

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESKİYEN BİR SİSTEM İÇİN DURUM BAZLI BAKIM POLİTİKALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nazlıcan HARPUR**

**Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Salih TEKİN**

**Eş Danışman: Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU**

**ARALIK 2022**



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.



Nazlıcan HARPUT



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ESKİYEN BİR SİSTEM İÇİN DURUM BAZLI BAKIM POLİTİKALARI

Nazlıcan HARPUT

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Salih TEKİN

Eş Danışman: Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU

Tarih: Aralık 2022

Gelişen teknoloji, AR-GE çalışmaları ve ülkemizde savunma sanayiine verilen büyük destek sayesinde savunma sanayii sektörü daha da ileri gitmekte olup, her geçen gün yerli ve milli yeni ürünler geliştirilmektedir. Yeni ürünlerin tasarlanması ve üretilmesi kadar müşteriye teslim edilen ürünlerin minimum maliyetle desteklenebilmesi de çok önemlidir.

Bu çalışma kapsamında sahada aktif olarak kullanılan karmaşık yapıdaki bir askeri sistemde bulunan ve Markov eskiyen kritik bir malzeme için inceleme zamanını en iyileyen rassal karar modeli kurularak optimal bakım politikası bulunmaktadır. Kullanıcı tarafından periyodik olarak  $\tau$  zamanda bir incelenen sistemin durumuna göre daha önce belirlenen dört bakım onarım politikasından en uygun olanı uygulanmaktadır. Böylelikle sistem arıza durumuna geçmeden önce müdahale edilerek ileride karşılaşılabilecek büyük maliyetlerin de önüne geçilmesi hedeflenmektedir. Aynı zamanda bu bakım onarım yaklaşımıyla sistemin hazır olabilirliği de artırılarak müşteri memnuniyeti sağlanacaktır. Söz konusu dört farklı bakım onarım politikaları için tüm aksiyonlar altında yenileme teorisinin yardımıyla optimal inceleme periyodunu bulan bakım modelleri kurulmuştur. Daha sonra bu

modellerdeki bazı parametrelerin değerleri değiştirilerek bakım politikaları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Durum bazlı bakım onarım, Periyodik kontrol, Markov eskiyen sistem, Yenileme teorisi



## **ABSTRACT**

Master of Science

Condition Based Maintenance Policies For an Aging System

Nazlıcan HARPUT

TOBB University of Economics and Technology

Institute of Natural and Applied Sciences

Industrial Engineering Science Programme

Supervisor: Asst. Prof. Salih TEKİN

Co-supervisor: Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU

Date: December 2022

Thanks to the developing technology, R&D studies and the great support given to the defense industry in our country, the defense industry sector is going further and new domestic and national products are being developed day by day. As well as designing and manufacturing new products, it is also very important that the products delivered to the customer can be supported at minimum cost.

Within the scope of this study, there is an optimal maintenance policy by establishing a random decision model that optimizes the inspection time for a critical material that is Markov aging in a complex military system that is actively used in the field. According to the condition of the system, which is periodically examined by the user at  $\tau$  time, the most appropriate of the four maintenance and repair policies determined earlier is applied. Thus, it is aimed to intervene before the system fails and to prevent large costs to be encountered in the future. At the same time, with this maintenance and repair approach, the readiness of the system will be increased and customer satisfaction will be ensured. For these four different maintenance and repair policies, maintenance models have been established with the help of renewal theory under all

actions that find the optimal review period. Then, the values of some parameters in these models were changed and their effects on maintenance policies were examined.

**Keywords:** Condition based maintenance, Periodic inspection, Markovian aging system, Renewal theory





## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince engin bilgi ve deneyimleriyle çalışmalarımı yönlendiren, ilgi ve desteklerini esirgemeyen, bana rehberlik eden çok değerli tez danışmanlarım ve hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Salih Tekin ve Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu'na en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bilimsel katkılarının yanı sıra manevi destekleri benim için her zaman değerli olacaktır.

Değerli zamanlarını ayırarak tezimi okuyan ve bilgilerini benimle paylaşan tez jüri üyelerim Doç. Dr. Babek Erdebilli, Dr. Öğr. Üyesi Halenur Şahin Mahmutoğulları ve Dr. Öğr. Üyesi Başak Gever'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim sırasında engin tecrübe ve bilgilerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü bir borç ve sorumluluk kabul ederim.

Maneviyatıma sağladığı eşsiz destekle daima yanımda olan Ezgi Gürer'e, yüksek lisansı birlikte geçirdiğim, bu süreçte beni çok iyi anlayan ve destek veren Cemre Erdoğan'a, en önemlisi destekleri ve fedakarlıkları sayesinde bugünlere gelmemi sağlayan saygı değer aileme gönülden teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>ix</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	<b>xiii</b>
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> .....	<b>xv</b>
<b>1.GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2.LİTERATÜR</b> .....	<b>5</b>
2.1.Bakım Yaklaşımları .....	5
2.1.1.Bakım yaklaşımlarının tarihçesi.....	6
2.2.Literatür Taraması.....	7
<b>3. PROBLEM TANIMI VE SİSTEMİN MODELLENMESİ</b> .....	<b>13</b>
3.1.Matematiksel Hesaplamalar .....	17
3.1.1.Geçiş olasılıkları.....	17
3.1.1.1.Durum 1'den geçiş olasılıkları .....	17
3.1.1.2.Durum 2'den geçiş olasılıkları.....	20
3.1.1.3.Durum 3'ten geçiş olasılıkları.....	20
3.1.2.Beklenen arıza süresi .....	20
3.1.2.1.Durum 1'den sonra oluşacak arıza için beklenen değer.....	21
3.1.2.2.Durum 2'den sonra oluşacak arıza için beklenen değer.....	24
3.1.3.Ortalama maliyet oranı.....	24
3.1.3.1.Politika 1 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, aksiyon alma, yenile).....	26
3.1.3.2.Politika 2 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, minör tamir, yenile).....	27
3.1.3.3.Politika 3 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, majör tamir, yenile).....	28
3.1.3.4.Politika 4 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, yenile, yenile) .....	29
3.1.4.Optimal kontrol periyodu ve optimal politikanın bulunması.....	30
<b>4.DEĞERLENDİRME</b> .....	<b>31</b>
4.1.Politika 1 (Aksiyon Alma, Aksiyon Alma, Yenile) İçin Sonuçlar.....	32
4.2.Politika 2 (Aksiyon Alma, Minör Tamir, Yenile) İçin Sonuçlar .....	32

4.3.Politika 3 (Aksiyon Alma, Majör Tamir, Yenile) İçin Sonuçlar.....	33
4.4.Politika 4 (Aksiyon Alma, Yenile, Yenile) İçin Sonuçlar.....	34
4.5.Optimal Kontrol Periyodu ve Optimal Politika.....	34
4.5.1.Güncel durum ile optimal politikanın karşılaştırılması.....	35
4.6.Gayri Faal Kalma Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi .....	36
4.7.Onarım Maliyetlerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi.....	41
4.7.1.Minör tamir maliyetinin optimalite üzerindeki etkisi .....	41
4.7.2.Majör tamir maliyetinin optimalite üzerindeki etkisi.....	42
4.8.Kontrol Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi.....	43
<b>5.SONUÇ.....</b>	<b>45</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>47</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>51</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>57</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 1.1: Metodoloji.....	3
Şekil 2.1: Bakım Stratejilerinin Sınıflandırılması.....	6
Şekil 2.2: Bakım Felsefesinde Değişen Yöntemler.....	7
Şekil 3.1: Geçiş Olasılıkları Şeması.....	17
Şekil 3.2: Durum 1'den 3'e Geçişinin Gösterimi.....	18
Şekil 3.3: Beklenen Arızalı Sürenin Gösterimi.....	21
Şekil 4.1: Politika 1 İçin Alınan Değerler.....	32
Şekil 4.2: Politika 2 İçin Alınan Değerler.....	33
Şekil 4.3: Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	33
Şekil 4.4: Politika 4 İçin Alınan Değerler.....	34
Şekil 4.5: Güncel Durum İçin Alınan Değerler.....	35
Şekil 4.6: $c_d=10.000$ Olduğunda Politika 1 İçin Alınan Değerler.....	36
Şekil 4.7: $c_d=10.000$ Olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler.....	37
Şekil 4.8: $c_d=10.000$ Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	37
Şekil 4.9: $c_d=10.000$ Olduğunda Politika 4 İçin Alınan Değerler.....	38
Şekil 4.10: $c_d=1000$ Olduğunda Politika 1 İçin Alınan Değerler.....	39
Şekil 4.11: $c_d=1000$ Olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler.....	39
Şekil 4.12: $c_d=1000$ Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	40
Şekil 4.13: $c_d=1000$ Olduğunda Politika 4 İçin Alınan Değerler.....	40
Şekil 4.14: $c_{mn}=50$ Olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler.....	41
Şekil 4.15: $c_{mj}=1000$ Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	42
Şekil 4.16: $K=100$ Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	43
Şekil 4.17: $K=1000$ Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler.....	44



## ÇİZELGE LİSTESİ

	<b><u>Sayfa</u></b>
Çizelge 3.1: Durumların Göstergeleri.....	13
Çizelge 3.2: Bakım Politikaları.....	14
Çizelge 4.1: Bakım Parametreleri.....	31







## 1.GİRİŞ

İmalat sanayinde temel amaç, müşteri taleplerinin zamanında ve istenilen kalitede yerine getirilmesi sonucunda müşteri memnuniyetini sağlamaktır. Teknolojinin ve pazar ortamının artmasıyla birlikte şirketler arasındaki rekabet artmakta, bu da şirketlerin her geçen gün hayatta kalmalarını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle her firma müşteri memnuniyeti için çeşitli üretim yöntemlerini kendi üretim sistemine ve organizasyonuna uyarlamaktadır. 21. yüzyılda şirketlerin her konuda olduğu gibi bakım çalışmalarında da yüksek teknolojiyi kullanarak ve ekip çalışmasını geliştirerek dünya pazarındaki mevcut konumlarını daha da güçlendirmeleri ve sürdürmeleri mümkündür.

Bakımın stratejik hedefi; güvenilirlik, hazır bulunabilirlik ve güvenlik gibi üretim için belirtilen gerekliliklerin minimum maliyetle yerine getirilmesidir. Seçilen bakım ve onarım politikası, sadece üretim alanında değil, tüm alanlardaki iş hedefleriyle tutarlı olmalıdır. İşletmeler, kendileri için nasıl ve hangi ölçekte bir bakım sistemi ve yöntemi oluşturacaklarını düşünmek zorundadır.

Bakım optimizasyonu, sistemlerin işlevselliğini korumak veya arıza durumunda zamanında ve uygun maliyetli çözümler uygulamak için önemli bir disiplindir. Bu alan için yeterli çabanın olmaması, bütçelerin çok yüksek bir kısmını tüketmek için sahaya çıktıktan sonra tasarım problemlerini tespit etme maliyetine ve buna bağlı olarak müşteri memnuniyetinde bir düşüşe neden olmaktadır.

Bakım görevlerini ve aralıklarını belirlemek için bakım optimizasyonunda bazı genel ilkeler vardır. Genel olarak, arızaların istenmeyen etkilerini ortadan kaldırmak için Önleyici Bakım (PM) ve Duruma Dayalı Bakım (CBM) metodolojileri kullanılır. PM, zamanlanmış bir bakım görevidir, CBM ise sistemin durumunu izlemeyi ve durumuna göre bir bakım görevi uygulamaya karar vermeyi içerir. Gillespie (2015), Durum Bazlı Bakımı planlanan operasyonel profile göre yaşanan ekipman için koşullu bir etkinlik belirlemenin bir yolu olarak tanımlar. Başka bir deyişle, bozulan bir ekipmanın izlenmesi ve karar noktalarında uygun eylemlerin alınması anlamına gelir. Shin ve Jun (2015), Duruma Bazlı Bakım metodolojisini benimsemenin faydalarını, gelecekteki

arızaları öngörmek, bakım politikalarını etkin bir şekilde yönetmek ve maliyetli sorunlara neden olabilecek risklerden kaçınmak olarak sıralamaktadır.

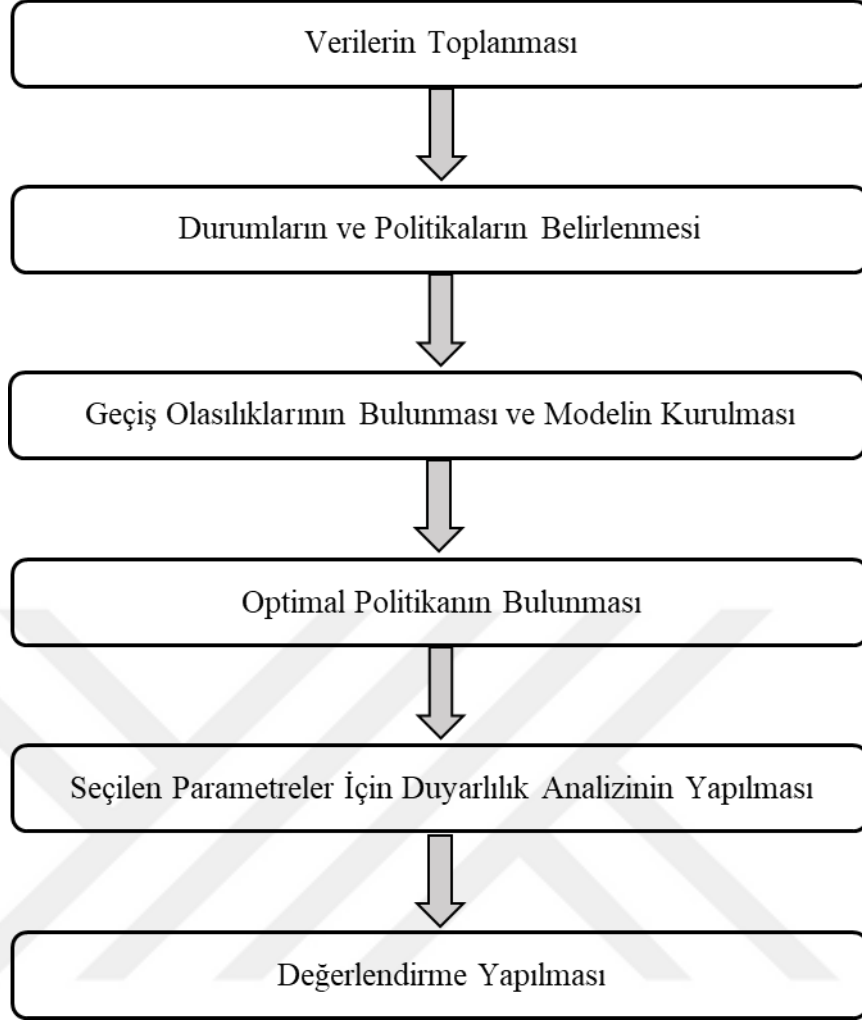
CBM, yalnızca ihtiyaç duyulduğunda ve en uygun zamanlarda bakım yaparak bakımı optimize etmek için ekipmanın sağlık durumunu aktif olarak yönetmek için kullanılan bir bakım tekniğidir. Böylece işletme maliyetlerini düşürürken genel sistem ve ekipman kullanılabilirliğini ve güvenliğini artırır.

Günümüzde, çeşitli teknolojilerin durum izlemeyi etkin bir şekilde sağlamak için tasarım çözümlerinin bir parçası haline geldiğini görüyoruz. Çok uzakta çalışan sistemlerin anlık koşullarını uzaktan izlemek bile mümkün olabilir. Bu çalışmada, kritik bir ünitenin önleyici bakım önerisini, yüksek arıza sıklığı nedeniyle Duruma Dayalı Bakım açısından değerlendiriyoruz.

Bu tezde incelenen problem, termal kamerada bulunan kritik bir malzemenin Duruma Dayalı Bakım optimizasyonu ile ilgilidir. Söz konusu malzemenin alt birimi denetlenir ve bu birim için bir bakım politikası oluşturulmaya çalışılır. İncelenen bu malzeme zamanla eskimekte ve içindeki mekanik malzemeler de çalışma süresiyle doğru orantılı bir şekilde aşınmaktadır. Termal kameranın kritik bir birimi olduğu için sık sık arızalanma sadece sistem sahipleri için değil, şirket için de kabul edilemez. Bu nedenle, bu çalışmada bahsi geçen malzemenin doğal bozulmalarının değerlendirilmesi ve bakım politikalarının optimize edilmesi yoluyla bazı iyileştirmeler sunulabilmesi amaçlanmıştır.

Literatürde, sistemlerin Markov eskime süreci yoğun olarak incelenmektedir. Çeşitli altyapı ve sistemler için bozulma problemlerinin stokastik modellenmesi oluşturulmuştur. Genel olarak, geçiş olasılıklarının tahmini ve muayene/değiştirme aralıklarının belirlenmesi, incelenen bu çalışmaların temel bileşenlerini oluşturmaktadır. Çalışma kapsamında izlenecek adımlar ise aşağıda verilmiştir.

