

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERİLETKEN KUANTUM GİRİŞİM CİHAZLARI İÇİN ANALİZ ARACI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali AKGÜN

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tolga GİRİCİ

AĞUSTOS 2022

ÖZET

Yüksek Lisans

SÜPERİLETKEN KUANTUM GİRİŞİM CİHAZLARI İÇİN ANALİZ ARACI

Ali AKGÜN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tolga GİRİCİ

Tarih: Ağustos 2022

Süperiletken halkada Josephson eklemlerinin çeşitli varyasyonları ile tasarlanan DC SQUID ve DC Bi-SQUID'ler hassas manyetik alan sensörleri, yükselteçler gibi birçok uygulamada kullanılmaktadırlar. Ancak Josephson eklemlerinin doğrusal olmayan doğası gereği bu sistemlerin dış manyetik alana karşı tepkilerini analiz etmek zordur. Bu yüzden nümerik analiz yöntemleri bu tarz sistemlerin anlaşılabilmesinde büyük önem taşımaktadır. Günümüzde DC Bi-SQUID ve DC SQUID gibi süperiletken devreleri temsil edebileceğimiz açık kaynak kodlu modelleme ve simülasyon araçları mevcuttur. Bu araçlar sağlamış oldukları çıktıların güvenilirliği ile uzun yıllar kullanılmakta ve bu alanda kendilerini kanıtlamışlardır. Ancak mevcut araçların sahip oldukları yazılım mimarisinin karmaşıklığı sebebi ile bu araçların yeni yöntemlerle geliştirilmesi ve farklı analiz araçlarıyla birlikte çalıştırılması oldukça zordur. Bu yüzden, basit bir mimariye sahip PySQIF (Python Superconductor Quantum Interference Filters) şeklinde adlandırılan açık kaynak kodlu bir kütüphane geliştirdik. Geliştirmiş olduğumuz kütüphane DC SQUID ve DC Bi-SQUID'lerin dış manyetik alan altındaki potansiyel fark davranışını temsil edebilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Süperiletkenlik, Benzetim, Modelleme.

ABSTRACT

Master of Science

ANALYSIS TOOL for SUPERCONDUCTOR QUANTUM INTERFERENCE

DEVICES

Ali AKGÜN

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Programme

Supervisor: Prof. Dr. Tolga GİRİCİ

Date: August 2022

Superconductor loops within Josephson Junctions such as DC SQUIDs and Bi-SQUID have unique properties that can be used as quantum accurate magnetometers, amplifiers and many more applications. However due to quantum interference between Josephson junctions and their non-linear nature, their interaction with external magnetic field is hard to analyze. Thus, numerical methods are a viable options to predict their behavior. Today there exist several open-source modelling and simulation tools for DC Bi-SQUIDS/SQUIDS. These are great tools, but their software architecture complicates software development and integration steps. Therefore, we introduce an open-source analysis library titled PySQIF (Python Superconductor Quantum Interference Filters) that determines the Voltage response of the DC SQUIDs and DC Bi-SQUIDS in the presence of the external magnetic flux.

Keywords: Superconductivity, Modelling, Simulation.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danıőmanım Tolga GİRİCİ' ye ve yardımcı danıőmanım Sasan RAZMKHAH' a, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve Çaęla ÖZKAN' a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
KISALTMALAR	viii
SEMBOL LİSTESİ	ix
RESİM LİSTESİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
1.2 Tezin Kapsamı.....	2
2. TEORİ	3
2.1 Tarihçe.....	3
2.2 Akım Yoğunluğunun Kuantum Mekaniksel Yorumu	6
2.3 Süperiletkenler için Akım Yoğunluğu İfadesi	8
2.4 Josephson Eklemi	11
2.4.1 Manyetik Alan Etkisi	16
2.4.1 RCSJ Model	19
2.4.1 RSJ model	22
2.5 Manyetik Akı Kuantumu.....	22
2.5.1 Süperiletken halkada Josephson eklemi.....	26
3. SÜPERİLETKEN KUANTUM GİRİŞİM CİHAZLARI	29
3.1 DC SQUID	29
3.2 DC Bi-SQUID	32
4. METOTLAR VE ALGORİTMALAR	39
4.1 DC SQUID	39
4.1.1 Analitik yöntem.....	40
4.1.2 Statik yöntem	41
4.1.3 Zamana bağlı yöntem	42
4.1.4 Karşılaştırma	43
4.2 DC Bi-SQUID	44
4.2.1 Statik yöntem	44
4.2.2 Zamana bağlı yöntem.....	45
4.2.3 Karşılaştırma	46
4.3 PySQIF Kütüphanesi.....	47
5. PYSQIF KÜTÜPHANE MİMARİSİ	49
5.1 PySQIF Kütüphanesi Özellikleri.....	50
6. SONUÇ	51
KAYNAKLAR	55
EKLER	59

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : 4.00 – 4.40 K aralığında civanın elektriksel direnç grafiği.....	3
Şekil 2.2 : Kalıcı akım deneyinin şematik gösterimi.	4
Şekil 2.3 : Meissner Etkisi.....	5
Şekil 2.4 : Josephson Ekleme.....	11
Şekil 2.5 : y yönündeki Manyetik alana maruz kalmış, Josephson ekleme.....	16
Şekil 2.6 : Al köprü Josephson Junction için farklı sıcaklıklarda elde edilmiş I-V grafikleri.	19
Şekil 2.7 : Josephson ekleme eş değer devre şeması ve DC akım beslemesi.	20
Şekil 2.8 : Süperiletken dairesel yüzey üzerinde çizgi integrali.	23
Şekil 2.9 : Süperiletken disk yüzey üzerinde çizgi integrali.	24
Şekil 2.10 : Josephson ekleme tarafından kesilmiş süperiletken halka.	25
Şekil 3.1 : DC SQUID Şematik gösterim.....	28
Şekil 3.2 : DC SQUID devre gösterimi. “P” dış manyetik alan kaynağını temsil etmektedir.....	28
Şekil 3.3 : DC Bi-SQUID Şematik gösterim.....	31
Şekil 3.4 : DC Bi-SQUID devre gösterimi, “P” dış manyetik alanı temsil etmektedir.....	31
Şekil 4.1 : DC SQUID, normalize dış manyetik akıya karşı, DC SQUID boyunca meydana gelen normalize akım grafiği.	36
Şekil 4.2 : DC SQUID, normalize dış manyetik akıya karşı, DC SQUID boyunca meydana gelen normalize akım grafiği. ($I_a = 1, I_b = I_a/2.$).....	37
Şekil 4.3 : DC SQUID dış normalize manyetik akıya karşı, zamana bağlı yöntem ile elde edilen DC SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($l1a = l1b = 0.27, ib = 2$)	39
Şekil 4.4 : DC Bi-SQUID normalize dış manyetik akıya karşı, statik yöntem ile elde edilen DC Bi-SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($lic3 = 1, ib = 2$)	41
Şekil 4.5 : DC Bi-SQUID normalize dış manyetik akıya karşı, zamana bağlı yöntem ile elde edilen DC Bi-SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($l1a = l1b = 0.27, l2a = l2b = 0.24, l3a = l3b = 0.3, \beta = 1, ic3 = 1, ib = 2$).....	42
Şekil 4.6 : PySQIF akış şeması.	44
Şekil 5.1 : PySQIF sınıf şeması.....	46
Şekil 6.1 : (a) PySQIF girdi dosyası, (b) PySQIF devre modeli, (c) ic3 dağılımı, (d) Potansiyel fark tepkisi.	48
Şekil 6.2 : En düşük (1.5) ve en yüksek (4.5) ic3 değerleri için gerilim tepkisi.....	49
Şekil 6.3 : Kornev ve çalışma arkadaşları tarafından elde edilen deneysel sonuçlar ile PySQIF çıktısının karşılaştırılması.....	50

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Cooper Çifti 8



KISALTMALAR

AC	: Alternatif akım (Alternative Current)
AL	: Alüminyum
CSV	: Virgül ile ayrılmış değerler (Comma Separated Values)
DC	: Doğru akım (Direct Current)
PySQIF	: Python Superconductor Quantum Interference Filters
RSJ	: Resistively Shunted Junction
RCSJ	: Resistively and Capacitively Shunted Junction
SI	: Birim Sistemi (System of Units)
SQIF	: Süperiletken Kuantum Girişim Filtreleri (Superconductor Quantum Interference Filters)
SQUID	: Süperiletken Kuantum Girişim Cihazları (Superconductor Quantum Interference Devices)

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
Å	Angstrom
A	Manyetik vektör potansiyeli
B	Bileşke manyetik alan
c	Seshızı
C	Elektriksel sığa
E	Toplamenerji
E	Elektrik alan
e	Elektron yükü
f	Frekans
G	İletkenlik
H	Uygulanan manyetik alan
\hat{H}	Toplam enerji operatörü
H_c	Kritik manyetik alan
I_c	Kritik akım
I_s	Koruma akımı
J	Akım yoğunluğu
J_ρ	Akım yoğunluğu olasılığı
J_s	Yüzey akımı yoğunluğu
J_c	Kritik akım yoğunluğu
\hat{KE}	Kinetik enerji operatörü
l	Normalize indüktans
m	Elektronun kütlesi
m^*	Cooper çiftinin kütlesi
m_e	Elektron kütlesi
n	Parçacık yoğunluğu
n_e	Elektron yoğunluğu
n^*	Cooper çifti yoğunluğu
P	Çizgisel momentum
\hat{P}	Çizgisel momentum operatörü
q	Parçacığın yükü
q_e	Elektronun yükü
q^*	Cooper çiftinin yükü
R	Direnç
t	Zaman
T	Sıcaklık
T_c	Kritik Sıcaklık

v	Normalize potansiyel fark.
\hat{V}	Potansiyel enerji operatörü
β_j	Johnson parametresi
β	Normalize indüktans
λ	Nüfuz derinliği
ρ	Elektronun uzayda bulunma olasılığı
τ	Normalize zaman adımı.
$\varphi(t)$	Dalga fonksiyonunun fazı
φ_e	Normalize dış manyetik akı
Φ	Manyetik akı
Φ_0	Manyetik akı kuantumu
ϕ	Elektrik skaler potansiyeli
ϕ_e	Normalize dış manyetik akı
ψ	Dalga fonksiyonu
\hbar	Planck sabiti

RESİM LİSTESİ

Sayfa

Resim 6.1 : PySQIF ile tasarlanmış DC Bi-SQUID resmi. Resimde görülen DC Bi-SQUID üretildi ancak henüz test edilmemiştir. 47



1. GİRİŞ

1.1 Tezin Amacı

Günümüzde DC SQUID'ler hassas manyetik alan ölçümleri, tahribatsız muayene, biyomanyetizma ve okuma devreleri gibi birçok alanda kullanılmaktadır [1–3]. DC SQUID süperiletken halkada paralel bağlı iki adet Josephson ekleminden oluşmaktadır. DC SQUID tabanlı devreler, dış manyetik alana maruz kaldıklarında devre boyunca bir potansiyel fark meydana gelir. DC SQUID' in uygulanan manyetik alana karşı tepkisi doğrusal değildir. Bu durum, uygulamaları daha karmaşık ve maliyetli hale getirmektedir. Bu yüzden araştırmacılar manyetik alana karşı daha doğrusal tepkiler veren DC SQUID tabanlı süperiletken devreler geliştirmişlerdir. DC Bi-SQUID ve SQIF bu devrelere örnek verilebilir. [4–6].

DC Bi-SQUID ve SQIF gibi süperiletken devrelerin manyetik alan etkisindeki fiziksel davranışları doğrusal olmayan diferansiyel denklem setleri ile ifade edilebilmektedir. Ne yazık ki bu diferansiyel denklem setlerine analitik bir çözüm mevcut değildir [7]. Bu durumda nümerik analiz yöntemleri bu tarz sistemler için büyük önem taşımaktadır. Modelleme ve simülasyon araçları bu tarz sistemlerin davranışlarının anlaşılmasına olanak sağlamaktadır. Günümüzde SQIF/DC Bi-SQUID gibi süperiletken devrelerin simülasyonu için kullanılan PSCAN2 ve WRSpice gibi açık kaynak kodlu araçlar mevcuttur [8, 9]. Bu araçlar yıllardır kullanılmakta ve ortaya koydukları sonuçlar sebebi ile bu alanda kendilerini ispatlamışlardır. Ancak bu araçların kullandıkları yazılım mimarisi geliştirme ve entegrasyon süreçlerini zorlaştırmaktadır. Bu sebeple bu tez çalışması için DC SQUID tabanlı süperiletken devrelerin manyetik alana karşı tepkilerini analiz edebilen açık kaynak kodlu PySQIF isimli bir Python kütüphanesi geliştirdik. PySQIF, diğer açık kaynak kodlu projelere göre daha basit bir mimariye sahiptir, bu durum yaşam boyu geliştirme süreçlerini ve entegrasyon süreçlerini kolaylaştırmaktadır.

1.2 Tezin Kapsamı

Tez dokümanı; teori, süperiletken kuantum girişim cihazları, analiz metotları, kütüphane mimarisi ve sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın teori bölümü, süperiletken girişim cihazları başlığının anlaşılması için teorik alt yapıyı oluşturmaktadır. Bu bölüm; tarihçe, akım yoğunluğunun kuantum mekaniksel yorumu, süperiletkenler için akım yoğunluğu ifadesi, Josephson eklemi ve manyetik akı kuantumu bölümlerinden oluşmaktadır. Tarihçe kısmında, ilk dört paragrafta süperiletkenliğin keşfinden Josephson ekleminin keşfine kadar meydana gelen önemli deneysel ve teorik gelişmeler özetlenecektir. (1908-1962) Beşinci paragrafta ise; DC SQUID, SQIF ve DC Bi-SQUID gibi süperiletken devrelerin buluş aşamaları özetlenecektir. Son paragrafta; DC SQUID, SQIF ve DC Bi-SQUID gibi süperiletken devrelerin simülasyonu için kullanılan açık kaynak kodlu araçlardan bahsedilecektir. Sonraki kısımlarda, DC SQUID ve DC Bi-SQUID gibi sistemlerin davranışlarının anlaşılması için gereken teorik alt yapı özetlenecektir.

Tez dokümanının süperiletken kuantum girişim cihazları bölümünde; DC SQUID ve DC Bi-SQUID süperiletken devrelerinin dış manyetik alan etkisi altındaki davranışları teorik olarak belirli yaklaşımlar altında incelenecektir.

Tez çalışmasının bir sonraki bölümü olan analiz metotları başlığı altında, süperiletken kuantum girişim cihazlarının manyetik alan etkisinde gösterdikleri fiziksel davranışların modellenmesi için kullanılacak yöntemlerden bahsedilecektir. Ek olarak, bu kısımda PySQIF kütüphanesinde kullanılan algoritma akış şeması ile özetlenecektir.

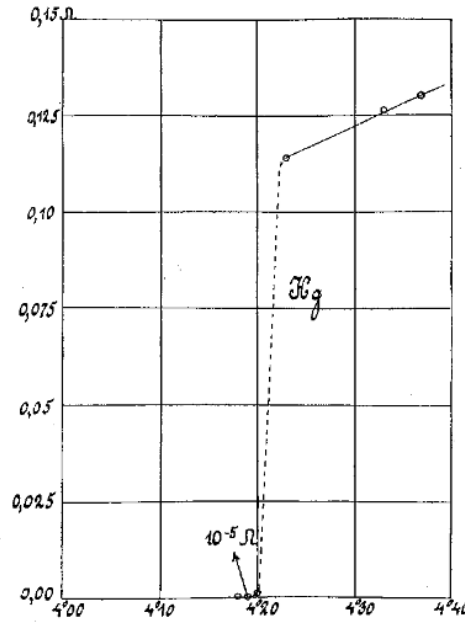
Çalışmanın kütüphane mimarisi kısmında PySQIF kütüphanesinin yazılımsal açıdan yapısı ele alınacaktır.

Çalışmanın son bölümü olan sonuçlar kısmında ilk olarak PySQIF kütüphanesi kullanılarak elde edilen sonuçlar incelenecek ve PySQIF çıktısı deneysel çalışmalar ile karşılaştırılarak yorumlanacaktır.

2. Teori

2.1 Tarihçe

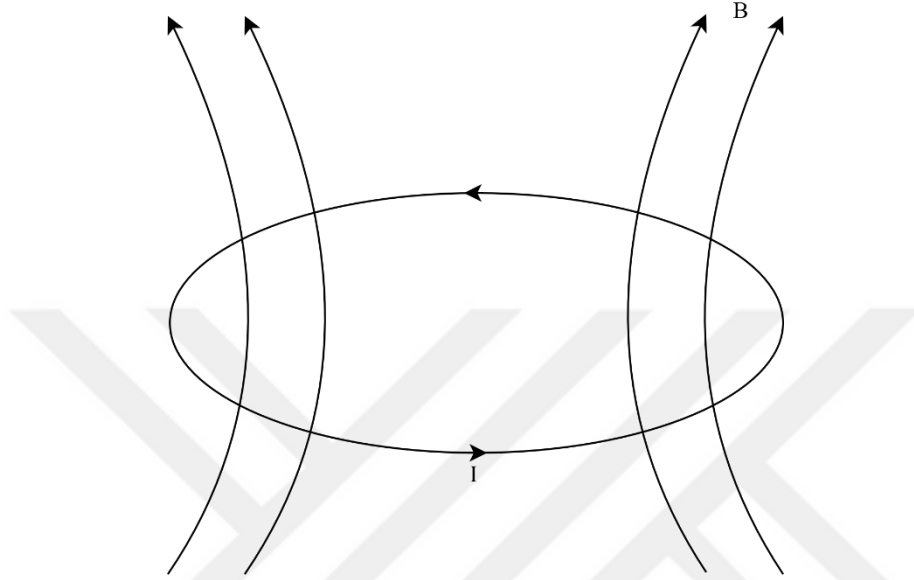
1908 yılında H. Kamerlingh Onnes Helyum'u sıvılaştırmayı başardı, bu durum düşük sıcaklık fiziği çağının başlamasına sebep oldu. 1911 yılında Onnes yaklaşık 4 K civarındaki sıcaklıklara ulaşmayı başardı ve bu sıcaklıklarda belirli malzemelerin elektriksel özellikleri ile ilgili deneyler yapmaya başladı. Yapılan deneylerin sonucunda Onnes, cıvanın 4.15 K sıcaklığında elektriksel direncinin sıfıra yakınsadığını keşfetti (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 : 4.00 – 4.40 K aralığında cıvanın elektriksel direnç grafiği. [10]

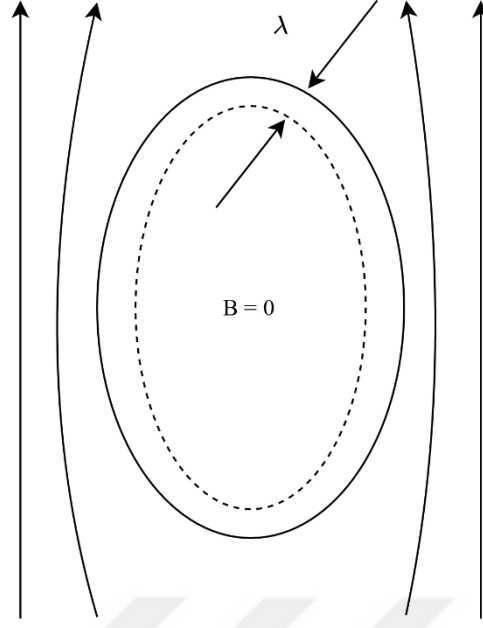
Meydana gelen bu keşiflerden sonra süperiletkenlik çağı başlamış oldu. [10–12] Onnes deneysel çalışmaları farklı malzemeler için uyguladı ve malzemelerin karakteristik bir özelliği olan T_c sıcaklığının altında elektriksel dirençlerinin aynı şekilde sıfıra yakınsadığını gördü. Sonraki yıllarda yapılan çalışmalarda süperiletken kapalı halkalar oluşturuldu ve bu halkalar boyunca akım değerinin değişmediği gözlemlendi (Şekil 2.2). Yani, çalışmalar uzun yıllar boyunca süperiletken halkada akan akımın herhangi bir zayıflamaya yani dirence maruz kalmadığını gösterdi.

