Rho** (2015). On the Wiener index of generalized Fibonacci cubes and Lucas cubes. *Discrete Applied Mathematics*, 187, 155-160.
- M. Mollard.** (2012). Maximal hypercubes in Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Applied Mathematics*, 160, 2479-2483.
- M. Mollard.** (2021). Edges in Fibonacci Cubes, Lucas Cubes and Complements. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44, 4425-4437.
- E. Munarini, C. Perelli Cippo, and N. Zagaglia Salvi.** (2001). On the Lucas cubes. *The Fibonacci Quarterly*, 39(1), 12-21.
- E. Saygi and Ö. Egecioğlu.** (2018).  $q$ -counting hypercubes in Lucas cubes. *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 190-203.
- E. Saygi.** (2019). On the domination number and the total domination number of Fibonacci cubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 16, 245-255.

- Z. Saygi.** (2020). Results on the domination number and the total domination number of Lucas cubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 19, 25-35.
- A. Taranenko.** (2013). A new characterization and a recognition algorithm of Lucas cubes. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 15-3, 31-40.
- H.- M. Xing, X. Chen, and X.- G. Chen.** (2006). A note on Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 306, 3338-3340.
- X. Wang, X. Zhao , and H. Yao.** (2020). Structure and enumeration results of matchable Lucas cubes. *Discrete Applied Mathematics*, 277, 263-279.
- J. Yue, M. Wei, M. Li, and G. Liu.** (2018). On the double Roman domination of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 338, 669-675.



## **EKLER**

### **EK 1: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü**

<b>Türkçe terim</b>	<b>İngilizce Terim</b>
Asal çizge	Prime graph
Bağımsızlık sayısı	Independence number
Bağlı	Connected
Çap	Diameter
Çift Roman baskınlık sayısı	Double Roman domination number
Dışmerkezlilik	Eccentricity
Düzenli	Regular
Düzensizlik	Irregularity
Eşli baskınlık sayısı	Paired domination number
Fibonacci küp	Fibonacci cube
Lucas küp	Lucas cube
Hamilton yolu	Hamiltonian path
Hiperküp	Hypercube
İdeal amaç fonksiyonu	Optimal objective function
2 - kutulama	2 - packing
İşaretli baskınlık sayısı	Signed domination number
Kartezyen çarpım	Cartesian product
Kenar kesimi	Edge cut
Köprü	Bridge
Köşe kesimi	Vertex cut
Merkez	Center
Mükemmel eşleşme	Perfect matching
Ortalama dışmerkezlilik	Average eccentricity
Paket	Packet
Tam çizge	Complete graph
Toplam baskınlık sayısı	Total domination number
Uzaklık	Distance
Yarıçap	Radius
Yukarı - Aşağı derece polinomları	Up - Down degree polynomials
Zayıf Roman baskınlık sayısı	Weak Roman domination number