(Şekil 1.1)



**Şekil 1.1:** Metodoloji



## 2.LİTERATÜR

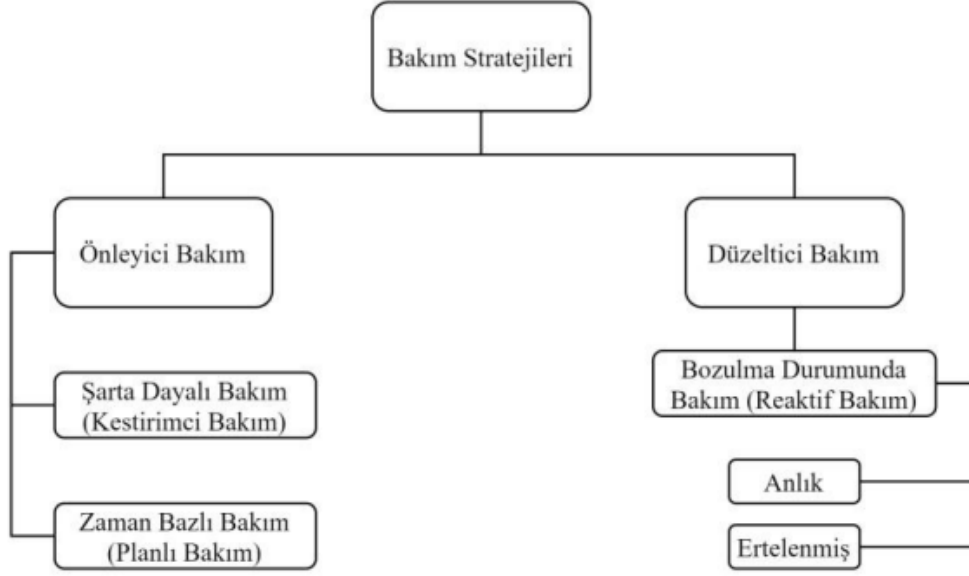
### 2.1.Bakım Yaklaşımları

Bakım üretim sistemlerinde bir destek fonksiyonu olarak, kritik bir rol (Cholasuke ve ark., 2004) ve hatta bir ön koşul (Starr, 1997) olarak değerlendirilmiştir. Bu, elbette, bakımın etkili bir şekilde yapılması gerektiğini, başka bir deyişle, doğru bakım eyleminin uygun zamanda yapılması gerektiğini de ima eder. Öte yandan, yetersiz bakım, aşağıdakilerden dolayı maliyetlerin artmasına neden olabilir. (Moore ve Starr, 2006)

- Üretim kaybı
- Rework
- Hurda
- Emek
- Yedek parça
- Geç siparişler için para cezaları
- Memnun olmayan müşteriler nedeniyle kaybedilen siparişler

Simeu-Abazi ve Sassine'ye (2001) göre, bakımın ana hedefi üretim ekipmanının sistem işlevini sağlamak olmalıdır. Ayrıca, bakım, herhangi bir otomatik üretim sistemi için maliyet, güvenilirlik, bakım kolaylığı ve üretkenlik gibi doğru parametreleri sağlamalıdır. Coetzee (2004), bakım hedefi hakkındaki görüşünü şöyle paylaşmaktadır: "Üretim sürecini kabul edilebilir bir maliyetle yeterli düzeyde kullanılabilirlik, güvenilirlik ve çalışabilirlik ile desteklemek bakım fonksiyonunun görevidir".

Bakım yapmak için çeşitli stratejiler mevcuttur. Bu çalışma kapsamında Şekil 2.1'de görüldüğü gibi kestirimci bakım altında geçen duruma dayalı bakım yaklaşımı kullanılacaktır.



**Şekil 2.1:** Bakım Stratejilerinin Sınıflandırılması

### 2.1.1. Bakım yaklaşımlarının tarihçesi

Bir disiplin olarak bakım, son yıllarda büyük ölçüde gelişmiştir. Moubroy'e (1997) göre, değişiklikleri üç nesle ayırmak mümkündür. İlk nesil İkinci Dünya Savaşı'na kadar uzanır, ikinci nesil İkinci Dünya Savaşı'ndan yetmişli yılların ortalarına kadar uzanır ve üçüncü nesil yetmişli yılların ortalarından günümüze kadar uzanır.

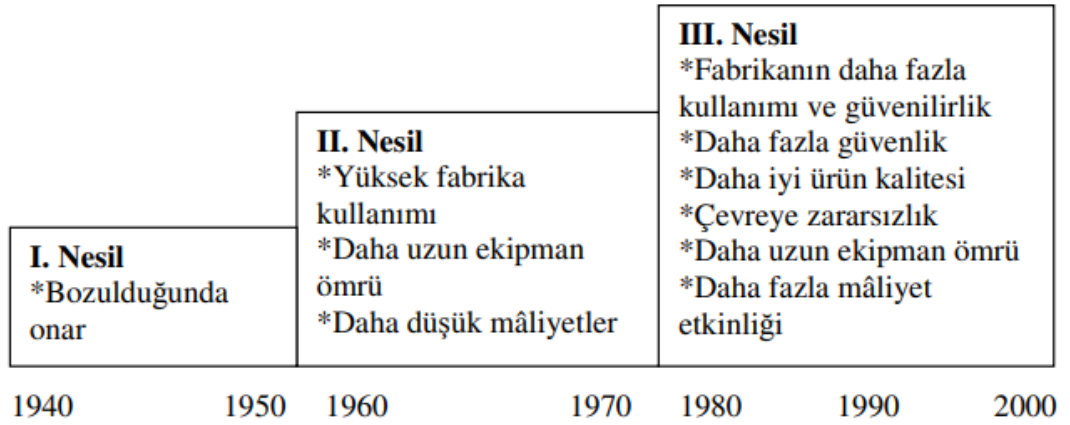
İlk nesil boyunca, bakıma direkt olarak çok fazla odaklanılmamıştır. Ürünlerin üretimi yüksek oranda mekanize değil ve ekipman nispeten daha basitti. Bu sebeple sistemler basit temizlik, servis ve yağlama dışında bakıma çok az ihtiyaç duyuyordu veya hiç ihtiyaç duymuyordu.

İkinci nesilde, hem savaş nedeniyle mallara olan talebin artması hem de insan gücünün azalması, mekanizasyonun artmasına neden olmuştur. Böylece, kesinti süresi daha net bir odak noktası haline gelmiştir. Elbette bu yaklaşımla birlikte bakım maliyetleri artmış, bu da bakım planlama ve kontrol sistemlerinin geliştirilmesine ve kullanılmasına yol açmıştır. Bununla birlikte, yeni beklentiler, yeni araştırmalar ve yeni teknikler, yetmişli yılların ortalarında, bakımı üçüncü nesle itmeye başlamıştır.

Üretim ekipmanı geliştikçe ve giderek daha karmaşık hale geldikçe, bakım beklentileri de artmıştır.

Daha yüksek güvenilirlik ve kullanılabilirlik, daha yüksek güvenlik seviyeleri, daha uzun ekipman ömrü, maliyet etkinliğine yönelik artan talepler, diğerlerinin yanı sıra, son yıllarda neredeyse tüm sektörlerdeki bakım departmanları için oldukça yaygın hale gelen beklentilerdir. Üretim ekipmanlarının karmaşıklığı arttıkça, bakım ekipmanı ve konseptleri de artmıştır (bkz. Şekil 2.2).

Moubray'e (1997) göre, günümüzde bakım departmanları için büyük bir zorluk, yalnızca yeni tekniklerin neler yapabileceğini bilmek değil, aynı zamanda organizasyonları için uygun olanı seçmektir. Bununla birlikte, bugün hala birçok şirket, uygun olmayan alanlarda varsayılan olarak düzeltici bakımı benimsemektedir (Starr, 1997).



Şekil 2.2: Bakım Felsefesinde Değişen Yöntemler

## 2.2.Literatür Taraması

Literatürde sistemlerin stokastik bozulma modellemesi ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu alanda Koşula/Duruma Dayalı Bakım modelleri oldukça yaygın olup birçok faktöre göre sınıflandırılabilir ve çalışmalarımıza benzer bazı adımlar genel olarak bu çalışmalarda yer almaktadır.

CBM'nin önceki çalışmalardan veya endüstrilerden bildirilen birçok avantajı vardır. Bunların arasında, CBM bize yaklaşmakta olan arıza ve arıza tahmininde artan

hassasiyet konusunda önceden uyarı verir. Böylece, diğer yaklaşımlara kıyasla ürünün arızası etkili bir şekilde azaltılabilir. Ürün güvenliği yönetimi açısından CBM, ciddi sorunlar ortaya çıkmadan önce sorunları önceden tespit ederek güvenliği artırabileceğinden, güvenliğin önemli olduğu düşünülen ürün türleri için yararlıdır, bu da yüksek kalite güvencesi nedeniyle müşteri memnuniyetinin iyileştirilmesine yol açar. Genel olarak, bakım sözleşmesine göre, bir bakım hizmeti sağlayıcısı genellikle garanti süresi boyunca ürünün kalitesini isterlerin üzerinde tutma sorumluluğuna sahiptir. Bu nedenle, CBM, bakım hizmeti sağlayıcılarının ürün kalitesinden memnuniyetsizlik nedeniyle risk maliyetinden kaçınmasını sağlar.

Ayrıca, Chen ve Yang'a (2012) göre son kullanıcıların daha iyi planlı bakım yapmasına, gereksiz denetimleri azaltmasına veya ortadan kaldırmasına ve zamana dayalı bakım aralıklarını güvenle azaltmasına olanak tanır. Bengtsson (2004) tarafından CBM sistemlerinin endüstride kullanılmasının, bakım bütçelerini azaltmanın bir yolu olduğu bildirilmiştir. Gereksiz bakımdan kaçınarak ve bakımın daha verimli bir şekilde planlanmasını sağlayarak maliyetleri düşürebilir. Lee'ye (2003) göre, CBM teknolojisinin yalnızca Amerika Birleşik Devletleri'nde yaygın olarak kullanılmasından elde edilen yıllık tasarrufun 35 milyar dolar olduğu tahmin edilmektedir.

Ek olarak, CBM üretim sürecini optimize edebilir ve verimliliğini artırabilir. Sistemin önceden tanımlanmış performans sınırları içinde çalıştığı sürece çalışmaya devam etmesini sağlar. Ayrıca, arızayı izlenen parametreler aracılığıyla belirli bileşenlerle ilişkilendirmek nispeten kolay olduğu için teşhis prosedürlerine yardımcı olur ve böylece süreç optimizasyonunu kolaylaştırır.

Duruma Dayalı Optimizasyon modelleri hem ayrık durum hem de sürekli durum bozulma sorunları için incelenebilir. Alaswad ve Xiang (2017) tarafından yapılan bu sınıflandırma, tek bir seviyede daha ayrıntılı olarak detaylandırılmıştır. Park ve ark. (2011), üç tip birim için sürekli bir zaman Markov Zinciri olan bir ekipman modellemesi geliştirmiştir. Kallen ve Noortwijk (2005), optimize edilmiş bir periyodik muayene süresi belirlemek için Hollanda'daki köprüler için sürekli bir zaman Markov süreci uygulamaktadır. Yaşlanma özelliğini ihmal eden ayrık zamanlı Markov süreci yerine, sürekli zaman Markov sürecini kullanmanın yararını tartışmışlardır.



Alaswad ve Xiang (2017) literatürü gözden geçirmekte ve stokastik bozulma problemlerini modellemek için Duruma Dayalı Bakım optimizasyon çalışmalarını özetlemektedir. Bu modelleri muayene sıklığı, muayene kalitesi, optimizasyon kriterleri gibi çeşitli faktörlere göre gözden geçirilmiştir.

Modellere göre kontrol sıklığı farklılık gösterebilir. Ardışık denetimler arasındaki süre ise bakım politikalarını etkiler. Gözlemlenen sistemler sürekli, periyodik veya periyodik olmayan olarak izlenebilir. Ye ve ark. (2015), bir sonraki gözlem için en uygun inceleme/değiştirme kararını ve inceleme aralığını üreten dinamik bir politika önermiştir.

CBM optimizasyon modelleri, maliyet minimizasyonu, duruş süresi en küçükleyen ve çok amaçlı gibi çeşitli optimizasyon kriterleri altında çözülebilir. Ferreira ve ark. (2009), optimal denetim aralıklarını belirlemek için karar vericinin iki farklı hedefini aynı anda karşılayan bir karar modeli önermiştir. Masoumi (2014), optimum politikaları elde etmek için maliyet minimizasyonunu kullanmıştır. Jin (2016), malzeme seçim sürecini yürütmek için stokastik yaklaşımlardan yararlanmıştır.

Bu çalışmalara yaşlanma faktörü de dahil edilebilir. Do et al. (2015) hem kusurlu hem de mükemmel bakım faaliyetlerini içeren hibrit bir bakım politikası önermiştir. Chan ve Asgarpoor (2006), rastgele arızaların onarımının bileşenin durumunu yeni bir duruma getirmediğini, bozulmaya bağlı onarımların bileşeni yeni kadar iyi hale getirdiğini varsayarak bakım politikaları bulmaya çalışmıştır. Chan ve Asgarpoor (2006), optimum bakım politikalarını bulmak ve önleyici bakıma ortalama süreyi hesaplamak için Markov Karar Süreci'ni kullanmıştır. Park ve ark. (2011), optimum denetim aralıklarını bulmak için modifiye edilmiş bir yarı Markov zinciri için dinamik bir programlama modeli uygulamıştır. Kallen ve Noortwijk (2005) beklenen maliyetlere uygun olarak optimum denetim aralıkları önermiştir.

Yapılan araştırma sonucunda tahmini geçiş olasılıkları ve belirlenen eylemler, Markov Karar Sürecinde optimal politikalar elde etmek için kullanılır. Jiang ve ark. (1988), köprü bozulmalarını tahmin etmek için bir Markov zincir modeli önermektedir. Geçiş olasılıklarının tahmini için hem yüzde tahmin modelini hem de doğrusal olmayan regresyon modelini kullanırlar. Butt ve ark. (1994) verimli bir kaldırım yönetim sistemi oluşturmak için bir metodoloji önermektedir. Doğrusal olmayan regresyon yaklaşımı ile tahmin edilen Markov geçiş olasılıklarını girdi olarak kullanan dinamik

bir programlama yaklaşımı uygulayıcılar ve kısıtlamalar içindeki bazı bakım ve onarım seçeneklerini ortadan kaldırmaya çalışırlar. Önerilen çıktı daha sonra bütçe sınırları içinde kalmak ve maliyet/fayda analizi yardımıyla seçeneklere öncelik vermek için değerlendirilmektedir.

Bozulan sistemler için bakım politikalarına artan ilgi, bu alanda çok fazla araştırma yapılmasını sağlamıştır. Kendi kendini duyuran arızaları olan ve çok durumlu bozulan sistemler için, geçmişte yalnızca "hiçbir şey yapmama" ve "değiştirme" eylemlerini dikkate alan çeşitli bakım politikalarının beklenen uzun vadeli maliyet oranı incelenmiştir. Sürekli denetim altında bozulan bir sistem için, Lam ve Yeh (1994) çeşitli bakım politikaları geliştirmiş ve karşılaştırmıştır. Daha sonra, Chiang ve Yuan (2001) bu çalışmayı ara durumlarda "onarım" bakım eylemine izin vererek genişletmiştir.

Haber vermeyen arızalara sahip çok durumlu bozulma sistemleri için optimum denetim aralıkları üretme sorunu da incelenmiştir. Luss (1976), sistemin başarısız olduğunda veya biriken hasar önceden belirlenmiş sabit bir değeri aştığında değiştirildiği bir kontrol sınırı politikası geliştirmiştir.

Arızalı durumun hemen tespit edildiği gizli hataları olan sistemler için Christer ve Waller (1984) bir "gecikme süresi kavramı" geliştirmiş ve onarımın ilk kez tespit edildikten sonra ve hataların birikmesi sistemin bozulmasına neden olmadan önce ne kadar geciktirilebileceğini incelemişlerdir. Denetim süresini optimize ederek gecikme süresi modellemesi dinamik olarak geliştirilmiştir. Van Oosterom ve ark. (2014) gecikme süresi modelini, sistem kusurlu bir durumda tespit edildiğinde önleyici değiştirme ile genişletmiştir. Büşra Keleş ve Salih Tekin (2017) ise Markov eskiyen bir sistem için yenileme teorisini kullanarak bakım onarım maliyeti en küçükleyen optimal kontrol periyodunu bulmuştur. Modelimizde de sistem arızasından sonraki ilk incelemeye kadar arıza tespit edilememektedir.

Bozulan sistemler için kullanılabilirlik performansı da birçok yazar tarafından dikkate alınmıştır. Klutke ve Yang (2002), şok ve kademeli bozulma altında haber vermeyen arızaya sahip sistemlerin kullanılabilirliğini incelediler. Benzer şekilde sistem kullanılabilirliğini en üst düzeye çıkarmak, arıza sıklığını azaltmak ve ayrıca gelecekteki kontrolleri planlamak için bakım stratejileri geliştirmişlerdir. Chelbi ve

ark. (2008) sistem kullanılabilirliğini en üst düzeye çıkarmak için hem haber veren hem de haber vermeyen arızaya sahip sistemler için bakım politikası sunmuştur.