Süperiletken malzemeler için T_c sıcaklığının altında söz konusu olan bu durum kalıcı akım olarak adlandırıldı. Malzemelerde T_c sıcaklığının altındaki sıcaklıklarda meydana gelen sıfır direnç durumu ise mükemmel iletkenlik olarak adlandırıldı. Sıfır elektriksel direnç yani mükemmel iletkenlik ilerleyen yıllarda süperiletken malzemelerin karakteristik özelliklerinden biri olarak kabul edildi.



Şekil 2.2 : Kalıcı akım deneyinin şematik gösterimi.

1933 yılında Meissner ve Ochsenfeld tarafından süperiletkenliğin bir diğer karakteristik özelliği olarak kabul edilen mükemmel diyamanyetizma keşfedildi [13]. Meissner ve Ochsenfeld, manyetik alana maruz kalan bir süperiletkenin T_c 'nin altındaki sıcaklıklara soğutulduğunda manyetik akının süperiletkenin içerisinden geçmediğini keşfetti. Uygulanan manyetik akının süperiletken malzemelerin karakteristik özelliği olan nüfuz derinliğine kadar penetrasyon sağladığı gözlemlendi. (Şekil 2.3) Manyetik alana maruz kalan bir süperiletkende meydana gelen bu durum Meissner etkisi olarak adlandırıldı. Süperiletken malzeme en az H_c olarak adlandırılan bir eşik değeri kadar manyetik alana maruz kaldığında süperiletken özelliğini yitirdiği gözlemlendi. Bu durum tersinir Meissner etkisi olarak adlandırıldı. Özetle, T_c 'nin altında mükemmel iletkenlik ve mükemmel diyamanyetik özellik gösteren malzemeler süperiletken olarak isimlendirildiler.



Şekil 2.3 : Meissner Etkisi.

1935 yılında F.London ve H.London kardeşler Meissner etkisini teorik olarak ele aldı ve nüfuz derinliğini matematiksel olarak ifade etmeyi başardı [14]. 1950 yılında Ginzburg ve Landau süperiletken malzemenin faz geçişi(süperiletken – süperiletken değil) üzerine teorik çalışmalarda bulundu [15]. Bu teorik çalışmalar London kardeşlerin üretmiş olduğu matematiksel eşitlikler ile tutarlılık gösterdi. 1957 yılına gelindiğinde J.Barden, L.Cooper ve J.R. Schrieffer süperiletkenliği kuantum mekaniksel olarak inceledi (BCS teorisi) [16]. BCS teorisi süperiletkenliğin elektron-elektron etkileşimlerinden kaynaklandığını ve bu etkileşimin normal malzemenin süperiletken malzemeye faz geçişi ile doğrudan ilişkili olduğunu varsaydı. BCS teorisi, önceki yıllarda ortaya atılan teorik çalışmalar ile tutarlılık gösterdi ve bunun yanında yüksek T_c değerlerine sahip süperiletkenlerin özelliklerini teorik olarak açıklayabildi, önceki yıllarda ortaya atılan teoriler yüksek sıcaklık süperiletkenleri açıklamakta yetersiz kalmıştı.

Önceki paragraflarda bahsetmiş olduğumuz teorik ve deneysel gelişmeler süperiletken cihazların geliştirilmesinde büyük rol oynadı, bunlardan en önemlisi Josephson eklemının keşfi olarak söylenebilir. 1962 yılına gelindiğinde B.D. Josephson, aralarında potansiyel bariyer bulunan iki süperiletken (Josephson Eklemi) arasında kuantum tünellemenin mümkün olabileceğini öngördü [17]. İlerleyen süreçte kuantum tünellemenin Josephson tarafından öngörüldüğü gibi mümkün olduğu deneysel olarak gözlemlendi ve bu durum Josephson tünellemesi olarak

adlandırıldı. Josephson eklemi, süperiletken yapısı gereği özgün bir I-V eğrisine sahiptir. Bunun yanında dış manyetik alana karşı hassas tepkiler vermektedir. Bu durum Josephson ekleminin manyetik alan sensörü olarak kullanılabilmesine olanak sağlamaktadır.

Josephson ekleminin keşfinden sonra Josephson eklemi kullanılarak farklı süperiletken devreler tasarlandı. Süperiletken halkada paralel olarak bulunan iki adet Josephson ekleminden oluşan DC SQUID'ler bu devrelere örnek olarak verilebilir [18]. DC SQUID'ler dış manyetik alana Josephson ekleminden farklı olarak periyodik bir tepki vermektedir. SQUID ve Josephson ekleminin manyetik alana karşı verdiği tepki doğrusal değildir, bu durum araştırmacıları manyetik alana karşı daha doğrusal tepki gösteren SQUID tabanlı devreleri tasarlamaya yöneltti. 2000 yılında J. Oppenländer tarafından paralel bağlı N adet DC SQUID devresinden oluşan SQIF şeklinde isimlendirilen bir devre tasarlandı [19]. SQIF, DC SQUID' e göre manyetik alana karşı daha doğrusal tepki vermektedir. Ayrıca, 2009 yılında Kornev tarafından Bi-SQUID şeklinde isimlendirilen konvansiyonel DC SQUID yapısına paralel bağlı bir Josephson eklemi eklenerek oluşturulan alternatif bir devre tasarlanmıştır [6]. Bu sistem aynı şekilde SQIF'ler gibi uygulanan manyetik alana karşı daha doğrusal tepki vermektedir.

DC Bi-SQUID, SQIF gibi süperiletken devrelerin manyetik alana karşı davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem setleri ile ifade edilebilmektedir. Bu denklem setlerinin analitik yöntemlerle çözümü olanaksızdır, bu durum süperiletken devreler için simülasyonların geliştirilmesine sebep olmuştur. 1990'lı yıllarda geliştirilen PSCAN ve WRSPICE gibi projeler açık kaynak kodlu süperiletken devre simülasyonlarına örnek gösterilebilir [8, 9].

2.2 Akım Yoğunluğunun Kuantum Mekaniksel Yorumu

Bu kısımda klasik teoriden bildiğimiz akım yoğunluğu ifadesi kuantum mekaniksel olarak ifade edilecektir. Bu irdelemenin sonucunda hareketli ve yüklü parçacıkların sebep olduğu akım yoğunluğu olasılığı türetilecektir. Bu ifade süperiletken içerisindeki akımın davranışını ifade edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

Klasik elektromanyetik teoriden bilindiği üzere elektrik akımının kaynağı yüklü parçacıkların hareketidir [20]. Josephson eklemi gibi süperiletken devrelerin

potansiyel fark altındaki tepkilerini inceleyebilmek için akım yoğunluğunun süperiletken bir malzemedeki davranışını anlamamız gerekmektedir. Bu davranış klasik teori ile açıklanamamaktadır bu yüzden bu kısımda akım yoğunluğu kuantum mekaniksel açıdan irdelenecektir.

Aşağıdaki matematiksel formda dalga fonksiyonuna sahip olan serbest bir elektron düşünelim:

$$\psi = Ae^{j\varphi(t)} \quad (2.1)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan “A” dalga fonksiyonunun genliğini “ $\varphi(t)$ ” ise dalga fonksiyonunun fazını ifade etmektedir. İlgili serbest parçacık için Schrodinger denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = \hat{K}\psi + \hat{V}\psi \quad (2.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \hat{V}\psi \quad (2.3)$$

Eşitlik 2.3’ ü dalga fonksiyonunun eşleniği ile soldan çarpalım:

$$i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \hat{V}\psi^* \psi \quad (2.4)$$

Eşitlik 2.3’ ün kompleks eşleniğini alıp dalga fonksiyonu ile soldan çarparak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$-i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + \hat{V}\psi \psi^* \quad (2.5)$$

Eşitlik 2.4’ten 2.5’i çıkararak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$i\hbar \frac{\partial (\psi \psi^*)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \quad (2.6)$$

Yukarıdaki eşitliği vektör eşitliklerinden faydalanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz (Ek 1):

$$i\hbar \frac{\partial (\psi \psi^*)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)) \quad (2.7)$$

Denklem 2.7'nin sol tarafında bulunan $\psi\psi^*$ ifadesi elektronun uzayda bulunma olasılığını ifade etmektedir [21, 22].

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

Bir elektronun uzayda bulunma olasılığının zamana bağlı türevi, elektronun akım kaynağı olarak düşünüldüğü durumda akım yoğunluğu olasılığı ile ilişkili olması beklenmektedir [23]. Bu fiziksel bakış açısı ile denklem 2.7' yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_\rho \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J}_\rho = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \text{Re} \left\{ \psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right\} \quad (2.10)$$

2.3 Süperiletkenler için Akım Yoğunluğu İfadesi

Bölüm 2.2'de akım yoğunluğu ifadesi kuantum mekaniksel olarak irdelenmiştir, bu kısımda süperiletken bir malzeme için akım yoğunluğu ifadesi türetilecektir. Bu kısımda türeteceğimiz süperiletkenler için akım yoğunluğu ifadesi sonraki bölümlerde tartışacağımız Josephson eklemının manyetik alan altındaki davranışını incelemek için kullanılacaktır.

Hareketli yükler akımı oluşturmaktadır, bu sebeple süperiletken bir malzemedeki akımın kaynağı süperiletkene özel yüklü bir parçacıktan kaynaklandığını düşünebiliriz. Bu parçacık Cooper çifti olarak adlandırılır. Cooper çiftleri elektron-elektron etkileşiminden meydana gelmektedir ve bu parçacığın özellikleri aşağıdaki çizelgedeki gibi gösterilebilir:

Çizelge 2.1 : Cooper Çifti.

Parametre	Elektron	Cooper Çifti
Kütle	m_e	$2m_e$
Yük	q_e	$2q_e$
Yoğunluk	n_e	$n_e/2$

Cooper çiftleri ancak hareketli olduğu koşulda akım üretebilecektir. Akım kaynağı olan serbest bir yüklü parçacık için elektromanyetik kuvvet (Lorentz kuvveti) etkisi altında hareket denklemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [20, 24, 25]:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \quad (2.11)$$

Eşitlik 2.11'i elektromanyetik vektörel ve skaler potansiyellerden yararlanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz [20]:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (2.13)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla \left(q\phi - \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \right) \quad (2.14)$$

Eşitlik 2.14 elektromanyetik kuvvet etkisi altında bulunan yüklü bir parçacık için söz konusu olan Lorentz kuvveti ifadesinin elektromanyetik potansiyeller cinsinden yazılmış halidir. Bir cismin potansiyel enerjisinin gradyanı o cisme uygulanan kuvvet ile ilişkilidir [26]. Bu durumda elde ettiğimiz eşitliğin sağ tarafında bulunan potansiyel söz konusu yüklü parçacığın potansiyel enerjisini ifade etmektedir [20, 24, 25].

Yüklü parçacığın sahip olduğu toplam enerjiyi eşitlik 2.14'ü referans alarak aşağıdaki gibi yazabiliriz [20]:

$$E = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} + \left(q\phi - \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \right) \quad (2.15)$$

$$E = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\phi \quad (2.16)$$

Eşitlik 2.16 elektromanyetik kuvvet etkisinde bulunan yüklü bir parçacığın sahip olduğu toplam enerjiyi ifade etmektedir. Eşitlik 2.3 daha önce bahsettiğimiz üzere yüklü bir parçacığın Schrodinger denklemini ifade etmektedir. Bu durumda eşitlik 2.16'dan faydalanarak kinetik enerji ve potansiyel enerji operatörlerini yazarak parçacığın Schrödinger denklemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [23]:

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (2.17)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi \quad (2.18)$$

Yukarıda bulunan eşitlik 2.18 ile elektromanyetik kuvvet etkisi altında bulunan yüklü bir parçacık için elektromanyetik potansiyeller cinsinden Schrodinger denklemini yazmış olduk. Eşitlik 2.10'da kuantum mekaniksel bir parçacık için akım yoğunluğu ifadesini elde etmiştik, şimdi eşitlik 2.18'i kullanarak elektromanyetik kuvvet etkisi altında bulunan bir parçacık için akım yoğunluğu olasılığı ifadesini yazabiliriz:

$$\mathbf{J}_\rho = Re \left\{ \psi^* \left(\frac{\hbar}{im} \nabla - \frac{q}{m} \mathbf{A} \right) \psi \right\} \quad (2.19)$$

Eşitlik 2.19, eşitlik 2.18'de elde ettiğimiz ifadenin matematiksel formundan faydalanılarak yazılmıştır. İfade 2.18'de elde ettiğimiz dalga fonksiyonu için aşağıdaki gibi bir çözüm önerisinde bulunabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.20)$$

Yukarıdaki ifade Schrödinger denkleminde çözüm önerisi olarak ifade edildiği için ele aldığımız parçacık yani süperiletkende bulunan Cooper çiftleri için dalga fonksiyonunu temsil etmektedir. Dalga fonksiyonunda bulunan $n^*(\mathbf{r}, t)$ ifadesi süperiletkende bulunan Cooper çiftlerinin yoğunluğunu ifade etmektedir. $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ifadesi ise dalga fonksiyonunun fazını ifade etmektedir. Cooper çifti yoğunluğunun süperiletken malzeme boyunca konuma bağlı olarak değişmediğini varsayarak denklem 2.19'da bulunan ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\mathbf{J}_\rho = \frac{n^*(\mathbf{r}, t)}{m^*} \{ \hbar \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) - q^* \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \} \quad (2.21)$$

Yukarıda elde etmiş olduğumuz ifade akım yoğunluğu olasılığını temsil ettiği için olasılık boyutundadır. Fiziksel olarak doğrudan akım yoğunluğunu ifade ettiğini söyleyemeyiz. Bu ifadenin bir süperiletken için akım yoğunluğunu ifade edebilmesi için aşağıdaki gibi yük ile çarpılması gerekmektedir [11, 12, 23, 27]:

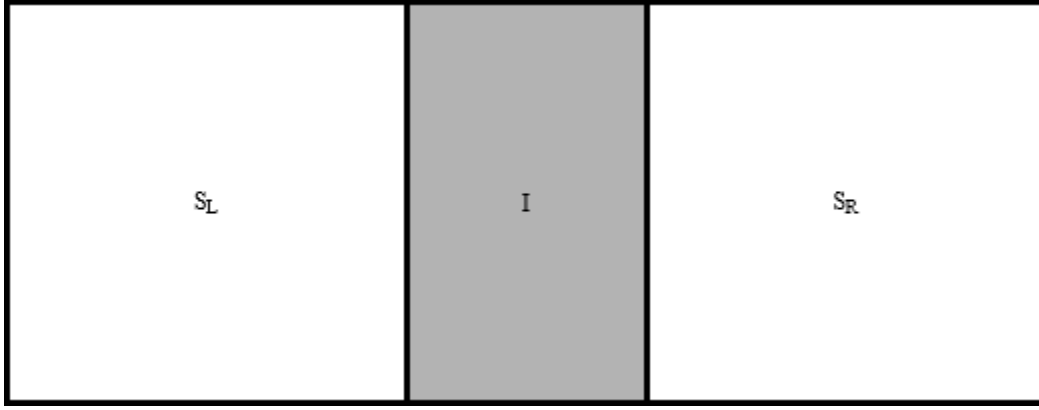
$$\mathbf{J}_s = \frac{q^* n^*(\mathbf{r}, t)}{m^*} \{ \hbar \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) - q^* \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \} \quad (2.22)$$

Yukarıdaki ifade fiziksel olarak bir süperiletken için akım yoğunluğunu ifade etmektedir. Q^* süperiletken için taşıyıcı yük olan Cooper çifti yükümü ve m^* süperiletkende bulunan Cooper çiftlerinin kütlelerini ifade etmektedir. Asteriks, süperiletken için söz konusu olan bu taşıyıcı yükün elektron ve hol gibi parçacıklardan farklı olduğunu ifade etmek için kullanılmıştır.

2.4 Josephson Eklemleri

Bölüm 2.3'te süperiletkenler için söz konusu olan taşıyıcı yükler yani Cooper çiftleri için Schrodinger denklemi ve akım yoğunluğu ifadesi fiziksel olarak ele alınmıştır. Bu kısımda Josephson eklemleri boyunca oluşan akım yoğunluğu ifadesi türetilerek DC ve AC Josephson etkisi ele alınacaktır. Bu bölümde öğreneceğimiz DC ve AC Josephson etkisi sonraki bölümlerde inceleyeceğimiz Josephson ekleminin manyetik alan etkisi altındaki davranışını teorik olarak ifade etmek için kullanılacaktır. Bunun yanında elde edeceğimiz eşitlikler DC SQUID ve DC Bİ-SQUID gibi süperiletken devrelerin dış manyetik alan etkisi altındaki davranışını anlamak için kullanılacaktır.

Birbirlerine makroskobik mesafede bulunan S_L ve S_R olarak adlandırılan, iki süperiletkeni göz önüne alacak olursak (Josephson eklemleri), bu iki süperiletkeni ifade eden dalga fonksiyonunun fazının birbirlerinden bağımsız olması beklenmektedir [11, 12]. Ancak iki süperiletken çift birbirlerine \AA mertebesinde yaklaştırılırsa tünelleme gibi kuantum mekaniksel durumlar söz konusu olabilir. Süperiletken malzemeler için bir önceki bölümde dalga fonksiyonunu ve Schrodinger dalga denklemini ifade ettiğimiz Cooper çifti olarak adlandırılan taşıyıcı yükler söz konusudur. Bu parçacıklar bazı durumlarda tünellemeye maruz kalabilir. İki süperiletken arasında meydana gelen tünelleme durumuna Josephson tünellemesi ismi verilmiştir. Tünelleme yani Josephson eklemleri durumunda S_L ve S_R olarak adlandırdığımız süperiletkenleri temsil eden dalga fonksiyonu birbirinden bağımsız olmayacaktır. Gerçekleşen tünelleme dolayısıyla, aralarında mesafe bulunan iki süperiletkenden oluşan tümleşik sistem, tek bir süperiletken gibi davranacaktır [27].



Şekil 2.4 : Josephson Ekleme.

Yukarıdaki şekil, Süperiletken-Yalıtkan-Süperiletken konfigürasyonunda bulunan bir Josephson eklemeni temsil etmektedir. ψ_L ve ψ_R her bir süperiletkene karşılık gelen dalga fonksiyonları olsun. Bu dalga fonksiyonlarının makroskopik yani tek bir kuantum durumu ile ifade edilebildiğini varsayalım. Bölüm 2.3'te süperiletken için yazdığımız Schrodinger denkleminin çözümü önerisi olarak ifade ettiğimiz dalga fonksiyonunu kullanarak, Josephson ekleminde yer alan süperiletkenler için dalga fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\psi(\mathbf{r}, t)_L = n^*(\mathbf{r}, t)_L^{1/2} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)_L} \quad (2.23)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t)_R = n^*(\mathbf{r}, t)_R^{1/2} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)_R} \quad (2.24)$$

Bu durumda $\varphi(\mathbf{r}, t)_R - \varphi(\mathbf{r}, t)_L$ ifadesini iki süperiletkeni temsil eden dalga fonksiyonları arasındaki faz farkı olarak ifade edebiliriz. Dalga fonksiyonlarından yararlanarak her iki süperiletkende bulunan Cooper çifti yoğunluğunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\psi(\mathbf{r}, t)_L \psi(\mathbf{r}, t)_L^* = n^*(\mathbf{r}, t)_L \quad (2.25)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t)_R \psi(\mathbf{r}, t)_R^* = n^*(\mathbf{r}, t)_R \quad (2.26)$$

Süperiletkenleri temsil eden dalga fonksiyonları matematiksel bir uzay oluşturmaktadır. Bu matematiksel uzayı, bra-ket notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$|\psi\rangle = \psi_R |R\rangle + \psi_L |L\rangle \quad (2.27)$$

Yukarıdaki eşitlikte ifade ettiğimiz üzere Josephson eklemesinde bulunan süperiletkeni temsil eden bir dalga fonksiyonu matematiksel olarak sol ve sağ olmak üzere iki durumda bulunabilir. Josephson eklemi sisteminin toplam enerjisini, eşitlik 2.3' te bulunan zamana bağlı Schrodinger denklemini kullanarak ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle \quad (2.28)$$

Süperiletken-yalıtkan-süperiletken konfigürasyonunda bulunan bir Josephson eklemine göz önünde bulundurduğumuzda iki adet süperiletken ve bir adet süperiletken durumda bulunmayan yalıtkan bölge söz konusudur. Sol veya sağ süperiletkende bulunan bir Cooper çiftini göz önüne aldığımızda, kuantum tünelleme durumunda Cooper çiftleri yasaklı bölge durumunda olan yalıtkan bölge de de bulunma olasılığına sahiptir. Bu durumda enerji operatörü sistemin toplam enerjisini ifade ettiği için aşağıdaki gibi ifade edilmelidir [11, 12, 23, 27]:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_L + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_T \quad (2.29)$$

Süperiletken bölgeler ve tünellemenin meydana geldiği yalıtkan bölge için enerji operatörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11, 12, 23, 27].

$$\hat{\mathcal{H}}_L = E_L |L\rangle \langle L| \quad (2.30)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_R = E_R |R\rangle \langle R| \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_T = K [|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|] \quad (2.32)$$

Tünelleme bölgesi için ifade edilen enerji operatörü her iki süperiletkenin kuantum mekaniksel durumu ile ilişkili olmalıdır. Bu durumun sebebi, sağ veya sol süperiletkende bulunan Cooper çiftleri, tünelleme gereği yalıtkan bölgede belirli bir olasılıkta bulunabilir.