Markov eskiyen üç durumlu sistemimizde, süre ve maliyet bakımından değişebilen olasılıksal onarımlarla birlikte çeşitli bakım politikaları maliyet temelinde oluşturulmuş ve karşılaştırılmıştır. Ayrıca, sistem kullanılabilirliğini de, inceleme ve bakım maliyetleriyle birlikte duruş süresi maliyeti aracılığıyla göz önünde bulunduruyoruz. Daha sonra ise çeşitli sistem parametrelerinin, optimum kontrol periyodu ve politikası üzerindeki etkisi analiz edilmiştir.





### 3. PROBLEM TANIMI VE SİSTEMİN MODELLENMESİ

Çalışmanın bu bölümde eskiyen bir sistem için rassal karar modeli kurularak yenileme teorisi yardımıyla maliyeti en küçükleyen ve kontrol zamanını en iyileyen optimum bakım politikası bulunacaktır. Eskiyen bu sistem karar verici tarafından  $\tau$  zaman aralıklarıyla periyodik olarak kontrol edilmekte olup, aşağıda açıklanan durum ve politikalara göre aksiyon alacaktır.

Problemdaki bozulma süreci  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , üç durumlu sürekli zamanlı Markov zinciri tarafından modellenmiştir. Kontrol periyodu içinde  $i = 1, 2, 3$  durumundan  $j = 2, 3$ 'e geçişe neden olan olay ( $i \neq j$ ),  $\lambda_{ij}$  oranıyla üstel bir süre sonra meydana gelir. Her kontrol periyodunda  $k\tau$ , ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \tau \geq 0$ ), sistem üç durumdan birinde yani; iyi, kritik veya arızalı olarak gözlemlenir ve karar verici aksiyon almama, onarım veya değiştirme gibi mevcut bir eylemi seçer. Sistem iyi olarak tanımlanırsa, aksiyon almama eylemi mevcuttur; aksi takdirde, sistem onarılabilir veya değiştirilebilir.

Söz konusu sistemimizdeki durumlara karar verebilmek için belirlenen göstergeler aşağıdaki çizelgede verilmiştir. (Çizelge 3.1)

**Çizelge 3.1:** Durumların Göstergeleri

Durum	Açıklama
1 (iyi)	Malzemenin sessiz çalışması ve soğutmayı zamanında tamamlaması
2 (kritik)	Malzemenin sesli çalışması veya soğutmayı zamanında tamamlayamaması
3 (arızalı)	Malzemenin çalışmaması

Eğer kontrol sırasında sistemin kritik durumda olduğu görülürse karar verici 4 farklı alternatiften birini seçecektir. Aksiyon almama veya değiştirme seçeneklerinin yanında onarım da yapılabilir. Bu onarımlar minör tamir ve majör tamir olarak ikiye ayrılmaktadır. Söz konusu bu onarım türleri başarı olasılığına, maliyete ve sürelere göre birbirinden farklılık gösterebilir. Onarımların başarılı olmama olasılığı da vardır fakat değiştirme eylemi sistemi her zaman durum 1'e döndürür; ancak yine maliyeti ve

süresi onarım eylemlerinden farklı olacaktır. Aşağıda Çizelge 3.2'de de gösterildiği gibi dört farklı sistem bakım politikası tanımlanmıştır.

**Çizelge 3.2:** Bakım Politikaları

Politika	Durum 1	Durum 2	Durum 3
P <sub>1</sub>	Aksiyon Alma	Aksiyon Alma	Yenile
P <sub>2</sub>	Aksiyon Alma	Minör Tamir	Yenile
P <sub>3</sub>	Aksiyon Alma	Majör Tamir	Yenile
P <sub>4</sub>	Aksiyon Alma	Yenile	Yenile

Örneğin, politika 1'de (P<sub>1</sub>), sistemin durum 1'de veya durum 2'de olduğunu gözlemlediğimizde "aksiyon almayız" ve sistem arızalı konuma geçtiğinde yenileme eylemini gerçekleştiririz. Diğer bir örnek olarak ise politika 3'te (P<sub>3</sub>), sistemin durum 2'de olduğu görülürse majör tamir eylemi gerçekleştirilmektedir. Amacımız optimum kontrol periyodunu ve bakım politikasını belirlemektir. Her kontrol periyodunda gözlemlenen  $Y_{k\tau} \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , sistem durumlarının  $Y_{k\tau}$ 'nin geçiş olasılıklarına sahip ayrık zamanlı bir Markov süreci oluşturduğunu görmek kolaydır. Yani, sistem durumunun bir sonraki kontrol zamanında ne olacağı sadece bir önceki kontroldeki sistem durumuna bağlı, geçmişten bağımsızdır.

$$P_{ij}(\tau) = P\{Y_{k\tau} = j | Y_{(k-1)\tau} = i\}, \quad \tau \geq 0, k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$P_{ij}(\tau)$ , mevcut kontrolde i durumunda gözlemlenen sistemin, bir sonraki denetim döneminde, yani  $\tau$  zaman sonraki kontrol döneminde, hiçbir bakım işlemi yapılmadığında j durumuna geçme olasılığıdır. Bakım eylemlerinin geçiş olasılıklarını etkilediği unutulmamalıdır. Daha detaylı açıklanacak olursa; minör onarım, sistemi  $p_{mn}$  olasılıkla 1 durumuna getirecektir. Majör onarım da aynı şekilde sistemi  $p_{mj}$  olasılıkla 1 durumuna getirecektir.

Bakım tamamlandıktan sonra, yeni sistem durumu anında bilinir ve bir sonraki inceleme  $\tau$  zaman birimi daha sonra gerçekleşir. İnceleme zamanı ihmal edilebilir; ancak, kontrol maliyetinin, sık sık yapılan kontrolleri önlemek için, kontrol süresinin monoton olarak artmayan bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. Kontrol süresi sonsuza kadar uzadıkça kontrol maliyeti sıfıra düşmektedir ve sürekli izleme için, yani

denetim süresi 0 olduğunda, sonlu bir maksimum değer almaktadır. K değeri ise maksimum inceleme maliyetini temsil etmektedir.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} k(\tau) = K < \infty \quad (3.2)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k(\tau) = 0 \quad (3.3)$$

Çalışma kapsamında belirli bir politika için uzun vadede ortalama maliyet oranını hesaplamak için yenileme teorisi kullanılmaktadır. Bir bakım eylemi sistemi durum 1'e getirdiğinde sistem olasılıksal olarak yeniden başlatılır. Amaç, aşağıdaki varsayımlar altında uzun vadede beklenen maliyet oranını en aza indiren en iyi bakım politikasını ve kontrol periyodunu belirlemektir.

- 1) Dikkate alınan zaman ufku sonsuzdur ve iyi durumdaki sistem 0 zamanında kullanılmaya başlar.
- 2) Sistem durumu sadece kontrollerle izlenir ve kontrol süresi ihmal edilebilir düzeydedir.
- 3) Sistem, haber vermeyen arızalar nedeniyle birim zaman başına bir çalışamama maliyetine ( $c_d$ ) maruz kalır.
- 4) Minör (Majör) onarım sabit bir süre  $t_{mn}$  ( $t_{mj}$ ) sürer ve sabit  $c_{mn}$  ( $c_{mj}$ ) maliyeti vardır.
- 5) Yenileme eylemi, sabit bir bakım süresinden ( $t_{rpl}$ ) sonra sistemi her zaman sabit bir maliyet ( $c_{rpl}$ ) ile durum 1'e döndürür.
- 6) Arızalı kalma maliyeti, sistem gayri faal kaldığı için onarım ve değiştirme faaliyetleri sırasında ortaya çıkar, ancak bu süre zarfında herhangi bir kontrol maliyeti oluşmaz.

Problemin modellenebilmesi için kullanılan notasyonlar aşağıda verilmiştir.

**Kümeler:**

$S = \{1,2,3\}$ : Durum (State) Kümesi

$T = \{0,1,2,3..\}$ : Kontrol Periyot Kümesi

**Karar Degişkeni:**

$\tau$  : İki ardışık kontrol arasındaki sabit süre; kontrol periyodu

**Parametreler:**

$p_{mn}$  : Minör tamir başarı olasılığı

$p_{mj}$  : Majör tamir başarı olasılığı

$c_i$  : Birim zaman başına düşen kontrol maliyeti

$c_d$  : Birim arızalı zaman başına düşen maliyeti

$c_{rpl}$  : Sistemi yenilemenin sabit maliyeti

$c_{mn}$  : Sabit minör tamir maliyeti

$c_{mj}$  : Sabit majör tamir maliyeti

$t_{rpl}$  : Sistemi yenilemenin sabit süresi

$t_{mn}$  : Sabit minör tamir süresi

$t_{mj}$  : Sabit majör tamir süresi

$k(t)$  : Birim zaman başına düşen kontrol maliyeti,  $t \in \{ \mathbb{R}^+ \cup 0 \}$

$K$  : Kontrol sabiti,  $K = k(0)$

$X_{ij}$  : Bir kontrol periyodu içerisinde sistem durum  $i$  ile sistem durum  $j$  arasında bulunma zamanı,  $i, j \in \{1,2,3\}$

$\lambda_{ij}$  : Sistemin  $i \in \{1,2\}$  durumundan  $j \in \{2,3\}$  durumuna geçiş hızı

$\lambda_1$  : Durum 1'den toplam çıkış hızı,  $\lambda_1 = \lambda_{12} + \lambda_{13}$

$\lambda_2$  : Durum 2'den toplam çıkış hızı,  $\lambda_2 = \lambda_{23}$

$L_n^i(\tau)$  :  $\forall P_i, n = \{1,2,3,4\}$  politikası altında durum  $i = \{1,2,3\}$ 'ten durum 1'e kadar geçen süre

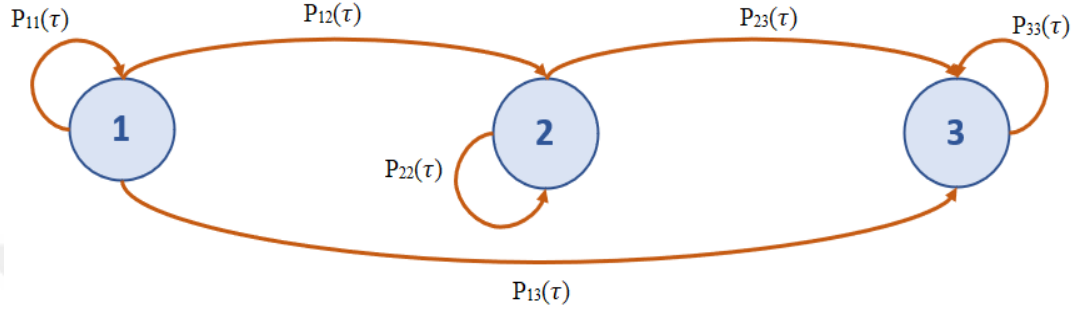
$C_n^i(\tau)$  :  $\forall P_i, n = \{1,2,3,4\}$  politikası altında durum  $i = \{1,2,3\}$ 'ten durum 1'e kadar geçen bakım maliyeti



### 3.1. Matematiksel Hesaplamalar

#### 3.1.1. Geçiş olasılıkları

Yukarıda da anlatıldığı üzere problemimizde 3 farklı durum tanımlanmıştır. Herhangi bir bakım eylemi gerçekleşmedikçe söz konusu sistem kritik veya arızalı duruma geçecektir. Geçiş olasılıklarının şeması aşağıda verilmiştir. (Şekil 3.1)



**Şekil 3.1:** Geçiş Olasılıkları Şeması

$X_{ij}$ , ( $i \neq j$ ) ve  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  iken,  $i$  ve  $j$  durumları arasındaki bulunma süresi olsun. Karar verici "aksiyon almama" eylemini seçerse, sistem zamanla eskiyecektir. Bu koşullar altında geçiş olasılıklarını ( $P_{ij}(\tau)$ ) hesaplayacağız.

##### 3.1.1.1. Durum 1'den geçiş olasılıkları

Herhangi bir kontrol anında 1. durumda olan sistem bir sonraki kontrol anında birinci, ikinci veya üçüncü durumda olabilir. Söz konusu geçiş olasılıkların hesabı aşağıda verilmiştir.

$$P_{11}(\tau) = P\{\min\{X_{12}, X_{13}\} > \tau\} = e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{13})\tau} = e^{-\lambda_1 \tau} \quad (3.4)$$

$$P_{12}(\tau) = P\{X_{12} \leq \tau, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} > \tau\} \quad (3.5)$$

$$= \int_0^\tau P\{X_{13} > x, X_{23} > \tau - x, X_{12} = x\} dx$$

$$= \int_0^\tau P\{X_{13} > x\} P\{X_{23} > \tau - x\} P\{X_{12} = x\} dx$$

$$= \int_0^\tau e^{-\lambda_{13}x} e^{-\lambda_{23}(\tau-x)} \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x} dx$$

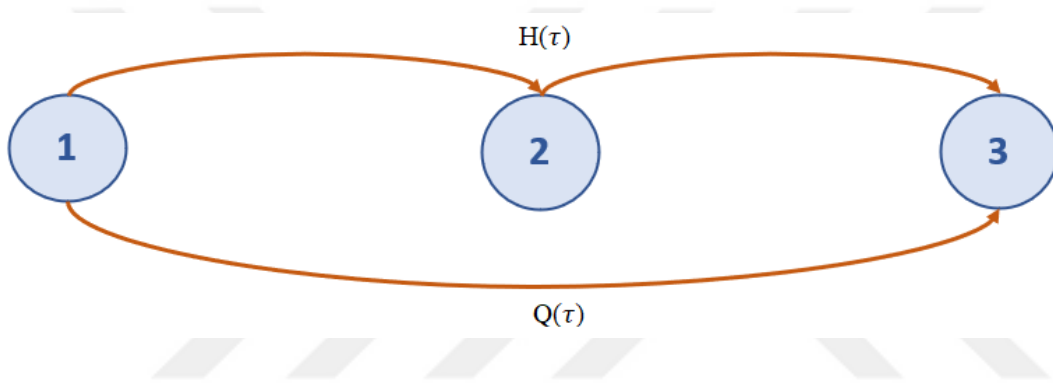
$$= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-\lambda_{23}\tau} e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{13} - \lambda_{23})x} dx$$

$$= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx$$

$$= \begin{cases} \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Durum 1'den 3'e geçebilmesi için 2 farklı ihtimal vardır. İyi durumda olan malzeme arızalanarak direkt 3.duruma  $Q(\tau)$  olasılığı ile geçebilir. Diğer bir ihtimal ise önce kritik seviyeye (durum 2) geçip daha sonra arızalanabilir. Bu da  $H(\tau)$  olasılığı ile tanımlanmıştır. Durum 1'den 3'e geçiş olasılık gösterimi aşağıda verilmiştir.

(Şekil 3.2)



**Şekil 3.2:** Durum 1'den 3'e Geçişinin Gösterimi

Şemadan da anlaşılacağı üzere  $P_{13}(\tau)$  olasılığı  $H(\tau)$  ve  $Q(\tau)$  olasılıklarının toplamıyla bulunmaktadır.

$$P_{13}(\tau) = Q(\tau) + H(\tau) \quad (3.6)$$

$H(\tau)$  ve  $Q(\tau)$  olasılıkları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$Q(\tau) = P\{X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\} = \int_0^\tau P\{X_{12} > y, X_{13} = y\} dy \quad (3.7)$$

$$= \int_0^\tau P\{X_{12} > y\} P\{X_{13} = y\} dy = \int_0^\tau e^{-\lambda_{12}y} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau} \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{13})y} dy = \int_0^{\tau} \lambda_{13} e^{-\lambda_1 y} dy \\
&= \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau})
\end{aligned}$$

$$H(\tau) = P\{X_{12} \leq \tau, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \quad (3.8)$$

$$= \int_0^{\tau} P\{X_{13} > x, X_{23} \leq \tau - x, X_{12} = x\} dx$$

$$= \int_0^{\tau} P\{X_{13} > x\} P\{X_{23} \leq \tau - x\} P\{X_{12} = x\} dx$$

$$= \int_0^{\tau} e^{-\lambda_{13}x} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x} dx$$

$$= \int_0^{\tau} \lambda_{12} e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{13})x} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x)}) dx$$

$$= \int_0^{\tau} \lambda_{12} e^{-\lambda_1 x} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x)}) dx$$

$$= \int_0^{\tau} \lambda_{12} (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 \tau} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Eşitlik (3.7) ve (3.8)'den durum 1'de olan sistemin  $\tau$  zaman sonra durum 3'te olma olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$P_{13}(\tau) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

### 3.1.1.2.Durum 2'den geçiş olasılıkları

Durum 2'de olan bir sistem hiçbir bakım aksiyonu alınmadığı takdirde durum 1'e geçemez. Bu doğrultuda ya durum 2'de kalacaktır ya da durum 3'e geçecektir. Geçiş olasılıkları için hesaplamalar aşağıda verilmiştir.

$$P_{21}(\tau) = 0 \quad (3.10)$$

$$P_{22}(\tau) = P\{X_{23} > \tau\} = e^{-\lambda_{23}\tau} = e^{-\lambda_2\tau} \quad (3.11)$$

$$P_{23}(\tau) = P\{X_{23} < \tau\} = 1 - e^{-\lambda_{23}\tau} = 1 - e^{-\lambda_2\tau} \quad (3.12)$$

### 3.1.1.3.Durum 3'ten geçiş olasılıkları

Yukarıda da bahsedildiği üzere durum 3 sistemin arızalı olduğunu göstermektedir. Eğer sisteme bakım yapılmazsa bir sonraki kontrol zamanına kadar arızalı kalacaktır. Bu doğrultuda geçiş olasılıkları aşağıda verilmiştir.

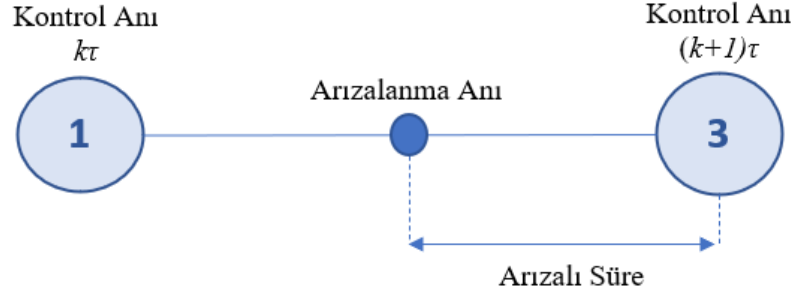
$$P_{31}(\tau) = P_{32}(\tau) = 0 \quad (3.13)$$

$$P_{33}(\tau) = 1 \quad (3.14)$$

### 3.1.2.Beklenen arıza süresi

Ele aldığımız problemimizde sistem arızayı haber vermemekte olup sadece kontrol zamanlarında hata görülebilmektedir. Bu sebeple kontrol periyotları arasında arıza olması durumunda sistem kontrol periyoduna kadar gayri faal kalacak olup, arızalı kalma süresiyle doğru orantılı olarak maliyet doğuracaktır.  $D_i(\tau)$ , en son i.durumda kontrol edildikten sonra arızalanan sistemin beklenen arızalı kalma süresini temsil etsin. (i=1,2)

Bu doğrultuda  $D_2(\tau)$ 'nin hesabı  $D_1(\tau)$ 'e göre daha kolay olacaktır. Çünkü zaten durum 2'de olan sistemin durum 3'e gidebilmesi için gerekli tek yol vardır. Beklenen arıza süresinin gösterimi aşağıda verilmiştir. (şekil 3.3)



**Şekil 3.3:** Beklenen Arızalı Sürenin Gösterimi

### 3.1.2.1. Durum 1'den sonra oluşacak arıza için beklenen değer

$D_1(\tau)$ , sistemin kontrol periyotları arasında durum 1'den durum 3'e geçmesi durumunda oluşacak arıza için beklenen süreyi verecektir. Sistemin durum 1'den durum 3'e geçebilmesi için 2 farklı yol vardır. Geçiş olasılıkları hesaplanırken de bahsettiğimiz üzere sistem arızalı duruma direkt de geçebilir, önce kritik (durum 2) duruma geçtikten sonra da arızalanabilir. Bu doğrultuda  $D_1(\tau)$  aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$D_1(\tau) = D^Q(\tau)Q(\tau) + D^H(\tau)H(\tau) \quad (3.15)$$

Buradaki  $Q(\tau)$  durum 1'den durum 3'e geçme olasılığını temsil etmektedir.  $D^Q(\tau)$  ise durum 1'den durum 3'e geçmesi durumundaki beklenen gayri faal kalma süresini temsil etmektedir.

Aynı şekilde  $D^H(\tau)$  ise durum 2'ye geçtikten sonra arızalı duruma geçmesi durumunda beklenen gayri faal kalma süresini temsil etmektedir.

Buradan,

$$D^Q(\tau) = \tau - E[X_{13} | X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}] \quad (3.16)$$

$$= \tau - \int_0^\tau P\{X_{13} > u | X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \tau - \int_0^\tau (1 - P\{X_{13} \leq u | X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\}) du, \quad u \leq t$$

$$= \int_0^\tau P\{X_{13} \leq u | X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\} du, \quad u \leq t$$

$$= \int_0^\tau \frac{P\{X_{13} \leq u, X_{13} < X_{12}\}}{P\{X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\}} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{\int_0^\tau P\{X_{12} > y_1, X_{13} = y_1\} dy_1}{\int_0^\tau P\{X_{12} > y_2, X_{13} = y_2\} dy_2} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{\int_0^\tau P\{X_{12} > y_1\} P\{X_{13} = y_1\} dy_1}{\int_0^\tau P\{X_{12} > y_2\} P\{X_{13} = y_2\} dy_2} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{\int_0^u e^{-\lambda_{12}y_1} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y_1} dy_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_{12}y_2} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{\int_0^u \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})y_1} dy_1}{\int_0^\tau \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{\int_0^u e^{-\lambda_1 y_1} dy_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_1 y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \int_0^\tau \frac{1 - e^{-\lambda_1 u}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} du, \quad u \leq \tau$$

$$= \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} - \frac{1}{\lambda_1}$$

ve

$$D^H(\tau) = \tau - E[X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{13} \leq \tau] \quad (3.17)$$

$$+ E[X_{23} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{13} \leq \tau]$$

Eşitliği yukarıdaki gibi çözülerek aşağıdaki sonuç bulunur.  $D^H(\tau)$ 'nin çözümünün detayları EK 1'de verilmiştir.

$$= \begin{cases} \frac{\tau - \frac{2}{\lambda_1} + e^{-\lambda_1 \tau} \left( \frac{2}{\lambda_1} + \tau \right)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \tau - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Böylelikle eşitlik (3.15)'teki tüm bilinmeyenler hesaplanmış oldu. Tüm eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$Q(\tau) = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \quad (3.18)$$

$$H(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$D^Q(\tau) = \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} - \frac{1}{\lambda_1} \quad (3.20)$$

(3.21)

$$D^H(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \frac{2}{\lambda_1} + e^{-\lambda_1 \tau} \left( \frac{2}{\lambda_1} + \tau \right)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \tau - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

### 3.1.2.2.Durum 2'den sonra oluşacak arıza için beklenen değer

$D_2(\tau)$ , sistemin kontrol periyotları arasında durum 2'den durum 3'e geçmesi durumunda oluşacak arıza için beklenen süreyi verecektir. Sistemin durum 2'den durum 3'e geçebilmesi için tek yol vardır. Bu doğrultuda  $D_2(\tau)$  aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} D_2(\tau) &= \tau - E[X_{23} | X_{23} \leq \tau] & (3.22) \\ &= \tau - \int_0^\tau P\{X_{23} > w | X_{23} \leq \tau\}d(w), & w \leq \tau \\ &= \tau - \int_0^\tau (1 - P\{X_{23} \leq w | X_{23} \leq \tau\})d(w), & w \leq \tau \\ &= \int_0^\tau P\{X_{23} \leq w | X_{23} \leq \tau\}d(w), & w \leq \tau \\ &= \int_0^\tau \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{23}w}}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} \right) d(w), & w \leq \tau \\ &= \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_{23}}(1 - e^{-\lambda_{23}\tau})}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} = \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} - \frac{1}{\lambda_{23}} \\ &= \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_2\tau}} - \frac{1}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Bu hesaplamayla birlikte başlangıç durumu 1 veya 2 olan sistem için arızalanması durumunda gayri faal kalacağı beklenen değerler bulunmuş oldu. Bundan sonraki aşamada problemimizdeki amaç fonksiyonuna hizmet edecek ortalama maliyet oranları her politika için ayrı ayrı hesaplanacaktır.

### 3.1.3.Ortalama maliyet oranı

Çalışmamızda uzun vadeli maliyeti minimize edecek bakım politikasını bulabilmek için yenileme teorisinden faydalanılmıştır. Yenileme çevrimi, durumu iyi olan (1) bir sistemin herhangi bir aksiyonla tekrar iyi duruma gelmesiyle tanımlanır. En iyi kontrol periyodunun bulunabilmesi için her politika için çevrim başına düşen ortalama maliyeti minimize eden  $\tau^*$  değeri bulunur. Daha sonra bu sonuçlar arasında en düşük maliyeti veren politika en iyi bakım politikası olarak seçilir.



Her politika için ortalama maliyet oranının bulunabilmesi için çevrim bakım maliyetinin  $C_n^1(\tau)$  ve çevrim süresinin  $L_n^1(\tau)$  bulunması gerekmektedir. Yenileme çevrimi ile sistemin durum 1'e gelmesi inceleneceği için; n politikası altında  $L_n^1(\tau)$  ve  $C_n^1(\tau)$  değerlerinin bulunmasıyla ortalama maliyet oranı ( $\Gamma_n(\tau)$ ) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Gamma_n(\tau) = \frac{C_n^1(\tau)}{L_n^1(\tau)} + k(\tau) \quad (3.23)$$

Bu doğrultuda çevrim süresi ve çevrim maliyetlerini hesaplamak için Markov özelliği yardımıyla aşağıdaki denklemler baz alınmıştır. (Büşra Keleş&Salih Tekin, 2017)

$$\begin{aligned} L_n^1(\tau) &= P_{11}(\tau)[\tau + L_n^1(\tau)] + P_{12}(\tau)[\tau + L_n^2(\tau)] + P_{13}(\tau)[\tau + L_n^3(\tau)] \\ &= \tau [P_{11}(\tau) + P_{12}(\tau) + P_{13}(\tau)] + P_{11}(\tau)L_n^1(\tau) + P_{12}(\tau)L_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_n^3(\tau) \end{aligned}$$

$$L_n^1(\tau)[1 - P_{11}(\tau)] = \tau + P_{12}(\tau)L_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_n^3(\tau)$$

Buradan,

$$L_n^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau)L_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_n^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.24)$$

şeklinde elde edilir.

$$C_n^1(\tau) = P_{11}(\tau)C_n^1(\tau) + P_{12}(\tau)C_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_n^3(\tau)]$$

$$C_n^1(\tau)[1 - P_{11}(\tau)] = P_{12}(\tau)C_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_n^3(\tau)]$$

Buradan,

$$C_n^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau)C_n^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_n^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir.

(3.24) ve (3.25) nolu eşitlikler kullanılarak tüm politikalar için ortalama maliyet oranları bundan sonraki alt başlıklarda incelenecektir.

### 3.1.3.1.Politika 1 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, aksiyon alma, yenile)

1.politika kapsamında herhangi bir onarım faaliyeti gerçekleştirilmemektedir. Eğer sistem 3.yani arızalı duruma geçtiyse malzeme değiştirilmektedir. Bu doğrultuda eşitlikler;

$$L_1^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau)L_1^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_1^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.26)$$

$$L_1^2(\tau) = P_{22}(\tau)[\tau + L_1^2(\tau)] + P_{23}(\tau)[\tau + L_1^3(\tau)] \quad (3.27)$$

$$= \tau [P_{22}(\tau) + P_{23}(\tau)] + P_{22}(\tau)L_1^2(\tau) + P_{23}(\tau)L_1^3(\tau)$$

$$\Leftrightarrow L_1^2(\tau)[1 - P_{22}(\tau)] = \tau + P_{23}(\tau)L_1^3(\tau)$$

$$L_1^2(\tau) = \frac{\tau + P_{23}(\tau)L_1^3(\tau)}{1 - P_{22}(\tau)}$$

$$L_1^3(\tau) = t_{rpl} \quad (3.28)$$

ve

$$C_1^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau)C_1^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_1^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)}$$

$$C_1^2(\tau) = P_{22}(\tau)C_1^2(\tau) + P_{23}(\tau)[c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau)] \quad (3.29)$$

$$\leftrightarrow C_1^2(\tau) [1 - P_{22}(\tau)] = P_{23}(\tau)[c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau)]$$

$$C_1^2(\tau) = c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau)$$

$$C_1^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - k(\tau)] \quad (3.30)$$

şeklinde yazılır.

### 3.1.3.2.Politika 2 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, minör tamir, yenile)

2.politika kapsamında bir önceki politikadan farklı olarak tamir aksiyonu devreye girecektir. Eğer sistem 2.duruma geçmişse karar vericinin minör onarım aksiyonunu alması gerekmektedir. Bu doğrultuda çevrim süreleri;

$$L_2^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau)L_2^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_2^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.31)$$

$$L_2^2(\tau) = \frac{t_{mn}}{p_{mn}} \quad (3.32)$$

$$L_2^3(\tau) = t_{rpl} \quad (3.33)$$

şeklinde hesaplanır.

Yenileme çevrim bakım maliyetleri ise;

$$C_2^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau)C_2^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_2^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.34)$$

$$C_2^2(\tau) = \frac{c_{mn} + t_{mn} [c_d - k(\tau)]}{p_{mn}} \quad (3.35)$$

$$C_2^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - k(\tau)] \quad (3.36)$$

şeklinde hesaplanır.

### 3.1.3.3.Politika 3 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, majör tamir, yenile)

3.politika da 2.politika ile benzer şekilde hesaplanacaktır. Tek fark minör tamir yerine majör tamir oranları kullanılacaktır. Eğer sistem 2.duruma geçmişse karar vericinin majör onarım aksiyonunu alması gerekmektedir. Bu doğrultuda çevrim süreleri;

$$L_3^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau)L_3^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_3^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.37)$$

$$L_3^2(\tau) = \frac{t_{mj}}{p_{mj}} \quad (3.38)$$

$$L_3^3(\tau) = t_{rpl} \quad (3.39)$$

şeklinde hesaplanır.

Yenileme çevrim bakım maliyetleri ise;

$$C_3^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau)C_3^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_3^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.40)$$

$$C_3^2(\tau) = \frac{c_{mj} + t_{mj} [c_d - k(\tau)]}{p_{mj}} \quad (3.41)$$

$$C_3^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - k(\tau)] \quad (3.42)$$

şeklinde hesaplanır.

#### 3.1.3.4.Politika 4 için ortalama maliyet oranı (Aksiyon alma, yenile, yenile)

Yukarıda da anlatıldığı gibi 4.politikada onarım aksiyonu yoktur. Eğer sistem 2. veya 3. duruma geçmişse karar vericinin yenile aksiyonunu alması gerekmektedir. Bu doğrultuda çevrim süreleri;

$$L_4^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau)L_4^2(\tau) + P_{13}(\tau)L_4^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.43)$$

$$L_4^2(\tau) = t_{rpl} \quad (3.44)$$

$$L_4^3(\tau) = t_{rpl} \quad (3.45)$$

şeklinde hesaplanır.

Yenileme çevrim bakım maliyetleri ise;

$$C_4^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau)C_4^2(\tau) + P_{13}(\tau)[c_d D_1(\tau) + C_4^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.46)$$

$$C_4^2(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - k(\tau)] \quad (3.47)$$

$$C_4^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - k(\tau)] \quad (3.48)$$

şeklinde hesaplanır.

### 3.1.4. Optimal kontrol periyodu ve optimal politikanın bulunması

Yukarıda verilen eşitlikler doğrultusunda her politika için ortalama maliyetin en küçüklenmesiyle  $\tau^*$  değeri bulunacaktır.

$$\tau_n^* = \underset{\tau \in [0, \infty)}{\operatorname{argmin}} \Gamma_n(\tau), \quad n = 1, \dots, 4 \quad (3.49)$$

Dört politika için çıkan sonuçlar karşılaştırıldıktan sonra minimum maliyeti veren politika modelimizin optimal politikası ve bu maliyeti veren kontrol periyodu da modelin optimal kontrol periyodunu verecektir.

Bir sonraki bölümde bulunan tüm bu eşitlikler sayesinde gerçek problemimiz için optimal kontrol periyodu ve optimal bakım politikası bulunacaktır.

#### 4.DEĞERLENDİRME

Bölüm 3'te rassal olarak eskleyen ve haber vermeyen arızaya sahip sistemimiz için modelimiz anlatılmış ve çeşitli bakım politikaları önerilmişti. Bu bölümde ise sayısal örneklerle birlikte Matlab'de dört politika için de ortalama maliyet oranı bulunacaktır. Daha sonrasında ise parametrelerin sonuç üzerindeki etkisi incelenecektir.