E_L ve E_R her iki süperiletken için taban durum enerji düzeyini ifade etmektedir. K , tünelleme bölgesindeki iki durum arasındaki coupling genliğini ifade etmektedir. Bu ifade tünelleme bariyerini oluşturan malzemenin karakteristiği ve geometrisi ile ilişkilidir.

Josephson eklemi için süperiletkenler cinsinden yazmış olduğumuz dalga fonksiyonu uzayını enerji operatörüne uyguladığımızda aşağıdaki sonuçları elde ederiz [11, 12, 23, 27]:

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle \quad (2.33)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = E_R \psi_R + K \psi_L \quad (2.34)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = E_L \psi_L + K \psi_R \quad (2.35)$$

Josephson eklemine V kadar DC potansiyel farka maruz kaldığı durumu ele alalım, bu durumda $E_L - E_R = 2eV$ olacaktır. Sol ve sağ süperiletken arası potansiyel farkın $2eV$ olmasının sebebi, süperiletken için baskın taşıyıcı yük olan Cooper çiftlerinin iki adet elektrondan oluşmuş olmasıdır. Bu durum süperiletkende meydana gelen süperiletken akımın sadece Cooper çiftlerinden meydana geldiği varsayımı için geçerli olacaktır. Yapmış olduğumuz çıkarımlar çerçevesinde eşitlik 2.34 ve 2.35' i aşağıdaki gibi yazabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = -eV \psi_R + K \psi_L \quad (2.36)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = eV \psi_L + K \psi_R \quad (2.37)$$

İki dalga fonksiyonu arasındaki faz farkını daha önce tanımladığımız gibi $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)_R - \varphi(\mathbf{r}, t)_L$ şeklinde tanımlayarak, aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\frac{\partial n^*(\mathbf{r}, t)_L}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)_L^{1/2} n^*(\mathbf{r}, t)_R^{1/2}} \sin \varphi \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial n^*(\mathbf{r}, t)_R}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)_L^{1/2} n^*(\mathbf{r}, t)_R^{1/2}} \sin \varphi \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)_L}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n^*(\mathbf{r}, t)_L}{n^*(\mathbf{r}, t)_R}} \cos \varphi - \frac{eV}{\hbar} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)_R}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n^*(\mathbf{r}, t)_L}{n^*(\mathbf{r}, t)_R}} \cos \varphi + \frac{eV}{\hbar} \quad (2.41)$$

Bu durumda Cooper çiftlerinin Josephson eklemi boyunca meydana getirdiği akım yoğunluğunu fiziksel tanımdan faydalanarak aşağıdaki gibi yazılabilir [11, 12, 23, 27]:

$$J = \frac{\partial n^*(\mathbf{r}, t)_L}{\partial t} = - \frac{\partial n^*(\mathbf{r}, t)_R}{\partial t} \quad (2.42)$$

$$J = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)_L n^*(\mathbf{r}, t)_R} \sin \varphi \quad (2.43)$$

Eşitlik 2.42' de elde ettiğimiz eşitlikte açıkça görülmektedir ki sol ve sağ süperiletkende bulunan Cooper çifti yoğunluğunun zamana bağlı değişimi birbirine eşit, fakat zıt işaretlidir. Eksi işaretinin fiziksel anlamı, olası bir Cooper çifti akışının bir süperiletkenden diğer süperiletkene doğru olduğunu ifade etmektedir. Josephson eklemeni oluşturan her bir süperiletkenin eşit Cooper çifti yoğunluğuna sahip olduğunu varsayarsak ($n^*(\mathbf{r}, t)_L = n^*(\mathbf{r}, t)_R = n^*(\mathbf{r}, t)$) bu durumda Josephson eklemi için akım yoğunluğu ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$J_c = \frac{2}{\hbar} K n^*(\mathbf{r}, t) \quad (2.44)$$

$$J = J_c \sin \varphi \quad (2.45)$$

Eşitlik 2.40 ve eşitlik 2.41' i kullanarak iki dalga fonksiyonunun faz farkının zamana göre türevini aşağıdaki gibi yazabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (2.46)$$

Josephson eklemi boyunca potansiyel farkın sıfıra eşit olduğu durumu düşünelim ($V = 0$), bu durumda eşitlik 2.46' ya bakarak faz farkının bir sabite eşit olması gerektiğini söyleyebiliriz. Bu durumda eşitlik 2.45 bize Josephson eklemi boyunca faz farkı ile ilişkili olarak sabit bir akımın meydana geleceğini söylemektedir. Bu durum özetle Josephson eklemi boyunca potansiyel fark olmaksızın akım oluşabileceğini göstermektedir. Josephson ekleminin bu özgün davranışı DC Josephson etkisi olarak adlandırılmaktadır. [11, 12, 23, 27] Bir diğer durum olarak $V \neq 0$ olasılığını ele alalım, bu durumda eşitlik 2.46'ya bakacak olursak zamana bağlı bir faz farkının söz konusu olduğu açıktır. Bu durumda eşitlik 2.45 zamana bağlı hale gelecektir yani Josephson eklemi üzerinde zamana bağlı bir akım yoğunluğu söz konusu olacaktır. Bu fiziksel durum AC Josephson etkisi olarak adlandırılır. [11, 12, 23, 27]

Eşitlik 2.45' te bulunan ifadenin alabileceği en yüksek değer J_c ' ye eşittir, bu yüzden J_c ifadesi Josephson eklemi için kritik akım yoğunluğu olarak adlandırılmaktadır.

Aynı şekilde ifade akım cinsinde yazılabilir ve bu durumda I_c ifadesi Josephson eklemi için kritik akım değeri olacaktır.

2.4.1 Manyetik Alan Etkisi

Önceki kısımlarda Josephson eşitliklerini elde ettik ve bunun yanında süperiletkenler için akım yoğunluğu ifadesini türettik. Bu bölümde türetmiş olduğumuz bu ifadeleri kullanarak Josephson ekleminin dışarıdan uygulanan manyetik alana karşı verdiği tepki ele alınacaktır. Bu tepki Josephson eklemi üzerinde oluşan akım yoğunluğunun dış manyetik alan ile ilişkisini ortaya koyarak incelenecektir.

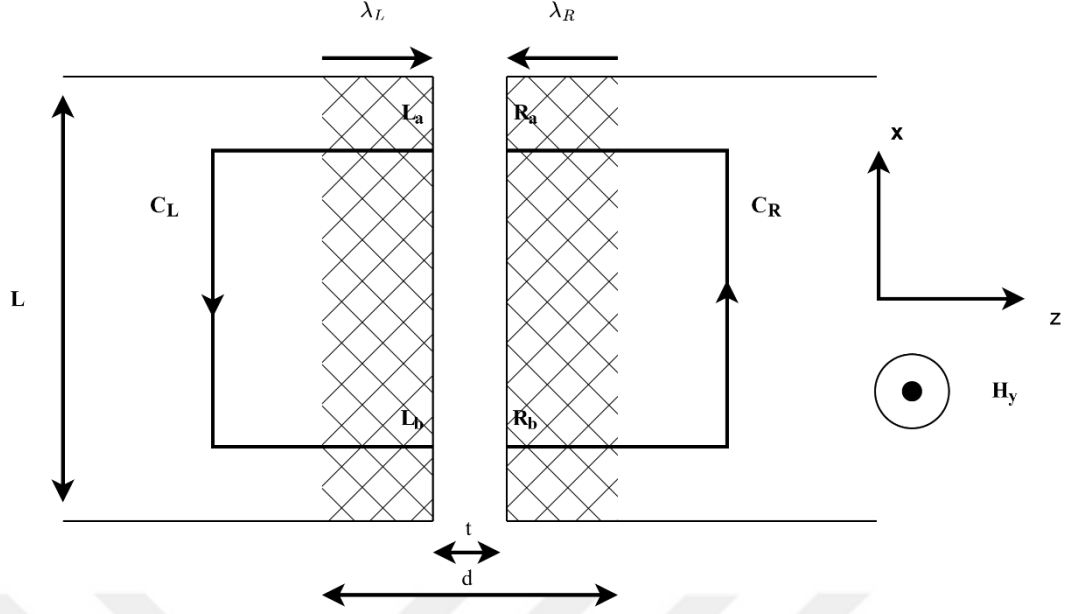
Bir Josephson ekleminin dışarıdan uygulanan bir manyetik alana Şekil 2.5'teki gibi maruz kaldığını düşünelim. Eşitlik 2.22' de bulunan süperiletkenler için türetmiş olduğumuz akım yoğunluğu ifadesini, aşağıda tanımlanmış olan dönüşümleri kullanarak bir süperiletken için Cooper çifti dalga fonksiyonunun fazının uzaysal değişimini yani faz farkını ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]. (Aşağıdaki eşitliklerde Gauss birim sistemi kullanılmıştır [28]. SI birim sistemine göre karşılığı eşitlik 2.79' da bulunmaktadır.)

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.47)$$

$$U \rightarrow U - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.48)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{2e}{\hbar c}\chi \quad (2.49)$$

$$\nabla\varphi_{L,R} = \frac{2e}{\hbar c} \left(\frac{mc}{2e^2 n(\mathbf{r}, t)} \mathbf{J}_s + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (2.50)$$



Şekil 2.5 : y yönündeki Manyetik alana maruz kalmış, Josephson eklemi.

Yukarıdaki şekilde gri olarak belirtilen bölge her iki süperiletken için London nüfuz derinliğini temsil etmektedir. Çizmiş olduğumuz C_L ve C_R çevritleri şekilde görüldüğü üzere London nüfuz derinliğinin dışına kadar uzatılmıştır. İlgili bölgede $J_s = 0$ olacaktır. Şekilde görüldüğü üzere C_L ve C_R çevritleri London nüfuz derinliği bölgesinin içerisinde J_s' ye dik olarak seçilmiştir. Belirtmiş olduğumuz bu yaklaşımlar ile 2.50' de ifade etmiş olduğumuz fazın uzaysal değişimi ifadesinin C_L ve C_R boyunca çizgi integralini aşağıdaki gibi alabiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\varphi_{Ra}(x) - \varphi_{Rb}(x + dx) = \frac{2e}{\hbar c} \int \left(\frac{mc}{2e^2 n(\mathbf{r}, t)} \mathbf{J}_s + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.51)$$

$$\varphi_{Lb}(x + dx) - \varphi_{La}(x) = \frac{2e}{\hbar c} \int \left(\frac{mc}{2e^2 n(\mathbf{r}, t)} \mathbf{J}_s + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.52)$$

Yapmış olduğumuz varsayımlar çerçevesinde yukarıda ifade etmiş olduğumuz integral ifadelerinin argümanında bulunan J_s ifadesi $d\mathbf{l}$ 'ye diktir. Bu yüzden integralin argümanında bulunan skaler çarpım C_L ve C_R çevriti boyunca sıfıra eşit olacaktır. Yapmış olduğumuz çıkarımları kullanarak yukarıdaki eşitliği aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]: (Aşağıdaki eşitliklerde Gauss birim sistemi kullanılmıştır.[28])

$$\varphi(x + dx) = \varphi_{Lb}(x + dx) - \varphi_{Rb}(x + dx) \quad (2.53)$$

$$\varphi(x) = \varphi_{La}(x) - \varphi_{Ra}(x) \quad (2.54)$$

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} \left[\int_{C_L} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_R} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} \right] \quad (2.55)$$

Şekil 2.5'te bulunan iki süperiletken arasındaki boşluğu(bariyer) ihmal edersek C_L ve C_R çevritlerinden oluşan iki ayrı çizgi integralini kapalı çizgi integrali olarak ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.56)$$

Manyetik potansiyelin kapalı çizgi integralini manyetik alan cinsinden yazabiliriz, bu durumda yukarıda bulunan eşitliğin sağ tarafındaki integral aşağıdaki gibi olacaktır [11, 12, 23, 27]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.57)$$

$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \iint \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.58)$$

$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.59)$$

$$\iint \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = H_y(\lambda_L + \lambda_R + t)dx \quad (2.60)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan λ_L ve λ_R her iki süperiletken için London nüfuz derinliği parametresini ifade etmektedir, t ise iki süperiletken arasında yer alan dielektrik bariyeri temsil etmektedir. Manyetik alan için sadece London nüfuz derinliği boyunca penetrasyon söz konusu olduğu için Josephson ekleminden geçen manyetik akı $(\lambda_L + \lambda_R + t)$ çarpanı ile ifade edilmektedir.

Eşitlik 2.60'ta elde etmiş olduğumuz ifadeyi, 2.56' da yazacak olursak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz [11, 12, 23, 27]:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2e}{\hbar c} (\lambda_L + \lambda_R + t)H_y \quad (2.61)$$

$$\varphi = \frac{2e}{\hbar c} dH_y x + \varphi_0 \quad (2.62)$$

Eşitlik 2.62 ile faz ifadesinin dış manyetik alan ve Josephson eklemının geometrisi ile ilişkisini ortaya koymuş olduk. Bu durumda elde ettiğimiz faz ifadesini 2.45

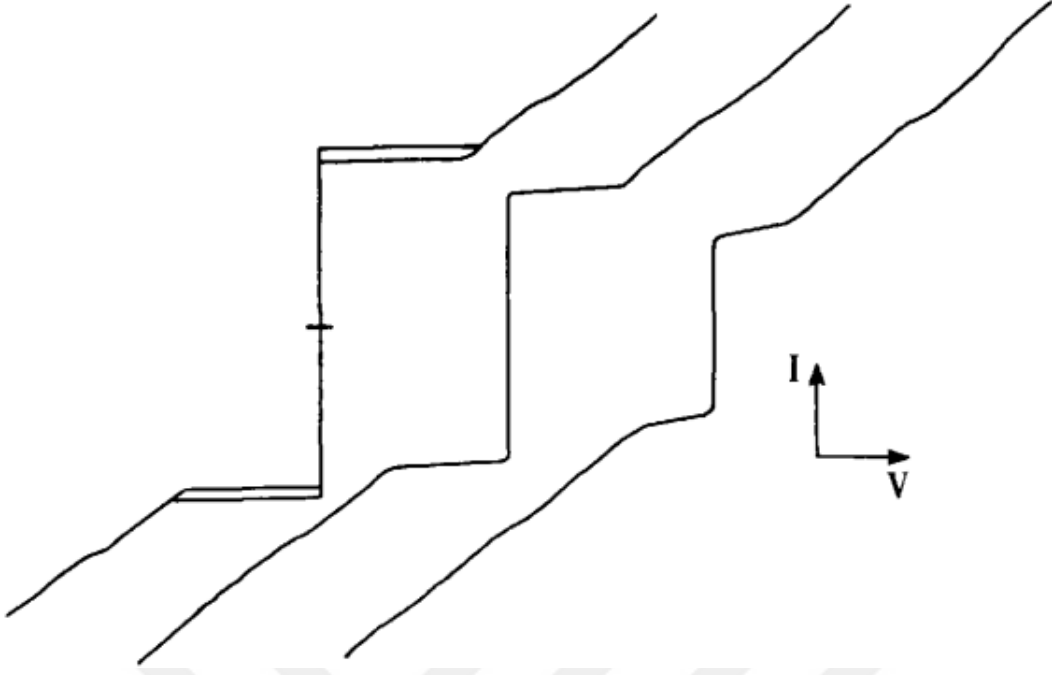
ifadesinde yerine yazarsak, Josephson eklemi üzerindeki akım yoğunluğu ile dış manyetik alan arasındaki ilişkiyi elde etmiş oluruz [11, 12, 23, 27]:

$$J = J_c \sin \left(\frac{2e}{\hbar c} \int H_y dx + \varphi_0 \right) \quad (2.63)$$

2.4.2 RCSJ Model

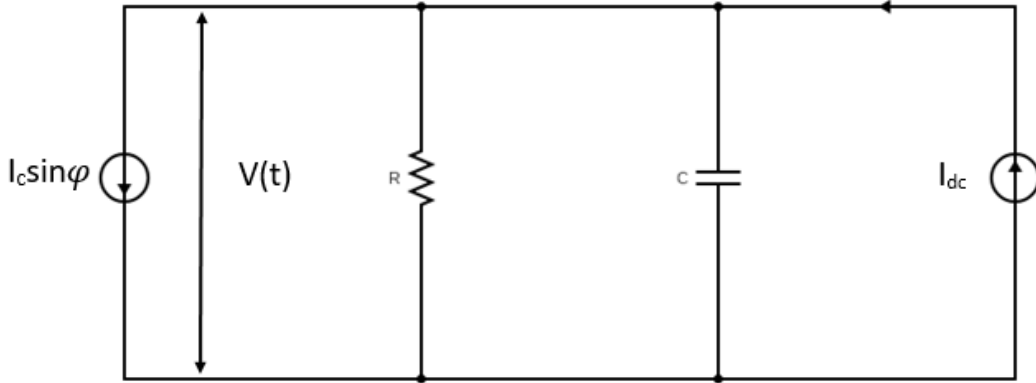
Önceki bölümlerde Josephson eklemi üzerinde meydana gelen DC ve AC Josephson etkilerini teorik olarak irdelemiş olduk. Bunun yanında Josephson ekleminin manyetik alan etkisi altındaki davranışını teorik olarak inceledik. Bu bölümde Josephson eşitliklerini kullanarak Josephson ekleminin I-V karakteristiği RCSJ olarak adlandırılan bir model yardımıyla teorik olarak incelenecektir. Bu kısımda ortaya koyacağımız teorik eşitlikler DC SQUID ve DC Bi-SQUID' in dış manyetik alan etkisi altındaki davranışını irdelemek amacıyla kullanılacaktır.

Önceki bölümlerde teorik olarak incelemiş olduğumuz DC ve AC Josephson etkileri deneysel çalışmalar ile tutarlılık göstermektedir. Örnek olarak şekil 2.6'da görülen Al köprü Josephson eklemi için farklı sıcaklıklarda elde edilmiş I-V grafiklerini ele alalım [27]. DC ve AC Josephson etkilerine dayanarak söyleyebiliriz ki, Josephson eklemi boyunca meydana gelen potansiyel farkın sıfıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu iki durum söz konusudur. DC Josephson etkisi bize potansiyel farkın sıfıra eşit olduğu durumda Josephson eklemi boyunca sıfırdan farklı sabit değerde bulunan bir akımın söz konusu olduğunu söylemektedir. Bu durum Şekil 2.6'da görülen I-V grafiği ile tutarlılık göstermektedir. AC Josephson etkisine göre Josephson eklemi boyunca meydana gelen potansiyel farkın sıfırdan farklı olduğu durumda Josephson eklemi üzerinde zaman bağlı değişen bir akım söz konusudur. Şekil 2.6 aynı şekilde AC Josephson etkisi ile tutarlıdır.



Şekil 2.6 : Al köprü Josephson Junction için farklı sıcaklıklarda elde edilmiş I-V grafikleri.[27]

Zayıf bağlı durumunda bulunan bir Josephson eklemi için I-V karakteristiği, Josephson eklemi için bir devre eşdeğeri oluşturularak modellenenmektedir [27]. Şekil 2.7' de Josephson ekleminin I-V karakteristiğini temsil etmek için kullanılan RCSJ devre modeli görülmektedir [11, 12, 23, 27].



Şekil 2.7 : Josephson eklemi eş değer devre şeması ve DC akım beslemesi.

Şekil 2.7'de görülen Josephson eklemi eş değer devre için I_{dc} ifadesini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$I_{dc} = C \frac{dV(t)}{dt} + GV(t) + I_c \sin\varphi(t) \quad (2.64)$$

$CdV(t)/dt$ ifadesi kapasitör üzerinden geçen akımı temsil etmektedir, direnç üzerinden akan akım ise $GV(t)$ şeklinde yazılabilir, $I_c \sin\varphi(t)$ ifadesi ise eşitlik 2.45 ile ifade etmiş olduğumuz Cooper çiftlerinin etkisi ile meydana gelen akımdır. $V(t)$ ifadesi Josephson eklemi boyunca oluşan potansiyel farkı temsil etmektedir. Bu ifade 2.46' da görüldüğü üzere fazı temsil eden $\varphi(t)$ ifadesi ile ilişkilidir. İlgili devre modeli fazın Josephson eklemi boyunca uzaysal bir değişime uğramadığını varsaymaktadır. Bu yüzden faz için sadece zamansal bağıllık söz konusudur. Eşitlik 2.46 kullanılarak I_{dc} aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11, 12, 23, 27]:

$$I_{dc} = \frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi(t)}{dt} + I_c \sin\varphi(t) \quad (2.65)$$

Denklem 2.65 ile ifade ettiğimiz Josephson eklemi için I_{dc} ifadesi boyutsuz değişkenler tanımlanarak matematiksel olarak daha sade bir şekilde yazılabilir [11, 12, 23, 27]:

$$\tau = w_j t \quad (2.66)$$

$$\beta_j = \frac{1}{w_j} \frac{1}{RC} \quad (2.67)$$

$$\eta(\tau) = \beta_j \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \frac{V}{RI_c} \quad (2.68)$$

$$w_j = \left(\frac{2e I_c}{\hbar C} \right)^{1/2} \quad (2.69)$$

$$\alpha = \frac{I_{dc}}{I_c} \quad (2.70)$$

$$\alpha = \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \beta_j \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \sin\varphi(\tau) \quad (2.71)$$

Yukarıdaki eşitliklerde tanımlamış olduğumuz w_j plazma frekansı olarak adlandırılır, τ ifadesi ise plazma frekansı kullanılarak zamanın boyutsuzlaştırılmış halidir. Aynı şekilde Johnson parametresi olarak adlandırılan β_j boyutsuz bir parametredir, α ise kritik akım ile normalize edilmiş DC besleme akımını temsil etmektedir. Eşitlik 2.71 ifadesi çözülerek normalize besleme akımına karşılık gelen normalize voltaj değerleri yani Josephson eklemi için I-V eğrisi elde edilebilir. Ancak bu eşitliğin çözümü analitik yöntemlerle mümkün görülmemektedir, bu yüzden eşitlik ancak nümerik analiz metotları ile çözüme kavuşturulabilir.

2.4.3 RSJ model

Eşitlik 2.71 $C \rightarrow 0$ durumunda analitik olarak çözülebilir duruma gelmektedir. Ortaya çıkan bu model RSJ model olarak adlandırılır. Bu durumda eşitlik 2.71 aşağıdaki gibi olacaktır [11, 12, 23, 27]:

$$\alpha = \beta_j \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \sin\varphi(\tau) \quad (2.72)$$

Ayrıca aşağıdaki tanımlar ile RSJ modeli aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\tau = w_c t \quad (2.73)$$

$$\Phi_0 = h/2e \quad (2.74)$$

$$w_c = \frac{2\pi}{\Phi_0} V_c \quad (2.75)$$

$$\alpha = \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} + \sin\varphi(\tau) \quad (2.76)$$

Yukarıda görüldüğü üzere literatürde RSJ model için tanımlanmış farklı değişkenler mevcuttur, Φ_0 daha sonra bahsedilecek olan manyetik akı kuantumunu ifade eder, bunun yanında w_c karakteristik frekans olarak adlandırılmaktadır.

2.5 Manyetik Akı Kuantumu

Bu kısımda manyetik akının süperiletken malzeme içerisindeki davranışı matematiksel olarak irdelenecek ve fiziksel yönleri ile yorumlanacaktır. Bu kısımda yapacak olduğumuz çıkarımlar sonraki bölümlerde DC SQUID/Bi-SQUID gibi süperiletken girişim cihazlarının anlaşılmasına olanak sağlayacaktır.

Bir süperiletkende çeşitli akım taşıyıcılar söz konusudur, bu akım taşıyıcılardan olan Cooper çiftleri bir malzeme için süperiletken durumu karakterize etmektedir. Eşitlik 2.20' de görüldüğü üzere süperiletken malzemede bulunan her bir Cooper çifti aynı dalga fonksiyonu ile temsil edilebilmektedir. Bu dalga fonksiyonunu kullanarak Cooper çiftlerinin yoğunluğunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\psi(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)^* = n^*(\mathbf{r}, t) \quad (2.77)$$

Bir parçacığın yoğunluğu her koşulda fiziksel bir anlam ifade etmeli ve tek değerli olmalıdır, dolayısıyla Cooper çiftlerinin yoğunluğunu ifade eden $n^*(\mathbf{r}, t)$ fiziksel olarak anlamlı olmalıdır. Bu durumun sağlanabilmesi için Cooper çiftlerini ifade eden dalga fonksiyonunun fazı ancak $2\pi n$ değerlerini almalıdır. ($n = 0, 1 \dots n$) Bu durum dışında Cooper çifti yoğunluğunu ifade eden $n^*(\mathbf{r}, t)$ karmaşık sayı olacak ve bu durumda fiziksel anlamını yitirecektir [11, 12, 23, 27].

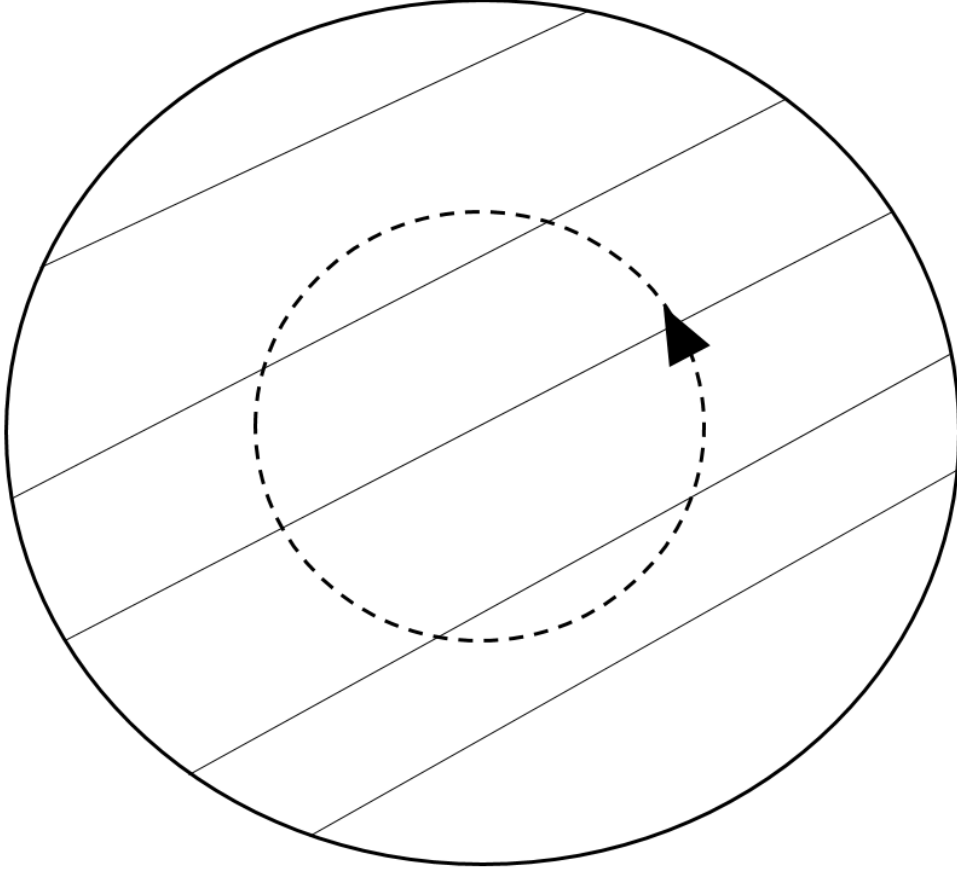
$$\varphi(\mathbf{r}, t) = 2\pi n, n = 0, 1 \dots n \quad (2.78)$$

Eşitlik 2.50 Cooper çiftlerini temsil eden dalga fonksiyonu fazının süper iletkende oluşan akım yoğunluğu ve manyetik vektör potansiyel ile olan ilişkisini ortaya koymaktadır. Eşitlik 2.50 SI birim sistemine göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11, 12, 23, 27].

$$\nabla\varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\mathbf{A} + \frac{m}{2e^2\rho} \mathbf{J}_s \right) \quad (2.79)$$

Eşitlik 2.79' da bulunan $\Phi_0 = h/2e$ ifadesi manyetik akı kuantumu olarak isimlendirilmektedir. Bu isimlendirmenin neden bu şekilde olduğunu daha net bir şekilde anlayacağız. Eşitlik 2.79' un her iki tarafını, bir süperiletken yüzey üzerinde Şekil 2.8'teki gibi kapalı çizgi integralini alalım. Dalga fonksiyonunun fazı, 2π ' nin tam sayı katlarına eşit olabileceği için eşitliğin sol tarafında bulunan fazın gradyanı kapalı çizgi integrali boyunca $2\pi n$ değerini alabilecektir [11, 12, 23, 27].

$$2\pi n = \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left\{ \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint \frac{m}{2e^2\rho} \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} \right\} \quad (2.80)$$



Şekil 2.8 : Süperiletken dairesel yüzey üzerinde çizgi integrali.

Manyetik vektör potansiyelin kapalı halka boyunca çizgi integralini manyetik alan cinsinden yazarak eşitlik 2.80' i düzenleyebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.81)$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.82)$$

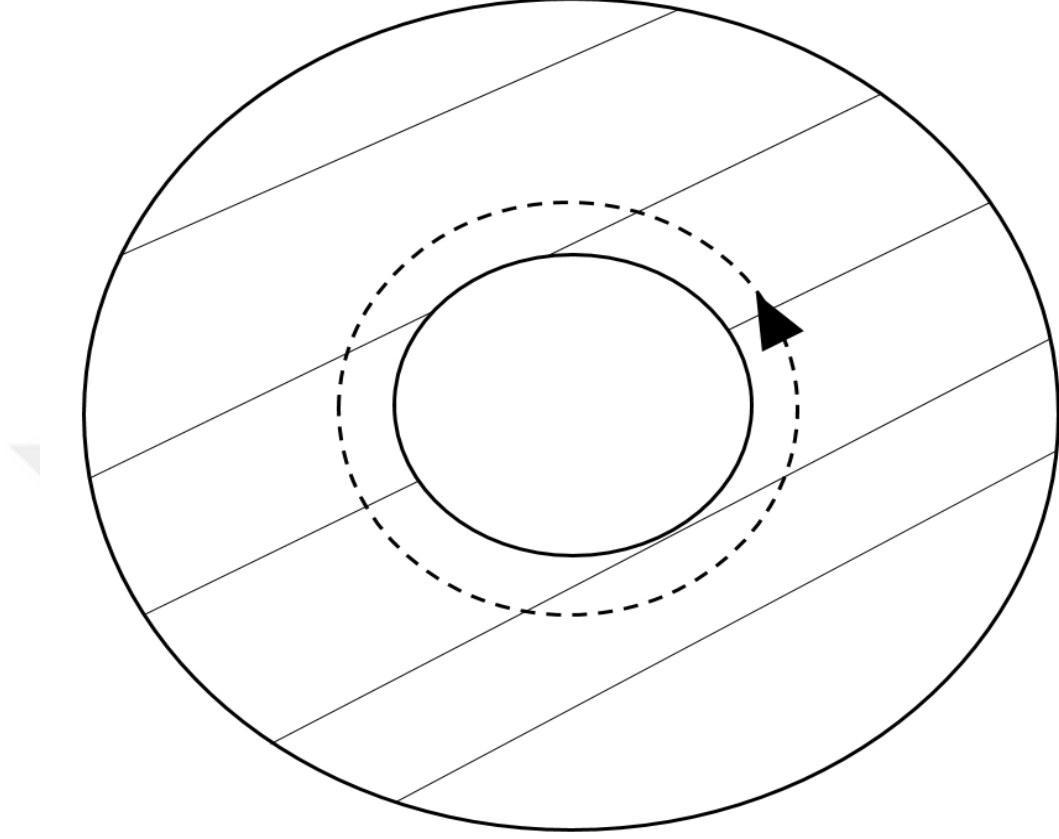
$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.83)$$

$$\iint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \frac{m}{2e^2\rho} \oint \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} = n\Phi_0 \quad (2.84)$$

Eşitlik 2.84' ün sol tarafı fluxoid olarak adlandırılmaktadır, bunun yanında bu eşitlik çok önemli bir durumu ifade etmektedir. Bu durum şudur ki, bir süperiletken yüzeyde manyetik akı kuantumludur. Yani açık söylemek gerekirse manyetik akı sadece $n\Phi_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots, n$) değerlerinden birini alabilir [11, 12, 23, 27].

Şekil 2.8' de bulunan süperiletken yüzey, süperiletken durumda iken Meissner-Ochsenfeld etkisi gereğince $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$ olmalıdır [13, 27]. Bu durumda n değeri sadece sifıra eşit olabilir. Bu durum süperiletken yüzey üzerinde London

nüfus derinliğinin yakınlarında söz konusu değildir çünkü bu bölgelerde $J_s \neq 0$ olacaktır.



Şekil 2.9 : Süperiletken disk yüzey üzerinde çizgi integrali.

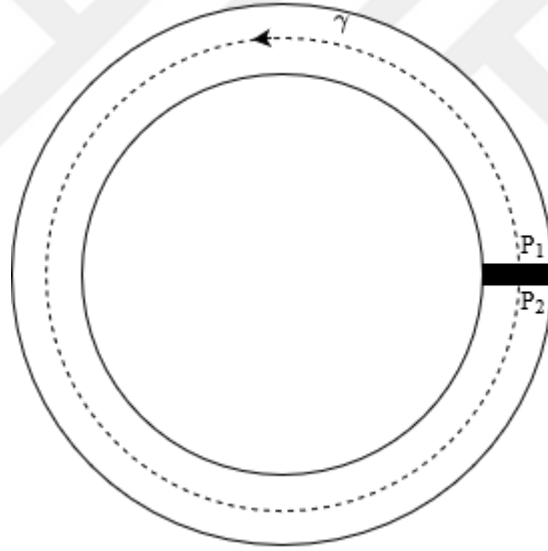
İkinci bir durum olarak şekil 2.9'daki gibi süperiletken bir disk yüzey üzerinde diskin süperiletken olmayan kısmında kapsayacak şekilde eşitlik 2.79' un çizgi integralini alacak olursak eşitlik 2.84' ü elde etmiş oluruz. Ancak bu durumda eşitlikte bulunan n değeri sıfırdan farklı değerler alabilmektedir. Bunun sebebi şudur ki, kapalı yüzey integrali için tanımlanmış olduğumuz çevrit süperiletken olmayan bir yüzeyide kapsamaktadır, bu durumda çevritin içerisinde bir manyetik akı söz konusu olacaktır. Bunun yanında çevrit London nüfus derinliğini kapsamaktadır, yani bu durumda $J_s \neq 0$ olacağı için eşitlik 2.84 'de bulunan yüzey akımı da manyetik akıya katkıda bulunacaktır. J_s değerinin ihmal edilebilir olduğu bir durumu ele alacak olursak süperiletken disk üzerinde incelemiş olduğumuz çevrit boyunca söz konusu olan manyetik akı aşağıdaki gibi olacaktır [11, 12, 23, 27]:

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = n\Phi_0 \quad (2.85)$$

Yukarıdaki açıkça şu anlama gelmektedir, ele aldığımız çevrit içerisindeki manyetik akı Φ_0 olarak sembolize etmiş olduğumuz manyetik akı kuantumunun tam katlarına eşittir. Yani süperiletken malzeme içerisindeki manyetik akı kuantumlanmıştır. Ayrıca ele almış olduğumuz iki durumda açıkça görülmektedir ki eşitlik 2.84 Meissner-Ochsenfeld etkisinin matematiksel gösterimidir [27]. Manyetik akının kuantumlanması durumu 1950 yılında ilk olarak London tarafından teorik olarak tahmin edilmiştir [29]. Sonrasında bu teori 1961 yılında Deaver ve Fairbank tarafından deneysel olarak ispatlanmıştır [30].

2.5.1 Süperiletken halkada Josephson eklemi

Bölüm 2.5'te manyetik akının süperiletken malzemede kuantumlanmasını teorik olarak inceledik. Bu kısımda süperiletken halkada bulunan tek bir Josephson eklemi durumunu ele alacağız. Önceki kısımda geliştirmiş olduğumuz eşitlikler bu kısımda ele alacağımız süperiletken devreyi incelememize olanak sağlayacaktır.



Şekil 2.10 : Josephson eklemi tarafından kesilmiş süperiletken halka.

Şekil 2.10' daki gibi süperiletken halkada bulunan bir Josephson eklemi düşünelim. Şekilde belirlemiş olduğumuz çevriti dikkate alarak eşitlik 2.79' un kapalı çizgi integralini alalım. Yüzey akımının ihmal edilebilir olduğunu varsayıp bir önceki bölümde yapmış olduğumuz işlemleri tekrarlırsak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$2\pi n = \varphi_j + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.86)$$

$$\varphi_j = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (2.87)$$

φ_j ifadesi Josephson eklemi boyunca meydana gelen faz farkını ifade etmektedir. Yukarıdaki eşitlik Josephson eklemi boyunca meydana gelen faz farkının süperiletken devrede meydana gelen manyetik akı ile ilişkili olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

Şimdi, Şekil 2.10' da bulunan süperiletken devreye dışarıdan bir manyetik alan uygulandığını düşünelim. Bölüm 2.5' te ortaya koymuş olduğumuz manyetik akının kuantumlanmasını düşünecek olursak, burada da manyetik akının çevrit içerisinde kuantumlu olması gerekmektedir. Bu durum süperiletken devredeki manyetik akının kuantumlu olması durumunu bozabilir, bu yüzden devrede bir I_S akımı indüklenir. İndüklenen bu akım manyetik alan oluşturur ve manyetik akının süperiletken devrede kuantumlu olmasını sağlar. Yani manyetik akının kuantumlu olması durumu süperiletken devrede indüklenen I_S akımı sayesinde sağlanmış olur. Bu durumda süperiletken devre üzerinde oluşan toplam manyetik akıyı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [11, 12, 23, 27]:

$$\Phi = \Phi_e + LI_S \quad (2.88)$$

Yukarıda eşitlikte yer alan Φ_e dış manyetik alandan kaynaklı manyetik akıyı temsil etmektedir, L ise süperiletken devrenin indüktansını ve I_S süperiletken devrede meydana gelen koruma akımını temsil etmektedir.



3. SÜPERİLETKEN KUANTUM GİRİŞİM CİHAZLARI

Tez çalışmasının bu bölümünde DC Bi-SQUID ve DC SQUID gibi manyetik alan sensörlerinin uygulanan manyetik alana karşı tepkisi matematiksel olarak incelenecek ve sonrasında fiziksel olarak yorumlanacaktır. İlgili manyetik alan sensörleri için belirli varsayımlar ile üretilmiş analitik yöntemler mevcuttur ancak tez çalışmasının kapsamı gereği bu bölümde analitik yaklaşımlara yer verilmeyecektir. Bu kısımda türetilen matematiksel ifadeler PySQIF kütüphanesinin çözüm aradığı diferansiyel denklem setlerini ifade etmektedir.