Sonuçları bulabilmek kullanılan parametreler sahadan alınan veriler ve uzman görüşleri doğrultusunda bulunmuştur. Maliyetlerimiz gerçek değerlere göre oranlanmış olup, birim maliyet olarak kullanılmıştır. Süreler ise saat cinsinden ele alınmıştır. Problemin çözümü için Matlab'de kullanılan tüm değerler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

**Çizelge 4.1:** Bakım Parametreleri

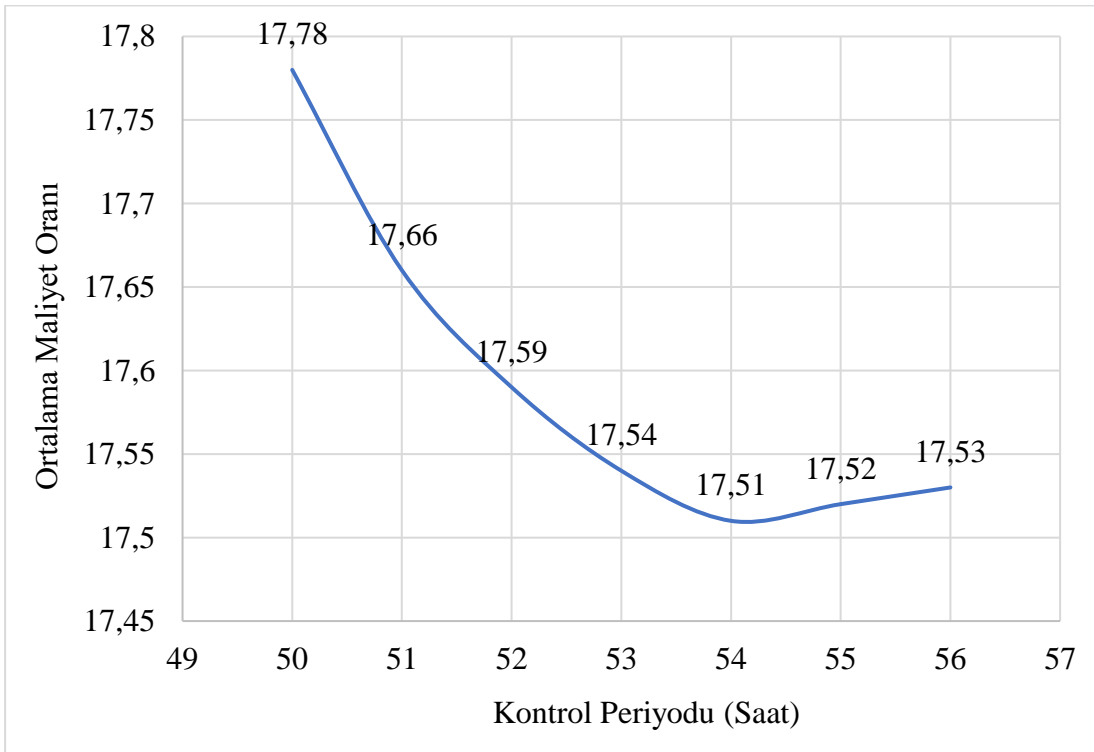
$\lambda_{12}$	0.000216
$\lambda_{13}$	0.000256
$\lambda_{23}$	0.00014
$c_{rp1}$	15000
$t_{rp1}$	1
$c_d$	5000
$c_{mn}$	200
$c_{mj}$	400
$t_{mn}$	2
$t_{mj}$	4
$p_{21}$	0.6
$p_{23}$	0.9
$K$	500

$\lambda_{ij}$  değerleri sahadan toplanan veriler yardımıyla Arena'da bulunmuştur. Sahadan gelen veriler analiz edildiğinde  $\lambda_{12}=0.000216$ ,  $\lambda_{13}=0.000256$  ve  $\lambda_{23}=0.00014$  değerleri bulunmuştur.  $\lambda_{ij}$  dağılımlarının üstel dağılım olduğu ise yine Arena'da Ki-Kare Testi yardımıyla teyit edilmiştir.

Bu parametreler ile bulunan optimum ortalama maliyet oranı ve kontrol periyodu beklenildiği gibi her politika için farklı çıkmıştır. Sırasıyla tüm politikalar için sonuçlar aşağıda anlatılmıştır.

#### 4.1.Politika 1 (Aksiyon Alma, Aksiyon Alma, Yenile) İçin Sonuçlar

Politika 1 için aldığımız sonuçlar neticesinde  $\tau= 54$  ve ortalama maliyet oranı 17,51 çıkmıştır.  $\tau$  değeri 55 ve üzerindeyken ortalama maliyet oranının da arttığı aşağıdaki şekilde görülebilir. (Şekil 4.1)

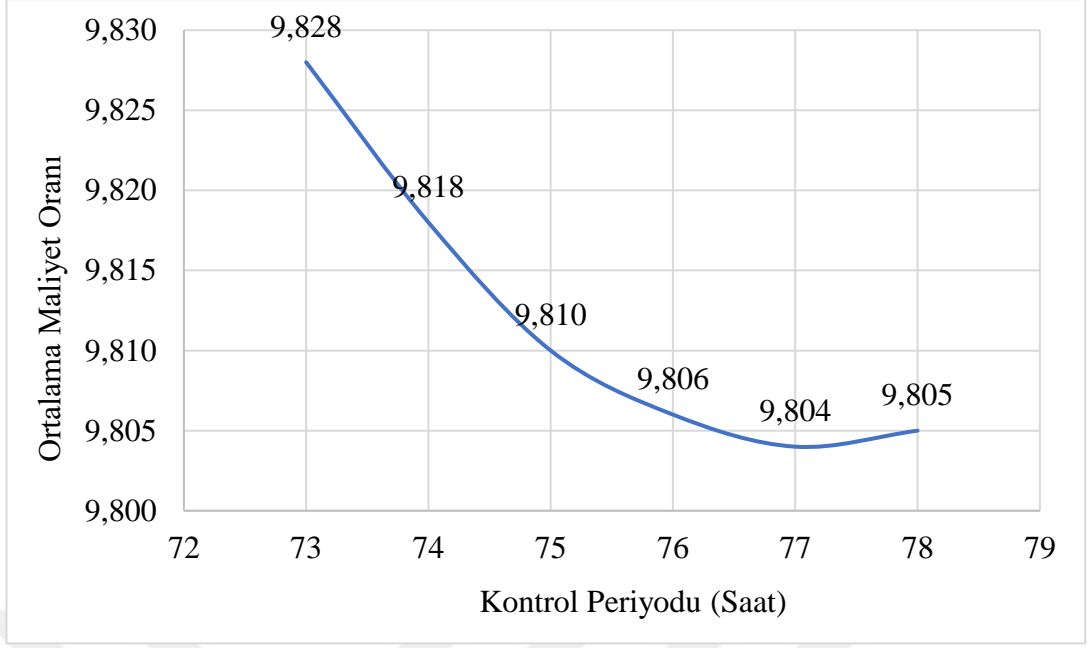


Şekil 4.1: Politika 1 İçin Alınan Değerler

#### 4.2.Politika 2 (Aksiyon Alma, Minör Tamir, Yenile) İçin Sonuçlar

Politika 2 için aldığımız sonuçlar neticesinde  $\tau= 77$  ve ortalama maliyet oranı 9,804 çıkmıştır.  $\tau$  değeri 77 üzerindeyken ortalama maliyet oranının da arttığı aşağıdaki şekilde görülebilir. (Şekil 4.2)

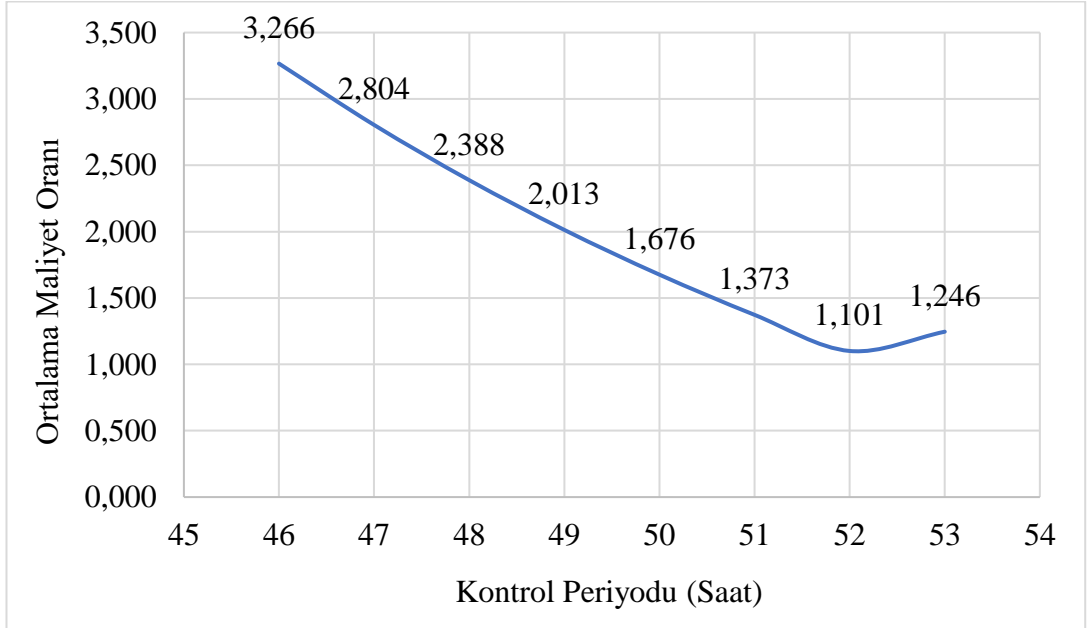




**Şekil 4.2:** Politika 2 İçin Alınan Değerler

#### 4.3.Politika 3 (Aksiyon Alma, Majör Tamir, Yenile) İçin Sonuçlar

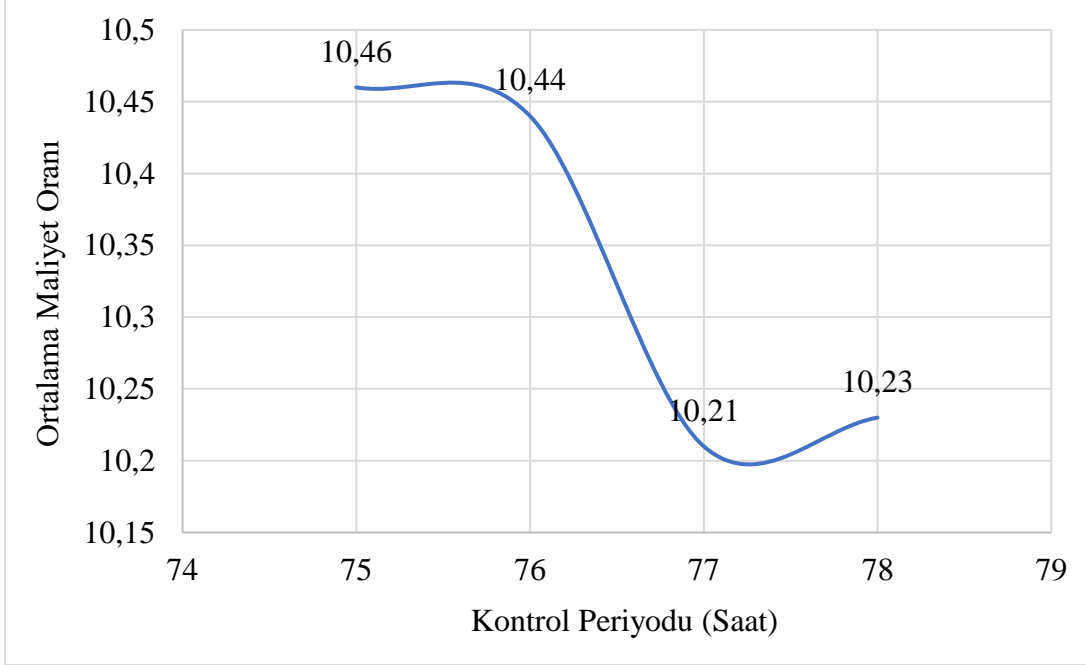
Politika 3 için aldığımız sonuçlar neticesinde  $\tau= 52$  ve ortalama maliyet oranı 1,101 çıkmıştır.  $\tau$  değeri 52 üzerindeyken ortalama maliyet oranının da arttığı aşağıdaki şekilde görülebilir. (Şekil 4.3)



**Şekil 4.3:** Politika 3 İçin Alınan Değerler

#### 4.4.Politika 4 (Aksiyon Alma, Yenile, Yenile) İçin Sonuçlar

Son olarak Politika 4 için aldığımız sonuçlar neticesinde  $\tau=77$  ve ortalama maliyet oranı 10,21 çıkmıştır.  $\tau$  değeri 52 üzerindeki ortalama maliyet oranının da arttığı aşağıdaki şekilde görülebilir. (Şekil 4.4)



Şekil 4.4: Politika 4 İçin Alınan Değerler

#### 4.5.Optimal Kontrol Periyodu ve Optimal Politika

Yukarıda anlatılan tüm bu sonuçlar doğrultusunda problemimiz için optimal politikanın 4 farklı politika arasından minimum ortalama maliyet oranını veren Politika 3 olduğunu söyleyebiliriz. Böylelikle bundan sonraki süreçte, ele alınan sistemin 52 saatte bir kontrol edilmesi gerektiği ve sistemin durumuna göre karar verici tarafından Politika 3'e (Aksiyon Alma, Majör Tamir, Yenile) göre aksiyon alması gerektiği sonucuna varılmıştır.

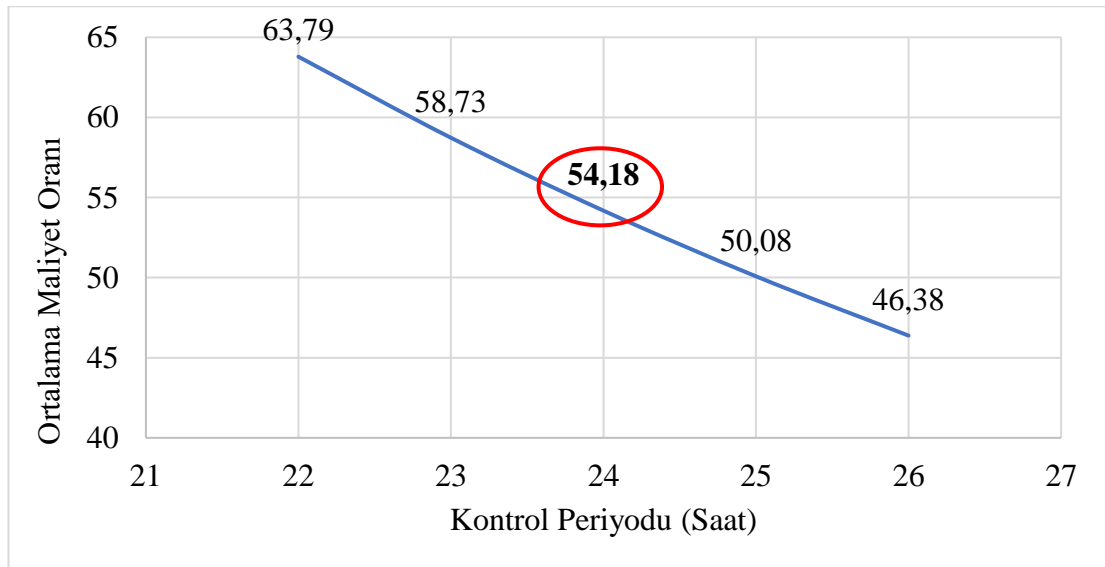
Halihazırda ele alınan sistem için sahadaki personelin varlığı göz önünde bulundurulduğunda sistemin 52 saatte 1 kontrol edilmesi ve kontrol sırasında sistemin durumuna göre Politika 3 aksiyonlarının alınması gerekmektedir. Bu süre yaklaşık olarak 2 güne tekabül etmektedir. Söz konusu politikanın gerçek hayatta da uygulanabilir olması için haftanın sadece 5 günü çalışan ve cuma-cumartesi günleri tatil olan kullanıcıya göre planlama yapıldığında sistemin perşembe ve pazar günleri kontrol edilmesinin uygun olacağı değerlendirilmiştir.

3.politikaya göre sistem eğer sessiz çalışıyor ve soğutmayı zamanında tamamlıyorsa iyi durumdadır. Bu doğrultuda herhangi bir aksiyon alınmasına gerek yoktur. Eğer inceleme sırasında sistemin sesli çalıştığı veya soğutmayı zamanında tamamlayamadığı belirlenirse sistem kritik duruma geçmiş demektir. Burada ilgili personelin majör tamir uygulaması gerekmektedir. Sistem gereksinimine göre yapılacak onarımlar mekaniklerin değiştirilmesi ve/veya kartın onarılması olacaktır. Eğer sistem arızalı duruma geçtiyse malzemenin değiştirilmesi gerekmektedir. Yapılacak olan bu çalışma ile uzun vadede oluşacak maliyetin minimize edilmesi hedeflenmekte olup aynı zamanda müşteri memnuniyeti de en üst seviyeye taşınacaktır.

Bölümün başında da anlatıldığı üzere kullanılan parametreler sahadan alınan veriler ve uzman görüşlerine göre belirlenmiştir. Fakat bu parametrelerin sonuç üzerinde etkisini görebilmek için müdahale edilebilecek bazı maliyet parametrelerinde değişiklik yapılarak 4 politika için de yeniden sonuç alınmıştır. Bu sonuçlar ile mevcut sonucumuz aşağıda karşılaştırılmıştır.

#### 4.5.1.Güncel durum ile optimal politikanın karşılaştırılması

Güncel durumda Politika 1 uygulanmakta olup belirli bölgedeki sistemler her gün yani 24 saatte 1 kontrol edilmektedir. Yani herhangi bir onarım aksiyonu alınmamakta olup sistem arızalandığında yenileme işlemi gerçekleştirilmektedir. Sistemin mevcut ortalama maliyet oranı Politika 1 için hesaplanmış olup grafiği aşağıda verilmiştir. (Şekil 4.5)



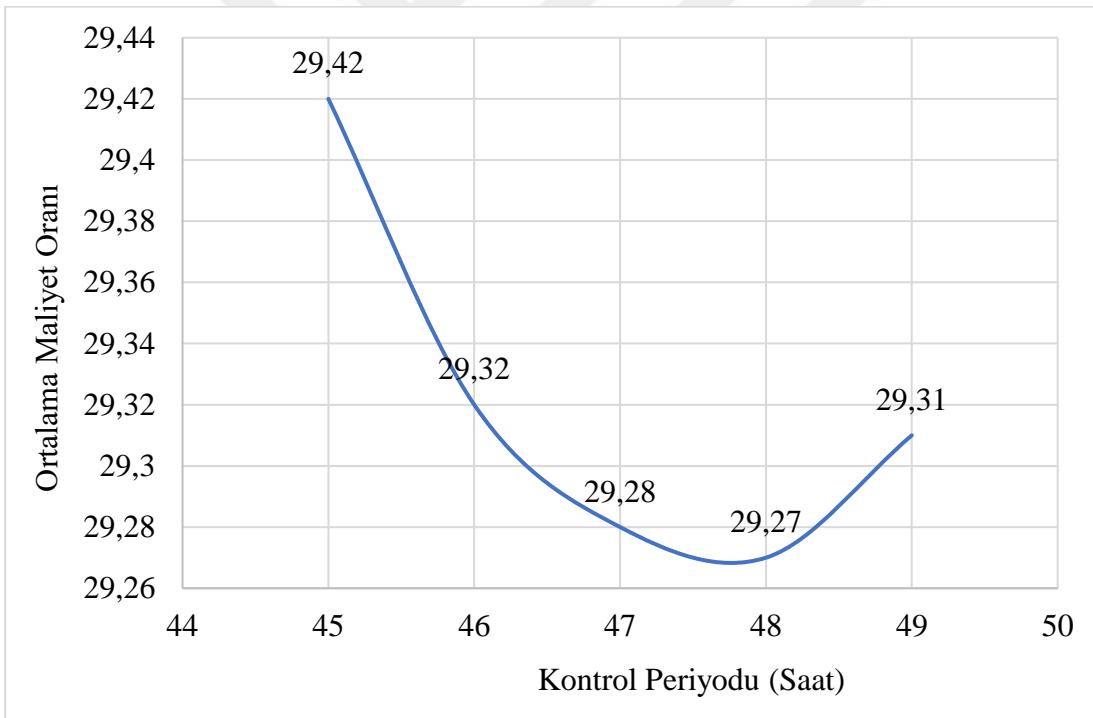
Şekil 4.5: Güncel Durum İçin Alınan Değerler

Mevcut durumda 1.politikaya göre 24 saatte bir sistemin kontrol edilmesi sebebiyle uzun vadeli ortalama maliyet oran 54,18 çıkmıştır. Yukarıda anlatıldığı üzere sistem için optimal olan politika 3 aksiyonları altında  $\tau= 52$  için ortalama maliyet oranı 1,101 çıkmıştır. Böylelikle önerilen politikanın uzun vadede büyük oranda iyileşme sağlayacağı açıkça görülmektedir.

#### 4.6.Gayri Faal Kalma Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

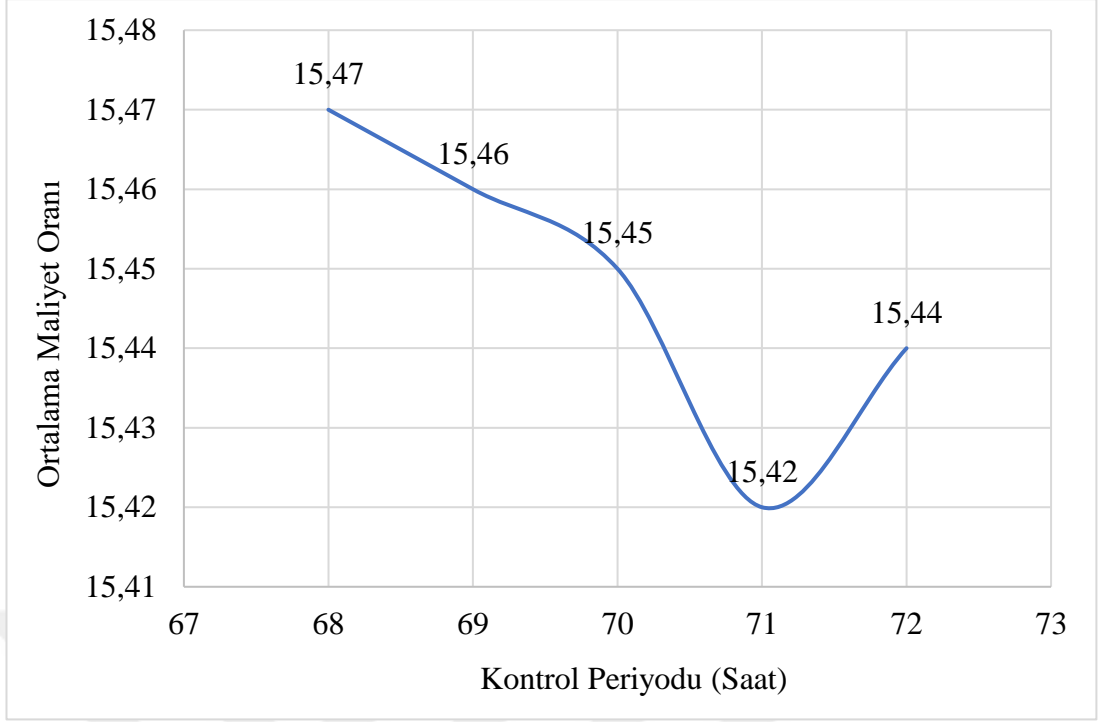
Mevcut durumda sistemin arızalı kalması şirkete 5000 birimlik bir maliyet doğurmaktadır. Eğer bu değer 10.000 olursa sonucu nasıl etkileyeceğine bakılmak üzere aynı model üzerinden yine 4 farklı politika için de Matlab’de sonuçlar alınmıştır.

Politika 1 için  $\tau$  değeri 48 ve ortalama maliyet oranı da 29,27 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.6)



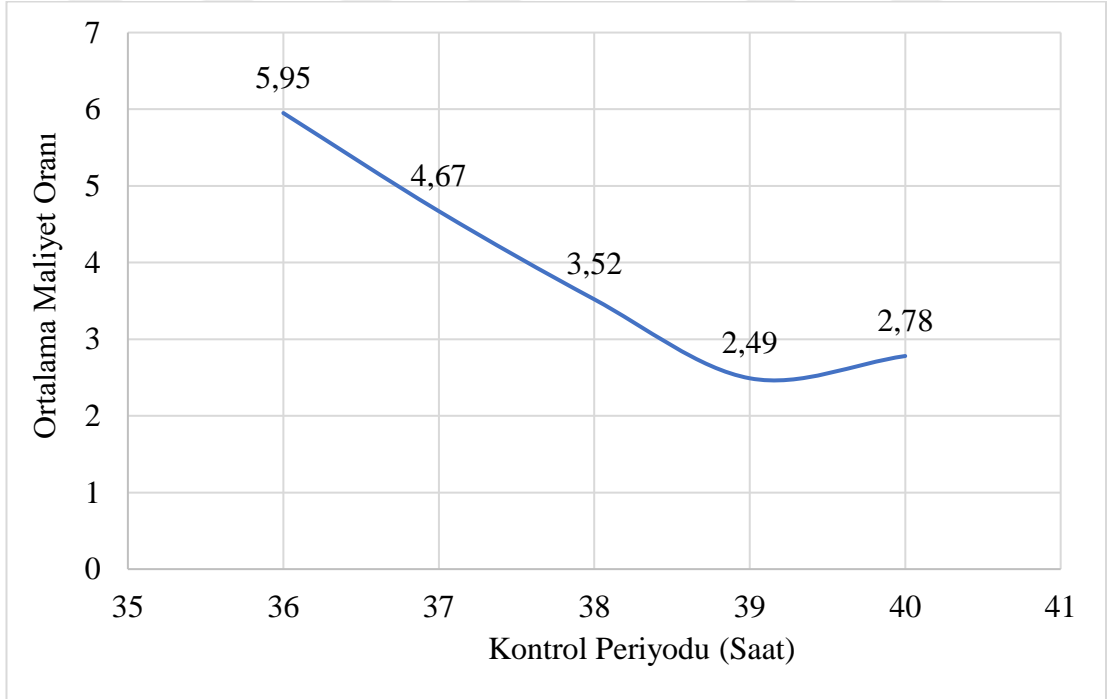
**Şekil 4.6:**  $c_d=10.000$  Olduğunda Politika 1 İçin Alınan Değerler

Politika 2 için  $\tau$  değeri 71 ve ortalama maliyet oranı da 15,42 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.7)



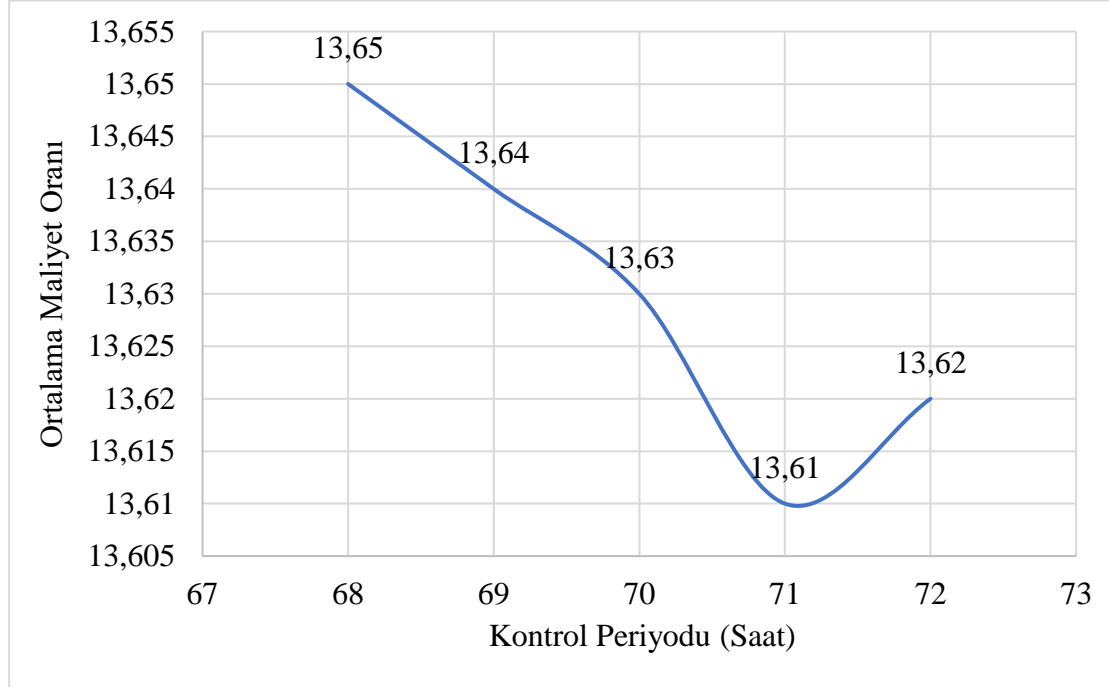
**Şekil 4.7:**  $c_d=10.000$  Olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler

Politika 3 için  $\tau$  değeri 39 ve ortalama maliyet oranı da 2,49 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.8)



**Şekil 4.8:**  $c_d=10.000$  Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler

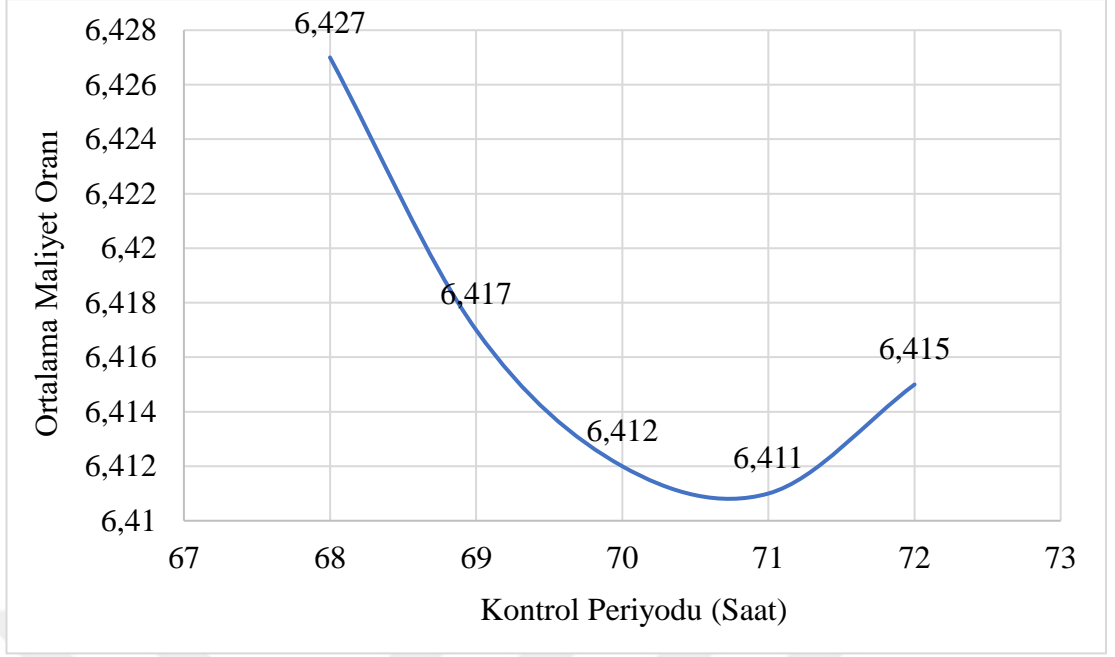
Son olarak Politika 4 için  $\tau$  değeri 71 ve ortalama maliyet oranı da 13,61 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.9)



**Şekil 4.9:**  $c_d=10.000$  Olduğunda Politika 4 İçin Alınan Değerler

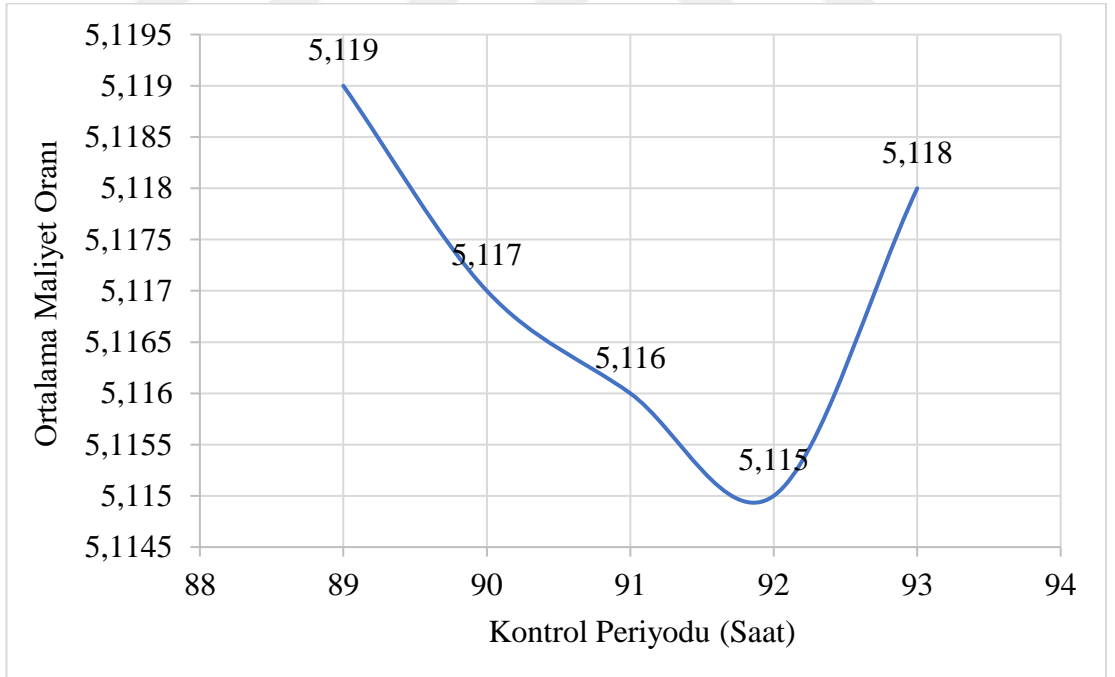
Beklenildiği gibi sistemin arızalı kalmasının maliyetinin artmasıyla birlikte tüm politikaların da ortalama maliyet oranı artmıştır. Fakat  $c_d$  değerinin 10000 olmasına rağmen minimum ortalama maliyet oranını veren politika değişmemiştir. Mevcut durumdaki gibi yine 3. politika seçilmiştir. Önceki sonuçtan farklı olarak ortalama maliyet oranı 2,49 olmuş olup kontrol periyodu 39 saate düşmüştür. Diğer taraftan sistemin gayri faal kalma maliyeti ( $c_d$ ) 5000'den 1000'e düşmesi durumunda oluşacak sonuçlar hesaplanmıştır.