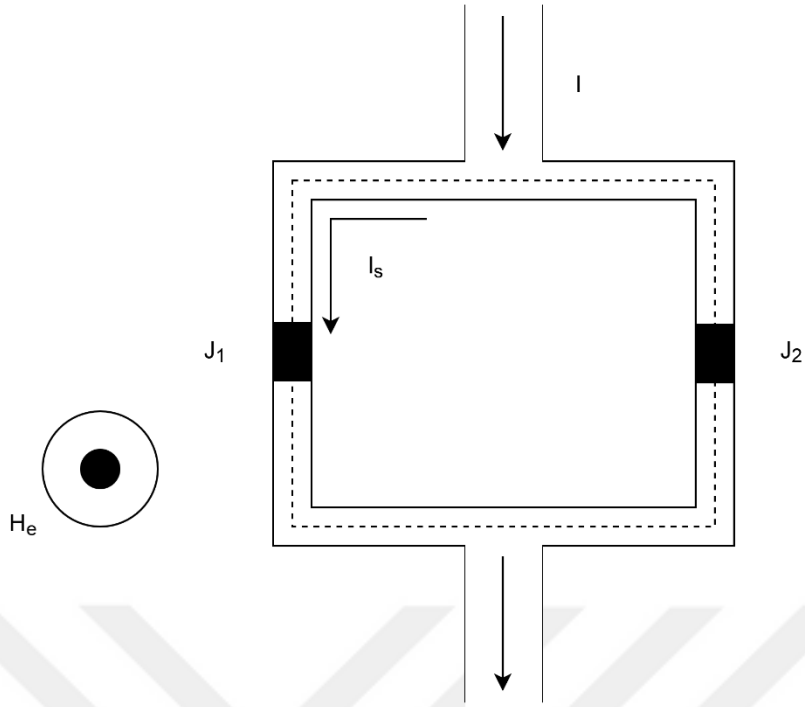
Süperiletken kuantum girişim cihazları, süperiletken halkada Josephson eklemlerinin çeşitli varyasyonlar ile bulunması sonucu meydana gelmektedir. Bu durumdan ötürü süperiletken kuantum girişim cihazlarda hem manyetik akı kuantumlanması hem de Josephson tünellemesinin etkileri gözlemlenebilmektedir [31].

Günümüzde manyetik alan ölçmek için çeşitli yöntemler mevcuttur, bu yöntemler ile yaklaşık olarak pT mertebesinde ölçümler yapılabilmektedir. Süperiletken kuantum girişim cihazlar ise yaklaşık olarak $0.1 fT$ mertebesinde hassasiyete sahiptir, bu yönüyle süperiletken kuantum girişim cihazlar günümüzde kullanılan en hassas manyetik alan sensörleridir [3].

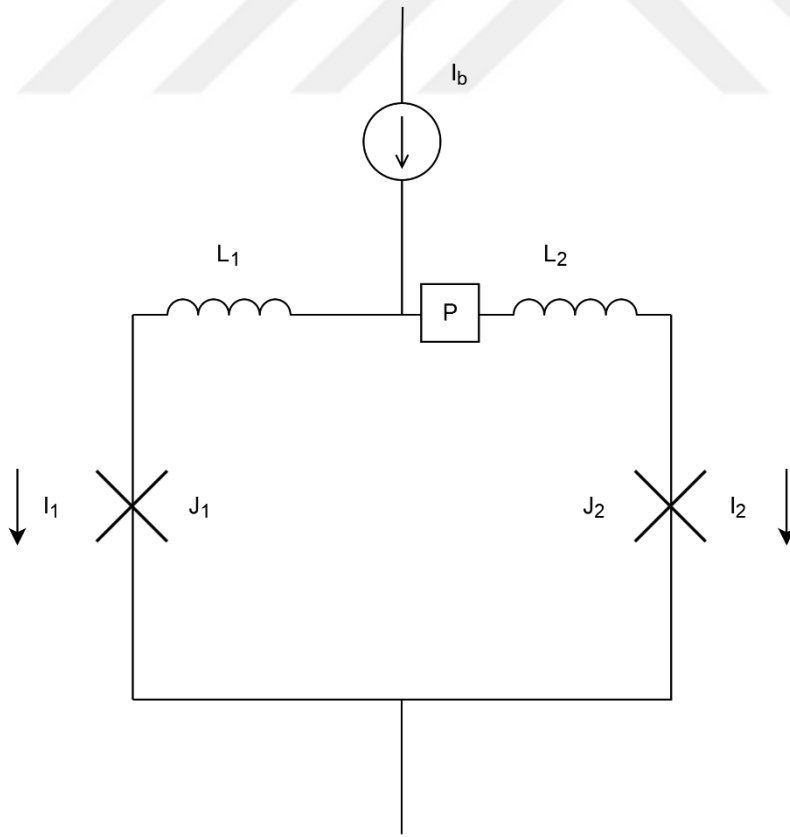
3.1 DC SQUID

Bölüm 1 ve bölüm 2 'de süperiletken kuantum girişim cihazlarının önemi kısaca özetlenmiştir. Bu kısımda DC SQUID'lerin uygulanan dış manyetik alana karşı gösterdiği tepki matematiksel olarak incelenecek ve fiziksel olarak yorumlanacaktır.

DC SQUID'ler Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de görüldüğü üzere süperiletken halkada paralel bağlı iki adet Josephson ekleminden meydana gelmektedir [27, 32].



Şekil 3.1 : DC SQUID şematik gösterim.



Şekil 3.2 : DC SQUID devre gösterimi. “P” dış manyetik alan kaynağını temsil etmektedir.

DC SQUID bir dış manyetik alana maruz kaldığında, Bölüm 2.5 ve Bölüm 2.5.1 'de anlatıldığı üzere süperiletken halkada manyetik akı kuantumlanması durumunu korumak için bir koruma akımı (I_s) meydana gelecektir. Bu koruma akımı, uygulanan dış manyetik alandan dolayı oluşan manyetik akının, süperiletken halkada manyetik akının kuantumlanması şartını engellememesi için indüklenmektedir. Dış manyetik akının varlığında DC SQUID boyunca meydana gelen toplam manyetik akı aşağıdaki gibi olacaktır [7, 27]:

$$\Phi = \Phi_e + LI_s \quad (3.1)$$

Yukarıdaki eşitlikte bulunan L ifadesi DC SQUID'in indüktansını temsil etmektedir. Bunun yanında I_s ifadesi Şekil 3.2 göz önüne alındığında aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$I_b = I_1 + I_2 \quad (3.2)$$

$$I_1 = \frac{I_b}{2} + I_s \quad (3.3)$$

$$I_2 = \frac{I_b}{2} - I_s \quad (3.4)$$

$$I_s = \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (3.5)$$

Eşitlik 2.87 'yi aynı yaklaşımlar altında DC SQUID için aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.6)$$

Eşitlik 3.6' de eşitlik 3.1' i yerine koyarsak ve $n = 0$ yani taban kuantum durumu yaklaşımında bulunursak, aşağıdaki sonucu elde ederiz [7, 27]:

$$l \frac{I_s}{I_c} = \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \quad (3.7)$$

$$l = 2\pi \frac{LI_c}{\Phi_0} \quad (3.8)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan l normalize indüktans olarak adlandırılmıştır. DC SQUID için ifade etmiş olduğumuz koruma akımını eşitlik 3.7' de yerine yazarak ve DC SQUID' te bulunan Josephson eklemlerinden kaynaklanan I_1 ve I_2 akımlarını

bölüm 2.4.2' de ifade ettiğimiz RSJ model ile ifade ederek DC SQUID 'te bulunan her bir Josephson eklemi için aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{I_b}{2} - \frac{I_c}{\beta}(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi\varphi_e) - I_{c1} \sin \varphi_1 \quad (3.9)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{I_b}{2} + \frac{I_c}{\beta}(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi\varphi_e) - I_{c2} \sin \varphi_2 \quad (3.10)$$

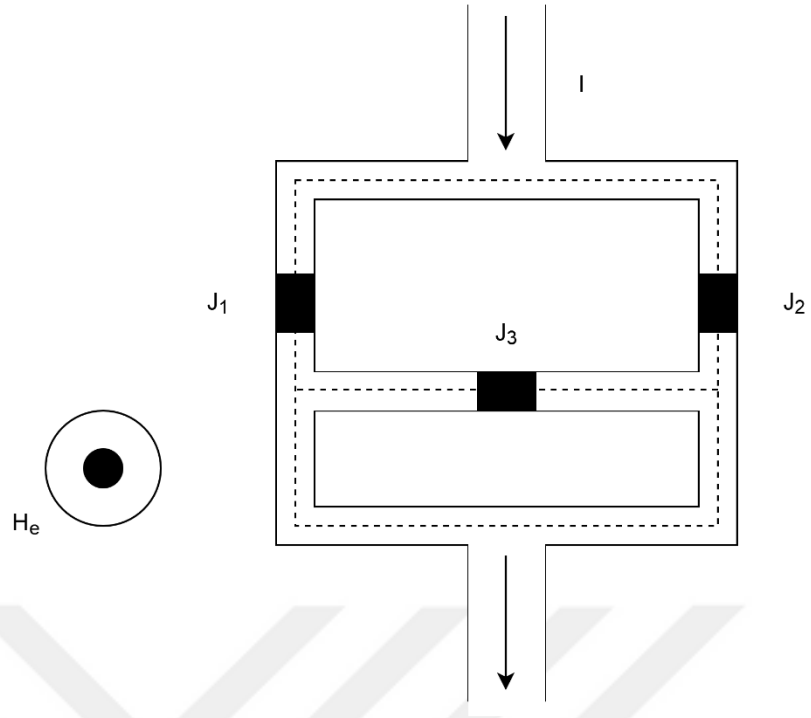
Yukarıdaki eşitliklerde bulunan $\varphi_e = \Phi_e/\Phi_0$ ifadesi normalize dış manyetik akıyı ifade etmektedir. Dış manyetik alan etkisinde bulunan DC SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark eşitlik 2.46' da yer alan Josephson eşitliği yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} \right) dt \quad (3.11)$$

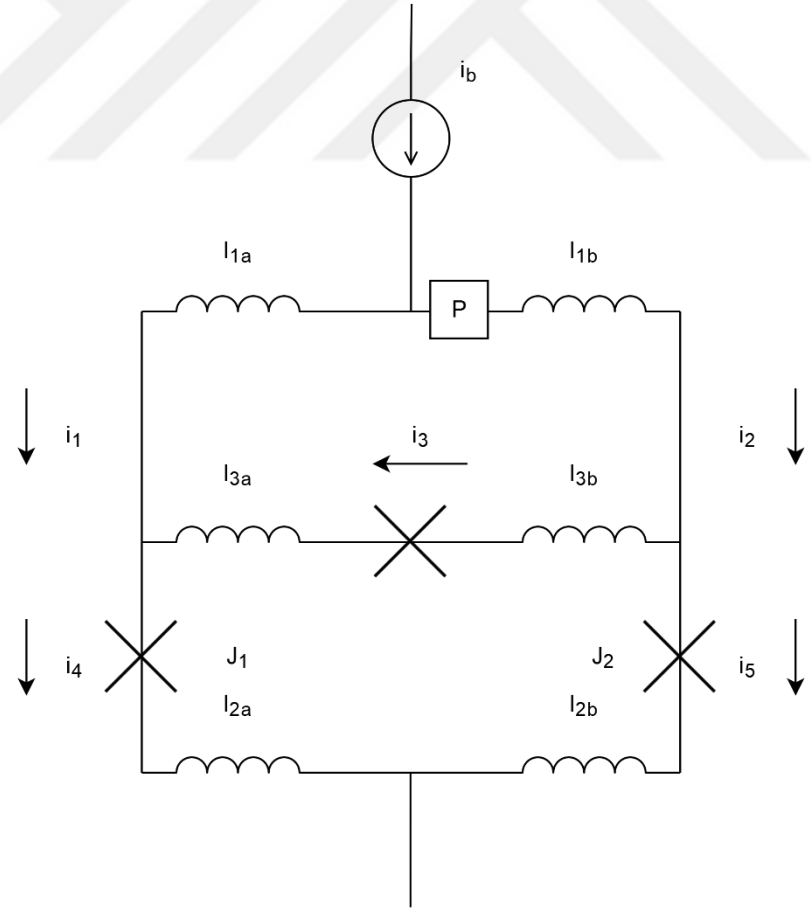
3.2 DC Bi-SQUID

Önceki kısımda DC SQUID için dış manyetik alan etkisinde DC SQUID boyunca meydana gelen potansiyel fark eşitliğini türetmiş olduk. Bu bölümde ise DC Bi-SQUID için dış manyetik alana bağlı potansiyel fark ifadesi türetilecektir.

DC Bi-SQUID, Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de görülen DC SQUID devresine paralel bir Josephson eklemi eklenerek tasarlanmıştır. DC Bi-SQUID' in şematik ve devre gösterimi Şekil 3.3 ve Şekil 3.4' te görülmektedir [7, 33, 34].



Şekil 3.3 : DC Bi-SQUID şematik gösterim.



Şekil 3.4 : DC Bi-SQUID devre gösterimi, "P" dış manyetik alanı temsil etmektedir.

DC Bi-SQUID' te bulunan J_1 ve J_2 Josephson eklemlerinin simetrik konfigürasyonda olduğunu yani aynı kritik akım değerlerine sahip olduklarını varsayalım. ($I_c = I_{c1} = I_{c2}$) Bu yaklaşımı kullanarak, DC Bİ-SQUID üzerindeki akımları Kirchoff yasası ve RSJ modeli yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [7, 27, 33, 34]:

$$i_b = i_1 + i_2 \quad (3.12)$$

$$i_2 = i_3 + i_5 \quad (3.13)$$

$$i_4 = i_1 + i_3 \quad (3.14)$$

$$i_4 = \dot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_1(\tau)) \quad (3.15)$$

$$i_5 = \dot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_2(\tau)) \quad (3.16)$$

$$i_3 = \dot{\varphi}_1 + i_{c3} \sin(\varphi_3(\tau)) \quad (3.17)$$

Yukarıdaki eşitliklerde yer alan i_{c3} ifadesi $i_{c3} = I_{c3}/I_c$ şeklinde ifade edilmektedir, nokta ise zaman sabiti olarak tanımladığımız τ ifadesine göre türevi temsil etmektedir, bunun yanında φ_i Josephson eklemleri boyunca meydana gelen faz farkını ifade etmektedir. Yukarıdaki eşitlikte yer alan diğer ifadeler aşağıda ifade edilmiştir:

$$\tau = \omega_c t \quad (3.18)$$

$$\omega_c = 2\pi \frac{V_c}{\Phi_0} \quad (3.19)$$

$$V_c = I_c R_n \quad (3.20)$$

Yukarıdaki eşitliklerde bulunan τ normalize zaman sabiti, ω_c karakteristik frekans ve V_c karakteristik gerilim olarak adlandırılmaktadır. Eşitlik 2.87'yi aynı yaklaşımlar altında DC Bi-SQUID için uyguladığımızda aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz [7, 27, 33, 34]:

$$\varphi_1 + l_{1a} i_1 + l_{2a} i_4 = 2\pi \varphi_e \mathbf{a} + \varphi_2 + l_{1b} i_2 + l_{2b} i_5 \quad (3.21)$$

Yukarıdaki elde ettiğimiz eşitlikte bulunan \mathbf{a} ifadesi süperiletken halkanın boyutunu ifade etmek için kullanılan bir parametredir. Fiziksel olarak yüzey alanı daha büyük

bir halka daha çok dış manyetik akıya maruz kalacaktır bu yüzden normalize dış manyetik akıya çarpan olarak ifade edilmektedir. $i_2 = i_b - i_1$ ifadesini kullanarak yukarıda yazmış olduğumuz eşitliği aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [7, 32, 33]:

$$\varphi_1 + l_{1a}i_1 + l_{2a}i_4 = 2\pi\varphi_e\mathbf{a} + \varphi_2 + l_{1b}(i_b - i_1) + l_{2b}i_5 \quad (3.22)$$

Elde ettiğimiz ifadeyi $i_1 = i_4 - i_3$ ifadesini kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz[7], [32], [33]:

$$(l_{1a} + l_{1b})(i_4 - i_3) + l_{2a}i_4 - l_{2b}i_5 = l_{1b}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} \quad (3.23)$$

$$(l_{1a} + l_{1b} + l_{2a})i_4 - l_{2b}i_5 - (l_{1a} + l_{1b})i_3 = l_{1b}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} \quad (3.24)$$

Eşitlik 3.12 – 3.17’de yer alan Josephson eklemleri için yazmış olduğumuz akım ifadelerini yukarıdaki eşitliklerde yerine yazarak aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz [7, 32, 33]:

$$\begin{aligned} (l_{1a} + l_{1b} + l_{2a})\dot{\varphi}_1 - l_{2b}\dot{\varphi}_2 - (l_{1a} + l_{1b})\dot{\varphi}_3 \\ = l_{1b}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} + l_{2b} \sin \varphi_2 \\ + (l_{1a} + l_{1b})i_{c3} \sin \varphi_3 - (l_{1a} + l_{1b} + l_{2a}) \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Yukarıdaki eşitliğin sol tarafı Josephson eklemlerinin faz farklarının türevlerini içermektedir, sağ taraf ise faz farklarına bağlı ifadeleri barındırmaktadır. Üç adet bilinmeyen söz konusu olduğu için DC Bi-SQUID için bir diferansiyel denklem seti oluşturmak için üç adet eşitliğe ihtiyaç duymaktayız. Eşitlik 3.21’ i $i_1 = i_b - i_2$ ifadesini kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz [7, 32, 33]:

$$\varphi_1 + l_{1a}(i_b - i_2) + l_{2a}i_4 = 2\pi\varphi_e\mathbf{a} + \varphi_2 + l_{1b}i_2 + l_{2b}i_5 \quad (3.26)$$

Yukarıdaki ifadeyi $i_2 = i_5 + i_3$ ifadesini kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz [7, 32, 33]:

$$-(l_{1a} + l_{1b})(i_5 + i_3) + l_{2a}i_4 - l_{2b}i_5 = -l_{1a}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} l_{2a}i_4 - (l_{1a} + l_{1b} + l_{2b})i_5 - (l_{1a} + l_{1b})i_3 \\ = -l_{1a}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Eşitlik 3.12 – 3.17’ de yer alan Josephson eklemleri için yazmış olduğumuz akım ifadelerini yukarıdaki eşitliklerde yerine yazarak aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz [7, 32, 33]:

$$\begin{aligned} l_{2a}\dot{\varphi}_1 - (l_{1a} + l_{1b} + l_{2b})\dot{\varphi}_2 - (l_{1a} + l_{1b})\dot{\varphi}_3 \\ = -l_{1b}i_b + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\varphi_e\mathbf{a} + (l_{1a} + l_{1b} + l_{2b})\sin\varphi_2 \\ + (l_{1a} + l_{1b})i_{c3}\sin\varphi_3 - l_{2a}\sin\varphi_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Yukarıdaki eşitlikle DC Bi-SQUID için ikinci eşitliği elde etmiş olduk, son eşitlik için DC Bi-SQUID’ in alt halkası için eşitlik 2.87’ yi aynı yaklaşımlar altında uyguladığımızda aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz [7, 27, 33, 34]:

$$\varphi_1 + \varphi_3 + l_{2a}i_4 + (l_{3a} + l_{3b})i_3 = l_{2b}i_5 + \varphi_2 \quad (3.30)$$

Eşitlik 3.12 – 3.17’ de bulunan Josephson eklemleri için yazmış olduğumuz akım ifadelerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} l_{2a}\dot{\varphi}_1 - l_{2b}\dot{\varphi}_2 + (l_{3a} + l_{3b})\dot{\varphi}_3 \\ = -\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - l_{2a}\sin\varphi_1 + l_{2b}\sin\varphi_2 \\ - (l_{3a} + l_{3b})i_{c3}\sin\varphi_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

DC Bi-SQUID için elde etmiş olduğumuz üç eşitliği nümerik yöntemler yardımı ile aşağıdaki formda ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = \left(1 + \frac{l_{12d}}{dl_{12s}}\right)\left(\frac{i_b}{2}\right) - \frac{1}{dl_{12s}\beta}(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi\varphi_{ext}\beta) \\ + \left(\frac{1}{d}\right)\left(1 + \frac{l_{23s}}{dl_{12s}}\right)i_{c3}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ - \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{d}\right)\sin(\varphi_1) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\sin(\varphi_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 = \left(1 + \frac{l_{12d}}{dl_{12s}}\right)\left(\frac{i_b}{2}\right) + \frac{1}{dl_{12s}\beta}(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi\varphi_{ext}\beta) \\ - \left(\frac{1}{d}\right)\left(1 + \frac{l_{23s}}{dl_{12s}}\right)i_{c3}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ - \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\sin(\varphi_1) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{d}\right)\sin(\varphi_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2}\right) dt \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} l_{12s} = l_{1a} + l_{1b} + l_{2a} + l_{2b}, \quad l_{12d} = l_{1b} - l_{1a} + l_{2b} - l_{2a}, \\ l_{23s} = l_{2a} + l_{2b} + l_{3a} + l_{3b}, \quad d = 3 + 2l_{23s}(l_{12s})^{-1} \end{aligned}$$

Yukarıda elde etmiş olduğumuz denklem setini nümerik yöntemler yardımı ile çözerek dış manyetik alan etkisinde bulunan DC Bi-SQUID boyunca oluşan normalize potansiyel farkı elde etmiş oluruz.





4. Metotlar ve Algoritmalar

Bu bölümde, dış manyetik alan etkisinde bulunan DC SQUID/Bi-SQUID devrelerin analizi için mevcut olan metotlar ele alınacaktır. Bu metotlar sırasıyla analitik, statik ve zamana bağlı olarak sıralanabilir. Analitik metotlar bölüm 3 'te süperiletken kuantum girişim cihazları için ortaya koyduğumuz matematiksel ifadelerin belirli varsayımlar ile analitik olarak çözülebilir duruma getirilmesi ile meydana gelmektedir. Statik metotlar ise önceki bölümlerde ifade etmiş olduğumuz zamana bağlı matematiksel ifadelerin belirli varsayımlar altında zamandan bağımsız ifadeler elde edilmesiyle oluşturulmuştur. Son olarak, zamana bağlı metotlar tez çalışmasının önceki kısımlarında ortaya koymuş olduğumuz matematiksel ifadelerin ek olarak bir yaklaşımda bulunmadan nümerik olarak çözüm aranması ile ortaya çıkmaktadır.

Tez çalışması kapsamında oluşturmuş olduğumuz analiz kütüphanesi olan PySQIF zamana bağlı metotlara dayanmaktadır. Bu yüzden analitik ve statik metotlar bu tez çalışmasında detaylı olarak ele alınmayacaktır.

4.1 DC SQUID

4.1.1 Analitik yöntem

3.1' de süperiletken kuantum girişim cihazları için çözümü nümerik yöntemlerle mümkün olan eşitlikler türetmiştik. Bunun yanında DC SQUID'ler için belirli yaklaşımlar ile analitik ifadeler üretmek mümkündür.

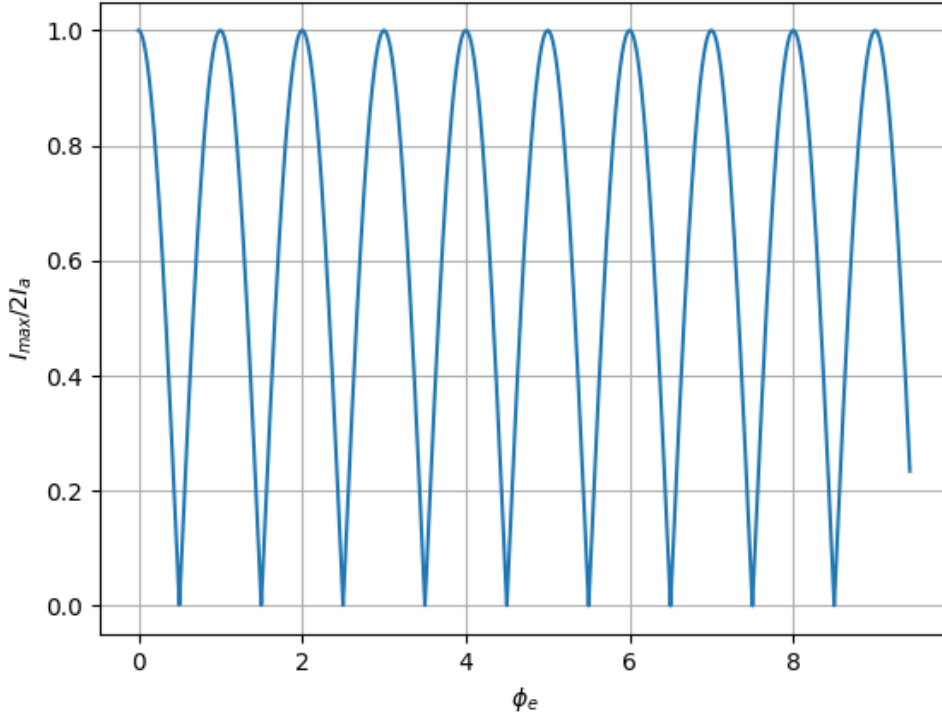
Kısım 3.1'de bulunan eşitlik 3.1 simetrik konfigürasyon yani DC SQUID' te bulunan her iki Josephson eklemının kritik akımının özdeş olduğu durum ve süperiletken halka boyunca indüktansın ihmal edilebilir olduğu varsayımı (simetrik SQUID) ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir [11, 12, 23, 27]:

$$\Phi \cong \Phi_e \quad (4.1)$$

$$\Phi_e = \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \quad (4.2)$$

$$I_{maks}(\phi_e) = 2I_a |\cos \pi \phi_e| \quad (4.3)$$

Yukarıdaki eşitliklerde bulunan ϕ_e normalize dış manyetik akı ve I_{maks} DC SQUID boyunca dış manyetik alan etkisiyle meydana gelen maksimum akımı ifade etmektedir. Eşitlik 4.3 göstermektedir ki dış manyetik alan altında bulunan bir DC SQUID genliği $2I_a$ olacak şekilde sinüzoidal bir davranış göstermektedir.

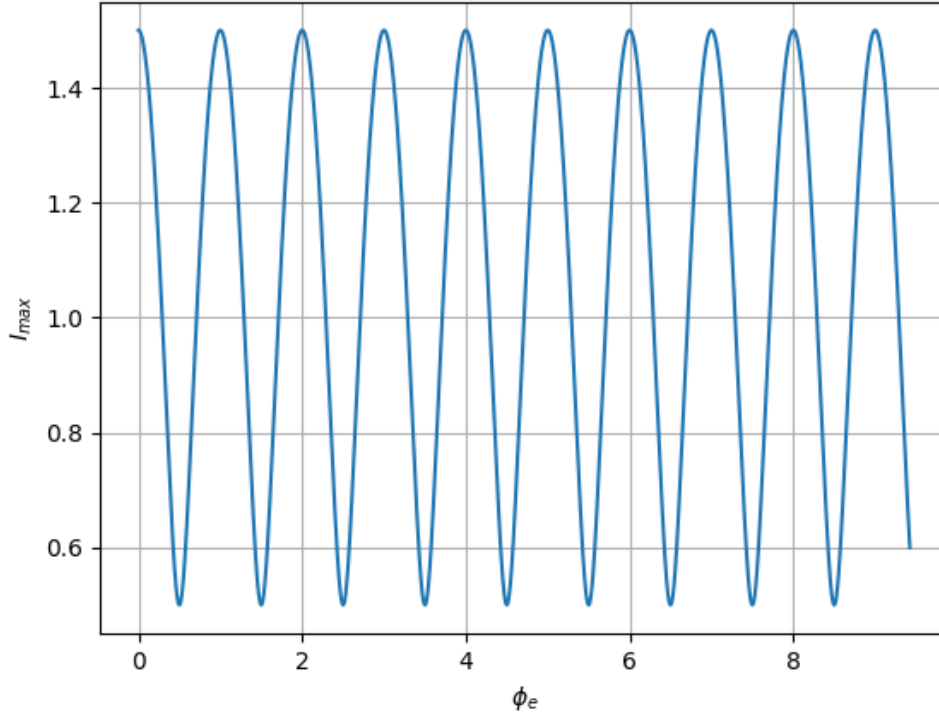


Şekil 4.1 : DC SQUID, normalize dış manyetik akıya karşı, DC SQUID boyunca meydana gelen normalize akım grafiği.

Bunun yanında $I_a \neq I_b$ durumu için de aşağıdaki gibi bir analitik çözüm mevcuttur [11, 12, 23, 27]:

$$I_{maks}(\phi_e) = [I_a^2 + I_b^2 + 2I_a I_b \cos 2\pi \phi_e]^{1/2} \quad (4.4)$$

Eşitlik 4.4' ün grafiğe dökülmüş bir şekilde Şekil 4.2' de görülmektedir, buradan anlaşılıyor ki $I_a \neq I_b$ durumunda $I_{maks}(\phi_e)$, $|I_a + I_b|$ ve $|I_a - I_b|$ aralığında bulunmaktadır [11, 12, 23, 27].



Şekil 4.2 : DC SQUID, normalize dış manyetik akıya karşı, DC SQUID boyunca meydana gelen normalize akım grafiği. ($I_a = 1, I_b = I_a/2$.)

4.1.2 Statik yöntem

Bir önceki bölümde gördüğümüz üzere DC SQUID'ler için belirli yaklaşımlar altında analitik yöntemler mevcuttur. Ancak bu yöntemler simetrik olmayan durumlar için çalışmamaktadır. Simetrik olmayan durumlar için ($L_a \neq L_b \neq 0$) analitik metotlara alternatif olarak nümerik yöntemler üretilmiştir. Ancak bu nümerik yöntemlerin çıktısı zamandan bağımsızdır, bu yüzden statik olarak adlandırılmışlardır. Statik metoda göre önceki kısımda yazmış olduğumuz eşitlikler aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11, 12, 23, 27]:

$$I_{maks}(\varphi_a, \varphi_b) = I_a \sin \varphi_a + I_b \sin \varphi_b \quad (4.5)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{2\pi} (\varphi_b - \varphi_a + \beta_b \sin \varphi_b - \beta_a \sin \varphi_a) \quad (4.6)$$

$$\varphi_b = \cos^{-1} \left[\frac{-1}{I_b / (I_a \cos \varphi_a) + \beta_T} \right] \quad (4.7)$$

$$\beta_T = \beta_b + \beta_a \left(\frac{I_b}{I_a} \right) \quad (4.8)$$

$$\beta_a = 2\pi \frac{L_a I_a}{\Phi_0}; \beta_b = 2\pi \frac{L_b I_b}{\Phi_0} \quad (4.9)$$

Yukarıdaki eşitliklerde açıkça görülmektedir ki DC SQUID üzerinde meydana gelen akım ve dış manyetik alan arasındaki ilişki doğrusal değildir. Bu yüzden bahsetmiş olduğumuz analitik metodun aksine bu yöntemde nümerik yöntemler kullanılması gerekmektedir. Eşitliklerde bulunan β parametresi normalize indüktans olarak adlandırılmaktadır.

4.1.3 Zamana bağlı yöntem

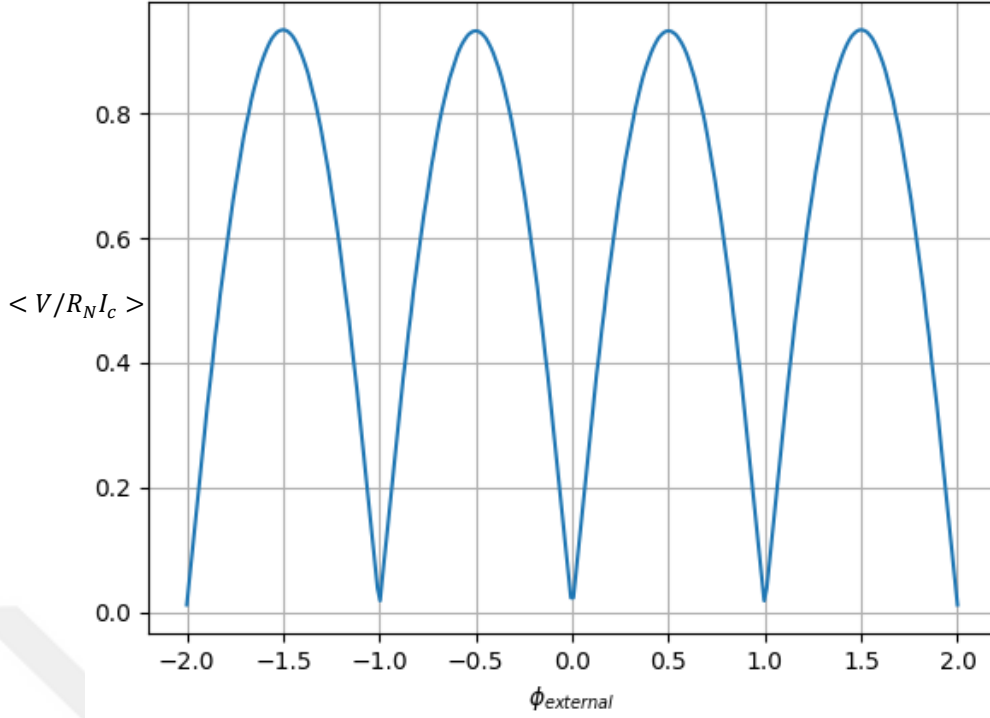
Önceki kısımlarda DC SQUID' leri analiz etmek için mevcut olan analitik ve zamana bağlı olmayan yöntemleri gördük. Bu kısımda zamana bağlı çözüm elde edebileceğimiz bir yöntemi inceleyeceğiz.

Bölüm 3.2'de DC Bi-SQUID için bir diferansiyel denklem seti elde ettik. Bu denklem sistemi aşağıdaki koşullar altında DC SQUID' i temsil edecektir:

$$l_{3a} = l_{3b} = l_{2a} = l_{2b} = 0 \quad (4.10)$$

$$J_3 = 0 \quad (4.11)$$

PySQIF kütüphanesini kullanarak belirtilen koşullar altında Şekil 4.3' te görüldüğü üzere zamana bağlı olarak elde ettiğimiz manyetik alan tepkisi görülmektedir.



Şekil 4.3 : DC SQUID dış normalize manyetik akıya karşı, zamana bağlı yöntem ile elde edilen DC SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($l_{1a} = l_{1b} = 0.27, i_b = 2$)

4.1.4 Karşılaştırma

Önceki kısımlarda DC SQUID için analitik, statik ve zamana bağlı analiz metotları özetlenmiştir. Bu bölümde ise bu metotlar arasında karşılaştırma yapılacaktır.

Analitik metot düşük zamansal karmaşıklığa sahiptir, bu yüzden çok hızlı sonuç vermektedir ancak devrenin indüktansının ihmal edildiği durumlar için geçerlidir.

Statik metot ise indüktansın sıfırdan farklı olduğu durumlar için çözüm sağlamaktadır ancak nümerik bir yöntem olmasından ötürü zaman karmaşıklığı açısından analitik yöntemle göre daha yavaş sonuç vermektedir.

Zamana bağlı yöntem ise aynı statik metot gibi genelleştirilmiş yani asimetrik durumlar için çözüm sağlayabilir, ancak zaman karmaşıklığı statik yöntemle göre daha yüksektir. Yani zamana bağlı algoritma statik ve analitik yöntemle göre daha yavaş çalışmaktadır. Bu yöntemin statik metoda göre tek avantajı DC SQUID' i zaman bağımlı bir şekilde analiz edebilmesidir.

4.2 DC Bi-SQUID

Önceki bölümde DC SQUID için mevcut analiz yöntemleri özetlenmiş ve karşılaştırılmıştır. Bu bölümde ise DC Bi-SQUID mevcut analiz yöntemleri tartışılacaktır. DC SQUID için analitik, statik ve zamana bağlı olmak üzere toplam üç adet yöntemi inceledik. Bu durumun aksine DC Bi-SQUID için statik ve zamana bağlı olmak üzere iki adet yöntem üzerinde duracağız çünkü DC Bi-SQUID için henüz analitik bir yöntem bulunmamaktadır.

4.2.1 Statik yöntem

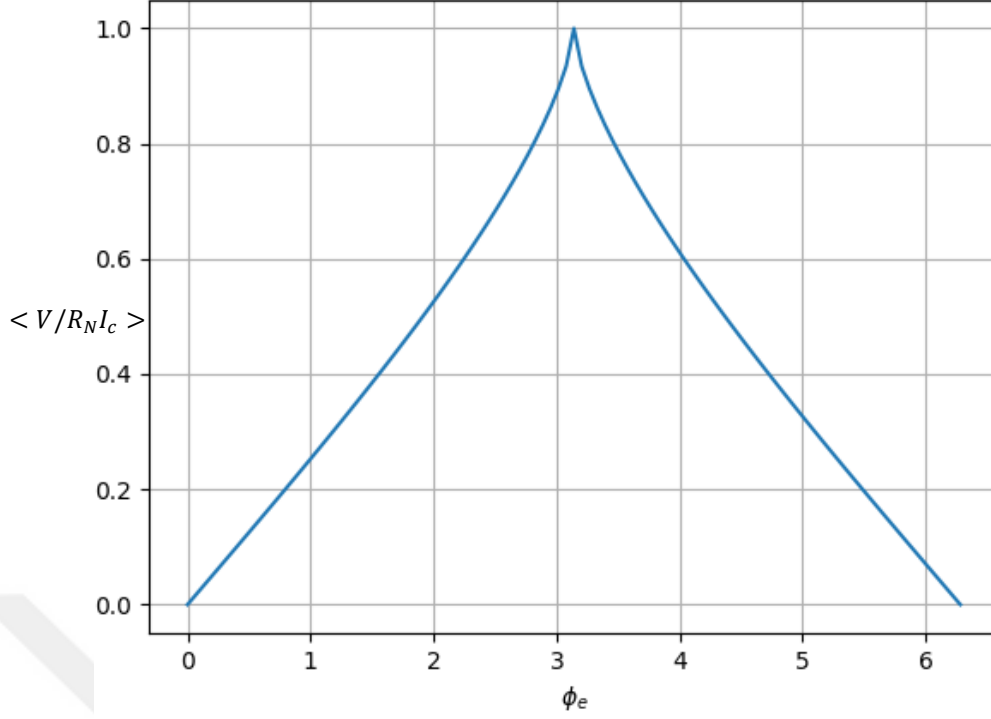
Bu bölümde DC Bi-SQUID'lerin dış manyetik alana karşı verdiği tepkiyi analiz etmek için mevcut olan statik analiz yöntemlerini ele alacağız. Simetrik DC Bi-SQUID ($l_{1a} = l_{1b}$, $l_{3a} = l_{3b} = l_{2a} = l_{2b} = 0$) konfigürasyonu için bir önceki bölümde geliştirmiş olduğumuz diferansiyel denklem seti Josephson eklemlerinin fazının ihmal edilebilir olduğu durumda aşağıdaki gibi yazılabilir [33, 35]:

$$v = \sqrt{\frac{i_b^2}{4} - \cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)} \quad (4.5a)$$

$$li_{c3} \sin(\psi_0) + \psi_0 = -\phi_e \quad (4.5b)$$

$$\psi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (4.5c)$$

Yukarıdaki eşitlik kümesi doğrusal değildir, bu yüzden uygun bir nümerik analiz metodu ile DC Bi-SQUID' in dış manyetik alana karşı tepkisi elde edilebilir. Şekil 4.4'te görüldüğü üzere dış manyetik alan etkisi ile DC Bi-SQUID üzerinde oluşan potansiyel fark DC SQUID ile karşılaştırıldığında daha doğrusaldır.