Politika 1 için  $\tau$  değeri 71 ve ortalama maliyet oranı da 6,411 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.10)



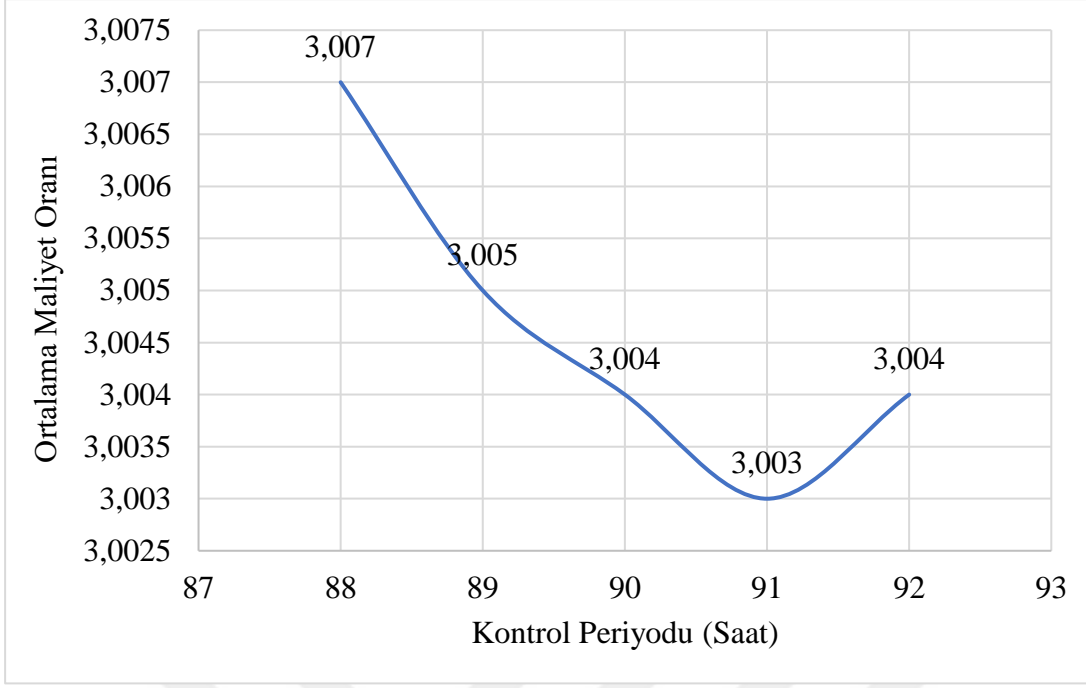
**Şekil 4.10:**  $c_d=1000$  Olduğunda Politika 1 İçin Alınan Değerler

Politika 2 için  $\tau$  değeri 92 ve ortalama maliyet oranı da 5,115 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.11)



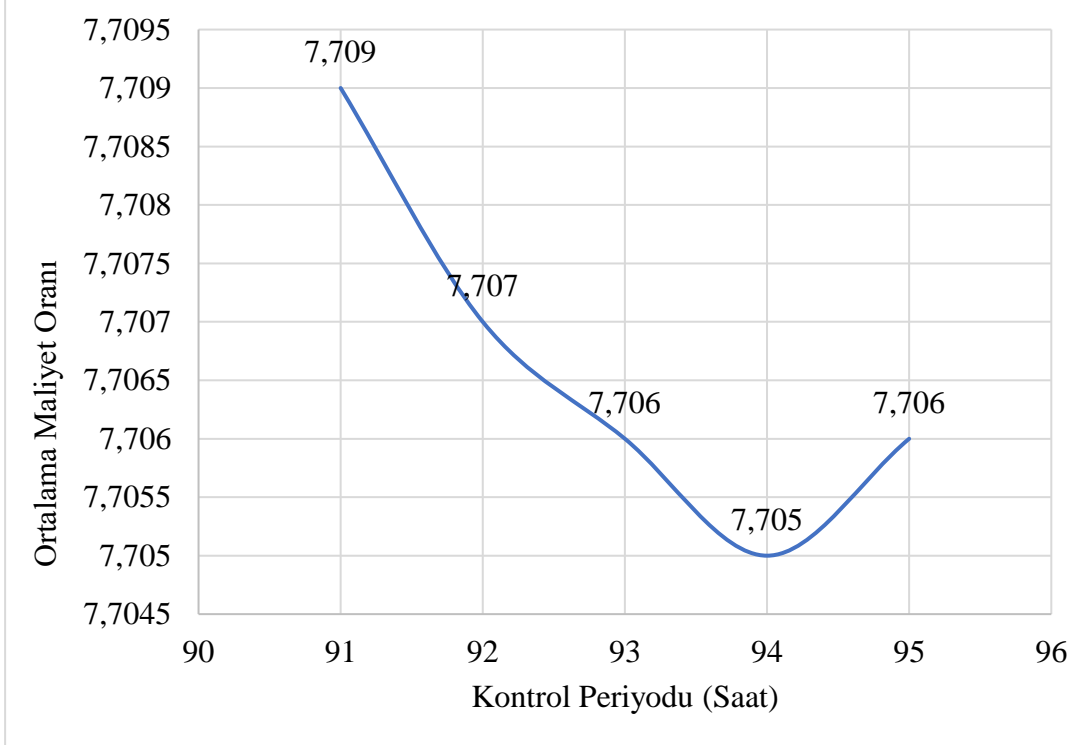
**Şekil 4.11:**  $c_d=1000$  Olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler

Politika 3 için  $\tau$  değeri 91 ve ortalama maliyet oranı da 3,003 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.12)



**Şekil 4.12:**  $c_d=1000$  Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler

Son olarak Politika 4 için  $\tau$  değeri 94 ve ortalama maliyet oranı da 7,705 çıkmıştır. Değerler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Şekil 4.13)



**Şekil 4.13:**  $c_d=1000$  Olduğunda Politika 4 İçin Alınan Değerler



Bu sonuçlar düşünüldüğünde gayri faal kalma maliyetinin artması sebebiyle sistemin daha sık kontrol edilmesi mantıklıdır. Aynı şekilde gayri faal kalma maliyeti azaldıkça da kontroller daha da azalmıştır. Politika 2'nin ortalama maliyet oranı ne kadar Politika 3'e yaklaşırsa da majör onarımın başarı olasılığının yüksekliği sebebiyle daha avantajlı konuma geçememiş olup en uygun politika yine 3. politika çıkmıştır.

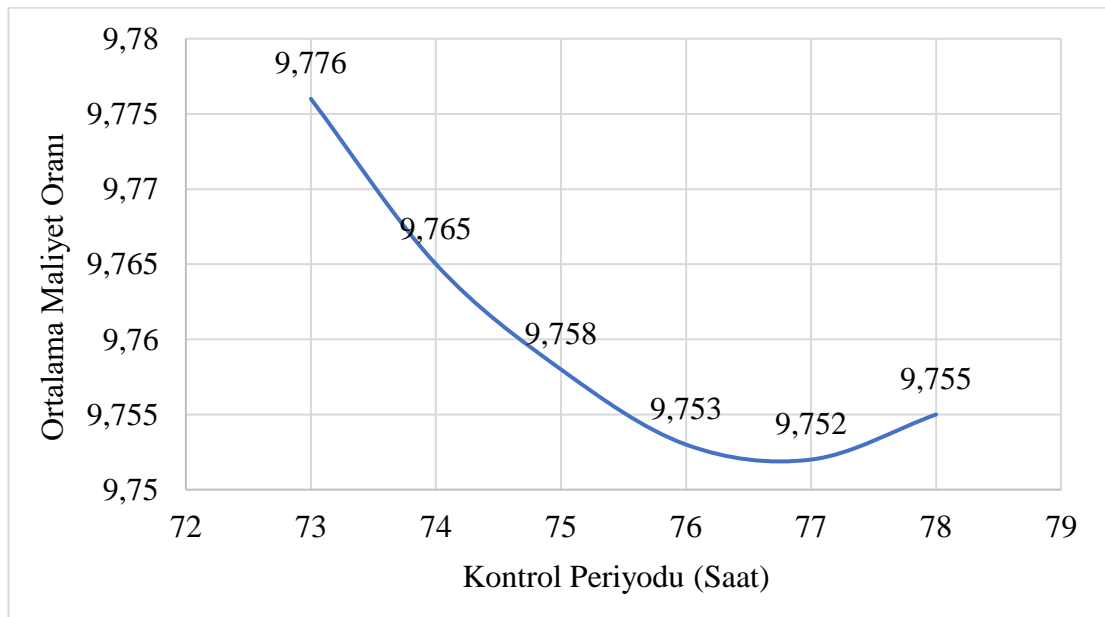
#### 4.7. Onarım Maliyetlerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

Diğer inceleyeceğimiz parametre ise onarım maliyetleridir. Problemimiz kapsamında minör ve majör olmak üzere 2 farklı onarım alternatifi vardır. Minör onarım sadece Politika 2'de, majör onarım ise sadece Politika 3'te yapıldığı için bu maliyetlerdeki değişiklikler sadece ilgili politikaları etkileyecektir. Onarım maliyetlerinin optimalite üzerindeki etkisi aşağıda incelenmiştir.

##### 4.7.1. Minör tamir maliyetinin optimalite üzerindeki etkisi

Mevcut durumda sisteme minör onarımın uygulanması 200 birimlik bir maliyete sebep olmaktadır. Minör onarım maliyeti olan  $C_{mn}$  değeri 50 olursa sonucu nasıl etkileyeceğini inceleyelim. Minör onarım maliyeti sadece 2. politikayı etkileyeceği için sadece bir politika için sonuç alınmıştır.

Bu doğrultuda politika 2 için alınan sonuçlara göre hazırlanan grafik aşağıda verilmiştir. Optimal kontrol periyot değeri 77 çıkarken, ortalama maliyet oranı ise 9,752 çıkmıştır. (Şekil 4.14)



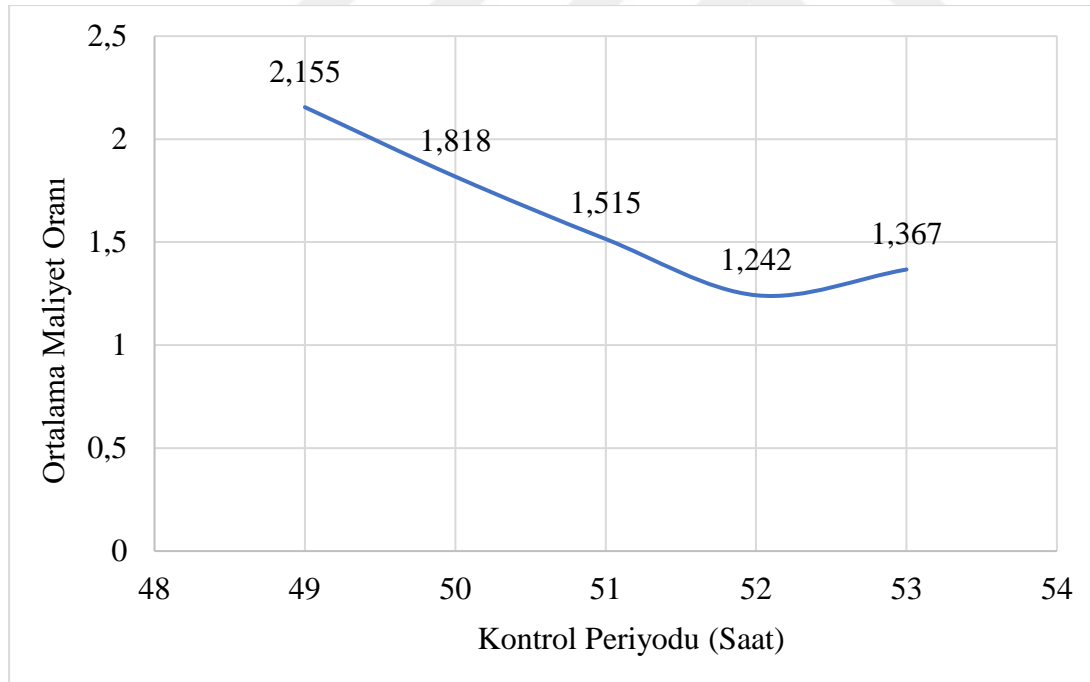
Şekil 4.14:  $c_{mn}=50$  olduğunda Politika 2 İçin Alınan Değerler

Sistemin mevcut durumuna göre politika 3 en iyi sonucu vermişti. En iyi sonuca göre ortalama maliyet oranı 1,101 değeriyle hala 9,752 değerinden küçük olduğu için  $C_2=50$  olması optimum sonucu değiştirmemiştir. Politika 2'nin sonuğları karşılaştırılacak olursa, beklenildiği gibi ortalama maliyet oranı 9,804'ten 9,752'ye dūřmüřtür.

#### 4.7.2.Majör tamir maliyetinin optimalite üzerindeki etkisi

Mevcut durumda sisteme majör onarımın uygulanması 400 birimlik bir maliyete sebep olmaktadır. Majör onarım maliyeti olan  $C_{mj}$  değeri arttırılarak 1000 yapılmıştır. Bۆylelikle bu maliyet artışıyla birlikte yine minimum değeri 3.politikanın mı vereceği incelenmiştir. Majör onarım maliyeti sadece 3.politikayı etkileyeceği için sadece bu politika için sonuç alınmıştır.

Bu doğrultuda politika 3 için alınan sonuçlara göre hazırlanan grafik aşağıda verilmiştir. Optimal kontrol periyot değeri 52 çıkarken, ortalama maliyet oranı ise 1,242 çıkmıştır. (şekil 4.15)



şekil 4.15:  $c_{mj}=1000$  Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler

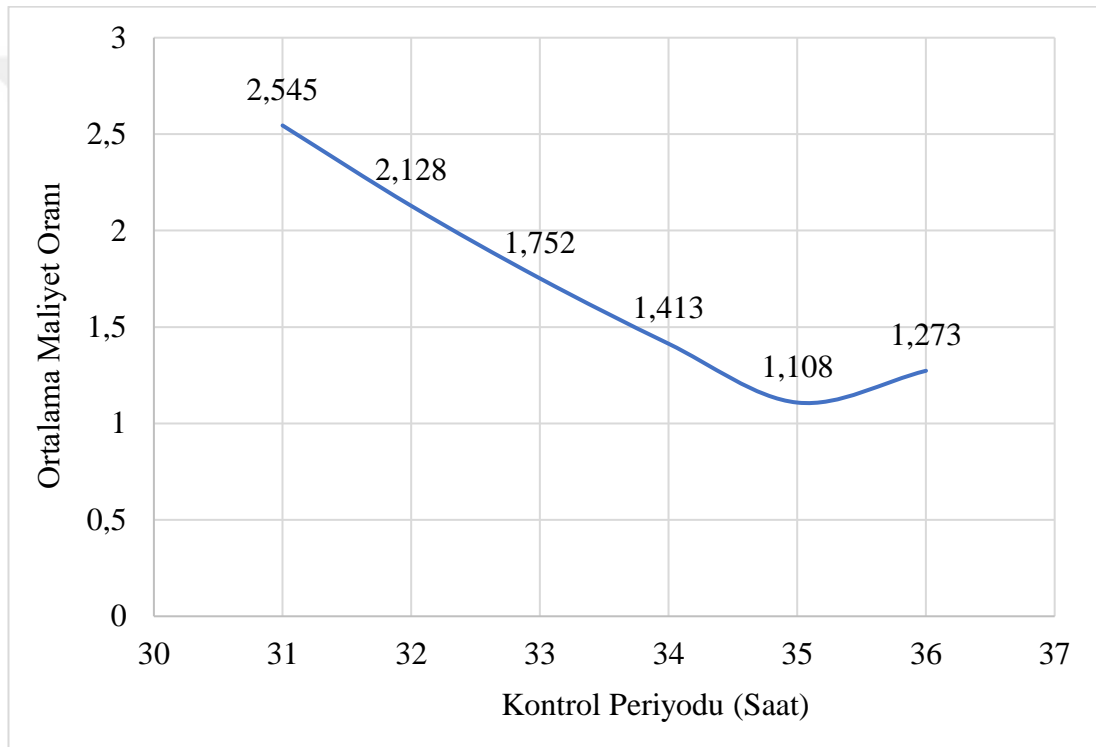
Sistemin mevcut durumuna göre politika 3 en iyi sonucu vermişti. Alınan sonuğlara göre karşılaştırıldığında  $C_3=1000$  olması da yine sonucu değiştirmemiş olup minimum değeri yine Politika 3 vermektedir. Mevcut sonuğtan farklı olarak kontrol periyot sūresi kısalımış olup beklenildiği üzere ortalama maliyet oranı artmıştır.

Daha önce de anlatıldığı üzere modelimizi etkileyen birçok parametre vardır. Gerçek durum düşünüldüğünde yukarıdaki değerlere bakılarak müdahale edebileceğimiz maliyetlerin değiştirilmesi sonuç üzerinde çok fazla değişime sebep olmamıştır.

#### 4.8.Kontrol Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

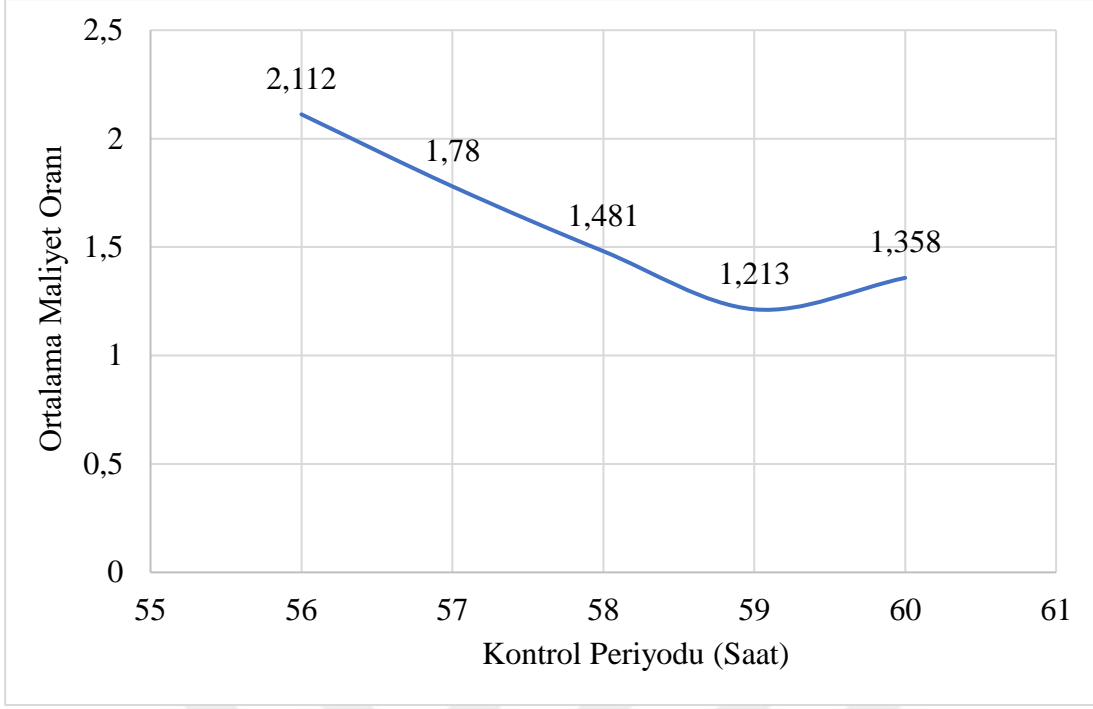
Son olarak kontrol maliyeti değerinin artmasının ve azalmasının optimum sonucu veren politika 3 için değerleri nasıl değiştirdiği incelenecektir.

İlk olarak K değeri 500'den 100'e düşürülmüştür. 3.politika için bulunan sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir. Kontrol periyot değeri 35 çıkarken, ortalama maliyet oranı 1.108 çıkmıştır. Beklenildiği gibi kontroller sıklaştırılmıştır. (Şekil 4.16)



Şekil 4.16: K=100 Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler

Diğer incelememiz de K değeri 500'den 1000'e çıkarıldığında yapılmıştır. Bu doğrultuda 3.politika için bulunan sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir. Kontrol periyot değeri 59 çıkarken, ortalama maliyet oranı 1.213 çıkmıştır. Beklenildiği gibi kontroller azalmış olup, ortalama maliyet oranı da artmıştır. (Şekil 4.17)



**Şekil 4.17:** K=1000 Olduğunda Politika 3 İçin Alınan Değerler

Böylelikle sonucumuz ve sayısal örneklerle birlikte değerlendirme bölümü tamamlanmıştır.

## 5.SONUÇ

“Eskiyen Bir Sistem İçin Durum Bazlı Bakım Politikaları” başlıklı çalışma kapsamında kullanımla stokastik olarak bozulan ve zamanla kritik arızaya yol açan sistem incelenmiş olup, geçmiş veriler kullanılarak bu sistem için durumlar belirlenmiştir. Önerilen 4 farklı politika için ortalama maliyet oranları hesaplanmış ve optimal politika önerilmiştir. Optimal politikanın, mevcut duruma göre uzun vadede şirketin katlanacağı maliyette de büyük oranda iyileşme sağladığı gösterilmiştir. Ek olarak müdahale edilebilecek parametrelerdeki değişimlerin optimalite üzerindeki etkileri de incelenmiştir.

Sahadaki kritik sistemin minimum maliyet ile desteklenebilmesi çok önemli olmakla birlikte kullanıcı memnuniyetini de en üst düzeye çıkartmaktadır. Artan müşteri memnuniyetiyle birlikte potansiyel satışlara da fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

Önerilen politika sayesinde sistem sürekli izlenmekte ve kontrol sağlayan personelin doğru zamanda doğru aksiyon almasını da sağlamaktadır. Böylelikle ürün ömrü uzamakta ve saha verileri de sisteme anlık kazandırılabilir. Çalışma kapsamında bahsi geçen bu avantajların yanında eklenebilecek dezavantajı da vardır. Bölüm 3’te de anlatıldığı gibi yenileme aksiyonunun sistemi iyi duruma getirdiği varsayılarak model kurulmuştur fakat yapılan bakım ve onarımların başarılı olmama olasılığı da vardır.

Daha önce de belirtildiği üzere savunma sanayinde kullanılan kritik sistemlerde maliyet kadar hazır bulunabilirlik de büyük önem arz etmektedir. Gelecek dönemde çalışmayı daha ileri götürmek adına sistemin hazır bulunabilirlik veya güvenilirlik oranlarını arttırmaya yönelik model kurularak yeni bakım politikaları oluşturulabilir. Böyle bir çalışma, kullanıcı için satış sonrası destek faaliyetlerinin de son derece önem kazandığı endüstri dünyasında şirketin özellikle dış pazardaki rekabet gücünü arttırmak için büyük bir fırsat olacaktır. Problemimizle ilgili bu alanda çalışma yapılarak yeni konseptler kurulabileceği değerlendirilmektedir.



## **KAYNAKLAR**

- Alaswad S. & Xiang Y.** A Review on Condition Based Maintenance Optimization Models for Stochastically Deteriorating System. *Reliability Engineering and System Safety*, 157, 54-63, 2017.
- Bengtsson M.** Condition Based Maintenance Systems an Investigation of Technical Constituents and Organizational Aspects. Mlardalen University Licentiate Thesis; 2004.
- Butt, A., Shahin, M., Carpenter, S., Carnahan, J.** Application of Markov Process to Pavement Management Systems at Network Level. 3rd International Conference on Managing Pavements, 1994.
- Büşra Keleş, Salih Tekin, and Niyazi Onur Bakır.** IEEE Transactions On Reliability, Vol. 66, No. 1, March 2017.
- C. Teresa Lam, R. H. Yeh.** Optimal replacement policies for multistate deteriorating systems IEEE Transactions on Reliability, Volume: 43, Issue: 3, September 1994.
- Chan, G. & Asgarpoor, S.** Optimum Maintenance Policy with Markov Processes. *Electric Power Systems Research*, 76, 452–456, 2006.
- Chelbi, Ait-Kadi, and H. Aloui,** “Optimal inspection and preventive maintenance policy for systems with self-announcing and non selfannouncing failures,” *J. Quality Maintenance Eng.*, vol. 14, no. 1, pp. 34–45, 2008.
- Chen ZS, Yang YM, Hu Z.** A technical framework and roadmap of embedded diagnostics and prognostics for complex mechanical systems in prognostics and health management system. *IEEE Transactions on Reliability*, 61(2)314–22, 2012.
- Cholasuke, C., Bhardwa, R., & Antony, J.** The Status of Maintenance Management in UK Manufacturing Organisations: Results From A Pilot Survey. *Journal of Quality in Maintenance Engineer*, 10(1), pp. 5-15, 2004.
- Coetzee, J.L.** Maintenance. Victoria: Trafford Publishing, 2004.

- D. van Oosterom, A. H. Elwany, D. Celebi, and G. J. van Houtum.** “Optimal policies for a delay time model with postponed replacement,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 232, pp. 186–197, 2014.
- Do, P., Voisin, A., Levrat, E., Lung, B.** A Proactive Condition Based Maintenance Strategy with Both Perfect and Imperfect Maintenance Actions. *Reliability Engineering and System Safety*, 133, 22-32, 2015.
- Ferreira, R., Almeida, A., Cavalcante, C.** A Multi-criteria Decision Model to Determine Inspection Intervals of Condition Monitoring Based on Delay Time Analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 94, 905-912, 2009.
- G. A. Klutke and Y. Yang.** “The availability of inspected systems subject to shocks and graceful degradation,” *IEEE Trans. Rel.*, vol. 51, no. 3, pp. 371–374, Sep. 2002.
- Gillespie, A.** Condition Based Maintenance: Theory, Methodology, & Application. *Reliability and Maintainability Symposium*, January 2015.
- H. Christer and W.M.Waller.** “Delay time models of industrial inspection maintenance models,” *Oper. Res. Soc.*, vol. 35, no. 5, pp. 401-406, 1984.
- H. Luss.** “Maintenance policies when deterioration can be observed by inspections,” *Oper. Res.*, vol. 24, no. 2, pp. 359–366, 1976.
- J.H.Chiang & J.Yuan.** Optimal maintenance policy for a Markovian system under periodic inspection *Reliability Engineering & System Safety* Volume 71, Issue 2, February 2001, Pages 165-172, 2001.
- Jiang, Y., Saito, M., Sinha, K.** Bridge Performance Prediction Model Using the Markov Chain. *Transportation Research Record* 1180, 25-32, 1998.
- Kallen, M. & Van Noortwijk, J.** A Study Towards the Application of Markovian Deterioration Processes for Bridge Maintenance Modeling in the Netherlands. *Advances in Safety and Reliability: Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2005)* 27-30, Poland.
- Lee J.** Approaching zero downtime. The Center for Intelligent Maintenance Systems. Harbor Research Pervasive Internet Report; 2003.



- Liliane Pintelon, Alejandro Parodi-Herz, Khairy A. H. Kobbacy, D. N. Prabhakar**  
Murthy Maintenance: An Evolutionary Perspective 10.1007/978-1-84800-011-7\_2, January 2008.
- Masoumi, F.** Development of the Bridge Management System for Turkey by Introducing A Condition Rating Model Based On Damage Types, (Ph.D. Thesis). Middle East Technical University, Ankara, 2014.
- Moore, W. & Starr, A.** An Intelligent Maintenance System For Continuous Costbased Prioritisation of Maintenance Activities. Computers in Industry, 57(6), pp. 595-606, 2006.
- Moubray, J.** Reliability-Centered Maintenance – RCM II (2nd edition). New York: Industrial Press, Inc, 1997.
- Park, G., Heo, J., Lee, S., Yoon, Y.** Generalized Reliability Centered Maintenance Modeling Through Modified Semi Markov Chain in Power Systems. Journal of Electrical Engineering and Technology, 6(1), 25-31, 2011.
- Shin, J., & Jun, H.** On Condition Based Maintenance Policy. Journal of Computational Design and Engineering, 2(2), 119-127, 2015.
- Simeu-Abazi, Z. & Sassine, C.** Maintenance Integration in Manufacturing Systems: From the Modeling Tool to Evaluation. The International Journal of Flexible Manufacturing Systems, 13(2), pp. 267-285, 2001.
- Starr, A.** A Structured Approach to the Selection of Condition Based Maintenance. 5th International Conference on FACTORY 2000 – The Technology Exploitation Process, Cambridge, UK. 1997.
- Y. Jin.** Integration of Stochastic Approaches in the Life Cycle Cost Analysis of Sewer Pipe Applications. International Journal of Production Economics 179, 35-43, 2016.
- Ye, J., Lam, J., Banjevic, D.** A Myopic Policy for Optimal Inspection Scheduling for Condition Based Maintenance. Reliability Engineering and System Safety, 144, 1-11, 2015



## EKLER

EK 1:  $D^H(\tau)$ 'nin Çözümü

$$\begin{aligned}
 D^H(\tau) &= \tau - \{ E[ X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau ] \\
 &\quad + E[ X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau ] \} \\
 &= \tau - \left\{ \int_0^\tau P\{X_{12} > u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} du \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\tau P\{X_{23} > v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} dv \right\}, \quad u, v \leq \tau \\
 &= \tau - \left\{ \int_0^\tau (1 - P\{X_{12} \leq u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}) du \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\tau (1 - P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}) dv \right\}, \quad u, v \leq \tau \\
 &= -\tau + \left\{ \int_0^\tau P\{X_{12} \leq u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} du \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\tau P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} dv \right\}, \quad u, v \leq \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^H(\tau) &= -\tau + \left\{ \int_0^\tau F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) du \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\tau F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv \right\}
 \end{aligned}$$

$$f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) = \frac{d}{du} F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u)$$

$$f_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) = \frac{d}{dv} F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v)$$

$$F_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u)$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X_{12} \leq u | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= \frac{P\{X_{12} \leq u, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}}{P\{X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}} \\
&= \frac{\int_0^u P\{X_{13} > x_1, X_{23} \leq \tau - x_1, X_{12} = x_1\} dx_1}{\int_0^\tau P\{X_{13} > x_2, X_{23} \leq \tau - x_2, X_{12} = x_2\} dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u P\{X_{13} > x_1\} P\{X_{23} \leq \tau - x_1\} P\{X_{12} = x_1\} dx_1}{\int_0^\tau P\{X_{13} > x_2\} P\{X_{23} \leq \tau - x_2\} P\{X_{12} = x_2\} dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-\lambda_{13}x_1} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_1)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x_1} dx_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_{13}x_2} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_2)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x_2} dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})x_1} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_1)}) dx_1}{\int_0^\tau e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})x_2} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_2)}) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-\lambda_1x_1} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x_1)}) dx_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_1x_2} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x_2)}) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u (e^{-\lambda_1x_1} - e^{-\lambda_2\tau} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x_1}) dx_1}{\int_0^\tau (e^{-\lambda_1x_2} - e^{-\lambda_2\tau} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x_2}) dx_2} \\
&= \begin{cases} \frac{1-e^{-\lambda_1u}-\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} u}{1-e^{-\lambda_1\tau}-\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1-\lambda_2) (1-e^{-\lambda_1u})-\lambda_1 e^{-\lambda_2\tau} (1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)u})}{(\lambda_1-\lambda_2) (1-e^{-\lambda_1\tau})-\lambda_1 e^{-\lambda_2\tau} (1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) \\
&= P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{X_{23} \leq v \mid X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y, X_{12} = y\} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^\tau \frac{P\{X_{23} \leq v, X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq v\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + \int_{\tau-v}^\tau \frac{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{P\{X_{13} > y\} P\{X_{23} \leq v\}}{P\{X_{13} > y\} P\{X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + \int_{\tau-v}^\tau f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_{23}v}}{1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + 1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(\tau - v) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + 1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(\tau - v)
\end{aligned}$$

$$f_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{du} F_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) \\
&= \begin{cases} \frac{d}{du} \left[ \frac{1 - e^{-\lambda_1 u} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} u}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right], & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{d}{du} \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 u}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)u})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right], & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} - (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)u}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} (1 - e^{-\lambda_1(\tau - u)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 u} (1 - e^{-\lambda_2(\tau - u)})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$F_{X_{23} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau - v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau - y)}} f_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) dy \\
&\quad + (1 - F_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(\tau - v)) \\
&= \int_0^{\tau - v} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau - y)}} \right) \left( \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} (1 - e^{-\lambda_1(\tau - y)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) dy \\
&\quad + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau - v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \int_0^{\tau - v} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 v}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} dy + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau - v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda_1 v}) (1 - e^{-\lambda_1(\tau - v)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau - v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_1 v} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} v}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_{X_{23} \mid X_{13} < X_{12}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (v) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (y) d(y) \\
&\quad + (1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (\tau - v)) \\
&= \int_0^{\tau-v} \left[ \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 y} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right) \right] d(y) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{(1 - e^{-\lambda_2 v}) \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 y}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} d(y) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right) \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_2 v}) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right) \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_2 v}) + \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)v})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau} F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (u) du \\
&= \begin{cases} \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \frac{\tau^2}{2}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} \tau + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\lambda_1 = \lambda_2$  için,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau F_{X_{23} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv \\ = \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \frac{\tau^2}{2}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \end{aligned}$$

ve  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  için,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau F_{X_{23} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv \\ = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) + \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau} \tau - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \end{aligned}$$

$$D^H(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \frac{2}{\lambda_1} + e^{-\lambda_1 \tau} \left( \frac{2}{\lambda_1} + \tau \right)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \tau - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$