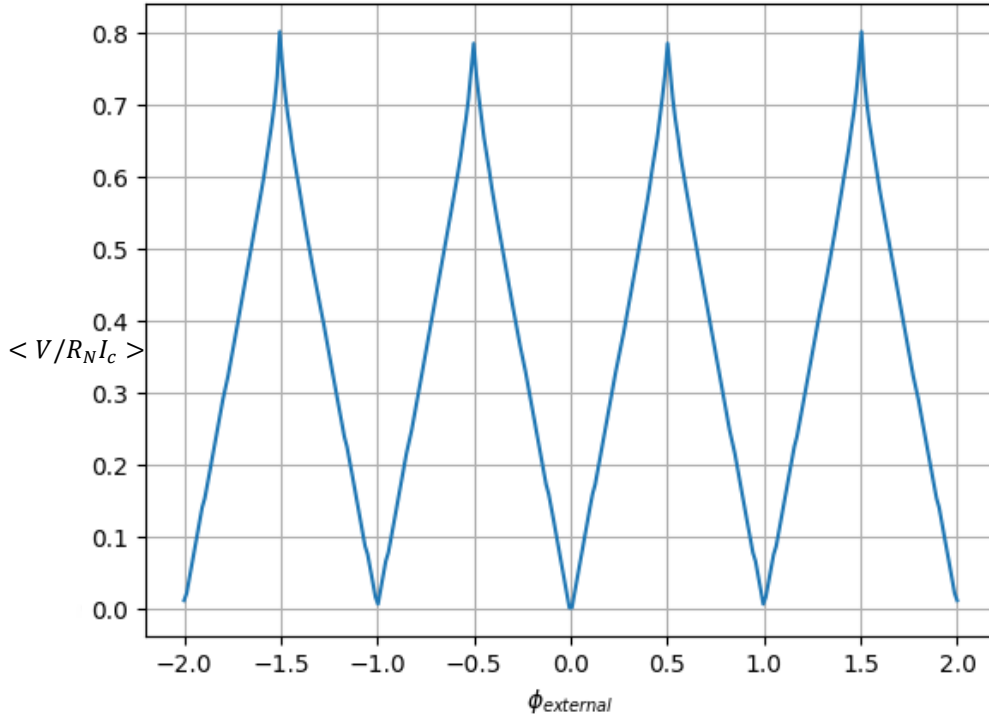


Şekil 4.4 : DC Bi-SQUID normalize dış manyetik akıya karşı, statik yöntem ile elde edilen DC Bi-SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($i_{c3} = 1, i_b = 2$)

4.2.2 Zamana bağlı yöntem

Önceki kısımlarda DC Bi-SQUID' i analiz etmek için mevcut olan statik yöntemden bahsettik. Bu kısımda zamana bağlı çözüm elde edebileceğimiz bir yöntemi inceleyeceğiz.

Bölüm 3.2'de DC Bi-SQUID için ortaya koymuş olduğumuz diferansiyel denklem setinin (eşitlik 3.32 - 3.34) çözümü bize DC Bi-SQUID' in dış manyetik alana karşı zamana bağlı tepkisini verir. Şekil 4.5 PySQIF kütüphanesinin DC Bi-SQUID için çıktısını göstermektedir:



Şekil 4.5 : DC Bi-SQUID normalize dış manyetik akıya karşı, zamana bağlı yöntem ile elde edilen DC Bi-SQUID boyunca meydana gelen normalize potansiyel fark grafiği. ($l_{1a} = l_{1b} = 0.27, l_{2a} = l_{2b} = 0.24, l_{3a} = l_{3b} = 0.3, \beta = 1, i_{c3} = 1, i_b = 2$)

4.2.3 Karşılaştırma

Önceki kısımlarda DC Bi-SQUID için statik ve zamana bağlı analiz metotları özetlenmiştir. Bu bölümde ise bu metotlar arasında karşılaştırma yapılacaktır.

Statik metot zamana bağlı yöntemle göre daha düşük bir zamansal karmaşıklığa sahiptir bu yüzden daha hızlı sonuç vermektedir. Bunun yanında yapılan yaklaşımlardan ötürü süperiletken halka üzerindeki indüktans detaylı olarak tanımlanamamaktadır. Ek olarak statik yöntemde DC Bi-SQUID sadece simetrik konfigürasyonda tanımlanabilmektedir.

Önceki paragrafta bahsettiğimiz gibi zamana bağlı yöntem daha yavaş çalışmaktadır ancak indüktans daha detaylı tanımlanabilir ve geliştirilmiş yani asimetrik durumlar analiz yapılabilmektedir. Buna ek olarak, bu yöntem ile DC Bi-SQUID için zamana bağlı çıktı üretilebilmektedir. Özetle, statik yöntem hızlı sonuçlar verebilmektedir, ancak zamana bağlı yöntem fiziksel olarak daha doğru yani çözünürlüğü daha yüksek sonuçlar vermektedir.

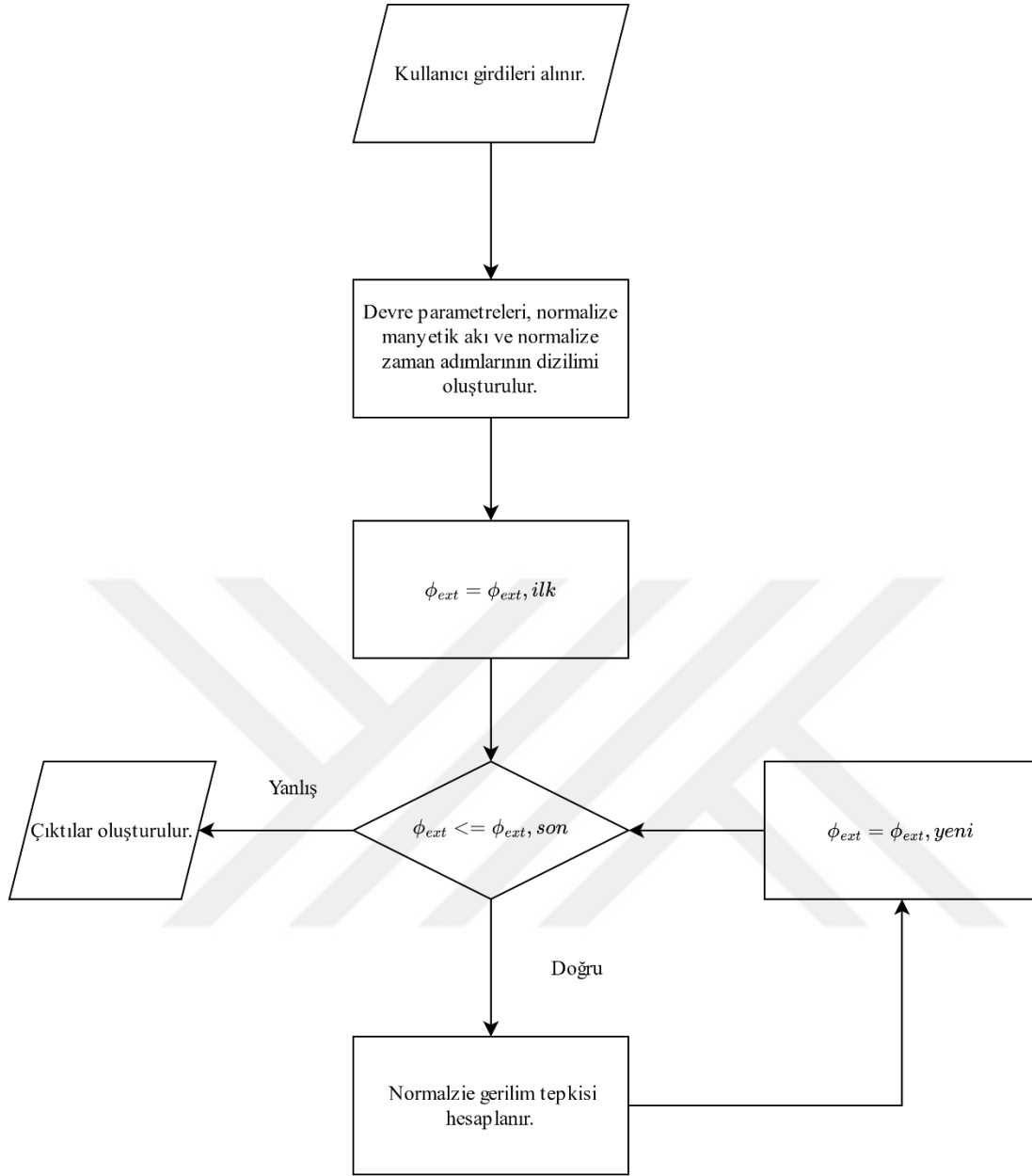
4.3 PySQIF Kütüphanesi

Önceki bölümlerde DC Bi-SQUID ve DC SQUID için mevcut analiz yöntemleri özetlenmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu bölümde PySQIF kütüphanesinde kullandığımız yöntem ve sonucu elde etmek için kullandığımız algoritma anlatılacaktır.

PySQIF kütüphanesi DC Bi-SQUID'ler için çözünürlüğü daha yüksek çözümler üretebilmek için zaman bağımlı yöntemi kullanmaktadır. Bunun yanında PySQIF kütüphanesinin algoritması temel olarak aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

- Kullanıcıdan alınan girdilere göre DC Bi-SQUID/SQUID devresi oluşturulur.
- Kullanıcıdan alınan girdilere göre normalize dış manyetik akı (Φ_e) dizilimi oluşturulur.
- Kullanıcıdan alınan girdilere göre normalize zaman adımları(τ) oluşturulur.
- Normalize dış manyetik akı diziliminde bulunan her bir nokta için normalize potansiyel fark (v) tepkisi hesaplanır.

Algoritmanın akış şeması aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.6 : PySQIF akış şeması.

5. PYSQIF KÜTÜPHANE MİMARİSİ

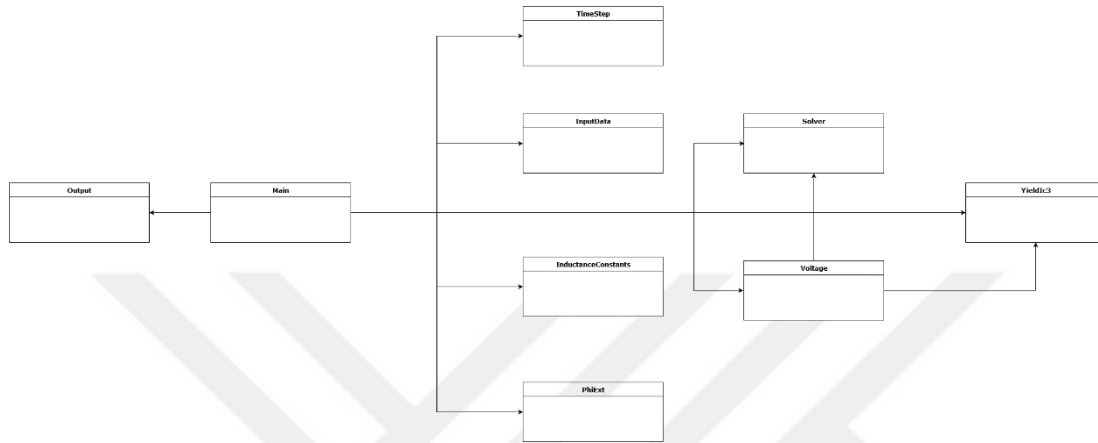
Python programlama dilinin yüksek seviye bir dil olması, kullanıcı sayısının fazla olması yani günümüzde büyük bir topluluğa hitap etmesi ve bunun yanında NumPy, SciPy ve Pandas gibi zengin bilimsel kütüphanelere sahip olması bizim bu proje için Python programlama dilini seçmemize sebep oldu [36–39].

PySQIF kütüphanesi her birinin ayrı görevi olan belirli nesne sınıflarından oluşmaktadır. PySQIF kütüphanesinin sahip olduğu bu nesne tabanlı mimari projenin geliştirme aşamasını kolaylaştırmaktadır ve bunun yanında kullanıcı dostu bir deneyim sağlamaktadır. PySQIF kütüphanesinde bulunan sınıflar özetle aşağıdaki gibi listelenebilir:

- InputData sınıfı kullanıcının oluşturduğu girdi dosyasını okuyarak diğer sınıflar ile girdiler arasında bir protokol oluşturur.
- InductanceConstants sınıfı, InputData sınıfından aldığı indüktans sabitlerini kullanarak DC Bi-SQUID için yazdığımız denklem setinde bulunan indüktans parametrelerini hesaplar.
- TimeStep sınıfı DC Bi-SQUID için elde ettiğimiz diferansiyel denklem setini çözmek için gereken zaman adımlarını oluşturur.
- PhiExtArray sınıfı kullanıcı tarafından tanımlanan aralıkta normalize dış manyetik akı dizilimini oluşturur.
- Solver sınıfı kullanıcı tarafından tanımlanan koşullar çerçevesinde oluşturulan süperiletken devre için (DC Bi-SQUID, DC SQUID) diferansiyel denklem sistemini çözer.
- Voltage sınıfı, Solver sınıfının ürettiği çıktıları kullanarak tanımlanan süperiletken devrenin kullanıcı tarafından tanımlanmış olan dış manyetik alana karşı gerilim tepkisini hesaplar.
- YieldIc3 sınıfı kullanıcı tarafından tanımlanan i_{c3} marjini için tanımlanan süperiletken devrenin gerilim tepkisini hesaplar.

- Output sınıfı analizin CSV formatında çıktı dosyalarını oluşturur.
- Son olarak, Main sınıfı kütüphanede bulunan tüm sınıflar arasındaki haberleşme protokolünü oluşturur.

Şekil 5.1 PySQIF kütüphanesinin sınıf diyagramını göstermektedir.



Şekil 5.1 : PySQIF sınıf şeması.

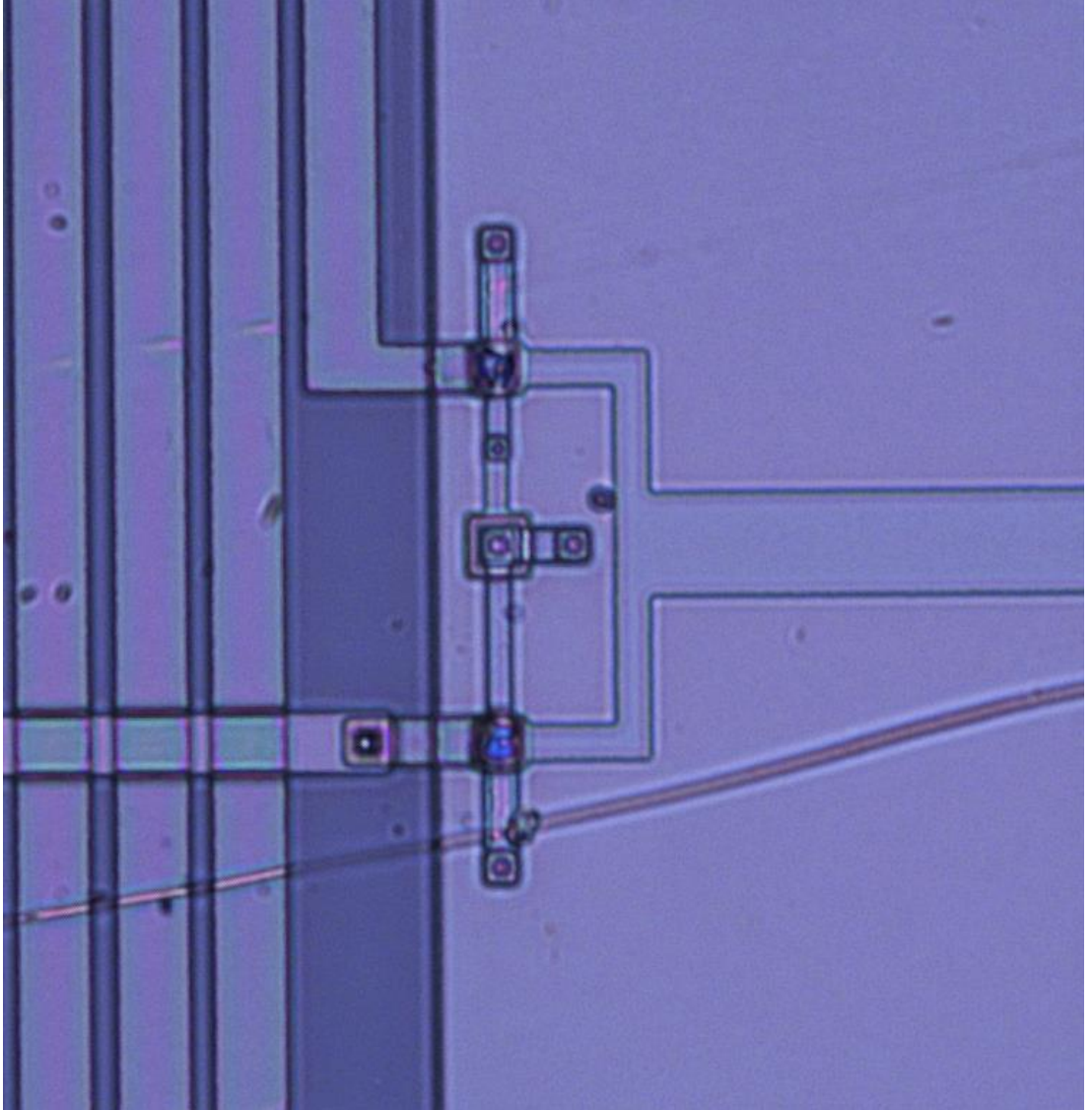
5.1 PySQIF Kütüphanesi Özellikleri

PySQIF iyi bir şekilde dokümente edilmiş açık kaynak kodlu bir projedir. Dolayısıyla proje ile ilgili tüm kodlar ve dokümanlar web aracılığı ile ulaşılabilir durumdadır. PySQIF kütüphanesi kullanıcı dostu bir şekilde oluşturulmuştur, kütüphane kullanıcısının herhangi bir programlama dilinde derin bir bilgi birikimine sahip olması gerekmemektedir. Bunun yanında kütüphanenin yapısı dünya çapındaki geliştiricilerin projeye kolay bir şekilde entegre olabileceği bir şekilde tasarlanmıştır. Ek olarak PySQIF için geliştirilen sınıflar ve çıktılar farklı süperiletken devre simülatörleri ile birlikte kullanılabilir [40, 52, 53].

PySQIF, kullanıcıdan devre ve simülasyon parametrelerini CSV uzantılı bir girdi dosyası yardımı ile almaktadır. (Şekil 6.1a) Kullanıcılar analiz amaçları çerçevesinde girdi dosyasını düzenlemekte özgürdür. Kütüphaneyi kullanmayı amaçlayan kullanıcılar, PySQIF kütüphanesinde bulunan herhangi bir dosyayı düzenlemek veya kod yazmak zorunda değildir. Belirttiğimiz gibi kullanıcılar sadece girdi dosyasını hazırlayarak analizin koşullarını tanımlayabilmektedir.

6. Sonuç

Oluşturmuş olduğumuz PySQIF kütüphanesi ile bir DC Bi-SQUID dört katmanlı HSTP Niobium üretimine dayalı manyetik alan sensörü tasarladık. Devre Klayout editörü yardımı ile tasarlandı ve indüktans parametreleri Inductex aracı ile belirlendi. [41, 54] DC Bi-SQUID resim 6.1 'de görölmektedir.



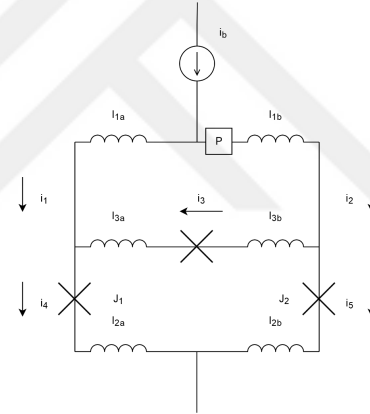
Resim 6.1: PySQIF ile tasarlanmış DC Bi-SQUID, resimde görölen DC Bi-SQUID üretildi ancak henüz test edilmemiştir.

Tasarım için normalize indüktans parametrelerini $l_{1a} = l_{1b} = 0.05$ ve $l_{2a} = l_{2b} = l_{3a} = l_{3b} = 0$ belirledik. Diğer devre parametreleri ise $i_b = I_b/I_c = 2$ ve $\beta = 1$ şeklinde tanımlanmıştır. PySQIF kütüphanesini tanımlı bir i_{c3} aralığı için belirlediğimiz parametreler çerçevesinde dış manyetik alan altında gerilim tepkisini analiz etmek amacıyla kullandık. $i_{c3} = I_{c3}/I_c$ parametre aralığını ortalaması 3 ve standart sapması 0.5 olacak şekilde tanımladık.

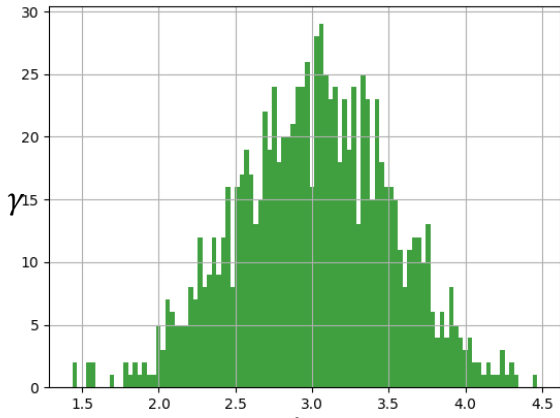
PySQIF kütüphanesi, çalıştırıldığında kullanıcı tarafından i_{c3} için belirlenen ortalama ve standart sapmayı kullanarak bir Gauss dağılımı oluşturur. Sonrasında, kütüphane Gauss dağılımı ile oluşturulan her bir i_{c3} değeri için tanımlanan DC Bi-SQUID devresi için dış manyetik alana karşı gerilim tepkisini hesaplar. Dış manyetik alan normalize manyetik akı aralığı olarak kullanıcı tarafından belirlenir. Devre modelimiz, girdi dosyamız, i_{c3} dağılımı ve dış manyetik akıya karşı gerilim tepkisi Şekil 6.1' de görülmektedir.

```
simulation_parameters,values
psi1_initial_condition,0
psi2_initial_condition,0
magnetic_field_range_initial,0
magnetic_field_range_final,1
magnetic_field_resolution,60
characteristic_voltage,1
ib,2
ic3,1
time_resolution,300
beta,1
l1a,0.05
l1b,0.05
l2a,0
l2b,0
l3a,0
l3b,0
multiple_run,1
standard_deviation,0.5
mean,3
number_of_runs,1000
```

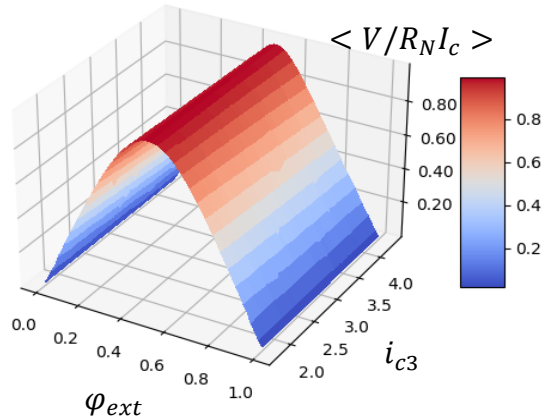
(a')



(b')



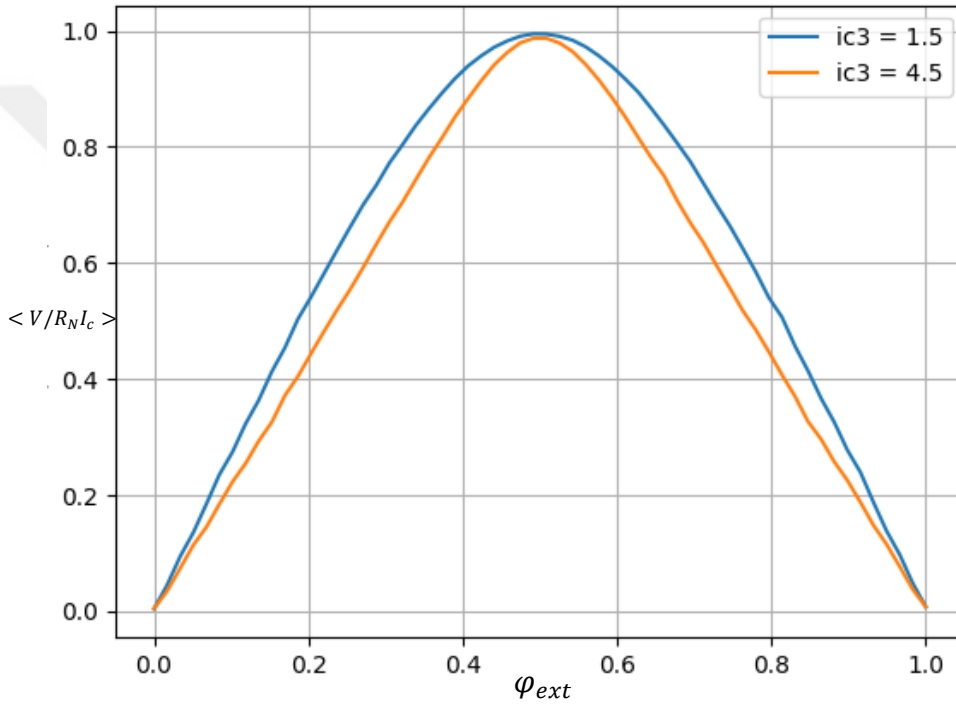
(c')



(d')

Şekil 6.1 : (a) PySQIF girdi dosyası, (b) PySQIF devre modeli, (c) i_{c3} dağılımı, (d) Potansiyel fark tepkisi.

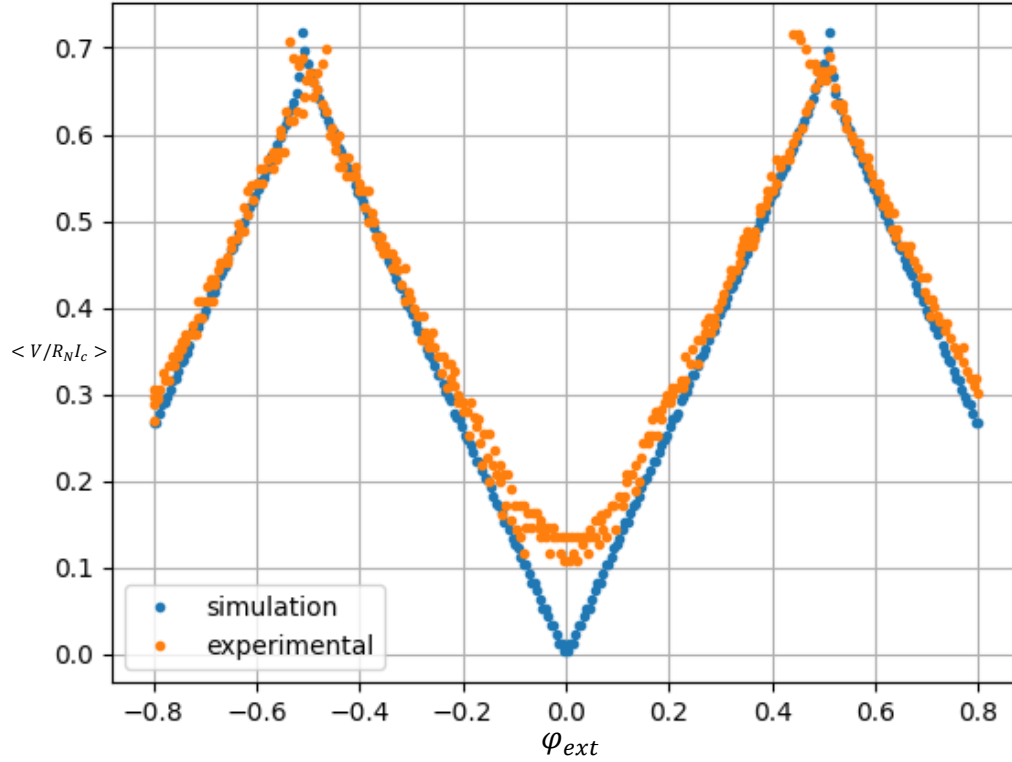
Şekil 6.2’te analiz çıktısında elde ettiğimiz iki uç i_{c3} değeri için gerilim tepkisi görülmektedir. Grafiklere bakarak söyleyebiliriz ki gerilim tepkisinin doğrusallığı i_{c3} arttıkça artmaktadır. DC Bi-SQUID için türetmiş olduğumuz diferansiyel denklem setlerinden de görüldüğü üzere i_{c3} sifıra yaklaştıkça DC Bi-SQUID, DC SQUID gibi davranmaktadır, bu durum aldığımız sonuçların matematiksel eşitlikler ile çelişmediğini yani tutarlı olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.2 : En düşük (1.5) ve en yüksek (4.5) i_{c3} değerleri için gerilim tepkisi.

PySQIF’ ten elde ettiğimiz çıktılarının güvenilirliğini sorgulamak amacıyla kütüphaneden elde ettiğimiz çıktılarını, şekil 6.3’te görüldüğü gibi DC Bi-SQUID için bulunan deneysel sonuçlar ile karşılaştırdık. Deneysel veriler Kornev ve çalışma arkadaşları tarafından 2009 yılında yapılan çalışmadan elde edilmiştir [33]. Şekil 6.3’ten görüldüğü üzere kütüphane çıktısı ile elde ettiğimiz veri ile deneysel çalışma arasında tutarlılık söz konusudur. Ancak uygulanan normalize manyetik akının sifıra yakınsadığı durumlarda deneysel ve teorik veri arasında uyumsuzluk görülmektedir. Bu durum, DC Bi-SQUID’ler için kullanmış olduğumuz eşitliklerin termal gürültüyü temsil etmemesinden kaynaklanmaktadır. DC SQUID tabanlı süperiletken devrelerde

Josephson eklemleri bulunmaktadır ve Josephson eklemlerinin davranışı termal gürültüden etkilenmektedir. Deneysel veride Josephson eklemlerinde meydana gelen termal gürültüyü içermektedir, ancak PySQIF kütüphanesinde bulunan metotlar Josephson eklemlerinden dolayı meydana gelen gürültüyü modelleyememektedir. Bu durumdan ötürü deneysel sonuç ve teorik sonuç belirli bir noktada ayrılmaktadır [23, 42–51]. Gelecekte PySQIF kütüphanesi, DC SQUID tabanlı süperiletken devreleri gürültü ortamında da modelleyebilecek şekilde güncellenecektir.



Şekil 6.3 : Kornev ve çalışma arkadaşları tarafından elde edilen deneysel sonuçlar ile PySQIF çıktısının karşılaştırılması [33].

KAYNAKLAR

- [1] **Bozbey, A., Febvre, P., Razmkhah, S., (2021).** A compact high frequency voltage amplifier for superconductor–semiconductor logic interface, *Supercond. Sci. Technol.*, 34, 045013.
- [2] **Banzet, M., Fardmanesh, M., Hosseini, N., Razmkhah, S., Sarreshtedari, F., Schubert, J., (2011).** An efficient SQUID NDE defect detection approach by using an adaptive finite-element modeling, *J Supercond Nov Magn*, 24, 1077–1081.
- [3] **Fagaly, R.L., (2006).** Superconducting quantum interference device instruments and applications, *Review of Scientific Instruments*, 77, 101101.
- [4] **Klenov, N.V, Kornev, V.K, Mukhanov, O.A., Soloviev, I.I., (2007).** Development of SQIF-Based output broad band amplifier, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 17, 569–572.
- [5] **Mitchell, E.E., et al., (2016).** 2D SQIF arrays using 20 000 YBCO high Rn Josephson junctions, *Supercond. Sci. Technol.*, 29, 06LT01.
- [6] **Bazulin, D.E., Kolotinskiy, N.V., Kornev, V.K., Mukhanov, O.A., (2018).** High linearity Bi-SQUID: Design map, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 28, 1–5.
- [7] **Longhini, P., et al., (2014).** Voltage response of non-uniform arrays of Bi-SQUIDs, *International Conference on Theory and Application in Nonlinear Dynamics (ICAND 2012)*, Springer International Publishing, 77–90.
- [8] **Polonsky, S., Rylyakov, A., Shevchenko, P., Zinoviev, A.D., (1997).** PSCAN'96: new software for simulation and optimization of complex RSFQ circuits, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 7, 2685– 2689.
- [9] **Whiteley, S.R., (1991).** Josephson junctions in SPICE3, *IEEE Trans. Magn.*, 27, 2902–2905.
- [10] **KAMERLINGH ONNES H., (1911).** The resistance of pure mercury at helium temperatures, *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, 120.
- [11] **Charles, P., Horacio, A., Superconductivity**, Elsevier Science, (Sf. 23-58, 143-171), (2010).
- [12] **Tinkham, M., Introduction to superconductivity**, Mineola (Ed.), NY: Dover Publ, (Sf. 1-16, 196-284), (2015).
- [13] **Meissner, W., Ochsenfeld, R., (1933).** Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit, *Naturwissenschaften*, 21, 787–788.

- [14] **London, F., London, H., (1935).** The electromagnetic equations of the supraconductor, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 149, 1–88.
- [15] **Haar, D.,** *Collected Papers of L.D. Landau.* Saint Louis: Elsevier Science, (2014).
- [16] **Bardeen, J., Cooper, L.,N., Schrieffer, J.R., (1957).** Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.*, 108, 1175–1204.
- [17] **Josephson, B.D., (1962).** Possible new effects in superconductive tunnelling, *Physics Letters*, 1, 251–253.
- [18] **Lambe, J., Mercereau, J.E., Jaklevic, R.C., Silver, A.H., (1964).** Quantum Interference Effects in Josephson Tunneling, *Phys. Rev. Lett.*, 12, 159–160.
- [19] **Häussler, Ch., Oppenländer, J., Schopohl, N., (2000).** Non periodic macroscopic quantum interference in one-dimensional parallel Josephson junction arrays with unconventional grating structure, *Phys. Rev. B*, 63, 024511.
- [20] **Griffiths, D.J.,** *Introduction to electrodynamics,* Cambridge University Press, (Sf. 285-331), (2018).
- [21] **Beiser, A.,** *Concepts of modern physics,* Boston: McGraw-Hill, (Sf. 160-193), (2003).
- [22] **Singh, R.B.,** *Introduction to modern physics,* New Delhi: New Age International, (Sf. 88-147), (2002).
- [23] **Likharev, K.K.,** *Dynamics of Josephson junctions and circuits,* New York: Gordon and Breach Science Publishers, (Sf. 1-220), (1986).
- [24] **Freedman, R.A., Young, H. D.,** *University physics with modern physics,* N.J: Pearson Higher Education, (Sf. 687-1051), (2020).
- [25] **Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.,** *Fundamentals of physics,* Danvers: Wiley, (Sf. 803-829), (2014).
- [26] **Marion, J.,B., Thornton, S.T.,** *Classical dynamics of particles and systems,* CA: Brooks/Cole, (Sf. 48-90), (2004).
- [27] **Barone, A., Paternò, G.,** *Physics and applications of the Josephson effect,* New York: Wiley, (Sf. 1-22, 121-131, 143-158, 354-409), (1982).
- [28] **Jackson, J. D.,** *Classical electrodynamics,* New York: Wiley, (Sf. 775-791), (1999).
- [29] **London, F.,** *Macroscopic theory of superconductivity,* New York: Dover, (1961).
- [30] **Deaver, B.S., Fairbank, W.M., (1961),** Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders, *Phys. Rev. Lett.*, 7, 43–46.
- [31] **Braginski, A.I., Clarke, J.,** *The SQUID handbook,* Weinheim: Wiley-VCH, (Sf. 1-86), (2004).
- [32] **Clarke, J.,** *SQUID Sensors: Fundamentals, fabrication and applications,* Weinstock, H. (Ed.), Springer Netherlands, (Sf. 1-62), (1996).

- [33] **Klenov, N.V., Kornev, V.K., Mukhanov, O.A., Soloviev, I.I., (2009).** Bi-SQUID: a novel linearization method for dc SQUID voltage response, *Supercond. Sci. Technol.*, 22, 114011.
- [34] **Berggren, S., Leese de Escobar, A., In, V., Longhini, P., Palacios, A., (2012).** Coupled non-uniform bi-squid: A numerical investigation', *AIP Conf. Proc.*, Washington, USA.
- [35] **Febvre, P., Ilin S., Protsenko, O., Razmkhah, S., Yilmaz, U., (2019).** Static Analysis to Predict Behaviour of Bi-SQUIDS in External Magnetic Field, *IEEE 9th International Conference Nanomaterials: Applications & Properties (NAP)*, Odesa, Ukraine, Eylül.
- [36] **GUIDO VAN ROSSUM, P.D.T., (2018).** *PYTHON TUTORIAL: release 3.6.4*, 12TH MEDIA SERVICES.
- [37] **Virtanen P., et al., (2020).** SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python, *Nat Methods*, 17, 261–272.
- [38] **Reback J., et al ., (2021).** pandas-dev/pandas: Pandas 1.3.4, *Zenodo*.
- [39] **Harris, C.R., et al., (2020).** Array programming with NumPy, *Nature*, 585, 357–362.
- [40] **Akgun, A., Razmkhah S., (2022).** PySQIF, a Statistical Analysis Tool for Bi-SQUID Magnetometers, *Proceedings of: ISS 2021, International Symposium on Superconductivity*, Tsukuba, Japan, Aralık.
- [41] **Fourie, C., J., (2015).** Full-Gate Verification of Superconducting Integrated Circuit Layouts With InductEx, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 25, 1–9.
- [42] **Ray, U., Segall, K., Schult, D., Ohsumi, T., (2011).** Numerical simulation of thermal noise in Josephson circuits, *arXiv*.
- [43] **Delin, K.A., Orlando, T.P.,** Foundations of applied superconductivity, Reading, Mass: Addison-Wesley, (Sf. 393- 441), (1991).
- [44] **Gillespie, D.T., (1996).** The mathematics of Brownian motion and Johnson noise, *American Journal of Physics*, 64, 225–240.
- [45] **Martinis, J.M., Kautz, R.L., (1990).** Noise-affected I - V curves in small hysteretic Josephson junctions, *Phys. Rev. B*, 42, 9903–9937.
- [46] **Voss, R.F., (1981).** Noise characteristics of an ideal shunted Josephson junction, *J Low Temp Phys*, 42, 151–163.
- [47] **Falco, C.M., Hansma, P.K., Parker, W.H., Trullinger, S.E., (1974).** Effect of thermal noise on current-voltage characteristics of Josephson junctions, *Phys. Rev. B*, 10, 1865–1873.
- [48] **Couëdo, F., et al., (2020).** Dynamic properties of high-Tc superconducting nano junctions made with a focused helium ion beam, *Sci Rep*, 10, 10256.
- [49] **Kornev, V.K., Kolotinskiy, N.V., Levochkina, A.Y., Mukhanov, O.A., (2017).** Critical current spread and thermal noise in Bi-SQUID cells and arrays, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 27, 1–5.
- [50] **Askerzade, I.N., Süperiletkenlik fiziğine giriş**, Gazi Kitabevi, (2017).

[51] **Askerzade, I.N., Bozbey A., Cantürk M.,** *Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity Electronics, Mathematical Engineering,* (2017).

[52] <https://pypi.org/project/PySQIF/> alındığı tarih: 04.08.2022.

[53] <https://pysqif.readthedocs.io/en/latest/> alındığı tarih: 04.08.2022.

[54] <https://github.com/KLayout/klayout> alındığı tarih: 04.08.2022.



EKLER

EK 1: Vektörel Özdeşlikler



EK 1

$$\nabla(\psi + \phi) = \nabla\psi + \nabla\phi$$

$$\nabla(\psi\phi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\psi\mathbf{A}) = \psi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\psi\mathbf{A}) = \psi(\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla)\psi = \psi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla\psi) \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \times \nabla\phi$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} [\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})]$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla|\mathbf{A}|^2 - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla\psi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi$$

$$\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \nabla^2(\phi)\psi$$

$$\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi = \nabla \cdot (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)$$

$$\nabla^2(\psi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\nabla^2\psi + 2(\nabla\psi \cdot \nabla)\mathbf{A} + \psi\nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla^2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla^2\mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla^2\mathbf{A} + 2\nabla \cdot ((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}))$$

$$\nabla^2(\nabla\psi) = \nabla(\nabla \cdot (\nabla\psi)) = \nabla(\nabla^2\psi)$$

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})) = \nabla \cdot (\nabla^2\mathbf{A})$$

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) = \nabla \times (\nabla^2\mathbf{A})$$

